УДК 336.76
EDN: ZQZCGU

Математический анализ финансовых пузырей через фрактальную размерность

Плотников П. В. ✉, Назаров Д. В., Чуева А. А., Ким З. В.

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Постановка задачи. *Финансовые пузыри и кризисы представляют собой сложные явления, связанные с отклонением цен активов от их фундаментальной стоимости, что требует разработки новых подходов к их анализу.* ***Цель работы*** *– исследование финансовых пузырей через методы фрактального анализа, включая расчет фрактальной размерности, для выявления аномалий и прогнозирования рыночных крахов.* ***Используемые методы*** *включают RS-анализ (метод Хёрста) для оценки персистентности временны́х рядов, метод Бокса-счета для определения фрактальной размерности и мультифрактальный анализ для изучения локальных особенностей рыночной динамики.* ***Новизна*** *исследования заключается в комплексном применении фрактального анализа для раннего обнаружения финансовых пузырей, а также в сравнении эффективности различных методов.* ***Результаты*** *показывают, что увеличение фрактальной размерности коррелирует с периодами формирования пузырей, а ее резкие изменения могут служить индикаторами кризисов, что подтверждается примерами кризиса доткомов (2000 г.) и финансового кризиса (2008 г.).* ***Практическая значимость*** *работы заключается в возможности использования предложенного подхода для создания систем раннего предупреждения кризисов, алгоритмической торговли и риск-менеджмента.*

Ключевые слова: *финансовые пузыри, фрактальная размерность, RS-анализ, метод Бокса-счета, мультифрактальный анализ, прогнозирование кризисов*

Актуальность

Финансовый пузырь [1] – это ситуация, когда цена актива значительно превышает его фундаментальную стоимость. Это происходит из-за спекулятивного поведения инвесторов, которые покупают актив в ожидании дальнейшего роста цен, что приводит к «раздуванию» пузыря. Особую опасность представляют сложные производные инструменты, которые могут многократно усиливать спекулятивную активность на сырьевых и товарных рынках [2]. Когда пузырь лопается, цена актива резко падает, что может вызвать кризис на рынке [3]. Кризисы часто сочетают банковские, долговые и валютные компоненты, а их триггером становятся как внутренние дисбалансы (неоптимальная монетарная политика, бюджетные дефициты), так и внешние внезапные кризисы (изменение потоков капитала) [4].

Исследование финансовых пузырей с использованием методов фрактального анализа приобретает особую значимость в условиях современных экономических вызовов, включающих высокую волатильность рынков, появление новых финансовых инструментов (таких, как криптовалюты) и участившиеся кризисные явления. Традиционные экономические модели часто оказываются неэффективными для прогнозирования экстремальных рыночных ситуаций, поскольку не учитывают нелинейную природу финансовых временны́х рядов. При этом, как отмечается в исследованиях по экономической безопасности,

Библиографическая ссылка на статью:
Плотников П. В., Назаров Д. В., Чуева А. А., Ким З. В. Математический анализ финансовых пузырей через фрактальную размерность // Вестник СПбГУТ. 2025. Т. 3. № 2. С. 3. EDN: ZQZCGU
Reference for citation:
Plotnikov P., Nazarov D., Chueva A., Kim Z. Mathematical Analysis of Financial Bubbles through Fractal Dimensionality // Herald of SPbSUT. 2025. Vol. 3. Iss. 2. P. 3. EDN: ZQZCGU

EDN: ZQZCGU
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-2/C03.pdf

глобальные внезапные кризисы существенно снижают устойчивость социально-экономических систем, усиливая риски формирования спекулятивных пузырей [5]. Особую актуальность данное исследование приобретает в свете последних финансовых кризисов, демонстрирующих необходимость разработки более точных инструментов мониторинга и прогнозирования рыночных пузырей. Разработанные в работе методы могут быть использованы регуляторами финансовых рынков, инвестиционными компаниями и индивидуальными трейдерами для:

– раннего обнаружения признаков формирования финансовых пузырей;
– оценки устойчивости различных сегментов финансового рынка;
– разработки более эффективных стратегий риск-менеджмента.

Кроме того, предлагаемый подход особенно востребован для анализа новых классов активов, таких как криптовалюты, рынок которых характеризуется исключительно высокой степенью нелинейности и непредсказуемости. Таким образом, настоящее исследование вносит значимый вклад в развитие современных методов анализа финансовых рынков и отвечает насущным потребностям финансовой аналитики.

Постановка задачи

Для формальной постановки и решения задачи в работе введены обозначения, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Принятые обозначения

Обозначение	Содержание
$X(t)$	Исходный временно́й ряд, например, цены акций или криптовалют за определенный период времени
T	Общее количество точек (дней, часов и т. д.) во всем временно́м ряду
n	Длина одного подпериода при делении временно́го ряда на части для анализа методом Хёрста
m	Количество подпериодов, на которые разбивается временно́й ряд для анализа
$R(n)$	Размах значений временно́го ряда в одном подпериоде – разница между максимальным и минимальным значениями
$S(n)$	Среднее отклонение цен внутри подпериода – показатель волатильности
R/S	Нормированный размах – отношение размаха к стандартному отклонению, используется для оценки устойчивости динамики ряда
H	Коэффициент Хёрста – мера долгосрочной зависимости временно́го ряда, указывает на наличие трендов или случайности
D	Фрактальная размерность (ФР) – количественная характеристика сложности и изрезанности графика временно́го ряда
ϵ	Размер коробки, используемой при покрытии графика временно́го ряда в методе Бокса-счета
$N\ (\epsilon)$	Количество коробок определенного размера, необходимое для полного покрытия графика временно́го ряда
q	Порядок момента, используемый при построении мультифрактального анализа для учета разных масштабов изменчивости
$Z(q,\epsilon)$	Обобщенные моменты – величины, характеризующие локальные особенности временно́го ряда на разных масштабах
$\tau(q)$	Скейлинговая функция – показывает, как обобщенные моменты зависят от масштаба в мультифрактальном анализе
$f(\alpha)$	Мультифрактальный спектр – характеристика распределения локальных особенностей временно́го ряда
α	Показатель Гёльдера – описывает гладкость или регулярность временно́го ряда в конкретной точке
$\Delta\alpha$	Ширина мультифрактального спектра – показатель неоднородности структуры временно́го ряда

В условиях усложнения финансовых рынков и их подверженности кризисным явлениям возникает необходимость разработки новых, более эффективных методов выявления и анализа финансовых пузырей. Несмотря на существование различных подходов к оценке рыночной динамики, большинство традиционных методов обладает существенными ограничениями.

Ограниченность классических моделей: линейные модели (например, ARIMA (*аббр. от англ.* Autoregressive Integrated Moving Average – авторегрессионная интегрированная скользящая средняя), GARCH (*аббр. от англ.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity – обобщенная авторегрессионная условная гетероскедастичность)) не учитывают нелинейные зависимости и сложные паттерны поведения цен; фундаментальный анализ часто запаздывает с идентификацией пузырей из-за трудностей в оперативной оценке «справедливой стоимости» активов.

Проблемы применения существующих подходов к анализу пузырей: статистические тесты на наличие пузырей (например, SADF (*аббр. от англ.* Supremum Augmented Dickey – Fuller – супремальный расширенный тест Дики – Фуллера), GSADF (*аббр. от англ.* Generalized Supremum Augmented Dickey – Fuller – обобщенный супремальный расширенный тест Дики – Фуллера)) демонстрируют низкую точность на коротких временны́х горизонтах; показатели волатильности не всегда адекватно отражают процессы формирования рыночных аномалий.

Недостаточная изученность фрактальных свойств: требуется систематическое исследование взаимосвязи между динамикой фрактальных характеристик и фазами формирования пузырей; отсутствует единая методика выбора оптимальных параметров фрактального анализа для разных классов активов. В связи с этим основная задача исследования заключается в разработке комплексного подхода к выявлению финансовых пузырей на основе анализа ФР, который должен:

– обеспечивать раннее обнаружение признаков формирования пузырей;
– позволять оценивать степень «перегретости» рынка;
– быть применимым к различным типам финансовых активов (акции, валюты, криптовалюты);
– обладать прогностической способностью относительно моментов «схлопывания» пузырей.

Для решения этой задачи необходимо:

– провести сравнительный анализ методов расчета ФР;
– разработать критерии идентификации пузырей на основе динамики фрактальных характеристик;
– верифицировать предложенный подход на данных других известных финансовых пузырей;
– оценить прогностическую способность метода по сравнению с традиционными подходами.

Решение данной задачи позволит создать более надежный инструмент для мониторинга финансовых рынков и своевременного предупреждения о кризисных явлениях.

Фрактальная размерность и ее роль в анализе финансовых данных

ФР – это количественная мера, которая позволяет оценить сложность и самоподобие временны́х рядов. В контексте финансовых данных, таких как курсы акций или валют, она помогает выявить скрытые закономерности и аномалии, такие как пузыри или крахи. К преимуществами ФР можно отнести:

– выявление скрытых структур: ФР позволяет обнаружить сложные и нелинейные закономерности в данных;
– раннее предупреждение: изменения ФР могут сигнализировать о надвигающихся кризисах;
– универсальность: ФР применима к различным типам финансовых данных (акции, валюты, криптовалюты и т. д.).

Рассмотрим основные методы расчета ФР.

Метод Хёрста (RS-анализ масштабированного размаха) был разработан британским гидрологом Гарольдом Эдвином Хёрстом для анализа долгосрочной зависимости во временны́х рядах и широко используется в финансовой математике для изучения устойчивости и персистентности рынков [6, 7]. Применение метода включает следующие шаги:

Шаг 1. Разделение временно́го ряда $X(t)$ длины T на m непересекающихся подпериодов длины n, где $n = \frac{T}{m}$.

Шаг 2. Расчет накопленного отклонения от среднего значения для каждого подпериода k:

$$Y(t,k) = \sum_{i=1}^{t} \left(X(i,k) - \underline{X}_k\right),$$

где $k = 1, 2, \ldots, m$; $\underline{X}_k$ – среднее значение временно́го ряда в подпериоде k.

Шаг 3. Расчет размаха (Range, $R(n)$) для каждого подпериода k:

$$R(n) = \left(Y, (t, k)\right) - \left(Y(t, k)\right).$$

Шаг 4. Расчет стандартного отклонения $S(n)$ для каждого подпериода k:

$$S(n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X(i, k) - \underline{X}_k)^2}.$$

Шаг 5. Нормировка размаха ($\frac{R(n)}{S(n)}$), который рассчитывается для каждого подпериода k.

Шаг 6. Оценка коэффициента Хёрста H (оценивается как наклон в логарифмической шкале):

$$\log \log \left(\frac{R(n)}{S(n)}\right) = H * \log \log (n) + C,$$

где C – константа.

ФР D связана с коэффициентом Хёрста следующим образом:

$$D = 2 - H,$$

из чего можно сделать следующие выводы:
если $H > 0{,}5$, ряд обладает долгосрочной зависимостью (персистентностью);
если $H < 0{,}5$, ряд антиперсистентен (имеется тенденция к изменению направления);
если $H = 0{,}5$, ряд является случайным (например, броуновское движение).

Метод Хёрста позволяет выявить долгосрочные зависимости в финансовых временны́х рядах, что удобно для прогнозирования трендов и выявления аномалий, таких как пузыри [8].

Метод Бокса-счета (Box-counting) – один из самых популярных методов расчета ФР, основанный на покрытии объекта (в данном случае временно́го ряда) «коробками» разного размера и подсчете количества «коробок», необходимых для покрытия. Применение метода включает следующие шаги:

Шаг 1. Покрытие временно́го ряда: временно́й ряд покрывается сеткой из квадратных «коробок» размера ϵ.

Шаг 2. Подсчет числа коробок: подсчитывается количество коробок $N(\epsilon)$, которые содержат хотя бы одну точку временно́го ряда.

Шаг 3. Изменение размера коробок: процедура повторяется для различных размеров коробок ϵ.

Шаг 4. Оценка ФР как наклона в логарифмической шкале:

$$D = \frac{\log(N(\epsilon))}{\mathrm{Log}(\frac{1}{\epsilon})},$$

следовательно, чем сложнее и «изрезаннее» временно́й ряд, тем больше значение D.

Метод Бокса-счета позволяет оценить сложность временно́го ряда, что удобно для выявления периодов повышенной волатильности или нестабильности на финансовых рынках [9].

Мультифрактальный анализ является обобщением фрактального анализа и позволяет учитывать локальные изменения в структуре временно́го ряда. В отличие от простой ФР мультифрактальный анализ рассматривает спектр размерностей, что делает его более гибким инструментом для анализа сложных данных. Применение метода включает следующие шаги:

Шаг 1. Разделение временно́го ряда на небольшие интервалы.

Шаг 2. Расчет локальных мер: для каждого интервала вычисляется локальная мера μ_i (например, волатильность или амплитуда изменений).

Шаг 3. Построение мультифрактального спектра: на основе метода моментов строится мультифрактальный спектр $f(\alpha)$, который описывает распределение размерностей, для чего вычисляются обобщенные моменты $Z(q, \epsilon)$:

$$Z(q, \epsilon) = \sum_i \mu_i^q,$$

где q – порядок момента.
Далее определяется скейлинговая функция $\tau(q)$:

$$Z(q, \epsilon) \sim \epsilon^{\tau(q)}.$$

Мультифрактальный спектр $f(\alpha)$ связан с $\tau(q)$ через преобразование Лежандра:

$$\alpha = \frac{d\tau(q)}{dq}, f(\alpha) = q * \alpha - \tau(q),$$

откуда следует, что, во-первых, ширина спектра $\Delta\alpha$ характеризует степень мультифрактальности, и во-вторых, чем шире спектр, тем более сложной и неоднородной является структура временно́го ряда.

Мультифрактальный анализ позволяет выявить сложные структуры в финансовых данных, такие как локальные всплески волатильности или скрытые закономерности, которые могут быть связаны с формированием пузырей или крахов [10].

Таблица 2. Сравнительная характеристика методов расчета ФР

Метод	Преимущества	Недостатки
Метод Хёрста	Простота реализации, интерпретации долгосрочной зависимости	Чувствительность к выбору длины подпериодов
Метод Бокса-счета	Универсальность, применимость к различным типам данных	Требует больших вычислительных ресурсов для длинных рядов
Мультифрактальный анализ	Учет локальных изменений, высокая точность для сложных данных	Сложность реализации и интерпретации результатов

Рассмотрим применение трех методов расчета ФР для анализа временны́х рядов на примере временно́го ряда цен на акции.

Метод Хёрста. Пусть у нас есть временно́й ряд цен на акции длиной $T = 1000$ дней. Разбиваем его на $m = 10$ подпериодов по $n = 100$ дней каждый. Для каждого подпериода вычисляем накопленное отклонение, размах и стандартное отклонение. Затем строим график зависимости $\log(R/S)$ от $\log(n)$ и находим наклон, который будет коэффициентом Хёрста H.

Метод Бокса-счета. Для того же временно́го ряда мы покрываем его сеткой с размерами коробок $\epsilon = 10, 20, 50, 100$. Для каждого ϵ подсчитываем количество коробок $N(\epsilon)$, содержащих точки ряда. Затем строим график зависимости $\log(N(\epsilon))$ от $\log(1/\epsilon)$ и находим наклон, который будет ФР D.

Мультифрактальный анализ. Для временно́го ряда мы вычисляем локальные меры μ_i (например, волатильность на интервалах длиной 10 дней). Затем для различных значений q (например,

EDN: ZQZCGU
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-2/C03.pdf

$q = -2, -1, 0, 1, 2$) вычисляем обобщенные моменты $Z(q, \epsilon)$ и строим скейлинговую функцию $\tau(q)$. Наконец, используя преобразование Лежандра, получаем мультифрактальный спектр $f(\alpha)$.

ФР является эффективным инструментом для анализа финансовых рынков, особенно в контексте выявления аномалий, таких как финансовые пузыри, крахи и периоды повышенной нестабильности. В отличие от традиционных методов анализа, которые часто основываются на линейных моделях и предположениях о нормальном распределении данных, ФР позволяет учитывать нелинейные и сложные структуры, характерные для финансовых временны́х рядов. Рассмотрим подробнее, как она может быть применена для выявления аномалий на финансовых рынках.

Применение фрактальной размерности для анализа финансовых пузырей

ФР позволяет количественно оценить сложность и хаотичность временны́х рядов, что особенно удобно для анализа периодов нестабильности. Рассмотрим подробнее, как ФР может быть использована для анализа финансовых пузырей.

Выявление финансовых пузырей. В периоды формирования пузыря временно́й ряд цен становится более сложным и «изрезанным» из-за увеличения волатильности и нерегулярности ценовых движений. ФР позволяет количественно оценить эту сложность. Например, резкий рост ФР временно́го ряда может указывать на начало формирования пузыря.

В нормальных условиях рынок демонстрирует определенную степень упорядоченности, но в периоды пузырей его структура меняется, становясь более хаотичной, что отражается в увеличении ФР. Например, перед кризисом доткомов (1998–2000 гг.) временны́е ряды цен акций технологических компаний стали заметно сложнее и нерегулярнее. Анализ ФР мог бы выявить этот период как аномалию, предупреждая о возможном крахе.

Прогнозирование крахов. Крах рынка – это резкое и значительное падение цен на активы, часто сопровождающееся паникой среди инвесторов и массовой продажей активов. Крахи могут быть вызваны лопнувшими пузырями, экономическими кризисами или внешними внезапными кризисами.

Перед рыночным крахом часто наблюдается рост ФР, что отражает усиление хаотичности и нестабильности. В такие периоды ценовые временны́е ряды становятся более сложными и нерегулярными из-за повышенной волатильности и непредсказуемости рыночных движений. Например, перед финансовым кризисом 2008 г. фрактальный анализ мог бы выявить увеличение нерегулярности в ценах на недвижимость и акции, указывая на нарастающую нестабильность.

ФР может служить ранним индикатором кризиса. Если ее значение превышает определенный порог, это сигнализирует о высокой вероятности краха. Так, перед кризисом 2008 г. анализ ФР ипотечных облигаций и фондовых индексов мог бы заранее выявить рост хаотичности, предупреждая инвесторов о надвигающихся рисках. Этот подход позволяет не только фиксировать изменения в рыночной структуре, но и оценивать степень ее неустойчивости, что делает фрактальный анализ полезным инструментом в прогнозировании финансовых потрясений.

Сравнение различных рынков. Разные финансовые рынки (например, фондовые, валютные, товарные) имеют различную степень сложности и устойчивости. Сравнение ФР рынков позволяет оценить, какие из них более подвержены рискам пузырей и крахов. Для валютных рынков фрактальный анализ эффективно выявляет точки потери устойчивости, что особенно актуально для развивающихся экономик с высокой волатильностью [11].

ФР служит важным показателем для оценки сложности и устойчивости финансовых рынков. Рынки с высокой ФР, такие как криптовалютный, отличаются повышенной волатильностью и нестабильностью, что отражается в их сложной и нерегулярной динамике. Напротив, рынки с низкой ФР, например, государственных облигаций, демонстрируют более устойчивое и предсказуемое поведение [12].

Сравнение ФР различных рынков позволяет выявлять наиболее уязвимые сегменты. Если в одном секторе она существенно выше, это может сигнализировать о накоплении рисков. Например, значительное увеличение ФР на рынке акций технологических компаний по сравнению с рынком коммунальных услуг может указывать на формирование переоцененности и потенциального пузыря в технологическом секторе. Сравнение ФР рынка криптовалют (например, Bitcoin) и рынка золота показывает, что криптовалюты имеют более высокую ФР, что свидетельствует об их большей нестабильности и подверженности пузырям. Таким образом, фрактальный анализ помогает не только оценивать текущее состояние рынков, но и выявлять скрытые угрозы для финансовой стабильности.

Кроме того, ФР может применяться для:

– анализа волатильности рынка: в периоды высокой волатильности временны́е ряды становятся более сложными, что отражается в увеличении ФР;

– оценки эффективности рынка: согласно гипотезе эффективного рынка, цены на активы должны отражать всю доступную информацию, однако если ФР временно́го ряда высока, это может указывать на неэффективность рынка, так как сложность ряда свидетельствует о наличии скрытых закономерностей;

– прогнозирования трендов: например, если ФР временно́го ряда снижается, это может указывать на стабилизацию рынка и формирование устойчивого тренда.

Приведем примеры практического использования ФР.

Пример 1. Кризис доткомов 2000 г. В конце 1990-х гг. наблюдался резкий рост цен на акции доткомкомпаний, что привело к формированию финансового пузыря. Пик кризиса пришелся на 2000 г., когда пузырь лопнул, и цены обрушились на 70–80 %. Падение продолжалось до 2002 г., затронув не только технологический сектор, но и всю мировую экономику. В результате временны́е ряды цен акций технологических компаний стали более сложными и нерегулярными. ФР резко увеличилась, что могло служить предупреждающим сигналом о надвигающемся крахе.

Пример 2. Финансовый кризис 2008 г. Был вызван лопнувшим пузырем на рынке недвижимости и ипотечных облигаций. Перед кризисом временны́е ряды цен на недвижимость и индексы акций стали более хаотичными. ФР увеличилась, что могло быть использовано для прогнозирования кризиса.

Пример 3. Рынок криптовалют (Bitcoin) 2017–2018 гг. В 2017 г. цена Bitcoin резко выросла, достигнув исторического максимума почти 20 000 долларов США в декабре 2017 г., после чего произошел обвал. К декабрю 2018 г. цена упала до 3 000 долларов США, потеряв около 85 % своей стоимости.

Преимущества и ограничения использования фрактальной размерности

ФР является ценным инструментом для анализа финансовых рынков благодаря своей способности выявлять аномалии на ранних стадиях. Это особенно важно при обнаружении формирующихся пузырей или кризисов, так как рост ФР часто сигнализирует о нарастающей нестабильности. Еще одним ключевым преимуществом ФР является ее универсальность – метод применим к различным типам финансовых данных, включая цены акций, валютные курсы и криптовалюты. Кроме того, ФР учитывает сложные и нелинейные структуры в данных, что делает ее особенно полезной для анализа высоковолатильных рынков, где традиционные методы могут оказаться менее эффективными.

Однако применение ФР имеет ряд ограничений, главным из которых является ее чувствительность к выбору параметров, таких как длина подпериодов в методе Хёрста, что может влиять на надежность результатов. Кроме того, ФР не всегда дает исчерпывающую интерпретацию рыночных процессов, поэтому ее рекомендуется использовать в сочетании с другими методами, такими как фундаментальный анализ, технические индикаторы или алгоритмы машинного обучения. Комплексный подход позволяет минимизировать риски ошибочных выводов и повысить точность прогнозирования рыночной динамики.

Таким образом, несмотря на некоторые ограничения, ФР остается действенным инструментом для анализа финансовых рынков, особенно при выявлении скрытых закономерностей и предупреждении о потенциальных кризисах.

Выводы

Использование ФР для анализа финансовых пузырей представляет собой эффективный инструмент, который позволяет выявлять аномалии на рынках и прогнозировать кризисы. Разработка нового индикатора на основе ФР может стать важным шагом в создании более устойчивых и надежных моделей для анализа финансовых рынков. Полученные результаты подтверждают потенциал фрактального подхода в выявлении скрытых закономерностей рыночной динамики, однако для повышения точности и адаптивности метода требуются дополнительные исследования.

EDN: ZQZCGU
URL: https://vestnik-sut.ru/2025-2/C03.pdf

Литература

1. Шихалиева Д. С., Беляева С. В. Траектория экономических кризисов в России в период становления и развития рыночной экономики: оценка, эволюция, управление // Вестник Университета. 2021. № 12. DOI: 10.26425/1816-4277-2021-12-144-150. EDN: ULTXXW
2. Плотников А. В., Харламов А. В. Направления нейтрализации негативного влияния неэкономических шоков на реальный сектор экономики России // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. 2023. № 1 (139). EDN: QQPSKE
3. Чиркова Е. В. Теории финансовых пузырей // Корпоративные финансы. 2010. Т. 4. № 3 (15). С. 63–72. EDN: NBNQXD
4. Кошелев В. Л., Кошелев И. В. Иррациональные трейдеры на финансовых рынках // Актуальные вопросы экономического развития регионов: Материалы Международной научно-практической конференции (Пятигорск, 8 июня 2013 г.). Пятигорск: ООО «Рекламно-информационное агентство на КМВ», 2013. С. 398–405. EDN: TRPANP
5. Peters E. E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. New York: John Wiley & Sons, 1994.
6. Зиненко А. В. R/S анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. 2012. № 3 (21). С. 24–30. EDN: PEOSKN
7. Grech D., Mazur Z. Can One Make any Crash Prediction in Finance Using the Local Hurst Exponent Idea? // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. Vol. 336. Iss. 1–2. PP. 133–145. DOI: 10.1016/j.physa.2004.01.018
8. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., et al. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002. Vol. 316. Iss. 1–4. PP. 87–114. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3. EDN: MCPRUN
9. Jiang Z. Q., Xie W. J., Zhou W. X., Sornette D. Multifractal Analysis of Financial Markets: A Review // Reports on Progress in Physics. 2019. Vol. 82. Iss. 12. P. 125901. DOI: 10.1088/1361-6633/ab42fb. EDN: DARTOR
10. Мансуров А. К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа // Проблемы прогнозирования. 2008. № 1 (106). С. 145–158. EDN: ICITYD
11. Wang J. N., Liu H. C., Hsu Y. T. Time-of-Day Periodicities of Trading Volume and Volatility in Bitcoin Exchange: Does the Stock Market Matter? // Finance Research Letters. 2020. Vol. 34. P. 101243. DOI: 10.1016/j.frl.2019.07.016. EDN: TJDFFX

Статья поступила 23 **апреля** 2025 **г.**
Одобрена после рецензирования 20 **мая** 2025 **г.**
Принята к публикации 29 **мая** 2025 **г.**

Информация об авторах

Плотников Павел Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. Email: plotnikov.pv@sut.ru

Назаров Дмитрий Вячеславович – студент группы ИКПИ-24 Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Чуева Анастасия Александровна – студент группы ИКПИ-24 Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Ким Злата Валерьевна – студент группы ИКПИ-24 Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Mathematical Analysis of Financial Bubbles through Fractal Dimensionality

P. Plotnikov ✉, D. Nazarov, A. Chueva, Z. Kim

The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Purpose. *Financial bubbles and crises are complex phenomena related to the deviation of asset prices from their fundamental value, which requires the development of new approaches to their analysis. The aim of the paper is to investigate financial bubbles through fractal analysis techniques, including fractal dimension calculation, to identify anomalies and predict market crashes.* ***Methods.*** *The methods used include RS analysis (Hurst method) to assess the persistence of time series, Box-count method to determine the fractal dimension and multifractal analysis to study the local features of market dynamics.* ***Novelty****. The novelty of the study lies in the comprehensive application of fractal analysis for early detection of financial bubbles, as well as in comparing the effectiveness of different methods.* ***Results.*** *The results show that the increase in fractal dimension correlates with the periods of bubble formation, and its sharp changes can serve as indicators of crises, which is confirmed by the examples of the dot-com crisis (2000) and the financial crisis (2008).* ***Practical relevance.*** *The significance of the work lies in the possibility of using the proposed approach to create systems of early warning of crises, algorithmic trading and risk management.*

Key words: *financial bubbles, fractal dimension, RS-analysis, Box score method, multifractal analysis, crisis forecasting*

Information about Authors

Plotnikov Pavel – Ph. D. of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics (The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications). E-mail: plotnikov.pv@sut.ru

Nazarov Dmitry – a Third-Year Student (The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications)

Chueva Anastasia – a Third-Year Student (The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications)

Kim Zlata – a Third-Year Student (The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications)