

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 243



Москва 2025

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 243 (№ 6, 2025)

Дата публикации 9 июня 2025 г.

Издается с 1995 года
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редактор-составитель выпуска
Научный редактор выпуска
Компьютерная вёрстка

А. С. Бондарев
А. В. Овчинников
А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN (печатная версия)	0233-6723
ISSN (электронная версия)	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 243

МАТЕРИАЛЫ ВОРОНЕЖСКОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
ВЕСЕННЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ—XXXVI»

Воронеж, 30 апреля — 4 мая 2025 г.

Часть 1



Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Реваз Валерианович Гамкрелидзе (некролог)	3
Применение метода Пикара к решению задачи Коши для некоторых дробных дифференциальных уравнений (Н. А. Антонов)	5
Контрастные структуры в системе реакция-диффузия с разномасштабными коэффициентами диффузии и разрывными функциями реакции (К. А. Коцюбинский)	11
Периодические бегущие волны уравнения Курамото—Сивашинского (А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов)	25
Формирование погранслоного решения в задаче для системы уравнений реакция-диффузия в ограниченном объеме (Н. Т. Левашова)	38
О периодических решениях с пограничным слоем в задаче с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием (Е. И. Никулин)	45
Формирование фронта в задаче реакция-диффузия с нелинейной диффузией (А. Р. Мазмудов, А. О. Орлов, В. Т. Волков)	56
О неотрицательных решениях систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при нечетких начальных данных и неоднородностях (В. Л. Хацкевич)	63
Нормальность в вещественных AW*-алгебрах (С. А. Чепухалин, А. А. Рахимов)	78
Особенности решения вида движущегося фронта двумерной задачи с разрывной кубической нелинейностью (Е. А. Чунжук)	81
Управление динамическими системами при дефиците информации. Гарантированный подход. I. Алгоритмы оценивания (В. И. Ширяев)	90



Реваз Валерианович
ГАМКРЕЛИДЗЕ
(4 февраля 1927 — 5 мая 2025)

С прискорбием сообщаем, что 5 мая 2025 года ушел из жизни главный редактор Редакционной коллегии информационных изданий ВИНТИ РАН по математике, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН Реваз Валерианович Гамкрелидзе.

Р. В. Гамкрелидзе родился 4 февраля 1927 г. в Кутаиси. В 1945 г. поступил на физико-математический факультет Тбилисского университета, но после первого курса перевёлся на механико-математический факультет МГУ, который окончил в 1950 г. под научным руководством Л. С. Понтрягина. В кандидатской диссертации Р. В. Гамкрелидзе вычислил все циклы Черна комплексных алгебраических многообразий (1953 г.). Докторская диссертация (1960 г.) посвящена разработке математической теории оптимальных процессов; за создание этой теории Р. В. Гамкрелидзе совместно с Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским и Е. Ф. Мищенко в 1962 г. был удостоен Ленинской премии.

После защиты кандидатской диссертации Р. В. Гамкрелидзе начал работать в отделе обыкновенных дифференциальных уравнений Математического института им. В. А. Стеклова под руководством академика Л. С. Понтрягина. Именно здесь Реваз Валерианович получил свои главные научные результаты в теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, теории оптимальных процессов и автоматического регулирования. В 1988-1997 гг. Р. В. Гамкрелидзе занимал должность заведующего отделом. В 1981 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению математики, а в 2003 г. — академиком РАН.

Р. В. Гамкрелидзе работал в ВИНТИ с момента основания института; с 1961 г. являлся главным редактором информационных изданий ВИНТИ по математике, в течение многих лет возглавлял Главную редакционную коллегию информационных изданий ВИНТИ. В 1963 г. он основал широко известную серию математических монографий и обзоров, выходящую в свет в нашей стране под названием «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения», а за рубежом — под названием «Encyclopaedia of Mathematics». По инициативе и при непосредственном участии Р. В. Гамкрелидзе было создано несколько авторитетных российских и международных научных журналов по математике, в том числе и журнал «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры».

Память о Р. В. Гамкрелидзе, замечательном учёном, неутомимом организаторе науки, человеке глубочайшей эрудиции, исключительной порядочности и отзывчивости навсегда сохранится в сердцах его близких, коллег и учеников.

Редакционная коллегия



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 5–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-5-10

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПИКАРА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2025 г. Н. А. АНТОНОВ

Аннотация. В работе применяется метод Пикара к решению задачи Коши для ряда уравнений с дробной производной типа Атаньяны—Балеану. Построена схема вычисления последовательных приближений решения и доказана ее сходимость.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными, дробная производная Атаньяны—Балеану, метод Пикара.

APPLICATION OF PICARD'S METHOD TO CAUCHY PROBLEM SOLUTION TO SOME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2025 N. A. ANTONOV

ABSTRACT. In this paper, we apply the Picard method for solving the Cauchy problem for some fractional differential equations with Atangana–Baleanu fractional derivative. An iterative scheme is derived and its convergence is proved.

Keywords and phrases: fractional differential equation, Atangana–Baleanu fractional derivative, Picard method.

AMS Subject Classification: 34A08

1. Введение. Дифференциальные уравнения с дробными производными хорошо описывают многие физические процессы (см. [1, 6, 11]). Детальное изложение дробного исчисления приведено в [1, 6, 10, 12]; обзор методов решения подобных дифференциальных уравнений приведен в [1, 10–12].

В последние годы были введены некоторые новые определения дробных производных на основе ядер соответствующих интегральных операторов без сингулярностей: производная Капуто—Фабрицио и ее обобщенный вариант — производная Атаньяны—Балеану (см. [4, 14]). Важность этих производных объясняется тем, что ряд моделей, описывающих тепловые процессы, не могут быть описаны с помощью классических дробных дифференциальных операторов (см. [4, 5, 8]), в то время как свойства производных Атаньяны—Балеану являются более подходящими для этого (см. [2, 3]).

В работе рассматривается метод последовательных приближений Пикара для построения решения соответствующей задачи Коши (см. [7, 13]). С его помощью можно найти решения для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, обходясь меньшим объемом вычислений, но сохраняя при этом достаточную точность. Одним из таких уравнений является уравнение Риккати, имеющее большое значение при решении задач Гросса—Питаевского, Бюргера—Кортвега—де Фриза, Рамануджана и ряда других (см. [9]).

2. Основные понятия.

Определение 1. Пусть $v \in H^1(a, b)$ и $0 < \alpha < 1$. Оператором дробного дифференцирования Атаньяны—Балеану в смысле Капуто называется оператор

$$(T^\alpha v)(x) = ({}^{ABC}D_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{\beta(\alpha)}{1-\alpha} \int_{a+}^x v'(s) E_\alpha \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha} (x-s)^\alpha \right] ds, \quad a < x < b,$$

где $\beta(\alpha)$ — такая нормирующая функция, что $\beta(0) = \beta(1) = 1$, и $E_\alpha(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Определение 2. Пусть $v \in L^1(a, b)$. Оператором дробного интегрирования Римана—Лиувилля называется оператор

$$({}^{RL}I_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^x v(s) (x-s)^{\alpha-1} ds.$$

Определение 3. Пусть $v \in L^1(a, b)$. Оператором дробного интегрирования Атаньяны—Балеану называется оператор

$$({}^{AB}I_{a+}^\alpha v)(x) = \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} v(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} {}^{RL}I_{a+}^\alpha v(x).$$

Лемма 1. Для дробной производной Атаньяны—Балеану в смысле Капуто справедлива формула Ньютона—Лейбница:

$$({}^{AB}I_{a+}^\alpha ({}^{ABC}D_{a+}^\alpha v))(x) = v(x) - v(a).$$

3. Постановка задачи и метод Пикара. Для $v \in H^1(0, 1)$ и $a = 0$ рассмотрим задачу Коши:

$$T^\alpha v(x) = g(x, v(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = \mu. \quad (1)$$

Применив оператор ${}^{AB}I_{a+}^\alpha$ к левой и правой частям уравнения (1), получим

$$v(x) - \mu = {}^{AB}I_{a+}^\alpha g(x, v(x)). \quad (2)$$

Введем последовательные приближения Пикара для уравнения (2):

$$v_{m+1}(x) = \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x)) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(s, v_m(s)) (x-s)^{\alpha-1} ds, \quad (3)$$

где $m \in \mathbb{N}$, $v_0 = \mu$. Добавляя и вычитая выражение

$$\frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x),$$

получим:

$$\begin{aligned} v_{m+1}(x) = & \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x)) + \\ & + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(s, v_m(s)) (x-s)^{\alpha-1} ds + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds - \\ & - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x) - \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x). \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} v_{m+1}(x) = & \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} \left(g(x, v_m(x)) - T^\alpha v_m(x) \right) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x) + \\ & + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s)) \right) (x-s)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$\mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds = v_m(x).$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds &= \left({}^{RL}I_{0+}^\alpha (T^\alpha v_m(s)) \right)(x), \\ \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \left({}^{RL}I_{0+}^\alpha (T^\alpha v_m) \right)(x) &= \mu + \left({}^{AB}I_{0+}^\alpha (T^\alpha v_m) \right)(x). \end{aligned}$$

Тогда по правилу Ньютона—Лейбница

$$\mu + \left({}^{AB}I_{0+}^\alpha (T^\alpha v_m) \right)(x) = \mu + \left({}^{AB}I_{0+}^\alpha ({}^{ABC}D_{0+}^\alpha v_m) \right)(x) = v_m(x). \quad \square$$

Сгруппированное выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_{m+1}(x) = & v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} \left(g(x, v_m(x)) - T^\alpha v_m(x) \right) - \\ & - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s)) \right) (x-s)^{\alpha-1} ds. \quad (4) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим задачу Коши (1) в следующей форме:

$$F(x, v(x), \alpha) = T^\alpha v(x) - g(x, v(x)) = 0. \quad (5)$$

Пусть $h \in (0, +\infty)$. Перепишем выражение (5) в виде

$$hF(x, v(x), \alpha) - T^\alpha v(x) + T^\alpha v(x) = 0.$$

Положим $hF(x, v(x), \alpha) - T^\alpha v(x) = g_1(x, v(x), h, \alpha)$. Тогда

$$T^\alpha v(x) = g_1(x, v(x), h, \alpha).$$

Следовательно,

$$g_1(x, v(x), h, \alpha) = T^\alpha v(x) - hF(x, v(x), \alpha). \quad (6)$$

Применим к полученному уравнению схему (4):

$$\begin{aligned} v_{m+1}(x) = & v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} \left(g_1(x, v_m(x), h, \alpha) - T^\alpha v_m(x) \right) - \\ & - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(T^\alpha v_m(s) - g_1(s, v_m(s), h, \alpha) \right) (x-s)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Произведем замену (6):

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)} \left(T^\alpha v_m(x) - hF(x, v_m(x), \alpha) - T^\alpha v_m(x) \right) - \\ - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(T^\alpha v_m(s) - T^\alpha v_m(s) + hF(s, v_m(s), \alpha) \right) (x-s)^{\alpha-1} ds.$$

Сократим и заменим $F(x, v_m(x), \alpha)$ на $T^\alpha v_m(x) - g(x, v_m(x))$:

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) - \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} \cdot \left(T^\alpha v_m(x) - g(x, v_m(x)) \right) - \\ - \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s)) \right) (x-s)^{\alpha-1} ds.$$

Преобразуем каждое слагаемое в получившемся выражении:

$$v_m(x) - \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} T^\alpha v_m(x); \\ - \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x T^\alpha v_m(s) (x-s)^{\alpha-1} ds = \\ = - \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)} \left({}^{RL}I_{0+}^\alpha (T^\alpha v_m) \right)(x) = - \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)} \left({}^{RL}I_{0+}^\alpha ({}^{ABC}D_{0+}^\alpha v_m) \right)(x).$$

Сложив два предыдущих слагаемых, находим

$$\frac{-h\alpha}{\beta(\alpha)} \left({}^{RL}I_{0+}^\alpha ({}^{ABC}D_{0+}^\alpha v_m) \right)(x) + \frac{-h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} {}^{ABC}D_{0+}^\alpha v_m(x) = \\ = \left[{}^{ABC}D_{0+}^\alpha v_m(x) \equiv w_m(x) \right] = \frac{-h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} w_m(x) + \frac{-h\alpha}{\beta(\alpha)} ({}^{RL}I_{0+}^\alpha w_m)(x) = \\ = -h \cdot \left(\frac{(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} w_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} ({}^{RL}I_{0+}^\alpha w_m)(x) \right) = \\ = \left[\text{по определению 3} \right] = -h \cdot ({}^{AB}I_{0+}^\alpha w_m)(x) = -h \cdot \left({}^{AB}I_{0+}^\alpha ({}^{ABC}D_{0+}^\alpha w_m) \right)(x) = \\ = -h \cdot (v_m(x) - \mu).$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Последовательные приближения Пикара (3) можно записать в виде

$$v_{m+1}(x, h) = h\mu + (1-h)v_m(x, h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x, h)) + hIv_m(x), \quad (7)$$

где

$$Iv(x) := \frac{\alpha}{\beta(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(s, v(s, h)) (x-s)^{\alpha-1} ds,$$

$h \in (0, +\infty)$.

Полученные последовательные приближения принимают вид классических приближений Пикара (3) при $h = 1$. При $h < 1$ итерации замедляются и радиус сходимости расширяется (при $h > 1$ наоборот). При достаточно малом h сходимость можно гарантировать для любых липшицевых функций $g(x, v)$. Таким образом, параметр h следует рассматривать как регулятор радиуса сходимости: чем меньше данный параметр, тем надежнее метод (но возможна более медленная сходимость).

Теорема 2. Если $v \in H^1(0, 1)$ и $g(x, v)$ является гладкой и липшицевой по v с константой

$$L < \frac{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha) + 1},$$

то последовательные приближения (7) образуют фундаментальную последовательность в $H^1(0, 1)$, сходящуюся к решению задачи Коши (1) при $t \rightarrow +\infty$, причем это решение единственно.

Доказательство. Без ограничения общности для упрощения доказательства положим $\mu = 0$. Итерационная схема в таком случае приобретает вид:

$$v_{m+1}(x, h) = (1-h)v_m(x, h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x, h)) + hIv_m(x), \quad (8)$$

где

$$Iv(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)} \int_0^x g(s, v(s, h))(x-s)^{\alpha-1} ds, \quad (9)$$

и $h > 0$, $0 < \alpha < 1$. Докажем, что последовательность $\{v_m\}$ является фундаментальной. Введем норму

$$\|v\| = \sup_{x \in [0, 1]} |v(x)|. \quad (10)$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}v(x) = (1-h)v(x, h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}g(x, v(x, h)) + hIv(x). \quad (11)$$

Задача сводится к доказательству того факта, что $\mathcal{T}$ является сжимающим оператором. Для любых двух приближений v_i, v_j проведем следующую оценку:

$$|\mathcal{T}v_j(x) - \mathcal{T}v_i(x)| \leq (1-h)|v_j(x) - v_i(x)| + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}|g(x, v_j) - g(x, v_i)| + h|Iv_j(x) - Iv_i(x)|. \quad (12)$$

Воспользуемся свойством Липшица функции g для оценки разности интегралов:

$$\begin{aligned} |Iv_j(x) - Iv_i(x)| &\leq \frac{\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^x |g(s, v_j(s)) - g(s, v_i(s))|(x-s)^{\alpha-1} ds \leq \\ &\leq \frac{L\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^x |v_j(s) - v_i(s)|(x-s)^{\alpha-1} ds \leq \frac{L\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \|v_j - v_i\| \frac{x^\alpha}{\alpha} \leq \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \|v_j - v_i\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\mathcal{T}v_j(x) - \mathcal{T}v_i(x)| \leq \left[(1-h) + \frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \right] \cdot \|v_j - v_i\|.$$

Введем обозначение

$$K := 1-h + \frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}.$$

Если $K < 1$, то оператор $\mathcal{T}$ является сжимающим, по теореме Банаха у него существует единственная фиксированная точка, а приближения Пикара сходятся. В этом случае условие на параметр K примет вид

$$\frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} - h < 0.$$

Поскольку по условию $h > 0$, данное неравенство переписывается в виде

$$\frac{(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} = L \cdot \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha) + 1}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} < 1.$$

Таким образом, условие сходимости не зависит от конкретного значения параметра h (от него зависит лишь скорость сходимости, как упоминалось ранее), а ограничение на константу Липшица имеет вид

$$K = \frac{(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} = L < \frac{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha) + 1}. \quad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
2. *Al-Refai M.* Comparison principles for differential equations involving Caputo fractional derivative with Mittag-Leffler non-singular kernel// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — 2018, № 36. — P. 1–10.
3. *Al-Refai M.* On weighted Atangana–Baleanu fractional operators// Adv. Differ. Equations. — 2020. — 2020. — 3.
4. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and applications to heat transfer model// Therm. Sci. — 2016. — 20, № 2. — P. 763–769.
5. *Baleanu D., Fernandez A.* On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel// Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2018. — 59. — P. 444–462.
6. *Das S.* Functional Fractional Calculus. — Berlin: Springer-Verlag, 2011.
7. *Fareed A. F., Semary M. S., Hassan H. N.* An approximate solution of fractional order equations based on controlled Picard’s method with Atangana–Baleanu fractional derivative// Alexandria Eng. J. — 2022. — 61. — P. 3673–3678.
8. *Gómez J. F., Torres L., Escobar R. F.* Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel. — Springer, 2019.
9. *Kashkari B., Syam M.* Fractional-order Legendre operational matrix of fractional integration for solving the Riccati equation with fractional order// Appl. Math. Comput. — 2016. — 290. — P. 281–291.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
11. *Momani S., Odibat Z. M.* Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order// Chaos Solitons Fractals. — 2007. — 31. — P. 1248–1255.
12. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — New York: Academic Press, 1999.
13. *Semary M. S., Hassan H. N., Radwan A. G.* Single and dual solution of fractional order differential order based on controlled Picard’s method with Simpson rule// J. Ass. Arab Univ. Basic Appl. Sci. — 2017. — 24, № 1. — P. 247–253.
14. *Syam M. I., Al-Refai M.* Fractional differential equations Atangana–Baleanu fractional derivative: Analysis and applications// Chaos Solitons Fractals. — 2019. — 10, № 2.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Антонов Никита Андреевич (Antonov Nikita Andreevich)
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 (M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
 E-mail: antonovna@my.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 11–24
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-11-24

УДК 517.955.8

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДИФФУЗИИ И РАЗРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ РЕАКЦИИ

© 2025 г. К. А. КОЦЮВИНСКИЙ

Аннотация. Исследуется одномерная система уравнений реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии и разрывными функциями реакции и краевыми условиями Неймана. Показано, что сингулярное возмущение в уравнении для быстрой компоненты и наличие разрывов приводят к образованию контрастных структур с переходным слоем. Проведен анализ существования, единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения. Проведенный анализ позволяет обосновать корректность численных методов для подобных систем и предсказать поведение решения в областях резкого изменения, что важно для разработки эффективных вычислительных алгоритмов.

Ключевые слова: система реакция-диффузия, сингулярно возмущенная система, уравнение второго порядка, задача Неймана, малый параметр, устойчивость по Ляпунову, асимптотический метод.

CONTRAST STRUCTURES IN A REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH MULTISCALE DIFFUSION COEFFICIENTS AND DISCONTINUOUS REACTION FUNCTIONS

© 2025 K. A. KOTSYUBINSKY

ABSTRACT. In this paper, we examine a one-dimensional reaction-diffusion system with different-scale diffusion coefficients, discontinuous reaction functions, and Neumann boundary conditions. We demonstrate that a singular perturbation in the fast-component equation and reaction discontinuities lead to the formation of contrast structures with internal transition layers. Also, we analyze the existence, uniqueness, and asymptotic stability of stationary solutions. The obtained results provide theoretical justification for numerical methods applicable to such systems and enable prediction of behavior of solutions in domains of sharp gradients, which is crucial for developing efficient computational algorithms.

Keywords and phrases: reaction-diffusion system, singularly perturbed system, second-order differential equation, Neumann problem, small parameter, Lyapunov stability, asymptotic method.

AMS Subject Classification: 35F40

1. Введение. В данной работе исследуется система уравнений реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии в одномерном случае. Подобные системы возникают при моделировании процессов, включающих взаимодействие веществ с различными кинетическими свойствами, таких как химические реакции в пористых средах или задачи хранения углекислого газа. Искомые величинами являются концентрации реагентов, один из которых («быстрый»)

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.

определяется преимущественно реакционными процессами, а другой («медленный») — диффузионными.

Ключевой особенностью рассматриваемой системы является наличие разрывов первого рода в функциях реакции, что соответствует скачкообразному изменению свойств среды. Это приводит к формированию контрастных структур, в которых решение имеет резкие градиенты в окрестности точки разрыва. Наряду с этим, сингулярное возмущение в уравнении для быстрой компоненты обуславливает образование переходного слоя, где концентрация вещества изменяется чрезвычайно быстро. Краевые условия Неймана соответствуют заданию потока вещества на границе, что характерно для многих прикладных задач.

Также в последнем разделе разобран частный случай постановки задачи, где демонстрируется способ проверки применимости результатов работы к этой постановке, а также построено асимптотическое приближение первого порядка.

Полученные аналитические результаты позволяют обосновать корректность численных методов, используемых для расчета подобных систем (см., например [9, 12]). Асимптотический анализ дает возможность предсказать поведение решения в областях резкого изменения, что критически важно для построения оптимальных вычислительных алгоритмов — от выбора сетки до формирования начального приближения. Особое внимание уделяется существованию, единственности и устойчивости стационарного решения, а также анализу структуры переходного слоя. Результаты работы могут быть применены к задачам химической кинетики, экологического мониторинга и других областей, где существенную роль играют разномасштабные диффузионно-реакционные процессы.

2. Постановка задачи. Рассматривается вопрос существования стационарного решения параболической системы на отрезке $D := (-1, 1)$:

$$\begin{cases} N_f[u, v] := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ N_g[u, v] := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(-1, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_{init}(x), \quad v(x, 0) = v_{init}(x), \quad x \in \overline{D} := [-1, 1], \end{cases} \quad x \in D := (-1, 1), t > 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции источников $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ определены в области $(u, v, x, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times \overline{D} \times \{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$, где ε_0 — положительная константа, I_u, I_v — некоторые множества, явный вид которых будет уточнен ниже. Функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ терпят разрыв первого рода в точке $x = 0$, которая делит отрезок на две подобласти $D^{(-)} := (-1, 0)$ и $D^{(+)} := (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)} := (-1, 0), \\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)} := (0, 1), \end{cases} \\ g(u, v, x, \varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ f^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) &\neq f^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon), \quad g^{(-)}(u, v, 0, \varepsilon) \neq g^{(+)}(u, v, 0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $f^{(\mp)}$ и $g^{(\mp)}$ достаточно гладкие в своих областях определения. Компонента u далее будет называться «быстрой», а v — «медленной». Из-за наличия разрыва в функциях f и g решение (1), если существует, будет не классическим и принадлежать пространству $C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D^{(-)}) \cap C_x^2(D^{(+)}) \cap C_t(t \geq 0)$, а вблизи точки $x = 0$ будет сформирован так называемый переходный слой между двумя устойчивыми положениями. Стационарное состояние системы (1), если существует,

будет также являться решением эллиптической системы:

$$\begin{cases} L_f[u, v] := \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - f(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ L_g[u, v] := \frac{d^2 v}{dx^2} - g(u, v, x, \varepsilon) = 0, \\ \frac{du}{dx}(-1) = \frac{du}{dx}(1) = 0, \quad \frac{dv}{dx}(-1) = \frac{dv}{dx}(1) = 0, \end{cases} \quad x \in D, \quad (3)$$

Далее определим набор условий, при которых будут выполнены теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарного решения системы (1). Для этого сначала рассмотрим так называемую вырожденную систему, полученную из исходной стационарной системы (3) при $\varepsilon = 0$ отдельно в подобластях $D^{(\mp)}$:

$$\begin{cases} 0 = f^{(\mp)}(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, x, 0), & x \in D^{(\mp)}, \\ \frac{d^2 v^{(\mp)}}{dx^2} = g^{(\mp)}(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, x, 0), & x \in D^{(\mp)}. \end{cases} \quad (4)$$

Потребуем выполнение следующего условия:

(A1) Алгебраические уравнения в задаче (4) имеют такие решения $u^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(v^{(\mp)}(x), x)$, что выполнены условия $f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0) > 0$ при $x \in D$. Также для задач

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} = g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v^{(\mp)}, x), v^{(\mp)}, x, 0), & x \in D^{(\mp)}, \\ \frac{dv^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \quad v^{(\mp)}(0) = \psi_v, \end{cases} \quad (5)$$

существует решение $\bar{v}^{(\mp)}(x, \psi_v)$ при произвольном граничном условии $\psi_v \in I_v$. Без ограничения общности будем считать, что функции $\bar{u}^{(\mp)}(x, \psi_v) := \varphi^{(\mp)}(\bar{v}^{(\mp)}(x, \psi_v), x)$ в точке разрыва упорядочены следующим образом: $\bar{u}^{(-)}(0, \psi_v) < \bar{u}^{(+)}(0, \psi_v)$.

Отметим, что условие существования решения краевой задачи в (A1) может быть заменено на условие Липшица для функций $g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)$ (см. [6]) или существование верхнего и нижнего решений для этой задачи (см. [13]).

Введем обозначения $\bar{f}^{(\mp)}(x) = f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x, \psi_v), \bar{v}^{(\mp)}(x, \psi_v), x, 0)$ и аналогичные для функции g и всех их производных. Также введем функции:

$$J(\psi_v) = \frac{d\bar{v}^{(-)}}{dx}(0, \psi_v) - \frac{d\bar{v}^{(+)}}{dx}(0, \psi_v),$$

$$H(\psi_u, \psi_v) = \sqrt{2 \int_{\varphi^{(-)}(\psi_v, 0)}^{\psi_u} f^{(-)}(u, \psi_v, 0, 0) du} - \sqrt{2 \int_{\varphi^{(+)}(\psi_v, 0)}^{\psi_u} f^{(+)}(u, \psi_v, 0, 0) du}.$$

(A2) Пусть существует такое значение параметра $\psi_{0v} \in I_v$, что выполнено равенство $J(\psi_{0v}) = 0$. Пусть для $\psi_u \in (\varphi^{(-)}(\psi_{0v}, 0), \varphi^{(+)}(\psi_{0v}, 0))$ подкоренные выражения в функции $H(\psi_u, \psi_{0v})$ положительны, а также существует такое значение параметра ψ_{0u} , удовлетворяющее условию

$$\varphi^{(-)}(\bar{v}^{(-)}(0, \psi_{0v}), 0) < \psi_{0u} < \varphi^{(+)}(\bar{v}^{(+)}(0, \psi_{0v}), 0),$$

что выполнено равенство $H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) = 0$. Также пусть выполнены неравенства

$$\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) > 0. \quad (6)$$

Отметим, что второе неравенство в (6) будет справедливо при выполнении в точке разрыва соотношения

$$f^{(-)}(\psi_{0u}, \psi_{0v}, 0, 0) > f^{(+)}(\psi_{0u}, \psi_{0v}, 0, 0).$$

(A3) Пусть выполнено неравенство

$$\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \left| \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x) \bar{g}_u^{(\mp)}(x) \right| > -\lambda_0^{(\mp)}, \quad x \in D^{(\mp)},$$

где $\lambda_0^{(\mp)}$ — главные собственные значения задач

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Psi^{(\mp)}}{dx^2} + \lambda^{(\mp)} \Psi^{(\mp)} = 0, & x \in D^{(\mp)}, \\ \Psi^{(\mp)}(0) = 0, \quad \frac{d\Psi^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0. \end{cases}$$

3. Асимптотическое приближение решения стационарной задачи. Для доказательства существования решения используем асимптотический метод дифференциальных неравенств. Для этого построим формальную асимптотику в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) &= \bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + Q^{(\mp)} u(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)} u(\xi) \right), \\ V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) &= \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + Q^{(\mp)} v(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \left(\bar{v}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)} v(\xi) \right) + \sum_{i=n+1}^{n+2} \varepsilon^i Q_i^{(\mp)} v(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\xi = x/\varepsilon$ — растянутая переменная, функции с верхней чертой будут описывать поведение решения внутри подобластей $D^{(\mp)}$, а $Q_i^{(\mp)} u$ и $Q_i^{(\mp)} v$ — вблизи переходного слоя. Отметим, что в формальной асимптотике отсутствуют функции пограничного слоя, так как принципиального влияния на ход доказательства они не окажут и были разобраны в других работах (см., например, [4] и ссылки в этой работе). Функции будем строить отдельно в подобластях $D^{(\mp)}$, а затем сшивать согласно условию непрерывности:

$$\begin{aligned} U_n^{(-)}(0, \varepsilon) &= U_n^{(+)}(0, \varepsilon) = \psi_u := \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \psi_{iu}, \\ V_n^{(-)}(0, \varepsilon) &= V_n^{(+)}(0, \varepsilon) = \psi_v := \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \psi_{iv}, \end{aligned} \quad (8)$$

где величины ψ_{iu} и ψ_{iv} будут определены позднее. Также сшивается первая производная формальной асимптотики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} U_n^{(-)}(0, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x} U_n^{(+)}(0, \varepsilon) + O(\varepsilon^n), \\ \frac{\partial}{\partial x} V_n^{(-)}(0, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x} V_n^{(+)}(0, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Потребуем также выполнения стандартного условия убывания на бесконечности функций переходного слоя вида

$$Q_i^{(\mp)} u(\mp \infty) = Q_i^{(\mp)} v(\mp \infty) = 0.$$

Прежде чем переходить к построению формальной асимптотики, перепишем функции источников в задаче (3) согласно методу А. Б. Васильевой, например, для функции f :

$$\begin{aligned} f^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) &= \bar{f}^{(\mp)}(x, \varepsilon) + Q^{(\mp)} f(\xi, \varepsilon), \\ \bar{f}^{(\mp)}(x, \varepsilon) &= f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x, \varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x, \varepsilon), x, \varepsilon), \\ Q^{(\mp)} f(\xi, \varepsilon) &= f^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(\varepsilon \xi, \varepsilon) + Q^{(\mp)} u(\xi, \varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(\varepsilon \xi, \varepsilon) + Q^{(\mp)} v(\xi, \varepsilon), \varepsilon \xi\right) - \\ &\quad - f^{(\mp)}\left(\bar{u}^{(\mp)}(\varepsilon \xi, \varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(\varepsilon \xi, \varepsilon), \varepsilon \xi\right), \end{aligned} \quad (10)$$

и для функции g будем использовать аналогичное представление. Строить функции разложения (7) будем итерационно в следующем порядке:

$$Q_0^{(\mp)} v \rightarrow \bar{u}_0^{(\mp)} \rightarrow \bar{v}_0^{(\mp)} \rightarrow Q_0^{(\mp)} u \rightarrow Q_1^{(\mp)} v \rightarrow \dots$$

Для этого запустим процесс с нулевого порядка переходного слоя медленной компоненты, где в задачу (3) подставим разложения (7) и (10) и выделим соответствующую компоненту при ε^0 :

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_0^{(\mp)} v}{d\xi^2} = 0, & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)} v(\mp\infty) = \frac{dQ_0^{(\mp)} v}{d\xi}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Задача, очевидно, имеет только тривиальное решение, т.е. $Q_0^{(\mp)} v(\xi) = 0$.

Далее запишем вырожденную задачу:

$$\begin{cases} 0 = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), & x \in D^{(\mp)}, \\ \frac{d^2 \bar{v}_0^{(\mp)}}{dx^2} = g^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0), & x \in D^{(\mp)}, \\ \frac{d\bar{v}_0^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \quad \bar{v}_0^{(\mp)}(0) = \psi_v. \end{cases} \quad (12)$$

В силу условия (A1) существует решение $\bar{v}_0^{(\mp)}(x, \psi_v)$ и $\bar{u}_0^{(\mp)}(x, \psi_v) = \varphi(\bar{v}_0^{(\mp)}(x, \psi_v), x)$. В дальнейших выкладках зависимость от параметра ψ_v данного решения и всех прочих функций будем для краткости опускать, если это не вызывает недоразумения. Также введем обозначения $\bar{f}^{(\mp)}(x) = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x), \bar{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0)$ и аналогичные для функции g и всех их производных.

Задача для $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_0^{(\mp)} u}{d\xi^2} = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u, \bar{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0), & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)} u(\mp\infty) = 0, \quad Q_0^{(\mp)} u(0) = \psi_u - \bar{u}_0^{(\mp)}(0). \end{cases} \quad (13)$$

Если ввести функции

$$\tilde{u}(\xi) := \bar{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \quad \Phi^{(\mp)}(\xi) := \frac{d\tilde{u}^{(\mp)}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} Q_0^{(\mp)} u(\xi),$$

то можно понизить порядок уравнения:

$$\begin{cases} \Phi^{(\mp)}(\tilde{u}) := \frac{d}{d\xi} Q_0^{(\mp)} u(\xi) = \sqrt{2 \int_{\bar{u}_0^{(\mp)}(0)}^{\tilde{u}} f^{(\mp)}(u, \bar{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0) du}, \\ Q_0^{(\mp)} u(0) = \psi_u - \bar{u}_0^{(\mp)}(0), \end{cases} \quad (14)$$

В силу условия (A2) подкоренное выражение положительно, а значит, решение задачи Коши (14) существует. Формально функции $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ зависят от параметра ψ_u , но для краткости будем его опускать. Также согласно [1] для функции $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ и всех ее производных выполнены экспоненциальные оценки вида

$$\left| Q_0^{(\mp)} u(\xi) \right| < C \exp(-\varkappa \xi), \quad C > 0, \quad \varkappa > 0. \quad (15)$$

Также введем обозначения

$$\tilde{f}^{(\mp)}(\xi) = f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \bar{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0)$$

и аналогичные для функции g и всех их производных.

Таким образом, построен нулевой порядок разложения (7). В первом порядке функция переходного слоя для медленной компоненты определяется из задачи, аналогичной (11), откуда также

следует $Q_1^{(\mp)}v(\xi) = 0$. Первая отличная от нуля функция переходного слоя медленной компоненты появится во втором порядке; она определяется из задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_2^{(\mp)}v}{d^2 \xi} &= \tilde{g}^{(\mp)}(\xi) - \bar{g}^{(\mp)}(0), \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_2^{(\mp)}v(\mp\infty) &= \frac{dQ_2^{(\mp)}v}{d\xi}(\mp\infty) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

решение которой имеет вид

$$Q_2^{(\mp)}v(\xi) = \int_{\mp\infty}^{\xi} d\xi_1 \int_{\mp\infty}^{\xi_1} \left(\tilde{g}^{(\mp)}(\xi_2) - \bar{g}^{(\mp)}(0) \right) d\xi_2. \quad (17)$$

Задачи для последующих порядков запишем в общем виде при $k = 1, 2, \dots, n$. Регулярная часть определяется из задачи

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)} + F_k^{(\mp)}(x), \quad x \in D^{(\mp)}, \\ \begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_k^{(\mp)}}{dx^2} = \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)} + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)} + G_k^{(\mp)}(x), & x \in D^{(\mp)}, \\ \bar{v}_k^{(\mp)}(0) = -Q_k^{(\mp)}v(0), \quad \frac{d\bar{v}_k^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где $F_k^{(\mp)}(x)$ и $G_k^{(\mp)}(x)$ — известные функции. Определим быструю компоненту через медленную в алгебраическом уравнении и подставим в краевую задачу:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k^{(\mp)}(x) &= -\frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}\bar{v}_k^{(\mp)} - \frac{F_k^{(\mp)}(x)}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}, \quad x \in D^{(\mp)}, \\ \begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_k^{(\mp)}}{dx^2} = \left(\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}\bar{g}_u^{(\mp)}(x) \right) \bar{v}_k^{(\mp)} + \bar{G}_k^{(\mp)}(x), & x \in D^{(\mp)}, \\ \bar{v}_k^{(\mp)}(0) = -Q_k^{(\mp)}v(0), \quad \frac{d\bar{v}_k^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Множитель перед $\bar{v}_k^{(\mp)}$ в краевой задаче (19) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \frac{\bar{f}_v^{(\mp)}(x)}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}\bar{g}_u^{(\mp)}(x) = \bar{g}_v^{(\mp)}(x) + \bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{g}_u^{(\mp)}(x) \geq \bar{g}_v^{(\mp)}(x) - |\bar{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\bar{g}_u^{(\mp)}(x)| > -\lambda_0^{(\mp)}, \quad (20)$$

где учтено условие (A3). Таким образом, выполнены все условия существования и единственности решения $\bar{v}_k^{(\mp)}(x)$ задачи (19) (см., например, [10], [11, теорема 3]). Из условия (A1) следует, что $\bar{f}_u^{(\mp)}(x) > 0$, а значит, существует и $\bar{u}_k^{(\mp)}(x)$.

Задача для переходного слоя быстрой компоненты:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_k^{(\mp)}u}{d\xi^2} = Q_k^{(\mp)}u + Q_k^{(\mp)}f(\xi), & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_k^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0, \quad Q_k^{(\mp)}u(0) = -\bar{u}_k^{(\mp)}(0), \end{cases} \quad (21)$$

где $Q_k^{(\mp)}f(\xi)$ — функция, найденная на предыдущих шагах. Решение данной задачи можно записать в стандартном виде:

$$Q_k^{(\mp)}u(\xi) = -\frac{\bar{u}_k^{(\mp)}(0)}{\Phi^{(\mp)}(0)}\Phi^{(\mp)}(\xi) + \Phi^{(\mp)}(\xi) \int_0^{\xi} \frac{d\xi_1}{(\Phi^{(\mp)}(\xi_1))^2} \int_{\mp\infty}^{\xi_1} \Phi^{(\mp)}(\xi_2) Q_k^{(\mp)}f(\xi_2) d\xi_2. \quad (22)$$

Определение функций порядка ε^{k+1} в разложении (7) начинается с решения задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_{k+1}^{(\mp)} v}{d^2 \xi} = Q_{k+1}^{(\mp)} g(\xi), & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_{k+1}^{(\mp)} v(\mp\infty) = \frac{dQ_{k+1}^{(\mp)} v}{d\xi}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где функция $Q_{k+1}^{(\mp)} g(\xi)$ определена на предыдущих шагах. Решение можно получить повторным интегрированием аналогично второму порядку.

Далее необходимо определить коэффициенты ψ_{iu} и ψ_{iv} представления (8). Условие непрерывного сшивания (8), очевидно, выполнено за счет граничных условий при $x = 0$ во всех разобранных выше задачах. Условие сшивания производных (9) для быстрой компоненты перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\frac{d\bar{u}_{i-1}^{(-)}}{dx}(0, \psi_v) - \frac{d\bar{u}_{i-1}^{(+)}}{dx}(0, \psi_v) + \frac{\partial Q_i^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_i^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) = \\ &= H(\psi_u, \psi_v) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i H_i(\psi_u, \psi_v) = H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{iu} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{iv} + \bar{H}_i(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \dots, \psi_{i-1u}, \psi_{i-1v}) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где введены обозначения:

$$H(\psi_u, \psi_v) = \frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v), \quad (25)$$

а функции H_i и $\bar{H}_i$ содержат все остальные слагаемые в выражении при ε^i . Проведем аналогичные выкладки для медленной компоненты:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial \bar{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0, \psi_v) - \frac{\partial \bar{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0, \psi_v) \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} \varepsilon^{i-1} \left(\frac{d\bar{v}_{i-1}^{(-)}}{dx}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{d\bar{v}_{i-1}^{(+)}}{dx}(0, \psi_u, \psi_v) + \frac{\partial Q_i^{(-)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_i^{(+)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) = \\ &= J(\psi_v) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i J_i(\psi_u, \psi_v) = J(\psi_{0v}) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \psi_{iv} + \bar{J}_i(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \dots, \psi_{i-1u}, \psi_{i-1v}) \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где функции J_i и $\bar{J}_i$ также содержат все остальные слагаемые в выражении при ε^i , а $J(\psi_v)$ определяется выражением

$$J(\psi_v) = \frac{\partial \bar{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0, \psi_v) - \frac{\partial \bar{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0, \psi_v). \quad (27)$$

Таким образом, формируется система конечных уравнений для нулевого порядка:

$$\begin{cases} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) = 0, \\ J(\psi_{0v}) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

и для последующих порядков системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{ku} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{kv} = -\overline{H}_k(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \dots, \psi_{i-1u}, \psi_{i-1v}), \\ \frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \psi_{kv} = -\overline{J}_k(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \dots, \psi_{i-1u}, \psi_{i-1v}), \end{cases} \quad (29)$$

Существование решений систем (28) и (29) обеспечивается условием (A2). Таким образом можно построить все функции в разложении (7) и получить все коэффициенты в разложении (8).

4. Существование решения стационарной задачи. Для доказательства существования решения задачи (3) будем строить верхнее и нижнее решение как модификацию построенной формальной асимптотики. Для этого введем следующее определение.

Определение 1. Нижним и верхним решениями задачи (3), соответственно, называются пары функций $(\alpha_u(x, \varepsilon), \beta_u(x, \varepsilon))$ и $(\alpha_v(x, \varepsilon), \beta_v(x, \varepsilon))$, принадлежащие пространству $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^2(D^{(+)})$ и удовлетворяющие следующим условиям при достаточно малых $\varepsilon > 0$:

- (B1) $\alpha_u(x, \varepsilon) \leq \beta_u(x, \varepsilon)$ при $x \in \overline{D}$;
- (B2) $L_f[\alpha_u, v] \geq 0 \geq L_f[\beta_u, v]$ при $x \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$ и $v \in [\alpha_v(x, \varepsilon), \beta_v(x, \varepsilon)]$;
- (B3) $\frac{\partial \alpha_u^{(-)}}{\partial x}(0, \varepsilon) \leq \frac{\partial \alpha_u^{(+)}}{\partial x}(0, \varepsilon)$, $\frac{\partial \beta_u^{(-)}}{\partial x}(0, \varepsilon) \geq \frac{\partial \beta_u^{(+)}}{\partial x}(0, \varepsilon)$;
- (B4) $\frac{\partial \alpha_u}{\partial x}(-1, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{\partial \beta_u}{\partial x}(-1, \varepsilon)$, $\frac{\partial \alpha_u}{\partial x}(1, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \beta_u}{\partial x}(1, \varepsilon)$

и аналогичным для пары функций $(\alpha_v(x, \varepsilon), \beta_v(x, \varepsilon))$.

Выберем в качестве верхнего решения

$$\begin{aligned} \overline{U}_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) &= U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right), \\ \overline{V}_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) &= V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Нижнее решение строится в аналогичном виде.

Запишем операторное неравенство из (B2) для быстрой компоненты:

$$\begin{aligned} L_f \left[\overline{U}_n^{(\mp)}, v \right] &= \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right) - f^{(\mp)} \left(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon \right) + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= L_f \left[U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)} \right] + \varepsilon^{n+2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right) - \\ &\quad - \left(f^{(\mp)} \left(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon \right) - f^{(\mp)} \left(U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)}, x, \varepsilon \right) \right) + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Слагаемое $L_f \left[U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)} \right]$ по построению можно оценить как $O(\varepsilon^{n+1})$. Произвольные функции $u \in [\alpha_u(x, \varepsilon), \beta_u(x, \varepsilon)]$ и $v \in [\alpha_v(x, \varepsilon), \beta_v(x, \varepsilon)]$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= U_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \theta_u^{(\mp)}(x) \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right), \\ v(x) &= V_n^{(\mp)}(x, \varepsilon) + \varepsilon^n \theta_v^{(\mp)}(x) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\theta_u^{(\mp)}(x) \in [-1, 1]$ и $\theta_v^{(\mp)}(x) \in [-1, 1]$ при $x \in [-1, 1]$ — некоторые функции, которые неявным образом зависят от u и v . Раскладывая функции $f^{(\mp)}(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon)$ и $f^{(\mp)}(U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)}, x, \varepsilon)$ по формуле Тейлора с центром в точке $(\overline{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \overline{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0)$, получим выражение

$$\begin{aligned} L_f \left[\overline{U}_n^{(\mp)}, v \right] &= -\varepsilon^n \left[\overline{f}_u^{(\mp)}(x) \overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + \overline{f}_v^{(\mp)}(x) \theta_v^{(\mp)}(x) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x) \right] + \\ &\quad + \varepsilon^n \left[\frac{d^2}{d\xi^2} Q_\beta^{(\mp)} u - \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) - \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_u^{(\mp)}(0) \right) \overline{u}_\beta^{(\mp)}(0) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_v^{(\mp)}(0) \right) \theta_v^{(\mp)}(0) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(0) \right] + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (32)$$

Для медленной компоненты аналогичными рассуждениями можно получить

$$L_g \left[u, \bar{V}_n^{(\mp)} \right] = \varepsilon^n \left[\frac{d^2}{dx^2} \bar{v}_\beta^{(\mp)} - \bar{g}_u^{(\mp)}(x) \theta_u^{(\mp)}(x) \bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) - \bar{g}_v^{(\mp)}(x) \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) \right] + O(\varepsilon^{n+1}). \quad (33)$$

Определим добавочные функции $\bar{u}_\beta^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_\beta^{(\mp)}(x)$ как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & -\bar{f}_u^{(\mp)}(x) \bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) + |\bar{f}_v^{(\mp)}(x)| \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) = -A, \\ & \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \bar{v}_\beta^{(\mp)} + |\bar{g}_u^{(\mp)}(x)| \bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) - \bar{g}_v^{(\mp)}(x) \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) = -B, & x \in D, \\ \bar{v}_\beta^{(\mp)}(0) = \psi_{\beta v}, & \frac{d\bar{v}_\beta^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

где $A, B, \psi_{\beta v}$ — произвольные положительные константы. Выражая из алгебраического уравнения быструю компоненту и подставляя в краевую задачу, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) &= \frac{|\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)} \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) + \frac{A}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)}, \quad x \in \bar{D}, \\ & \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \bar{v}_\beta^{(\mp)} = \left(\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \frac{|\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)} |\bar{g}_u^{(\mp)}(x)| \right) \bar{v}_\beta^{(\mp)} - \left(\frac{|\bar{g}_u^{(\mp)}(x)|}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)} A + B \right), & x \in D, \\ \bar{v}_\beta^{(\mp)}(0) = \psi_{\beta v}, & \frac{d\bar{v}_\beta^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Из условия (A3) и оценки $|\theta_u^{(\mp)}(x)| \leq 1$ следует неравенство

$$\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \frac{|\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)} |\bar{g}_u^{(\mp)}(x)| > -\lambda_0^{(\mp)}. \quad (36)$$

В силу (A1) и положительности коэффициентов A и B неоднородность в задаче (35) для компоненты $\bar{v}_\beta$ отрицательна. Таким образом, задача для $\bar{v}_\beta^{(\mp)}$ в (35) имеет положительное решение (см., например, [10], [11, теорема 3]), т.е. $\bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) > 0$ при $x \in \bar{D}$. Из условия (A1), первого уравнения (35) и оценки $\bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) > 0$ следует неравенство $\bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) > 0$.

Функцию $Q_\beta^{(\mp)} u(\xi)$ определим как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\xi^2} Q_\beta^{(\mp)} u = \tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) + Q_\beta^{(\mp)} f(\xi), & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_\beta^{(\mp)} u(0) = \psi_{\beta u} - \bar{u}_\beta^{(\mp)}(0), & Q_\beta^{(\mp)} u(\mp\infty) = 0, \end{cases} \quad (37)$$

где

$$Q_\beta^{(\mp)} f(\xi) = \left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_u^{(\mp)}(0) \right) \bar{u}_\beta^{(\mp)}(0) - \left| \tilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_v^{(\mp)}(0) \right| \bar{v}_\beta^{(\mp)}(0) - C_u \exp(-\varkappa_u |\xi|), \quad (38)$$

$C_u > 0$ и $\varkappa_u > 0$ — некоторые коэффициенты, а $\psi_{\beta u}$ будет определен далее. Вследствие экспоненциальных оценок (15) и явного вида функций $\tilde{f}^{(\mp)}(\xi)$ и $\bar{f}^{(\mp)}(0)$ и всех их производных, первые два слагаемых в выражении для $Q_\beta^{(\mp)} f(\xi)$ также являются функцией вида (15); следовательно, при выборе достаточно больших $C_u > 0$ и $\varkappa_u > 0$ можно добиться выполнения неравенства $Q_\beta^{(\mp)} f(\xi) < 0$. Решение задачи (37) записывается в стандартном виде:

$$Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) = \frac{\psi_{\beta u} - \bar{u}_\beta^{(\mp)}(0)}{\Phi^{(\mp)}(0)} \Phi^{(\mp)}(\xi) + \Phi^{(\mp)}(\xi) \int_0^\xi \frac{d\xi_1}{(\Phi^{(\mp)}(\xi_1))^2} \int_{\mp\infty}^{\xi_1} \Phi^{(\mp)}(\xi_2) Q_\beta^{(\mp)} f(\xi_2) d\xi_2. \quad (39)$$

В силу неравенств $Q_\beta^{(\mp)} f(\xi) < 0$ и $\Phi^{(\mp)}(\xi) > 0$ и при достаточно большом $\psi_{\beta u} > \bar{u}_\beta^{(\mp)}(0)$ функция $Q_\beta^{(\mp)} u(\xi)$ будет положительна.

Условие (B3) для верхнего решения медленной компоненты можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon^n M_1 &= \frac{\partial \bar{V}_n^{(-)}}{\partial x}(0, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{V}_n^{(+)}}{\partial x}(0, \varepsilon) = \varepsilon^n \left(\frac{d\bar{v}_\beta^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\bar{v}_\beta^{(+)}}{dx}(0) \right) + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= \varepsilon^n \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \psi_{\beta v} + \bar{J}_\beta \right) + O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned} \quad (40)$$

где $\bar{J}_\beta$ — известная величина, а $M_1 > |\bar{J}_\beta| > 0$ — произвольная достаточно большая константа. Аналогично, для быстрой компоненты имеем:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon^{n-1} M_2 &= \frac{\partial \bar{U}_n^{(-)}}{\partial x}(0, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{U}_n^{(+)}}{\partial x}(0, \varepsilon) = \varepsilon^{n-1} \left(\frac{d}{d\xi} Q_\beta^{(-)} u(0) - \frac{d}{d\xi} Q_\beta^{(+)} u(0) \right) + O(\varepsilon^n) = \\ &= \varepsilon^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{\beta u} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{\beta v} + \bar{H}_\beta \right) + O(\varepsilon^n), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\bar{H}_\beta$ — известная величина и

$$M_2 > |\bar{H}_\beta| + \left| \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) (M_1 - \bar{J}_\beta) \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \right)^{-1} \right| > 0.$$

При выполнении условия (A2) и выборе коэффициентов M_1 и M_2 достаточно большими система линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{\beta u} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{\beta v} = M_2 - \bar{H}_\beta, \\ \frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \psi_{\beta v} = M_1 - \bar{J}_\beta \end{cases} \quad (42)$$

будет иметь решение $\psi_{\beta u} > \bar{u}_\beta^{(\mp)}(0) > 0$ и $\psi_{\beta v} > 0$. Таким образом, условие (B3) будет выполнено.

С учетом решения задачи (35) и функции (39) имеем:

$$\begin{aligned} L_f \left[\bar{U}_n^{(\mp)}, v \right] &= -\varepsilon^n A - \varepsilon^n \left(|\bar{f}_v^{(\mp)}(x)| + \theta_v(x) \bar{f}_v^{(\mp)}(x) \right) \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) - \\ &\quad - \varepsilon^n C_u \exp(-\kappa_u |\xi|) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0, \\ L_g \left[u, \bar{V}_n^{(\mp)} \right] &= -\varepsilon^n B - \varepsilon^n \left(|\bar{g}_u^{(\mp)}(x)| + \theta_u(x) \bar{g}_u^{(\mp)}(x) \right) \bar{u}_\beta^{(\mp)}(x) - \\ &\quad - \varepsilon^n \left(\left| \tilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_v^{(\mp)}(0) \right| + \theta_v(x) \left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \bar{f}_v^{(\mp)}(0) \right) \right) \bar{v}_\beta^{(\mp)}(x) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, условие (B2) также выполнено. Условие на границе (B4) проверяется аналогично другим работам (см., например, [4] и ссылки в этой работе). Из способа построения верхнего и нижнего решения, очевидно, следует их упорядоченность (B1), а также следующая теорема (см. [7, 8, 13]).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A1)–(A3). При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует решение $u_s(x, \varepsilon)$, $v_s(x, \varepsilon)$ задачи (3) с переходным слоем около точки $x = 0$, для которого построенные функции $U_n(x, \varepsilon)$, $V_n(x, \varepsilon)$ являются равномерным асимптотическим приближением с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$ при $x \in \bar{D}$.

5. Асимптотическая устойчивость стационарного решения. Доказательство асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (1) проводится по схеме, предложенной в [2] (см. [3] и ссылки в этой работе).

Определение 2. Нижним и верхним решениями задачи (1) соответственно называются пары функций $(\alpha_u(x, t, \varepsilon), \beta_u(x, t, \varepsilon))$ и $(\alpha_v(x, t, \varepsilon), \beta_v(x, t, \varepsilon))$, принадлежащие пространству $C_x(\overline{D}) \cap C_x^2(D^{(-)}) \cap C_x^2(D^{(+)}) \cap C_t(t \geq 0)$ и удовлетворяющие следующим условиям при достаточно малых $\varepsilon > 0$:

- (C1) $\alpha_u(x, t, \varepsilon) \leq \beta_u(x, t, \varepsilon)$ при $x \in \overline{D}$ и $t \geq 0$;
- (C2) $N_f[\alpha_u, v] \geq 0 \geq N_f[\beta_u, v]$ при $x \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$, $v \in [\alpha_v(x, t, \varepsilon), \beta_v(x, t, \varepsilon)]$ и $t > 0$;
- (C3) $\frac{\partial \alpha_u^{(-)}}{\partial x}(0, t, \varepsilon) \leq \frac{\partial \alpha_u^{(+)}}{\partial x}(0, t, \varepsilon)$, $\frac{\partial \beta_u^{(-)}}{\partial x}(0, t, \varepsilon) \geq \frac{\partial \beta_u^{(+)}}{\partial x}(0, t, \varepsilon)$ при $t \geq 0$;
- (C4) $\frac{\partial \alpha_u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) \geq 0 \geq \frac{\partial \beta_u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon)$, $\frac{\partial \alpha_u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) \leq 0 \leq \frac{\partial \beta_u}{\partial x}(1, t, \varepsilon)$ при $t \geq 0$,

и аналогичным для пары функций $(\alpha_v(x, t, \varepsilon), \beta_v(x, t, \varepsilon))$.

Построим эти функции следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\beta(x, t, \varepsilon) &= u_s(x, \varepsilon) + \left(\overline{U}_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t}, \\ v_\beta(x, t, \varepsilon) &= v_s(x, \varepsilon) + \left(\overline{V}_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) - v_s(x, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t}, \\ u_\alpha(x, t, \varepsilon) &= u_s(x, \varepsilon) + \left(\underline{U}_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) - u_s(x, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t}, \\ v_\alpha(x, t, \varepsilon) &= v_s(x, \varepsilon) + \left(\underline{V}_1^{(\mp)}(x, \varepsilon) - v_s(x, \varepsilon) \right) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $u_s(x, \varepsilon)$ и $v_s(x, \varepsilon)$ — решения задачи (3), $\lambda > 0$ — некоторая постоянная. Проверка соответствующих условий определения нижнего и верхнего решений задачи (1) проводится стандартным образом (см. [5]). Из структуры верхнего и нижнего решения для нестационарной задачи и локальной единственности решения задачи (1) (см., например, [13]) следует основной результат данной работы.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (A1)–(A3). Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ стационарное решение $(u_s(x, \varepsilon), v_s(x, \varepsilon))$ задачи (1) существует, локально единственно и асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область его притяжения не менее $[\underline{U}_1, \overline{U}_1] \times [\underline{V}_1, \overline{V}_1]$.

6. Пример. Рассмотрим частный вариант постановки задачи с функциями f и g следующего вида:

$$f(u, v, x) = \begin{cases} u - \varphi(x), & x \in D^{(-)}, \\ u, & x \in D^{(+)}, \end{cases} \quad g(u, v, x) = \begin{cases} v - k(x)u, & x \in D^{(-)}, \\ v, & x \in D^{(+)}. \end{cases} \quad (45)$$

Задача для регулярной части нулевого порядка будет сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{cases} \overline{u}_0^{(-)}(x) - \varphi(x), & x \in D^{(-)}, \\ \overline{u}_0^{(+)}(x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ \frac{d^2 \overline{v}_0^{(\mp)}}{dx^2} &= \begin{cases} \overline{v}_0^{(-)}(x) - k(x)\overline{u}_0^{(-)}(x), & x \in D^{(-)}, \\ \overline{v}_0^{(+)}(x), & x \in D^{(+)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

Так как главное собственное значение задачи в условии (A3) положительно, то приходим к неравенству

$$\overline{g}_v^{(\mp)}(x) - |\overline{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\overline{g}_u^{(\mp)}(x)| = 1 > 0 > -\lambda_0^{(\mp)}.$$

Рассмотрим каждую подобласть отдельно. В $D^{(-)}$ решение алгебраического уравнения относительно быстрой компоненты имеет вид $\overline{u}_0^{(-)}(x) = \varphi(x)$, а $\overline{v}_0^{(-)}(x)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2 \overline{v}_0^{(-)}}{dx^2} = \overline{v}_0^{(-)}(x) - k(x)\varphi(x), & x \in (-1, 0), \\ \frac{d\overline{v}_0^{(-)}}{dx}(-1) = 0, \quad \overline{v}_0^{(-)}(0) = \psi_v. \end{cases} \quad (47)$$

Функция Грина для данной задачи определена следующим образом:

$$G(x, s) = \frac{1}{2(e^2 + 1)} \begin{cases} (e^{x+2} + e^{-x})(e^s - e^{-s}), & -1 \leq x \leq s, \\ (e^{s+2} + e^{-s})(e^x - e^{-x}), & s \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (48)$$

а решение записывается в виде

$$\bar{v}_0^{(-)}(x, \psi_v) = \frac{\psi_v e^2}{1 + e^2} e^x + \frac{\psi_v}{1 + e^2} e^{-x} + \int_{-1}^0 k(s) \varphi(s) G(x, s) ds. \quad (49)$$

В подобласти $D^{(+)}$ быстрая компонента $\bar{u}_0^{(+)}(x) = 0$, а $\bar{v}_0^{(+)}(x)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{v}_0^{(+)}}{dx^2} = \bar{v}_0^{(+)}(x), & x \in (0, 1), \\ \frac{d\bar{v}_0^{(+)}}{dx}(1) = 0, \quad \bar{v}_0^{(+)}(0) = \psi_v; \end{cases} \quad (50)$$

ее решение имеет вид

$$\bar{v}_0^{(+)}(x, \psi_v) = \frac{\psi_v}{1 + e^2} e^x + \frac{\psi_v e^2}{1 + e^2} e^{-x}. \quad (51)$$

Отсюда следует выполнение условия (A1).

Задача для $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d^2 Q_0^{(\mp)} u}{d\xi^2} = Q_0^{(\mp)} u, & \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)} u(\mp\infty) = 0, \quad Q_0^{(\mp)} u(0) = \psi_u - \bar{u}_0^{(\mp)}(0). \end{cases} \quad (52)$$

Решение задачи в явном виде:

$$Q_0^{(\mp)} u(\xi, \psi_u) = \begin{cases} (\psi_u - \varphi(0)) e^\xi, & \xi \leq 0, \\ \psi_u e^{-\xi}, & \xi \geq 0. \end{cases} \quad (53)$$

В силу отсутствия зависимости функций f и g от ε в подобластях $D^{(\mp)}$ в первом порядке все слагаемые (7) будут тривиальными. Проверим условие (A2) сшивания асимптотики для быстрой компоненты:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u) \right) + \varepsilon \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(0) \right) = \\ &= H(\psi_u) + \varepsilon \left(\frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(0) \right) = \\ &= H(\psi_{0u}) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}) \psi_{1u} + \frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(0) \right), \end{aligned} \quad (54)$$

где использовано обозначение

$$H(\psi_u) = \frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u) = 2\psi_u - \varphi(0) \quad (55)$$

и учтен явный вид функций $Q_0^{(\mp)} u(\xi, \psi_u)$. Таким образом, чтобы сшить формальную асимптотику быстрой компоненты, необходимо выполнение равенств

$$\psi_{0u} = \frac{1}{2} \varphi(0), \quad \psi_{1u} = -\frac{1}{2} \varphi'(0). \quad (56)$$

Для медленной компоненты проверка условия гладкости приводит к равенству:

$$0 = \frac{\partial \bar{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0, \psi_v) - \frac{\partial \bar{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0, \psi_v) + \varepsilon \left(\frac{\partial Q_2^{(-)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_2^{(+)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) = J(\psi_v) + O(\varepsilon) =$$

$$= \left(\frac{\psi_v e^2}{1 + e^2} - \frac{\psi_v}{1 + e^2} + \frac{d}{dx} \int_{-1}^0 k(s) \varphi(s) G(x, s) ds \Big|_{x=0} \right) - \left(\frac{\psi_v}{1 + e^2} - \frac{\psi_v e^2}{1 + e^2} \right) + O(\varepsilon), \quad (57)$$

откуда получим

$$\psi_v = \psi_{0v} = \frac{1}{2} \frac{1 + e^2}{1 - e^2} \frac{d}{dx} \int_{-1}^0 k(s) \varphi(s) G(x, s) ds \Big|_{x=0}. \quad (58)$$

Производные функций H и J также можно посчитать явно:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) = 2 > 0, \quad \frac{d}{d \psi_v} J(\psi_{0v}) = 2 \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} > 0. \quad (59)$$

Таким образом, условие (A2) также выполнено.

7. Заключение. В работе доказаны теоремы существования, локальной единственности и устойчивости по Ляпунову стационарного решения системы реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии и разрывными функциями реакции. Найдены достаточные условия, при которых в данной системе формируется контрастная структура возле точки разрыва. Также рассмотрен модельный пример. Полученные результаты и способ их достижения будут использованы в дальнейших работах с обобщением задачи на трехмерный случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. Нефедов Н. Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость // Диффер. уравн. — 2000. — 36, № 2. — С. 262–269.
3. Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
4. Нефедов Н. Н., Дерюгина Н. Н. Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция-диффузия с граничными условиями Неймана // Теор. мат. физ. — 2022. — 212. — С. 83–94.
5. Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т., Орлов А. О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция-диффузия с разрывным реактивным слагаемым // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2018. — 6. — С. 3–10.
6. Нефедов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 2016.
7. Левашова Н. Т., Тищенко Б. В. Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками при различных условиях квазимонотонности // Теор. мат. физ. — 2022. — 212, № 1. — С. 62–82.
8. Павленко В. Н., Потапов Д. К. Существование полуправильных решений эллиптических систем с разрывными нелинейностями // Мат. заметки. — 2021. — 110, № 2. — С. 239–257.
9. Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A. Numerical optimisation of CO₂ flooding using a hierarchy of reservoir models // Adv. Geosci. — 2021. — 56. — P. 19–31.
10. Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces // SIAM Rev. — 1976. — 18, № 4. — P. 620–709.
11. Calc N. On an elliptic boundary value problem not in divergence form // Proc. Am. Math. Soc. — 1983. — 88, № 1. — P. 47–52.

12. *Class H., Ebigbo A., Helmig R., Dahle H.K.* A benchmark study on problems related to CO₂ storage in geologic formations// Comput. Geosci. — 2009. — 13. — P. 409–434.
13. *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — New York: Plenum Press, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Коцюбинский Константин Алексеевич (Kotsubinsky Konstantin Alekseevich)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail: kkotsubinsky@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 25–37
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-25-37

УДК 517.929

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО

© 2025 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. Рассматривается периодическая краевая задача для уравнения Курамото—Сивашинского. Показано, что существует двухпараметрическое семейство решений, которые имеют структуру бегущих волн, и получены асимптотические формулы для них. Показано также, что совокупность таких решений образует двумерное инвариантное многообразие, которое является локальным аттрактором. Указанные решения имеют разные периоды по переменной t , неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Перрону, Пуанкаре и Жуковскому. Обоснование результатов основано на теории инвариантных многообразий и нормальных форм Пуанкаре—Дюлака.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, двумерное инвариантное многообразие, бегущая волна, устойчивость, бифуркация, нормальная форма.

PERIODIC TRAVELING WAVES OF THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION

© 2025 А. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. A periodic boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation is considered. We prove that there exists a two-parameter family of traveling-wave solutions and obtain asymptotic formulas for them. We also prove that the set of such solutions forms a two-dimensional invariant manifold, which is a local attractor. The indicated solutions have different periods in the variable t , are unstable in the Lyapunov sense, but are stable in the Perron, Poincaré, and Zhukovsky senses. The study is based on the theory of invariant manifolds and Poincaré–Dulac normal forms.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, two-dimensional invariant manifold, traveling wave, stability, bifurcation, normal form.

AMS Subject Classification: 35Lxx

1. Введение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + g_2(u^2)_x + g_3(u^3)_x = 0, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$, $b, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$, $g_2^2 + g_3^2 \neq 0$. Данное эволюционное дифференциальное уравнение известно под названием «уравнение Курамото—Сивашинского» (см. [23, 26, 27]). Классический вариант этого уравнения предполагает, что $g_3 = 0$. Кроме широко известных приложений в химической кинетике (см. [23]) и гидродинамике (см. [26]), модифицированные варианты уравнения (1)

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

используют в физике пограничных явлений (см., например, [19]), в частности, как математическую модель формирования наноструктур на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов (см., например, [18–20]).

В данной работе будем изучать уравнение (1) в случае, когда оно дополнено периодическими краевыми условиями, которые изначально приведены после соответствующих перенормировок пространственной переменной x , а также и эволюционной переменной t . Итак, уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Конечно возможны иные варианты краевых условий, отличных от периодических краевых условий (2) (см., например, монографию [27], и список литературы в ней). Вместе с тем вариант, когда выбраны периодические краевые условия, по-видимому, один из самых распространенных (см., например, [18–20, 26]).

Для краевой задачи (1)–(2) изучались различные вопросы. Например, в [7–9, 22] изучались локальные бифуркации в окрестности пространственно однородных состояний равновесия, т.е. решений краевой задачи вида $u(t, x) = \text{const}$.

В данной работе будет рассмотрен ряд вопросов, связанных с существованием и свойствами решений краевой задачи (1)–(2), которые имеют структуру бегущих волн, т.е. решений вида

$$u(t, x) = F(y), \quad y = x + \omega t, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Безусловно, этот популярный для приложений в физике вопрос уже рассматривался и ранее (см., например, [17, 25]), но в данной статье будет изучена возникающая задача на базе использования математически обоснованных методов теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий (с бесконечномерным фазовым пространством). Такой подход позволил не только получить достаточные условия существования бегущих волн, но и одновременно вывести для них асимптотические формулы, дать анализ их устойчивости в смысле классических определений теории устойчивости. Речь идет об устойчивости по А. М. Ляпунову, А. Пуанкаре, О. Перрону. Для анализа всей этой совокупности вопросов будут использованы такие методы теории динамических систем (качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными), как метод инвариантных (интегральных) многообразий, а также метод нормальных форм, который ведет свое начало от работ А. Пуанкаре.

2. Общие замечания. Отметим, что если дополнить краевую задачу (1)–(2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad (3)$$

то из результатов работ [5, 16] вытекает, что начально-краевая задача (1)–(3) локально корректно разрешима, если $f(x) \in H^4$; через H^4 обозначено функциональное пространство, состоящее из тех функций $f(x)$, для которых выполнены следующие свойства:

- (i) $f(x)$ имеет период 2π ;
- (ii) при $x \in [-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[-\pi, \pi]$ (см. [15]).

Некоторые необходимые пояснения, связанные с использованием результатов работ [5, 16], будут приведены в следующих разделах. Напомним, что

$$\|f\|_{H^4} = \|f\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f'\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f''\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f'''\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f^{IV}\|_{L_2(-\pi, \pi)}.$$

Нетрудно проверить, что краевая задача (1)–(2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $u(t, x) = c$, где c — произвольная действительная постоянная.

Пусть функция $h(x)$ принадлежит пространству 2π -периодических функций, которые при $x \in (-\pi, \pi)$ принадлежат $L_2(-\pi, \pi)$: $h(x) \in H^0$. В следующих разделах будем использовать обозначение

$$M_0(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx.$$

Лемма 1. Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи (1)–(2). Тогда

$$M_0(u) = c, \quad (4)$$

т.е. пространственное среднее решения краевой задачи (1)–(2) не зависит от t .

Подчеркнем, что решение $u(t, x) = c$ входит в совокупность тех решений краевой задачи (1)–(2), для которых $M_0(u) = c$.

Доказательство. Для доказательства леммы 1 проинтегрируем обе части уравнения по переменной x . После элементарных преобразований и умножения на $1/(2\pi)$ получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(u))_x dx = 0, \quad g(u) = g_2 u^2 + g_3 u^3.$$

Очевидно, что три последних интеграла в левой части равны нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u dx \right) = \frac{d}{dt} (M_0(u)) = 0.$$

Итак, выполнено условие (4). $\square$

Обозначим через H_c^0 совокупность тех функций $f(x) \in H^0$, для которых $M_0(f) = c$. Нетрудно проверить, что при $c \neq 0$ множество H_c^0 является аффинным подпространством гильбертова пространства H^0 , а H_c^4 — аффинным подпространством гильбертова пространства H^4 . Если же $c = 0$, то H_0^0 и H_0^4 являются линейными подпространствами функциональных пространств H^0 и H^4 соответственно. Ясно, что подпространства H_c^4 инвариантны (локально инвариантны) для решений краевой задачи (1)–(2). Действительно, из включения $f(x) \in H_c^4$ вытекает, что $f_t(x) \in H_c^4$, где $f_t(x) = u(t, x)$, а $u(t, x)$ — решение начально-краевой задачи (1)–(3) с условием $u(0, x) = f(x) \in H_c^4$. При этом включение $f_t(x) \in H_c^4$ выполнено до тех пор, пока решение $u(t, x)$ существует или при всех $t > 0$, если начально-краевая задача (1)–(3) имеет решение при всех $t > 0$ (см. монографию [27]).

В краевой задаче (1)–(2) сделаем замену

$$u(t, x) = c + v(t, x), \quad (5)$$

где $c = M_0(u)$. Следовательно, $M_0(v) = 0$, т.е. $v(t, x) \in H_0^4$ при любом t , когда решение $u(t, x)$ ($v(t, x)$) существует.

Замена (5) позволяет переписать краевую задачу (1)–(2) в следующем виде:

$$v_t = A(b, a)v - a_2(v^2)_x - a_3(v^3)_x, \quad (6)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = 0. \quad (7)$$

В краевой задаче (6)–(7)

$$A(b, a)v = -v_{xxxx} - bv_{xx} + av_x, \quad a = -(2g_2c + 3g_3c^2), \quad a_2 = g_2 + 3g_3c, \quad a_3 = g_3.$$

Лемма 2. Пусть $b < 1$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, x)\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} v^2(t, x) dx = 0,$$

где $v(t, x)$ — решение краевой задачи (6)–(7).

Доказательство. Умножив уравнение (6) на $v(t, x)$ и проинтегрировав полученное равенство по переменной x , получим следующее интегральное равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 dx = - \int_{-\pi}^{\pi} v_{xxxx} v dx - b \int_{-\pi}^{\pi} v_{xx} v dx + a \int_{-\pi}^{\pi} v_x v dx - a_2 \int_{-\pi}^{\pi} (v^2)_x v dx - a_3 \int_{-\pi}^{\pi} (v^3)_x v dx.$$

После преобразований по частям можно убедиться, что три последних интеграла равны нулю, а

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 dx = b \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} v_{xx}^2 dx \leq (b-1) \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx < 0,$$

если $b-1 < 0$, т.е. $b < 1$. Следовательно, в такой ситуации неотрицательная функция

$$v_0(t) = \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx$$

убывает и, более того, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_0(t) = 0$. Итак, при $b < 1$ состояние равновесия $v(t, x) = 0$ будет глобальным аттрактором для решений краевой задачи (6)–(7) в смысле нормы в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Иногда в такой ситуации говорят, что $v(t, x) = 0$ — это «слабый» глобальный аттрактор, т.е. глобальный аттрактор в более слабой норме, чем норма в фазовом пространстве (в нашем случае это пространство начальных условий H_0^4). $\square$

Из последнего замечания вытекает, что искать бегущие волны у краевой задачи (6)–(7) и, следовательно, краевой задачи (1)–(2) можно лишь при $b \geq 1$. Далее, дополнительные построения, связанные с методом инвариантных многообразий и нормальных форм, позволяют показать, что при $b = 1$ состояние равновесия $v(t, x) = 0$ также будет аттрактором, но локальным. Все последние утверждения означают, что далее будем искать решения краевой задачи (6)–(7), имеющие структуру бегущих волн при $b > 1$.

3. Свойства решений линеаризованной краевой задачи. В данном разделе рассмотрим линеаризованную в окрестности нуля краевую задачу (6)–(7), т.е. линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} v_t &= A(b, a)v, \\ v(t, x + 2\pi) &= v(t, x), \quad M_0(v) = 0. \end{aligned}$$

где линейный дифференциальный оператор имеет вид

$$A(b, a)v = -v_{xxxx} - bv_{xx} + av_x.$$

Он имеет счетный набор собственных чисел

$$\lambda_n = \lambda_n(b, a) = \Theta_n(b) + i\sigma_n(a), \quad \Theta_n(b) = -n^4 + bn^2, \quad \sigma_n(a) = an.$$

Собственные числа λ_n отвечают собственным функциям $\exp(inx)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. При этом функции $\exp(inx)$ в пространстве H_0^4 образуют полную ортогональную систему. В частности, отсюда следует, что оператор $A(b, a)$ в H_0^4 является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов (см. [5]). Это свойство линейного дифференциального оператора $A(b, a)$ дает основание использовать результаты работ [5, 16] для обоснования корректной разрешимости нелинейной начально-краевой задачи (1)–(3), если, конечно, учесть, что в уравнениях (1) ((6)) нелинейные слагаемые достаточно гладко зависят от $v(t, x)$ (см., например, [16]).

В заключение этого раздела отметим, что из теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному (первому) приближению вытекает, что решение $v(t, x) = 0$ нелинейной краевой задачи (6)–(7) асимптотически устойчиво, если $b < 1$ ($\operatorname{Re} \lambda_n = \Theta_n < 0$) при любом $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ и неустойчиво, если $b > 1$ (по крайней мере, Θ_1 и Θ_{-1} положительны). При $b = 1$ в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи (6)–(7) реализуется критический случай (см., например [3, 4]). В монографии [4] приведен конечномерный вариант теоремы Ляпунова, а в монографии [3] рассмотрены уже уравнения в банаховом пространстве, т.е. приведено обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению на бесконечномерный случай, в частности, на уравнение с частными производными.

4. Бегущие волны вспомогательной краевой задачи. В этом разделе покажем, что при

$$b = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

краевая задача (6)–(7) имеет решения, имеющие структуру бегущей волны, т.е. решения вида

$$v(t, x) = w(x + \omega t),$$

где скорость распространения волны ω , как и функция $w(y)$, подлежит определению в ходе анализа краевой задачи при выбранных значениях b . Напомним, что при $\omega \neq 0$ получаем бегущие волны. Если оказалось, что $\omega = 0$, то получаем пространственно неоднородные состояния равновесия рассматриваемой краевой задачи.

В краевой задаче (6)–(7) положим

$$\tau = t, \quad y = x + \omega t, \quad (8)$$

а также будем искать ω как функцию c и ε , т.е. положим

$$\omega(c, \varepsilon) = a(c) - \varepsilon \sigma(\varepsilon),$$

где $\sigma(\varepsilon)$ — достаточно гладкая функция. Пусть $\sigma_0 = \sigma(0)$ и поэтому $\sigma(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon), \quad \Phi(0) = 0.$$

Тем самым вопрос о выборе $\omega = \omega(c, \varepsilon)$ сводится к определению σ_0 и функции $\Phi(\varepsilon)$. Напомним, что $a(c) = -(2cg_2 + 3c^2g_3)$, т.е. является функцией параметра c . Быть может, уместно подчеркнуть, что функция $a(c)$ переменной $c \in (-\infty, \infty)$ принимает любые значения, если $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$. При $g_3 \neq 0$ она принимает любые положительные значения, если $g_3 > 0$ и любые отрицательные значения, если $g_3 < 0$.

Решения краевой задачи (6)–(7) при $b = 1 + \varepsilon$ будем искать как функцию, которая зависит от τ и y ($v = v(\tau, y)$). В новых переменных (8) краевая задача (6)–(7) с учетом выбора коэффициента b может быть переписана в следующем виде:

$$v_\tau = A(\varepsilon)v - a_2(v^2)_y - a_3(v^3)_y, \quad (9)$$

$$v(\tau, y + 2\pi) = v(\tau, y), \quad M_0(v) = 0, \quad (10)$$

где теперь

$$M_0(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\tau, y) dy.$$

Кроме этого,

$$A(\varepsilon) = A_0v + \varepsilon A_1v + B(\varepsilon)v, \quad A_0v = -v_{yyyy} - v_{yy}, \quad A_1v = -v_{yy} + \sigma_0v_y, \quad B(\varepsilon)v = \varepsilon\Phi(\varepsilon)v_y,$$

где $\Phi(\varepsilon)$ — также гладкая функция. Очевидно, что линейный дифференциальный оператор $B(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ подчинен операторам B_1, B_2 ($B_1v = v_{yyyy}$, $B_2v = v_{yy}$; см. [5]), а коэффициент $\varepsilon\Phi(\varepsilon)$ имеет в нуле порядок малости выше первого.

Отметим, что при достаточно малой положительной постоянной ε_0 и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оператор $A(\varepsilon)$ имеет собственные числа

$$\lambda_{\pm 1}(\varepsilon) = \varepsilon(1 \pm i\sigma_0) + o(\varepsilon),$$

которые отвечают собственным функциям $\exp(\pm iy)$. Остальные собственные числа оператора $A(\varepsilon)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0$, где γ_0 — некоторая положительная постоянная. В рассматриваемом случае можно выбрать $\gamma_0 = 11$, если ε_0 — достаточно малая положительная постоянная. Проверка этих свойств линейного дифференциального оператора $A(\varepsilon)$ достаточно стандартна, если учесть, что оператор A_0 имеет собственные числа $\lambda_n = n^2 - n^4$ и при $n \neq \pm 1$ для них выполнено неравенство $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -12$. Подчеркнем, что все собственные числа оператора A_0 двукратны, а при $\varepsilon \neq 0$ собственные числа оператора $A(\varepsilon)$ в ситуации общего положения попарно комплексно сопряжены, $\lambda_{-n}(\varepsilon) = \overline{\lambda_n(\varepsilon)}$. Тем самым для оператора $A(\varepsilon)$ реализуется близкий к критическому случай двукратного нулевого собственного значения. При $\varepsilon = 0$ имеем $A(0) = A_0$, и собственные числа этого оператора суть $\lambda_{\pm n} = -n^4 + n^2$.

В такой ситуации у краевой задачи (9)–(10) в окрестности нулевого состояния равновесия существует двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, которое принято называть центральным инвариантным многообразием (см. [6, 21, 24]). Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи (9)–(10) с начальными условием $u(t, x) \in Q(\delta)$, где через $Q(\delta)$ обозначен шар радиуса δ с центром в нуле пространства H_0^4 . Тогда это решение со скоростью экспоненты приближается к инвариантному многообразию $M_2(\varepsilon)$. Отметим, что величина δ может быть выбрана не зависящей от ε .

Прежде чем перейти к дальнейшим построениям и, в частности, изучению решений, принадлежащих $M_2(\varepsilon)$. Отметим общее свойство для решений краевой задачи (9)–(10). Для них характерно свойство, которое называют трансляционной инвариантностью. Суть его состоит в том, что вместе с решениями $v(\tau, y, \varepsilon)$ у этой краевой задачи есть решения $v(\tau, y + \beta, \varepsilon)$, где β — произвольная действительная постоянная.

Решения, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$ (см. [7–9, 22]), можно и удобно искать в следующем виде:

$$v(\tau, y, z, \bar{z}) = \varepsilon^{1/2} v_1(y, z, \bar{z}) + \varepsilon v_2(y, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2} v_3(y, z, \bar{z}) + \varepsilon^2 v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon), \quad (11)$$

где $v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon)$ гладко зависит от своих аргументов при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Наконец, $z = z(s)$, $s = \varepsilon\tau$ — медленное время, а

$$v_1(\tau, y, z, \bar{z}) = v_1(y, z, \bar{z}) = z(s)q(y) + \bar{z}(s)\bar{q}(y), \quad q(y) = \exp(iy).$$

Функции $v_2(y, z, \bar{z})$, $v_3(y, z, \bar{z})$ и $v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ принадлежат классу функций W (см. [7–9, 22]). Напомним его определение.

Определение 1. Функция $p(y, z, \bar{z})$ принадлежит классу W , если для нее выполнены следующие условия:

- (i) Функция $p(y, z, \bar{z})$ рассматриваемая как функция y при всех $z, \bar{z}$ принадлежит подпространству $H_{0,\pm 1}^4$ гильбертова пространства H^4 , состоящему из тех функций, для которых выполнены равенства

$$M_0(p) = M_{\pm 1}(p) = 0,$$

где

$$M_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(y, z, \bar{z}) dy, \quad M_{\pm 1}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(y, z, \bar{z}) \exp(\mp iy) dy.$$

При этом, конечно, $M_0(p)$, $M_{\pm 1}(p)$ зависят от $z, \bar{z}$ как от параметров.

- (ii) Функция $p(y, z, \bar{z})$ при $|z| \leq \delta_p$ ($\delta_p > 0$) зависит от $z, \bar{z}$ гладко, т.е. имеет достаточно большое число непрерывных частных производных по переменным $z, \bar{z}$.

Наконец, функция $z(s)$ удовлетворяет уравнению, которое принято называть нормальной формой (см., например, монографию [1]):

$$z'_s = \varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) \quad (12)$$

где $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция. Более того, для нее справедливо равенство

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon).$$

Отметим, что для дальнейших построений определяющую роль в случае общего положения играет функция $\psi(z, \bar{z}) = \varphi(z, \bar{z}, 0)$. Таким образом, уравнение (12) приобретает следующий вид:

$$z'_s = \psi(z, \bar{z}). \quad (13)$$

Его называют «укороченной» нормальной формой (см. [2]). При этом $\psi(z, \bar{z}) = z\psi_0(z, \bar{z})$.

Отметим также, что для комплекснозначной функции $\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon)$ справедливо равенство $\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon) = \varphi_0(|z|^2, \varepsilon)$, а также аналогичное равенство для $\psi_0(z, \bar{z})$, имеющее вид $\psi_0(z, \bar{z}) = \psi_0(|z|^2)$. Обе функции $\varphi_0(|z|^2, \varepsilon)$, $\psi_0(|z|^2)$ в ситуации общего положения комплекснозначны, так как у них могут быть комплексные коэффициенты.

Доказательство равенств

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\varphi_0(|z|^2, \varepsilon), \quad \psi(z, \bar{z}) = z\psi_0(|z|^2)$$

основано на следующем простом замечании. Трансляционная инвариантность решений краевой задачи (9)–(10) означает, что функция $v(\tau, y + \beta, \varepsilon)$ также является решением; следовательно, это приводит к замене $z(s)$ на функцию $w(s) = z(s) \exp(i\beta)$, которая также будет решением нормальной формы (12) (и укороченной нормальной формы (13)). Следовательно, справедливо равенство

$$\exp(i\beta)z'_s = \varphi(\exp(i\beta)z, \exp(-i\beta)\bar{z}, \varepsilon)$$

или

$$\exp(i\beta)\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = \varphi(\exp(i\beta)z, \exp(-i\beta)\bar{z}, \varepsilon).$$

Из последнего равенства и вытекает нужное свойство функции $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$. ddd

Замечание 1. Пусть для непрерывно дифференцируемой функции $F(p, q)$ справедливо равенство

$$\exp(i\beta)F(p, q) = F(\exp(i\beta)p, \exp(-i\beta)q),$$

где β — произвольное действительное число. Тогда производные от обеих частей по β совпадают и при $\beta = 0$ в том числе. Следовательно, справедливо равенство (после сокращения на i)

$$F(p, q) = p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с частными производными имеет общее решение $F(p, q) = pF_0(pq)$, где $F_0(\xi)$ — также непрерывно дифференцируемая функция. Следовательно, при $p = z$, $q = \bar{z}$ получаем

$$F(z, \bar{z}) = zF_0(z\bar{z}) = zF_0(|z|^2).$$

Далее определим в явном виде правую часть «укороченной» нормальной формы (13).

Для определения правых частей равенств (11)–(13) получим следующие линейные неоднородные краевые задачи, которые позволят определить ψ , v_2 , v_3 . Для дальнейшего определения остальных слагаемых процесс следует продолжить.

Итак, для определения v_2 получим линейную неоднородную краевую задачу

$$A_0 v_2 = a_2(v_1^2)_y, \tag{14}$$

$$v_2(y + 2\pi, z, \bar{z}) = v_2(y, z, \bar{z}), \quad M_0(v_2) = M_{\pm 1}(v_2) = 0, \tag{15}$$

которая однозначно разрешима в рассматриваемом классе функций W . Напомним, что

$$A_0 v_2 = -v_2 y y y y - v_2 y y,$$

а переменную z в краевой задаче (14)–(15) интерпретируем как параметр. В результате стандартного анализа обыкновенного дифференциального уравнения (14) с учетом условий (15) получаем, что решение этой краевой задачи имеет следующий вид:

$$v_2 = v_2(y, z, \bar{z}) = \eta_2 z^2 q^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}^2 \bar{q}^2, \quad \eta_2 = -i \frac{a_2}{6}.$$

На третьем шаге получаем линейную неоднородную краевую задачу для определения функции $v_3(y, z, \bar{z}) \in W$, которую можно записать в следующем виде:

$$A_0 v_3 = F_3(y, z, \bar{z}), \tag{16}$$

$$v_3(y + 2\pi, z, \bar{z}) = v_3(y, z, \bar{z}), \quad M_0(v_3) = M_{\pm 1}(v_3) = 0, \tag{17}$$

где

$$F_3(y, z, \bar{z}) = -A_1(zq + \bar{z}\bar{q}) + 2a_2(v_1 v_2)_y + a_3(v_1^3)_y + \psi(z, \bar{z})q + \bar{\psi}(z, \bar{z})\bar{q}.$$

В отличие от краевой задачи (14)–(15), где условия разрешимости в классе функций из W были выполнены, у краевой задачи (16)–(17) выполнение соответствующих условий разрешимости ($M_0(F_3) = M_{\pm 1}(F_3) = 0$) обеспечивает выбор функций $\psi, \bar{\psi}$. Вычисление соответствующих интегралов показало, что

$$\psi(z, \bar{z}) = (1 + i\sigma_0)z + (l_1 + il_2)z|z|^2,$$

где $l_1 = -a_2^2/3$, $l_2 = -3a_3$. При этом $\psi_0(|z|^2) = (1 + i\sigma_0) + (l_1 + il_2)|z|^2$.

Замечание 2. Случай общего положения предполагает выполнение условия $l_1 \neq 0$, т.е. $a_2 \neq 0$. Далее будем предполагать, что $a_2 = g_2 + 3g_3c \neq 0$. Если $l_1 = 0$ ($a_2 = 0$), то тогда реализацию алгоритма следует продолжить и несколько скорректировать.

При выполнении условий разрешимости стандартным образом можно найти решения краевой задачи (16)–(17):

$$v_3(y, z, \bar{z}) = \eta_3 z^3 q^3 + \bar{\eta}_3 \bar{z}^3 \bar{q}^3, \quad \eta_3 = -\frac{1}{72}(a_2^2 + 3a_3 i).$$

Рассмотрим сначала нормальную форму (13), т.е. уравнение

$$z'_s = (1 + i\sigma_0)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \quad (18)$$

у которого нетрудно найти состояние равновесия, если выбрать σ_0 соответствующим образом.

Лемма 3. Дифференциальное уравнение (18) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия S_0 : $z(s) = \xi_0 \exp(i\nu)$, если $\sigma_0 = l_2/l_1 = 9a_3/a_2^2$. Здесь $\xi_0 = \sqrt{3}/|a_2|$, а ν — произвольная действительная постоянная. Это семейство состояний равновесия — глобальный аттрактор для решений дифференциального уравнения (18).

Доказательство леммы 3 достаточно стандартно. Кратко изложим его в одном из возможных вариантов.

Положим в уравнении (18)

$$z(s) = \rho(s) \exp(i\Theta(s)).$$

Тогда получаем систему

$$\rho'_s = \rho + l_1 \rho^3, \quad \Theta'_s = \sigma_0 + l_2 \rho^2. \quad (19)$$

Первое уравнение системы дифференциальных уравнений (19) имеет состояние равновесия $\rho = \xi_0 = \sqrt{-1/l_1} = \sqrt{3}/|a_2|$. Все решения этого уравнения с положительными начальными условиями стремятся к ξ_0 при $s \rightarrow \infty$. Отметим, что первое уравнение системы (19) — это уравнение Бернулли; его решения можно найти в явном виде и проверить таким образом последнее замечание.

Если теперь подставить $\rho = \xi_0$ в правую часть второго уравнения системы (19), то при $\sigma_0 = -l_2 \xi_0^2 = 9a_3/a_2^2$ получим, что $\Theta'_s = 0$ и, следовательно, $\Theta = \nu$, ν — произвольная действительная постоянная.

Перейдем теперь к вопросу о существовании ненулевого состояния равновесия у «полной» нормальной формы, т.е. дифференциального уравнения (12). Это приводит к вопросу о существовании решения у комплексного уравнения

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = 0. \quad (20)$$

Левую часть уравнения (20) в силу гладкости функции $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ по совокупности переменных можно записать в виде

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = \psi(z, \bar{z}) + \varepsilon \chi_1(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\psi_0(|z|^2) + \varepsilon z\chi_0(|z|^2, \varepsilon),$$

где

$$\psi_0(|z|^2) = (1 + i\sigma) + (l_1 + il_2)|z|^2, \quad \chi_0(|z|^2, \varepsilon)$$

— гладкая функция переменных $|z|^2, \varepsilon$. Напомним, что при определении функции ψ_0 коэффициент σ будет определен ниже, и $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon)$, где σ_0 было определено ранее при приближенных вычислениях с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ включительно. Теперь уравнение (20) приобретает вид

$$(1 + i\sigma)z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + \varepsilon z\chi_0(|z|^2, \varepsilon) = 0.$$

После сокращения на z ($z \neq 0$) получаем уравнение для определения $z = z(s)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon)$:

$$(1 + i\sigma) + (l_1 + il_2)|z|^2 = -\varepsilon\chi_0(|z|^2, \varepsilon). \quad (21)$$

Положим теперь $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon)$ и отметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (21) имеет решение

$$z = z(0) = \xi_0 \exp(i\nu), \quad \xi_0 = \sqrt{-\frac{1}{l_1}} = \frac{\sqrt{3}}{|a_2|}, \quad \sigma = \sigma_0 = \frac{l_2}{l_1}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Решение уравнения (21) при малых ε можно искать в виде

$$z(\varepsilon) = \xi_0 \exp(i\nu)(1 + w(\varepsilon)), \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon), \quad (22)$$

где $w(\varepsilon), \Phi(\varepsilon)$ — действительные функции параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $w(0) = 0$, $\Phi(0) = 0$, ν — произвольная действительная постоянная. В результате подстановки равенств (22) в уравнение (21) после преобразований получим уравнение для определения $w(\varepsilon), \Phi(\varepsilon)$:

$$i\Phi - \left(1 + i\frac{l_2}{l_1}\right)(2w + w^2) = -\varepsilon\chi_2(w, \varepsilon).$$

Если теперь в этом уравнении разделить действительные и мнимые части, то получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} (2w + w^2) - \varepsilon\chi_3(w, \varepsilon) &= 0, \\ \frac{l_2}{l_1}(2w + w^2) - \Phi - \varepsilon\chi_4(w, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\chi_3(w, \varepsilon) = \operatorname{Re} \chi_2(w, \varepsilon)$, $\chi_4(w, \varepsilon) = \operatorname{Im} \chi_2(w, \varepsilon)$. Сразу отметим, что при $\varepsilon = 0$ система (23) имеет решение $w = \Phi = 0$. Кроме того, матрица Якоби левых частей системы (23), вычисленная при $\varepsilon = w = \Phi = 0$, имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2\frac{l_2}{l_1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det J = -2 \neq 0$, что гарантирует применимость теоремы о неявных функциях. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нормальная форма (12) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия*

$$S(\varepsilon) : \quad z(\varepsilon) = \xi(\varepsilon) \exp(i\nu), \quad \xi(\varepsilon) = \xi_0(1 + w(\varepsilon)),$$

где ν — произвольная действительная постоянная, если при этом $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, $\sigma(0) = \sigma_0 = 9a_3/a_2^2$. При этом одномерное инвариантное многообразие $S(\varepsilon)$ нормальной формы (12) — локальный аттрактор для решений дифференциального уравнения (12), которые находятся в малой окрестности $S(\varepsilon)$. Все состояния равновесия, принадлежащие $S(\varepsilon)$, устойчивы, но, естественно, не могут быть асимптотически устойчивыми.

Построения раздела 4 дают основание перенести результаты анализа нормальных форм (12) и (13) на краевую задачу (9)–(10), а также основную краевую задачу (1)–(2), если в ней параметр b выбран как $1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

5. Основное утверждение. Из результатов работ [6, 24] и методики работ [7–9, 22], где были рассмотрены иные, но во многом аналогичные вопросы, вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что семейству состояний равновесия $S(\varepsilon)$ нормальной формы (12) соответствует одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$ краевой задачи (9)–(10). Это многообразие образовано пространственно неоднородными состояниями равновесия*

$$v = w(y + \nu, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \cos(y + \nu) + 2\varepsilon\xi_0^2\gamma_2 \sin(2y + 2\nu) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (24)$$

где $\xi_0 = \sqrt{3}/|a_2|$ (см. анализ нормальной формы (13)), $\gamma_2 = a_2/6$, ν — произвольная действительная постоянная. Краевая задача $\ddot{E}(9)$ –(10) имеет одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$, сформированное решениями (24). Это многообразие является локальным аттрактором для решений краевой задачи (9)–(10), а заполняющие его состояния равновесия устойчивы в метрике фазового пространства решений краевой задачи (9)–(10), т.е. в норме пространства H^4 .

Подчеркнем, что формула (24) — это действительная форма решений, принадлежащих $V_1(\varepsilon)$.

Следствие 1. Пусть в краевой задаче (1)–(2) $b = 1 + \varepsilon$. Тогда однопараметрическому семейству (24) (одномерному инвариантному многообразию $V_1(\varepsilon)$) краевой задачи (9)–(10) соответствует двумерное инвариантное многообразие $V_2(c, \varepsilon)$ краевой задачи (1)–(2). Оно заполнено решениями, которые имеют структуру бегущих волн:

$$u(t, x, \nu, c, \varepsilon) = u(x + \omega(c, \varepsilon)t + \nu, c, \varepsilon) = c + w(x + \omega(c, \varepsilon)t + \nu, \varepsilon). \quad (25)$$

Если теперь воспользоваться записью второго слагаемого в правой части (25) в приближенном виде (24), то решение краевой задачи (1)–(2) можно записать иначе:

$$u_0(t, x, \nu, c, \varepsilon) = c + w_0(x + \omega_0(c)t + \nu, \varepsilon), \quad (26)$$

где теперь $\omega_0(c) = a(c)$ и

$$w_0(x + \omega_0(c)t + \nu, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \cos(x + \omega_0(c)t + \nu).$$

В формуле (26) выписана «главная» часть равенства (25).

Формула (26) будет далее использована при изучении вопросов, связанных с устойчивостью бегущих волн. Подчеркнем, что инвариантное многообразие $V_2(c, \varepsilon)$ — локальный аттрактор. Исследуем вопрос, связанный с устойчивостью решений (бегущих волн), принадлежащих $V_2(c, \varepsilon)$.

Теорема 2. Решения (25) неустойчивы в смысле определения Ляпунова, но устойчивы в смысле определения Перрона и Пуанкаре (см. соответствующие определения и утверждения в [11–13]).

Замечание 3. Проверка устойчивости или неустойчивости предполагает использование нормы фазового пространства, т.е. в нашем случае нормы пространства H^4 .

Доказательство. Пусть выбраны два решения краевой задачи (1)–(2), рассматриваемой при $b = 1 + \varepsilon$, имеющие структуру бегущих волн и принадлежащие $V_2(c, \varepsilon)$, т.е. рассмотрим две функции

$$u_1 = u_1(x + \omega(c_1, \varepsilon)t + \nu_1, c_1, \varepsilon), \quad u_2 = u_2(x + \omega(c_2, \varepsilon)t + \nu_2, c_2, \varepsilon),$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и при выбранном далее (фиксированном) ε рассмотрим соответствующие им «главные» части

$$u_{01}(t, x, \varepsilon) = c_1 + w_0(x + \omega_0(c_1)t + \nu_1, \varepsilon) + O(\varepsilon),$$

$$u_{02}(t, x, \varepsilon) = c_2 + w_0(x + \omega_0(c_2)t + \nu_2, \varepsilon) + O(\varepsilon),$$

где, как и ранее, $\omega_0(c_1) = a(c_1)$, $\omega_0(c_2) = a(c_2)$. Напомним, что

$$u_{01}(t, x, \varepsilon) = c_1 + 2\xi_0\varepsilon^{1/2} \cos(x + \omega_0(c_1)t + \nu_1),$$

$$u_{02}(t, x, \varepsilon) = c_2 + 2\xi_0\varepsilon^{1/2} \cos(x + \omega_0(c_2)t + \nu_2).$$

Далее, $\omega_{10} = \omega_0(c_1)$, $\omega_{20} = \omega_0(c_2)$.

Пусть разность $c_1 - c_2 = \varepsilon\delta_1 \neq 0$ нормирована с использованием бифуркационного параметра ε ; при доказательстве теоремы 2 его можно и следует считать фиксированным. Тогда получаем, что

$$\omega_0 = \omega_{10} - \omega_{20} = \varepsilon^{1/2}\delta_1\delta_2,$$

где $\delta_2 = 2g_2 + 3g_3(c_1 + c_2)$. В ситуации общего положения $\delta_2 \neq 0$ и, следовательно, $\omega_0 \neq 0$, если c_1, c_2 выбраны соответствующим образом.

Пусть $Q(t, x) = u_{01}(t, x, \varepsilon) - u_{02}(t, x, \varepsilon)$. Следовательно, $Q_\Delta(t) = \|Q\|_{H^4}$ — функция, которая зависит только от t , но не зависит от x . Учитывая, что

$$Q = Q(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\delta_1 + 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \left[\cos(x + \omega_{10}t + \nu_1) - \cos(x + \omega_{20}t + \nu_2) \right]$$

и проводя элементарные вычисления, получаем

$$\|Q\|_{H^0}^2 = \varepsilon(2\pi\delta_1^2 + \Lambda_0^2(t)),$$

где

$$\Lambda_0^2(t) = 16\xi_0^2\pi \sin^2(\delta_3 t + \nu_0), \quad \nu_0 = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1), \quad \delta_3 = \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\delta_1\delta_2 \neq 0.$$

Отсюда

$$\|Q\|_{H^4}^2 = \varepsilon(2\pi\delta_1^2 + 5\Lambda_0^2(t)).$$

В результате получаем

$$Q_\Delta^2(t) = 2\varepsilon\pi\left(\delta_1^2 + 40\xi_0^2 \sin^2(\delta_3 t + \nu_0)\right). \quad (27)$$

Стандартный анализ равенства (27) показывает, что справедливо утверждение.

Лемма 5. *Существует последовательности $\{t_n\}$, $\{t_k\}$, обладающие следующими свойствами:*

- (i) $t_n, t_k > 0$, если $n \geq n_0, k \geq k_0$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t_k) = 2\pi\varepsilon\delta_1^2$ ($\delta_1 \neq 0$);
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t_n) = Q_0 \geq 80\varepsilon\pi\xi_0^2 = \frac{240\varepsilon\pi}{a_2^2}$.

Из (ii), (iii) вытекают предельные соотношения

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t) = 2\pi\varepsilon\delta_1^2 \xrightarrow{\delta_1 \rightarrow 0} 0; \quad (28)$$

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t) \geq \frac{240\varepsilon\pi}{a_2^2} > 0, \quad (29)$$

т.е. верхний предел больше величины, которая не зависит от δ_1 .

При доказательстве леммы 5 центральное место занимает анализ тригонометрических уравнений

$$\sin^2(\delta_3 t + \nu_0) = 0, \quad \sin^2(\delta_3 t + \nu_0) = 1,$$

т.е.

$$t_k = \frac{\pi k - \nu_0}{\delta_3}, \quad t_n = \frac{2\pi n + \pi - 2\nu_0}{2\delta_3}, \quad t_k \rightarrow \infty,$$

если $k \rightarrow \infty$, и $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $\delta_3 > 0$. Отметим, что без нарушения общности можно считать справедливым неравенство $\delta_3 > 0$. Если оказалось, что $\delta_2 > 0$, то выбираем $\delta_1 = c_1 - c_2 > 0$ ($c_1 > c_2$) и, напротив, если $\delta_2 < 0$, то выбираем $\delta_1 < 0$ ($c_1 < c_2$). Без нарушения общности можно считать, что $c_1 > c_2$ или, наоборот, $c_1 < c_2$. Особо подчеркнем, что верхний предел не зависит от выбора δ_1 , а нижний предел может быть достаточно мал, если, в свою очередь, δ_1 и ε малы.

Из определений и утверждений работ [11–13] вытекают следующие утверждения.

- (а) любое из решений краевой задачи (1)–(2) при $b = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, принадлежащее $V_2(c, \varepsilon)$, неустойчиво в смысле определений Ляпунова (см. верхний предел (29));
- (б) из равенств (28) вытекает, что любое решение, принадлежащее $V_2(c, \varepsilon)$, устойчиво в смысле определения устойчивости по Перрону;
- (с) эти решения устойчивы по Пуанкаре (орбитально устойчивы). Последнее утверждение вытекает из того, что периодические по эволюционной переменной решения, устойчивые по Перрону, устойчивы и по Пуанкаре (см. [11–13]).

Добавим, что все эти решения из двупараметрического семейства, образующего двумерные инвариантные многообразия $V_2(c, \varepsilon)$, суть периодические функции t ; следовательно, из утверждений монографии [10] вытекает, что из их устойчивости по Пуанкаре (орбитальной устойчивости) вытекает устойчивость по Жуковскому.

Подчеркнем, что выше речь шла об устойчивости по Перрону, но не об асимптотической устойчивости по Перрону. Аналогичные замечания относятся к устойчивости по Пуанкаре и Жуковскому. $\square$

6. Заключение. В работе показано, что при $b = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$) у краевой задачи (1)–(2) существуют двумерные инвариантные многообразия $V_2(c, \varepsilon)$, заполненные при каждом из таких ε решениями, имеющими структуру периодических бегущих волн. Задача о существовании и свойствах бегущих волн была сведена к задаче о локальных бифуркациях в близком к критическому случае двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости однородного состояния равновесия изучаемой краевой задачи. Их периодичность по x естественна, так как рассматривается периодическая краевая задача. Вместе с этим эти решения периодические функции переменной t и их период по t зависит от выбора c , т.е. пространственно однородного состояния равновесия, в окрестности которого существуют решения, принадлежащие $V_2(c, \varepsilon)$. Можно отметить, что периоды найденных t -периодических решений $T = T(c, \varepsilon)$ в любом случае заполняют интервал бесконечной длины. Более того, можно привести варианты, когда $T(c, \varepsilon)$ — это любое положительное число. Так, например, будет, если $g_3 = 0$ и $g_2 \neq 0$. Естественно, нетрудно найти варианты, когда частота $\omega(c, \varepsilon) = 0$. В этом случае полученные решения не будут бегущими волнами, а будут ненулевыми состояниями равновесия рассматриваемой краевой задачи (1)–(2). Более того, как правило, можно указать значения параметров первоначального уравнения (1) (например, $g_3 = 0$), когда период построенных решений будет близок к нулю или, напротив, сколь угодно велик.

Двупараметрическое семейство решений, образующих $V_2(c, \varepsilon)$, если следовать терминологии, характерной для ряда разделов физики (см., например, [14]), могут быть проинтерпретированы как «пакет бегущих волн». Действительно, частоты решений краевой задачи, принадлежащих двумерному многообразию $V_2(c, \varepsilon)$, как правило, различны.

Вопрос о существовании двупараметрического семейства бегущих волн, устойчивость многообразий, образованных ими, был исследован на основе применения методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Отметим особо, что бегущие волны неустойчивы в смысле определения Ляпунова, хотя они принадлежат аттрактору. Для них характерна устойчивость по Перрону, Пуанкаре и Жуковскому. Последние три определения достаточно часто более содержательны при изучении устойчивости решений, отличных от состояний равновесия, например, бегущих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2002.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
8. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в периодической краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского// Автомат. телемех. — 2017. — 11. — С. 20–33.
9. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хиллиарда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 4. — С. 670–683.
10. Леонов Г. А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2006.
11. Сергеев И. Н. О непрерывности показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости систем, задающих повороты плоскости// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 6. — С. 842–856.
12. Сергеев И. Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 5. — С. 636–646.

13. *Сергеев И. Н.* Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 10. — С. 1338–1346.
14. *Скотт Э.* Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. — М.: Физматлит, 2007.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
16. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
17. *Barker B., Johnson M. A., Noble P., Rodrigues L. M., Zumbrun K.* Nonlinear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Phys. D. — 2013. — 258. — P. 11–46.
18. *Bradley R. M., Gelfand M. P.* One-dimensional conservative surface dynamics with broken parity: Arrested collapse versus coarsening// Phys. Lett. A. — 2015. — 379, № 3. — P. 199–205.
19. *Bradley R. M., Harper J. M. E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Techn. A. — 1988. — 6, № 4. — P. 2390–2395.
20. *Bradley R. M., Loew K. M.* Effect of dispersion on the nanoscale patterns produced by ion sputtering// Phys. Rev. E. — 2019. — 100. — 012801.
21. *Kulikov A. N.* Inertial invariant manifolds of a nonlinear semigroup of operators in a Hilbert space// J. Math. Sci. — 2024. — 283, № 3. — P. 402–411.
22. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Spatially inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto–Sivashinsky equation// J. Math. Sci. — 2016. — 219, № 2. — P. 173–183.
23. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
24. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
25. *Noble P., Rodrigues L. M.* Whitham’s modulation equations and stability of periodic wave solutions of the Korteweg–de Vries–Kuramoto–Sivashinsky equation// Indiana Univ. Math. J. — 2013. — 62, № 3. — P. 753–783.
26. *Sivashinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flows// Phys. D. — 1985. — 17. — P. 243–255.
27. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New York: Springer-Verlag, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatol'evich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: supfro@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 38–44
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-38-44

УДК 517.957

ФОРМИРОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

© 2025 г. Н. Т. ЛЕВАШОВА

Аннотация. Рассматривается система уравнений, описывающая протекание двухкомпонентной химической реакции в ограниченном объеме. Предполагается, что реакция происходит в растворе, концентрация продуктов реакции в нем со временем увеличивается, затем происходит насыщение, т.е. концентрация продуктов реакции становится максимально возможной при данных условиях, после чего реакция останавливается. С помощью подобной постановки можно описывать микроскопические процессы, происходящие при закачке CO_2 в породу, представляющую собой пористую среду с порами, заполненными водой. Для системы двух уравнений типа «реакция-диффузия» на отрезке показано, что за конечное время из заданной начальной функции формируется решение, близкое к стационарному распределению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при данных условиях.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, уравнение реакция-диффузия, формирование погранслоного решения, метод дифференциальных неравенств, дифференциальное включение.

FORMATION OF A BOUNDARY-LAYER SOLUTION IN A PROBLEM FOR A SYSTEM OF REACTION-DIFFUSION EQUATIONS IN A LIMITED VOLUME

© 2025 N. T. LEVASHOVA

ABSTRACT. We consider a system of equations that describes a two-component chemical reaction in a limited volume. The reaction is assumed to occur in a solution, the concentration of reaction products increases in time, then becomes maximal possible under the given conditions (i.e., saturation occurs), and then the reaction terminates. A similar formulation can be used for describing microscopic processes occurring when CO_2 is injected into a rock, which is a porous medium with pores filled with water. For a system of two equations of the “reaction-diffusion” type on a segment, we show that in a finite time, a solution close to a stationary distribution corresponding to the concentration of a saturated solution under given conditions is formed from a given initial function.

Keywords and phrases: singular perturbation, reaction-diffusion equation, formation of boundary-layer solution, method of differential inequalities, differential inclusion.

AMS Subject Classification: 35K60

1. Введение. Математическая постановка задачи, исследуемой в настоящей работе, является редуцированной до одномерного рассмотрения модельной задачей о насыщении водного раствора

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

в поровом пространстве породы, в которую производится закачка CO_2 . Утилизация двуокиси углерода, сопутствующей процессу добычи нефти и газа, входит, в частности, в экологические программы таких государств как Норвегия (хранилище Sleipner; см. [7]) и Австрия (проект Gorgon; см. [10]). До недавнего времени интерес к подобным проектам возникал и в нашей стране в контексте хранения CO_2 в пластах, расположенных в границах терригенных осадочных пород нефтегазоносных и угольных бассейнов (см. [6]). Процесс закачки и хранения CO_2 неизбежно сопровождается химическими реакциями внутри породы, приводящими в том числе к ее деструкции, однако этот процесс занимает десятилетия. Для прогнозирования условий безопасного хранения CO_2 в природных хранилищах требуется сочетание эксперимента и адекватных математически обоснованных моделей хранения. Одной из составляющих такой модели является задача о протекании процесса растворения химических компонент в воде, заполняющей поровое пространство породы, что приводит к постановке начально-краевой задачи для уравнения реакция-диффузия в ограниченном объеме.

В настоящей работе рассмотрена система двух уравнений типа «реакция-диффузия» на отрезке, решение которой стабилизируется к постоянному во времени распределению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при данных условиях. Показано, что за конечное время из заданной начальной функции формируется решение, близкое к стационарному распределению. Целью рассмотрения редуцированной одномерной постановки является определение основных особенностей, возникающих в ходе аналитического исследования решения задачи, в частности, доказательства теоремы существования указанного решения, для того, чтобы в дальнейшем использовать полученные результаты при рассмотрении трехмерной задачи моделирования реальных объектов.

Метод аналитического исследования процесса формирования предложен в [1]. Особенностью настоящей работы является наличие негладких нелинейных реактивных слагаемых в уравнениях «реакция-диффузия», что приводит к необходимости использования теории дифференциальных включений (см. [5]).

2. Постановка задачи. Рассматривается двухкомпонентная система уравнений, описывающая химические реакции, проходящие до состояния насыщения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \begin{cases} f(u, v, x, \varepsilon), & u < u_{\max}, \\ u_{\max} - u, & u \geq u_{\max}, \end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \begin{cases} g(u, v, x, \varepsilon), & v < v_{\max}, \\ v_{\max} - v, & v \geq v_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Здесь ε — малый параметр, имеющий смысл коэффициента диффузии, $T > 0$, u и v — концентрации реагирующих веществ, $u_{\max}$ и $v_{\max}$ — предельно допустимые значения концентраций, а функции f и g описывают химические реакции.

Исходя из физических соображений, потребуем выполнения следующих условий.

Условие 1. $0 \leq u^0(x) < u_{\max}$, $0 \leq v^0(x) < v_{\max}$, $x \in [0, 1]$.

Условие 2. $f(u, v, x, \varepsilon) > 0$, $g(u, v, x, \varepsilon) > 0$ всюду на множестве $\overline{\Omega} := \{(u, v, x, \varepsilon): u \in [0, u_{\max}], v \in [0, v_{\max}(x)], x \in [0, 1], \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$.

Кроме того потребуем, чтобы функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ были C^2 -гладкими в $\overline{\Omega}$, а $u^0(x)$, $v^0(x)$ — на отрезке $x \in [0, 1]$.

Вопрос о существовании решения у системы уравнений (1) с краевым условием Дирихле рассмотрен в работе [8], где доказано, существование решения из пространства $L_2((0, 1) \times (0, T))$ в случае существования верхнего $(\bar{u}, \bar{v})$ и нижнего $(\underline{u}, \underline{v})$ решений. Обобщение на случай граничных условий Неймана возможно согласно [3]. Заметим, что верхним и нижним решениями задачи (1) могут быть $(\bar{u}, \bar{v}) = (u_{\max}, v_{\max})$ и $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$.

Покажем, что за конечное время у задачи (1) формируется решение, удовлетворяющее оценке

$$u(x, t) = u_{\max}(x) + O(\varepsilon), \quad v(x, t) = v_{\max}(x) + O(\varepsilon),$$

которое будет находиться внутри области притяжения устойчивого стационарного решения задачи (1). Для доказательства будем использовать схему, предложенную в [1].

3. Задача вблизи начального момента времени. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \begin{cases} f(\tilde{u}, \tilde{v}, x, \varepsilon), & \tilde{u} < u_{\max}, \\ u_{\max} - \tilde{u}, & \tilde{u} \geq u_{\max}, \end{cases} & \tilde{v}_t &= \begin{cases} g(\tilde{u}, \tilde{v}, x, \varepsilon), & \tilde{v} < v_{\max}, \\ v_{\max} - \tilde{v}, & \tilde{v} \geq v_{\max}, \end{cases} & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]; \\ \tilde{u}(x, 0) &= u^0(x), & \tilde{v}(x, 0) &= v^0(x), & x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $x \in [0, 1]$ играет роль параметра.

Поскольку функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ строго положительны при $u < u_{\max}$, $v < v_{\max}$, то существуют значения t_u , при котором $\tilde{u} = u_{\max}$, и t_v , при котором $\tilde{v} = v_{\max}$. Далее будем считать, что $T > t_0$, где

$$t_0 = \max\{t_u, t_v\}. \quad (3)$$

Решение задачи (2) понимается в смысле дифференциальных включений; оно непрерывно на отрезке $t \in [0, T]$ и, кроме того, выполняются равенства

$$\tilde{u}(x, t) = u_{\max}, \quad \tilde{v}(x, t) = v_{\max} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (4)$$

(см. [5]).

3.1. Задачи для производных $\tilde{u}_x$, $\tilde{v}_x$, $\tilde{u}_{xx}$, $\tilde{v}_{xx}$. Определим функции $\tilde{u}_x(x, t)$, $\tilde{v}_x(x, t)$ как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t} &= \begin{cases} f_u(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{u}_x + f_v(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{v}_x + f_x(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon), & t < t_u, \\ 0, & t \geq t_u, \end{cases} \\ \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} &= \begin{cases} g_u(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{u}_x + g_v(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{v}_x + g_x(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon), & t < t_v, \\ 0, & t \geq t_v, \end{cases} & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]; \\ \tilde{u}_x(x, 0) &= u_x^0(x), \quad \tilde{v}_x(x, 0) = v_x^0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (5)$$

Производные $\tilde{u}_{xx}(x, t)$, $\tilde{v}_{xx}(x, t)$ определим как решения задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{xx}}{\partial t} &= \begin{cases} f_u \tilde{u}_{xx} + f_v \tilde{v}_{xx} + f_{d2}(x, t), & t < t_u, \\ 0, & t \geq t_u, \end{cases} \\ \frac{\partial \tilde{v}_{xx}}{\partial t} &= \begin{cases} g_u \tilde{u}_{xx} + g_v \tilde{v}_{xx} + g_{d2}(x, t), & t < t_v, \\ 0, & t \geq t_v, \end{cases} & x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]; \\ \tilde{u}_{xx}(x, 0) &= u_{xx}^0(x), \quad \tilde{v}_{xx}(x, 0) = v_{xx}^0(x), \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_{d2}(x, t) &:= f_{xx} + f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + 2f_{ux}u_x + 2f_{vx}v_x + f_{vv}v_x^2, \\ g_{d2}(x, t) &:= g_{xx} + g_{uu}u_x^2 + 2g_{uv}u_xv_x + 2g_{ux}u_x + 2g_{vx}v_x + g_{vv}v_x^2, \end{aligned}$$

а производные функций f и g берутся при $((\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t), x, t, \varepsilon))$.

Решения задач (5) и (6) понимаются в терминах дифференциальных включений. Каждая из задач имеет единственное решение, непрерывное для каждого значения параметра $x \in [0, 1]$ по переменной $t \in [0, T]$ (см. [5]).

При $t \in (0, \min\{t_u, t_v\})$ каждая из систем уравнений (5) и (6) является линейной с непрерывными ограниченными коэффициентами, поэтому существует такое $p > 0$, что справедливы оценки (см. [2])

$$|\tilde{u}_x| \leq Ce^{pt}, \quad |\tilde{v}_x| \leq Ce^{pt}, \quad |\tilde{u}_{xx}| \leq Ce^{pt}, \quad |\tilde{v}_{xx}| \leq Ce^{pt}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, \min\{t_u, t_v\}), \quad (7)$$

где $C > 0$ — константа.

3.2. *Пограничные функции.* Введем функции

$$\begin{aligned} Ru(x, t, \varepsilon) &:= \tilde{u}_x(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}_x(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon}, \\ Rv(x, t, \varepsilon) &:= \tilde{v}_x(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{v}_x(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Составим суммы

$$U(x, t, \varepsilon) = \tilde{u}(x, t) + \varepsilon Ru(x, t, \varepsilon), \quad V(x, t, \varepsilon) = \tilde{v}(x, t) + \varepsilon Rv(x, t, \varepsilon).$$

Далее покажем, что при $t \geq t_0$ пара функций $(U(x, t, \varepsilon), V(x, t, \varepsilon))$ будет отличаться от точного решения $(u(x, t), v(x, t))$ задачи (1) на величину порядка ε по норме в пространстве C .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} L_u[U, V] &:= \frac{\partial U}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - u_{\max} + U = \\ &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial t}(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial t}(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon} - \varepsilon^2 \tilde{u}_{xx}(x, t) - \\ &- \varepsilon \left(\tilde{u}_x(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}_x(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon} \right) - \begin{cases} f(U, V, x, \varepsilon), & \tilde{u}(x, t) < u_{\max}, \\ -u_{\max} + \tilde{u}(x, t) + \varepsilon Ru(x, t, \varepsilon), & \tilde{u}(x, t) \geq u_{\max}, \end{cases} \\ L_v[U, V] &:= \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - v_{\max} + V = \\ &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x, t) + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t}(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial t}(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon} - \varepsilon^2 \tilde{v}_{xx}(x, t) - \\ &- \varepsilon \left(\tilde{v}_x(0, t) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{v}_x(1, t) \exp\frac{x-1}{\varepsilon} \right) - \begin{cases} g(U, V, x, \varepsilon), & \tilde{v}(x, t) < v_{\max}, \\ -v_{\max} + \tilde{v}(x, t) + \varepsilon Rv(x, t, \varepsilon), & \tilde{v}(x, t) \geq v_{\max}. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая оценки (7) и уравнения (2), заключаем, что найдется такая величина $p_0 > 0$, что для всех $x \in [0, 1]$ будут справедливы оценки

$$L_u[U, V] = \varepsilon C_1 e^{p_0 t}, \quad L_v[U, V] = \varepsilon C_1 e^{p_0 t}.$$

3.3. *Оценка невязки.* Пусть $(u(x, t), v(x, t))$ — решение задачи (1). Сделаем замену

$$u = U(x, t, \varepsilon) + w_1(x, t)e^{p^* t}, \quad v = V(x, t, \varepsilon) + w_2(x, t)e^{p^* t},$$

где

$$p^* = \max \{p, p_0, \max |f_u| + \max |g_u|, \max |f_v| + \max |g_v|\}. \quad (8)$$

Отметим, что функции $w_{1,2}(x, t)$, как и решение $(u(x, t), v(x, t))$ задачи (1), принадлежат пространству $L_2((0, 1) \times (0, T))$. Подставив решение в таком виде в задачу (1) и применив формулу конечных приращений в интегральной форме, можно получить следующую задачу для функций $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + p^* w_1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} &= \begin{cases} h_1(w_1, w_2, x, t, \varepsilon)w_1 + \\ + h_2(w_1, w_2, x, t, \varepsilon)w_2 + \\ + \varepsilon C_1 e^{(p_0 - p^*)t}, & w_1(x, t) < (u_{\max} - U)e^{-p^* t}, \\ -w_1 + \varepsilon C_1 e^{(p_0 - p^*)t}, & w_1(x, t) \geq -\varepsilon Ru(x, t, \varepsilon)e^{-p^* t}, \end{cases} \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + p^* w_2 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} &= \begin{cases} h_3(w_1, w_2, x, t, \varepsilon)w_1 + \\ + h_4(w_1, w_2, x, t, \varepsilon)w_2 + \\ + \varepsilon C_1 e^{(p_0 - p^*)t}, & w_2(x, t) < (v_{\max} - V)e^{-p^* t}, \\ -w_2 + \varepsilon C_1 e^{(p_0 - p^*)t}, & w_2(x, t) \geq -\varepsilon Rv(x, t, \varepsilon)e^{-p^* t}, \end{cases} \quad (9) \\ \frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ w_1(x, 0) &= 0, \quad w_2(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} h_1(w_1, w_2, x, t, \varepsilon) &:= \int_0^1 f_u(U + sw_1e^{p^*t}, V, x, \varepsilon) ds, \\ h_2(w_1, w_2, x, t, \varepsilon) &:= \int_0^1 f_v(U + w_1e^{p^*t}, V + sw_2e^{p^*t}, x, \varepsilon) ds, \\ h_3(w_1, w_2, x, t, \varepsilon) &:= \int_0^1 g_u(U + sw_1e^{p^*t}, V, x, \varepsilon) ds, \\ h_4(w_1, w_2, x, t, \varepsilon) &:= \int_0^1 g_v(U + w_1e^{p^*t}, V + sw_2e^{p^*t}, x, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума, доказанному в [4], для решения $(w_1(x, t), w_2(x, t))$ системы (9) из пространства $L_2((0, 1) \times (0, T))$ выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left\| (1 + (h_1 - p^* + h_3)(x^2 - 2x))w_1(x, t) + \right. \\ &\quad \left. + (1 + (h_2 - p^* + h_4)(x^2 - 2x))w_2(x, t) \right\|_{L_\infty((0, 1) \times (0, T))} = O(\varepsilon), \\ &\quad \text{если } w_1 < (u_{\max} - U)e^{-p^*t}, \quad w_2 < (v_{\max} - V)e^{-p^*t}, \quad (10) \\ &\|w_1(x, t)\|_{L_\infty((0, 1) \times (0, T))} = O(\varepsilon), \quad \text{если } w_1 > -\varepsilon Ru(x, t, \varepsilon)e^{-p^*t}, \\ &\|w_2(x, t)\|_{L_\infty((0, 1) \times (0, T))} = O(\varepsilon), \quad \text{если } w_2 > -\varepsilon Rv(x, t, \varepsilon)e^{-p^*t}. \end{aligned}$$

Из этих оценок непосредственно следует, что ни одна из функций $w_{1,2}(x, t)$ не может превосходить положительного значения порядка, большего, чем $O(\varepsilon)$.

Тот факт, что эти функции не могут принимать отрицательных значений, по абсолютной величине порядка, большего, чем $O(\varepsilon)$, следует из оценки (10) и выбора константы p^* (см. (8)), поскольку под знаком модуля оказываются выражения одного знака.

Итак, справедливы оценки

$$u(x, t) = U(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p^*t}, \quad v(x, t) = V(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p^*t}.$$

При $t = t_0$ имеем:

$$u(x, t) = u_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad v(x, t) = v_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}.$$

4. Стабилизация. При $t \geq t_0$ решение $(u(x, t), v(x, t))$ задачи (1) совпадает с решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \begin{cases} f(u, v, x, \varepsilon), & u < u_{\max}, \\ u_{\max} - u, & u \geq u_{\max}, \end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \begin{cases} g(u, v, x, \varepsilon), & v < v_{\max}, \\ v_{\max} - v, & v \geq v_{\max}, \end{cases} \quad x \in (0, 1), \quad t \in (t_0, T]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \\ u_{\text{init}} = u(x, t_0) &= u_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad v_{\text{init}} = v(x, t_0) = v_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что если $u_{\text{init}}(x) \geq u_{\max}$ и $v_{\text{init}}(x) \geq v_{\max}$, то задача (1) распадается на две линейные задачи, с единственным стационарным устойчивым решением $u_{\max}$ или $v_{\max}$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $u_{\text{init}}(x) < u_{\max}$ или $v_{\text{init}}(x) < v_{\max}$. В этом случае верхним решением задачи (11) в смысле классического определения (см. [9]) является пара функций $(u_{\max}, v_{\max})$. Эта же пара функций является стационарным решением задачи (1).

Нижним решением задачи (11) является пара функций

$$\begin{aligned} \underline{U}_t(x, t, \varepsilon) &= u_{\max} - \varepsilon \left(\mu_u + \varepsilon \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \exp\frac{x-1}{\varepsilon} \right) e^{-\lambda t}, \\ \underline{V}_t(x, t, \varepsilon) &= v_{\max} - \varepsilon \left(\mu_v + \varepsilon \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \exp\frac{x-1}{\varepsilon} \right) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (12)$$

Нижнее решение также можно понимать в классическом смысле, поскольку $U_t(x, t, \varepsilon) < u_{\max}$, $V_t(x, t, \varepsilon) < v_{\max}$ при любых $(x, t) \in [0, 1] \times [0, T]$.

При достаточно больших значениях μ_u , μ_v функции $u_{\text{init}}(x)$ и $v_{\text{init}}(x)$ будут удовлетворять неравенствам

$$\underline{U}_t(x, 0, \varepsilon) \leq u_{\text{init}}(x) \leq u_{\max}, \quad \underline{V}_t(x, 0, \varepsilon) \leq v_{\text{init}}(x) \leq v_{\max}.$$

Поскольку при всех $(x, t) \in [0, 1] \times [t_0, T]$ решение $(u(x, t), v(x, t))$ задачи (11) удовлетворяет неравенствам

$$\underline{U}_t(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t) \leq u_{\max}, \quad \underline{V}_t(x, t, \varepsilon) \leq v(x, t) \leq v_{\max}$$

(см. [9]), то, принимая во внимание соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{U}_t = u_{\max}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{V}_t = v_{\max},$$

к приходим к предельным равенствам

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(x, t) - u_{\max}| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |v(x, t) - v_{\max}| = 0.$$

Учитывая единственность решения задачи (11) в случае, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $u_{\text{init}}(x) < u_{\max}$ или $v_{\text{init}}(x) < v_{\max}$ (см. [9]), приходим к выводу, что $(u_{\max}, v_{\max})$ является единственным асимптотически устойчивым решением задачи (11).

5. Основной результат. Основным результатом исследования является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда для решения $(u(x, t), v(x, t))$ задачи (1) выполняются предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(x, t) - u_{\max}\|_{L_2((0,1) \times (0,T))} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(x, t) - v_{\max}\|_{L_2((0,1) \times (0,T))} = 0. \quad (13)$$

6. Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \begin{cases} -ku + Q, & u < u_{\max}, \\ -u + u_{\max}, & u \geq u_{\max}, \end{cases} \quad u_{\max} < Q/k, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \begin{cases} kv, & v < v_{\max}, \\ -v + v_{\max}, & v \geq v_{\max}, \end{cases} \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T]; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \begin{cases} -k\tilde{u} + Q, & \tilde{u} < u_{\max}, \\ -\tilde{u} + u_{\max}, & \tilde{u} \geq u_{\max}, \end{cases} \quad \tilde{v}_t = \begin{cases} k\tilde{v}, & \tilde{v} < v_{\max}, \\ -\tilde{v} + v_{\max}, & \tilde{v} \geq v_{\max}, \end{cases} \quad x \in [0, 1], \quad t \in (0, T]; \\ u(x, 0) &= 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ее решением является пара функций

$$\tilde{u} = \min \left\{ \frac{Q}{k}(1 - e^{-kt}), u_{\max} \right\}, \quad \tilde{v} = \min \left\{ \int_0^t \tilde{u}(t') dt', v_{\max} \right\}.$$

(см. [5]). Отсюда получаем

$$t_u = -\frac{1}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{Q} u_{\max} \right).$$

Если выполняется неравенство

$$v_{\max} \leq \frac{Q}{k^2} (e^{-kt_u} - 1) + \frac{Q}{k} t_u, \quad (14)$$

то момент времени t_v определяется как решение уравнения

$$v_{\max} = \frac{Q}{k^2} (e^{-kt_v} - 1) + \frac{Q}{k} t_v.$$

Если же выполнено неравенство, противоположное (14), то

$$t_v = \frac{1}{u_{\max}} \left(v_{\max} + u_{\max} t_u - \frac{Q}{k^2} (e^{-kt_u} - 1) - \frac{Q}{k} t_u \right).$$

Поскольку явной зависимости от x нет, то пара функций $(\tilde{u}, \tilde{v})$ является точным решением задачи, которое стабилизируется к $(u_{\max}, v_{\max})$ за время $t_0 = \max(t_u, t_v)$.

7. Заключение. В работе обосновано существование решения одномерной параболической системы уравнений, описывающей протекание двухкомпонентной химической реакции в ограниченном объеме. Показано, что за конечное время решение задачи становится равным постоянному значению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при заданных условиях. В дальнейшем результаты работы могут быть применены для обоснования трехмерных модельных задач, связанных с хранением CO_2 в подземных резервуарах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Шнайдер К. Р. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2005. — № 1. — С. 9–13.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — Наука, 1973.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Наука, 1967.
4. Портнягин Д. В. Принцип максимума и принцип сравнения для системы двух уравнений // Сиб. мат. ж. — 2012. — 53, № 2. — С. 365–376.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Наука, 1985.
6. Afanasyev A., Kemprab T., Kühnb M., Melnik O. Validation of the MUFITS reservoir simulator against standard CO_2 storage benchmarks and history-matched models of the Ketzin pilot site // Energy Proc. — 2016. — 97. — P. 395–402.
7. Furre A. K. et. al. 20 Years of Monitoring CO_2 -injection at Sleipner // Energy Proc. — 2017. — 114. — P. 3916–3926.
8. He T. Reaction-diffusion systems with discontinuous reaction functions / PhD thesis. — North Carolina State University, 2005.
9. Pao C.V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — New York: Plenum Press, 1992.
10. Trupp M., Frontczak J., Torkington J. The Gorgon CO_2 Injection Project – 2012 Update // Energy Proc. — 2013. — 37. — P. 6237–6247.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Левашова Наталия Тимуровна (Levashova Natalia Timurovna)
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
 (M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
 E-mail: levashovant@my.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 45–55
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-45-55

УДК 517.957

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В ЗАДАЧЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2025 г. Е. И. НИКУЛИН

Аннотация. Для задачи реакция-диффузия с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием доказано существование и исследована устойчивость периодических решений, обладающих пограничным слоем. Получены условия, при которых эти решения асимптотически устойчивы по Ляпунову. Доказательство основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная параболическая задача, нелинейное граничное условие, периодическая задача, уравнение реакция-диффузия, пограничный слой, асимптотический метод, дифференциальное неравенство.

ON PERIODIC SOLUTIONS WITH BOUNDARY LAYERS IN PROBLEMS WITH NONLINEAR SINGULAR BOUNDARY CONDITIONS

© 2025 Е. I. NIKULIN

ABSTRACT. For a reaction-diffusion problem with nonlinear singularly perturbed boundary conditions, we prove the existence and examine the stability of periodic solutions possessing boundary layers. Conditions of the asymptotic stability of these solutions in the Lyapunov sense are obtained. The proof is based on the asymptotic method of differential inequalities.

Keywords and phrases: singularly perturbed parabolic problem, nonlinear boundary condition, periodic problem, reaction-diffusion equation, boundary layer, asymptotic method, differential inequality.

AMS Subject Classification: 35K60

1. Введение. В последние годы в исследованиях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных значительное внимание уделяется асимптотическим методам анализа сингулярно возмущенных задач (см. [16] и приведенные в этой работе ссылки). Особый интерес представляют уравнения типа реакция-диффузия, в которых малый параметр стоит при старшей производной. Такие уравнения возникают в различных прикладных областях: оптоэлектронике [23], физике полупроводников [10], химической кинетике [11], теории нелинейных волн [4] и др. Их решения могут содержать области с большими градиентами — так называемые пограничные или внутренние переходные слои (см. [2, 3, 6]).

Численное решение подобных задач сопряжено с трудностями: наличие малого параметра зачастую требует больших вычислительных ресурсов и разработки специализированных алгоритмов

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

(см. ссылки в [14]). В этом контексте асимптотические методы обладают рядом преимуществ: они позволяют исследовать более широкий класс задач, получать качественные характеристики решений, выявлять ключевые закономерности в задаче и устанавливать условия существования и устойчивости решений. Кроме того, результаты асимптотического анализа применяются для создания эффективных численных методов (см. [15, 19, 22]).

Для построения асимптотик решений подобных задач уже несколько десятилетий успешно используется метод А. Б. Васильевой (см. [2]). Особенно плодотворным для доказательства существования решений, равномерно близких к построенной асимптотике, и исследования их устойчивости оказался метод дифференциальных неравенств, разработанный Н. Н. Нефедовым (см. [5]). Современные достижения, полученные на основе этих методов, представлены в обзоре [6].

В приложениях (например, при моделировании задач с большими потоками на границе области) после перехода к безразмерным переменным сингулярное возмущение может проявляться не только в уравнении, но и в граничных условиях (см. [12]); структура пограничного слоя в таких случаях усложняется (см. [7–9, 13, 17]). В [13] для одномерной задачи реакция-диффузия с сингулярно возмущенным условием второго рода и периодическими условиями по времени доказаны существование и асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений с пограничным слоем. В [7, 8] эти результаты распространены на двумерный случай для условий второго и третьего рода. В [17] аналогичный результат получен для интегро-дифференциального уравнения реакция-диффузия с нелокальным источником и сингулярно возмущенным граничным условием второго рода.

Настоящая работа обобщает результаты [8] на новый класс задач — уравнения реакция-диффузия с нелинейными сингулярно возмущенным краевым условием и периодическим условием по времени. Такие задачи возникают, например, при моделировании теплопереноса с излучением по закону Стефана—Больцмана (см. [1, 20]). Основным результатом данной работы является модификация метода пограничных функций Васильевой для построения асимптотики периодических по времени решений с пограничным слоем; развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для обоснования существования решений, равномерно близких к построенной асимптотике в рассматриваемой области; а также доказательство асимптотической устойчивости по Ляпунову таких решений как решений соответствующей начально-краевой задачи.

Структура работы следующая. В разделе 2 представлена постановка краевой задачи с периодическим условием по времени и конкретизирован вид исследуемого решения, сформулированы условия, накладываемые на входные данные задачи. В разделе 3 приведен модифицированный алгоритм построения асимптотики, а также указаны требования, обеспечивающие однозначную разрешимость задач для членов асимптотики. Разделы 4 и 5 посвящены соответственно доказательству теорем существования решения и его асимптотической устойчивости. Результат, сформулированный в этих теоремах, проиллюстрирован на примере, приведенном в разделе 6.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, для которого поставим следующую краевую задачу с периодическим условием по времени:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon u &:= \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) &\in D_t := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}, \\ B_\Gamma u &:= -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(u, x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по внутренней нормали к достаточно гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D , а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Особенностью данной задачи является наличие в краевом условии нелинейности g , а также малого параметра при производной по нормали. Такие граничные условия называются сингулярно возмущенными: пренебрежение малой производной искомого решения на границе области

приводит к существенному изменению структуры решения в пограничном слое. В отличие от стандартного граничного условия без малого параметра, когда пограничный слой слабый (порядка ε), в этом случае возникает пограничный слой порядка единицы; он имеет более сложную структуру, чем в случае граничных условий Дирихле.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- (A1) Функции $f(u, x, t, \varepsilon)$, $g(u, x, t)$ определены и обладают достаточной степенью гладкости соответственно на множествах $\bar{I}_u \times \bar{D}_t \times [0, \varepsilon_0]$, $\bar{I}_u \times \Gamma \times \mathbb{R}$, где I_u — некоторый интервал, а ε_0 — некоторая достаточно малая положительная постоянная. Пусть, кроме того, функции $f(u, x, t, \varepsilon)$, $g(u, x, t)$ являются T -периодическими по переменной t .
- (A2) Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ имеет T -периодическое по t решение $u = \varphi(x, t) \in I_u$, $(x, t) \in \bar{D}_t$, причем выполнено неравенство

$$f_u(\varphi(x, t), x, t, 0) > 0, \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Определение 1. Функция $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{D}_t)$ называется T -периодическим классическим решением задачи (1), если она удовлетворяет поточечно дифференциальному уравнению, краевым условиям и условию периодичности в (1).

Основным результатом данной работы является доказательство существования и исследование устойчивости классических T -периодических по t решений у задачи (1), обладающих пограничным слоем. Такие решения для любого момента времени t при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к корню $\varphi(x, t)$ внутри области D и резко изменяются в окрестности кривой Γ , т.е. имеют пограничный слой.

Заметим также, что вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ может иметь несколько устойчивых корней, для которых выполнено неравенство (2). В таком случае возможна ситуация, когда существуют решения погранслоного типа, близкие к разным корням. Для каждого из них результат данного раздела останется в силе.

3. Построение асимптотики. Для описания пограничного слоя стандартным образом введем локальную систему координат. Для кривой Γ определим δ -окрестность

$$\Gamma^\delta := \{P \in D : \text{dist}(P, \Gamma) < \delta\}, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Далее, введем в δ -окрестности кривой Γ локальные координаты (r, θ) , где $\theta \in [0, \Theta]$ — это координата точки $M \in \Gamma$, $\text{dist}\{x, \Gamma\} = \text{dist}\{x, M\}$; $r = \text{dist}\{x, \Gamma\}$, $x \in D$. Пусть кривая Γ определена в параметрической форме: $x_i = X_i(\theta)$, $i = 1, 2$, а $\mathbf{n}(\theta) = \{n_1(\theta), n_2(\theta)\}$ — внутренняя нормаль к кривой Γ в точке M . При достаточно малом δ (но конечном и не зависящем от ε) существует взаимно однозначное соответствие между координатами $x = (x_1, x_2)$ и (r, θ) :

$$x_i = X_i(\theta) + rn_i(\theta), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому в дальнейшем у функций, зависящих от аргумента x и определенных при $x \in D$, будем иногда вместо него использовать аргументы r, θ , например: $u(x, t, \varepsilon) = u(r, \theta, t, \varepsilon)$; а для функций определенных при $x \in \Gamma$ — аргумент θ : $g(u, x, t) = g(u, \theta, t)$ и т. п.

Будем искать асимптотику решения задачи (1) в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon), \quad (3)$$

где регулярная часть имеет следующий вид:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n(x, t) + \dots, \quad (4)$$

пограничная часть в окрестности Γ :

$$\Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, \theta, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta, t) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, \theta, t) + \dots, \quad (5)$$

где $\tau = r/\varepsilon$. Такая структура асимптотики стандартна для задач с пограничными слоями и предложена в классических работах А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой (см. [2] и приведенные там ссылки): регулярная часть асимптотики служит для приближения решения внутри области, погранслоная — для приближения решения вблизи границы. Коэффициенты при степенях ε погранслоной части называются пограничными функциями.

Заметим, что хотя формально Π -функции определены для $\tau \geq 0$, фактически они имеют смысл только при $0 \leq \tau \leq \delta/\varepsilon$, т.е. в δ -окрестности, где введены локальные координаты (r, θ) . Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{D}$ используются сглаживающие функции.

Согласно алгоритму Васильевой, функция f представляется в виде

$$f(\bar{u}(\varepsilon\tau, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon), \varepsilon\tau, \theta, t, \varepsilon) - f(\bar{u}(\varepsilon\tau, t, \varepsilon), \varepsilon\tau, \theta, t, \varepsilon) + f(\bar{u}(x, t, \varepsilon), x, t, \varepsilon) \quad (6)$$

(см. [2]). Коэффициенты регулярной части асимптотического приближения определяются стандартно. В частности,

$$\bar{u}_0(x, t) = \varphi(x, t), \quad \bar{u}_1(x, t) = -\frac{\bar{f}_\varepsilon}{\bar{f}_u},$$

где черта над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\bar{u}_0, 0, \theta, t, 0)$.

Оператор Лапласа в локальных координатах (r, θ) имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + |\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

(см. [2]). Тогда при действии на функции пограничного слоя дифференциальный оператор $D_\varepsilon := \varepsilon^2 (\Delta - \partial/\partial t)$ в переменных (τ, θ, t) приобретает вид

$$D_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \varepsilon s(\varepsilon\tau, \theta) \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \left(|\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

где $s(r, \theta) := \Delta r(r, \theta)$.

Далее стандартным образом получаем последовательность задач для определения коэффициентов пограничной части представления (3). При этом переменные $\theta \in [0, \Theta]$, $t \in \mathbb{R}$ считаем параметрами.

Член $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ определяется из следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau^2} &= f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t), 0, \theta, t, 0), \quad \tau > 0, \\ -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(0, \theta, t) &= g(\phi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), \theta, t), \\ \Pi_0(+\infty, \theta, t) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Автономное дифференциальное уравнение в (7) может быть исследовано на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, где

$$\tilde{u}(\tau, \theta, t) = \varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t), \quad \tilde{v}(\tau, \theta, t) = \frac{\partial \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau},$$

а θ, t — параметры. В этих переменных уравнение эквивалентно следующей системе, называемой *присоединенной*:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\tau, \theta, t)}{\partial \tau} = \tilde{v}(\tau, \theta, t), \quad \frac{\partial \tilde{v}(\tau, \theta, t)}{\partial \tau} = f(\tilde{u}(\tau, \theta, t), 0, \theta, t, 0). \quad (8)$$

Точка $S(\varphi(0, \theta, t), 0)$ — точка покоя типа седло (в силу условия (A2)). Задача (7) будет иметь решение тогда и только тогда, когда на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ какая-либо из сепаратрис, входящая в седло S , пересекает кривую, заданную функцией $\tilde{v} = -g(\tilde{u}, \theta, t)$, при всех значениях параметров $\theta \in [0, \Theta]$, $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем следующее требование.

(A3) Пусть при любых фиксированных $(\theta, t) \in [0, \Theta] \times \mathbb{R}$ уравнение

$$\pm \sqrt{2 \int_{\phi(\theta, t)}^{\tilde{u}} f(u, \theta, t, 0) du} = -g(\tilde{u}, \theta, t), \quad \theta, t \quad (9)$$

имеет решение $\tilde{u} = \tilde{u}_0(\theta, t) \in I_u$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} & \int_{\phi(\theta, t)}^{\tilde{u}_0(\theta, t)} f(u, \theta, t, 0) du > 0, \quad \tilde{u}_0(\theta, t) \leq \phi(\theta, t), \\ & \left. \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{u}} \right|_{\tau=0} = \frac{f(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t)}{\tilde{v}(0, \theta, t)} < -g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь имеется в виду, что условия выполнены хотя бы при одном знаке: либо везде верхнем, либо везде нижнем.

Уравнение (9) может иметь несколько решений. Пример такой ситуации приведен в разделе 6. На рис. 1(а) точкам A, B соответствуют решения уравнения (9), причем точке B отвечает решение, удовлетворяющее условию (A3). Для решения, отвечающего точке A , не выполнено неравенство (10).

Условие (A3) гарантирует разрешимость задачи (7), а ее решение $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ монотонно зависит от τ и может быть получено в квадратурах:

$$\pm \int_{\tilde{u}_0(\theta, t)}^{\phi(0, \theta, t) + \Pi_0} \left(2 \int_{\phi(\theta, t)}^u f(\eta, \theta, t, 0) d\eta \right)^{-1/2} du = \tau.$$

Известно (см. [3]), что Π_0 удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$|\Pi_0(\tau, \theta, t)| \leq C e^{-\kappa \tau}, \quad (11)$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные.

Продолжим построение асимптотики. Функция Π_1 определяется из следующей задачи с краевым условием третьего рода при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \Pi_1 = r_1, \quad \tau > 0, \\ & -\frac{\partial \Pi_1(0, \theta, t)}{\partial \tau} - g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \Pi_1(0, \theta, t) = B_1(\theta, t), \\ & \Pi_1(\infty, \theta, t) = 0, \\ & r_1(\tau, \theta, t) := -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(\tau, \theta, t) s(0, \theta, t) + \tau \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial r}(0, \theta, t) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right) + \tilde{u}_1(0, \theta, t) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}, \\ & B_1(\theta, t) := \frac{\partial \varphi(0, \theta, t)}{\partial r} + g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{u}_1(0, \theta, t); \end{aligned} \quad (12)$$

тильда означает, что значение функции берется при аргументе $(\Pi_0(\tau, \theta, t) + \tilde{u}_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)$.

Решение задачи (12) представляется в явном виде:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\tau, t) = \tilde{v}(\tau, \theta, t) & \left\{ \frac{\int_0^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_1(\chi, \theta, t) d\chi - B_1(\theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t)}{g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t) + f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t)} \right. \\ & \left. - \int_0^\tau \frac{1}{\tilde{v}^2(\eta, \theta, t)} \left[\int_\eta^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_1(\chi, \theta, t) d\chi \right] d\eta \right\}, \\ \tilde{v}(\tau, \theta, t) & = \frac{\partial \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (13)$$

который имеет смысл в силу условия (A3).

Функции переходного слоя более высоких порядков находятся из задач, аналогичных задачам для функции Π_1 .

4. Обоснование асимптотики. Пусть

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n (\bar{u}_i(x, t) + \Pi_i(\tau, \theta, t)) \varepsilon^i.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε для каждого выбранного согласно условию (A3) решения $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ задачи (7) существует соответствующее ему решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), обладающее пограничным слоем, причем имеет место оценка*

$$|U_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+1}, \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где постоянная C_n не зависит от x, t, ε .

Доказательство основано на принципе сравнения (см., например, [21]) и асимптотическом методе дифференциальных неравенств (см. [5]). Согласно этому методу, используя построенную формальную асимптотику, в области D_t следует построить достаточно гладкие функции сравнения $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ (нижнее и верхнее решения), удовлетворяющие при достаточно малых положительных значениях ε следующей системе неравенств:

- (i) $\alpha(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \bar{D}_t$ (условие упорядоченности);
- (ii) $N_\varepsilon \beta \leq 0 \leq N_\varepsilon \alpha$, $(x, t) \in D_t$ (неравенства для оператора уравнения),
- (iii) $B_\Gamma \beta \geq 0 \geq B_\Gamma \alpha$, $x \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$ (неравенства для граничного оператора).

В качестве верхнего решения выбирается функция

$$\begin{aligned} \beta_n(x, t, \varepsilon) = & \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \bar{u}_{n+1}(x, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta, t) + \\ & + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\tau, \theta, t) + \varepsilon^{n+1} (\gamma + \Pi_\beta(\tau, \theta, t)), \end{aligned} \quad (14)$$

где функция Π_0 выбирается согласно условию (A3), $\gamma > 0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства для оператора, функция Π_β необходима для выполнения условия упорядоченности нижнего и верхнего решений в зоне пограничного слоя и выполнения неравенства для граничного оператора и определяется из задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \Pi_\beta = r_\beta, \quad \tau > 0, \\ & - \frac{\partial \Pi_\beta(0, \theta, t)}{\partial \tau} - g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \Pi_\beta(0, \theta, t) = \delta, \\ & \Pi_\beta(\infty, \theta, t) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа и

$$r_\beta(\tau, \theta, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} (\Pi_0(\tau, \theta, t) + \bar{u}_0(0, \theta, t), 0, t, 0) - \frac{\partial f}{\partial u} (\varphi, 0, t, 0) \right) \gamma - M \exp(-k\tau). \quad (16)$$

Коэффициент перед γ в выражении (16) имеет экспоненциальную оценку, которая следует из экспоненциальной оценки (11). Следовательно, можно выбрать достаточно большое $M > 0$ и достаточно малое $k > 0$, чтобы $r_\beta(\tau, \theta, t) < 0$.

Задача (15) аналогична задаче (12) и имеет решение

$$\Pi_\beta(\tau, t) = \tilde{v}(\tau, \theta, t) \left\{ \frac{\int_0^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_\beta(\chi, \theta, t) d\chi - \delta \tilde{v}(0, \theta, t)}{g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t) + f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t)} - \right. \\ \left. - \int_0^\tau \frac{1}{\tilde{v}^2(\eta, \theta, t)} \left[\int_\eta^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_\beta(\chi, \theta, t) d\chi \right] d\eta \right\}. \quad (17)$$

Как нетрудно видеть, из условия (A3) и представления (17) следует, что $\Pi_\beta(\tau, \theta, t) > 0$, $\tau \in [0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \Theta]$.

Нижнее решение $\alpha_n(x, t, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру, причем $r_\alpha(\tau, \theta, t) > 0$, $\Pi_\alpha(\tau, \theta, t) < 0$, $\tau \in [0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \Theta]$; следовательно, верхнее и нижнее решения являются упорядоченными.

Дифференциальные неравенства для оператора N_ε и неравенства на границе проверяются прямым вычислением. В частности, для верхнего решения имеем

$$N_\varepsilon \beta_n = \varepsilon^2 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_n - f(\beta_n, x, t, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + M e^{-k\tau} \right) + O(\varepsilon^{n+2}). \quad (18)$$

Следовательно, неравенство (ii) из определения верхнего решения $N_\varepsilon \beta_n < 0$ выполнено. На границе для достаточно малых ε имеем:

$$B_\Gamma \beta_n = -\varepsilon \frac{\partial \beta_n}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(\beta_n(x, t, \varepsilon), x, t) = \varepsilon^{n+1} (\delta - \gamma g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t)) + \\ + O(\varepsilon^{n+2}) > 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено при достаточно малых ε за счет выбора достаточно большого положительного δ . Из теоремы сравнения (см. [21]) следует существование при достаточно малых ε классического решения задачи (1), удовлетворяющего неравенству $\alpha_n(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta_n(x, t, \varepsilon)$, причем, как следует из построения,

$$|\alpha_n(x, t, \varepsilon) - \beta_n(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

откуда и получаем утверждение теоремы. $\square$

5. Исследование устойчивости периодического решения. Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полу-бесконечном промежутке времени:

$$\varepsilon^2 \left(\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - f(v, x, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) \in D_{t+} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D, 0 < t < \infty\}, \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(v, x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \\ v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}. \quad (21)$$

Очевидно, что если $v^0(x, \varepsilon) = u(x, 0, \varepsilon)$, где $u(x, t, \varepsilon)$ — решение периодической задачи (1), существование которого утверждает теорема 1, то и задача (21) имеет решение $v(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Будем искать нижнее и верхнее решения задачи (21) соответственно в виде

$$\alpha(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)), \\ \beta(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\beta_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)),$$

где функция $\Lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Упорядоченность α и β очевидна; для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Например, выражение для $N_\varepsilon\beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций f , f_u , кроме первого, опущены):

$$N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda t} \left\{ \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n \right) - f(\beta_n) \right] + \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u \right) - f(u) \right] + \right. \\ \left. + \left[f(\beta_n) - f(u) - f_u^* \cdot (\beta_n - u) \right] + \varepsilon^2 \Lambda (\beta_n - u) \right\}.$$

Здесь верхний индекс $*$ означает, что значение функции берется при аргументе $u(x, t, \varepsilon) + \theta e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))$, $0 < \theta < 1$. Воспользуемся соотношением (18) и учтем оценки

$$\beta_n - u = O(\varepsilon^{n+1}), \quad f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2}). \quad (22)$$

Выбирая $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0 > 0$, получаем

$$N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda_0 t} \left(-\varepsilon^{n+1} (\bar{f}_u \gamma + M e^{-k\xi}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3}) \right) < 0$$

при $n \geq 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon\alpha > 0$. Таким образом, каждое из решений, существование которых гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$; ширина этой области составляет величину порядка $O(\varepsilon^1)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда при достаточно малых ε каждое решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), существование которого гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$ и, следовательно, $u(x, t, \varepsilon)$ — единственное решение задачи (1) в этой области.

6. Пример задачи теплопереноса с излучением по закону Стефана—Больцмана. Рассмотрим задачу поиска распределения температуры в образце с линейным по u оттоком тепла и излучением по закону Стефана—Больцмана:

$$\varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - (u - h(x, t)) = 0, \\ (x, t) \in D_t := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D = \left\{ (x_1, x_2) : R := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R_0 \right\}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (23) \\ -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}(0, \theta, t, \varepsilon) = -ku^4(0, \theta, t, \varepsilon) + g_1(\theta, t), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $h(x, t) \geq 0$ — заданная температура охладителя, $g_1(\theta, t) > 0$ — заданный поток тепла через границу Γ внутрь круга D , член ku^4 соответствуют излучению по закону Стефана—Больцмана (k — положительная константа). Эти функции предполагаются T -периодическими по t . Граничные условия записаны в локальных координатах, введенных вблизи окружности $R = R_0$. Здесь (R, θ) — полярные координаты, введенные на плоскости Ox_1x_2 . Локальная координата r , введенная вблизи окружности Γ , связана с полярной координатой R соотношением $r = R_0 - R$. Локальная координата θ совпадает с угловой полярной координатой всюду в круге $\bar{D}$.

Построим формальную асимптотику решения задачи (23). Очевидно, требования (A1) и (A2) выполнены. Имеем для членов регулярной части асимптотики: $\bar{u}_0 = h(x, t)$, $\bar{u}_1 \equiv 0$, $x \in \bar{D}_t$.

Уравнение (9) примет вид

$$-(\tilde{u} - h(0, \theta, t)) = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t). \quad (24)$$

Из рис. 1(а) видно, что на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ прямая $\tilde{v} = -(\tilde{u} - h(0, \theta, t))$ пересекает кривую $\tilde{v} = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t)$ в двух точках A и B при любых допустимых функциях g_1 и h и любых параметрах $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in \mathbb{R}$. Условию (A3), очевидно, удовлетворяет точка B , отвечающая положительному решению $\tilde{u}_0(\theta, t)$ уравнения (24).

Используя теорему о неявной функции (см. [18]), можно показать, что отрицательному корню, соответствующему точке A , отвечает решение задачи (23), которое является неустойчивым (см. метод доказательства в [9]), однако этот случай выходит за рамки настоящей работы.

Асимптотика нулевого порядка выглядит следующим образом:

$$U_0(x, \varepsilon) = h(x, t) + (\tilde{u}_0(\theta(x), t) - h(0, \theta(x), t))e^{-(R_0 - R(x))/\varepsilon}. \quad (25)$$

Здесь $R(x), \theta(x)$ — функции, задающие переход от декартовых координат (x_1, x_2) к полярным координатам (R, θ)

Согласно теоремам 1 и 2, существует асимптотически устойчивое решение задачи (23), соответствующее траектории на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, исходящей из точки B и входящей в седло $(h, 0)$, для которого справедлива равномерная в $\bar{D}_t$ оценка $|u(x, t, \varepsilon) - U_0(x, t, \varepsilon)| < C\varepsilon$. Рисунки 1(b)–(f) иллюстрируют асимптотическую устойчивость этого решения как решения соответствующей начально-краевой задачи вида (21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А. О положительном решении эллиптического уравнения с нелинейным интегральным краевым условием типа излучения // Мат. заметки. — 1977. — 22, № 1. — С. 117–128.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундам. прикл. мат. — 1998. — 4, № 3. — С. 799–851.
4. Гуревич А. В., Минц Р. Г. Локализованные волны в неоднородных средах // Усп. физ. наук. — 1984. — 142, № 1. — С. 539–254.
5. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Диффер. уравн. — 1995. — 31, № 7. — С. 1132–1139.
6. Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
7. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2020. — № 2. — С. 15–20.
8. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. О периодических решениях с пограничным слоем в задаче реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 12. — С. 1641–1650.
9. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. О неустойчивых решениях с немонотонным пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия // Мат. заметки. — 2021. — 110, № 6. — С. 899–910.
10. Никулин Е. И. Контрастные структуры в задаче реакция-адвекция-диффузия, возникающей в дрейф-диффузионной модели полупроводника, в случае негладкой реакции // Теор. мат. физ. — 2023. — 215, № 3. — С. 360–376.
11. Соболев В. А., Щепаккина Е. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. — М.: Физматлит, 2010.
12. Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1991.
13. Butuzov V., Nefedov N., Recke L., Schneider K. Periodic solutions with a boundary layer of reaction-diffusion equations with singularly perturbed Neumann boundary conditions // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2014. — 24. — 1440019.
14. Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena. — Univ. of Cyprus, 2024.
15. Kopteva N., Stynes M. Stabilized approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semi-linear reaction-diffusion problem // Numer. Math. — 2011. — 119. — P. 787–810.

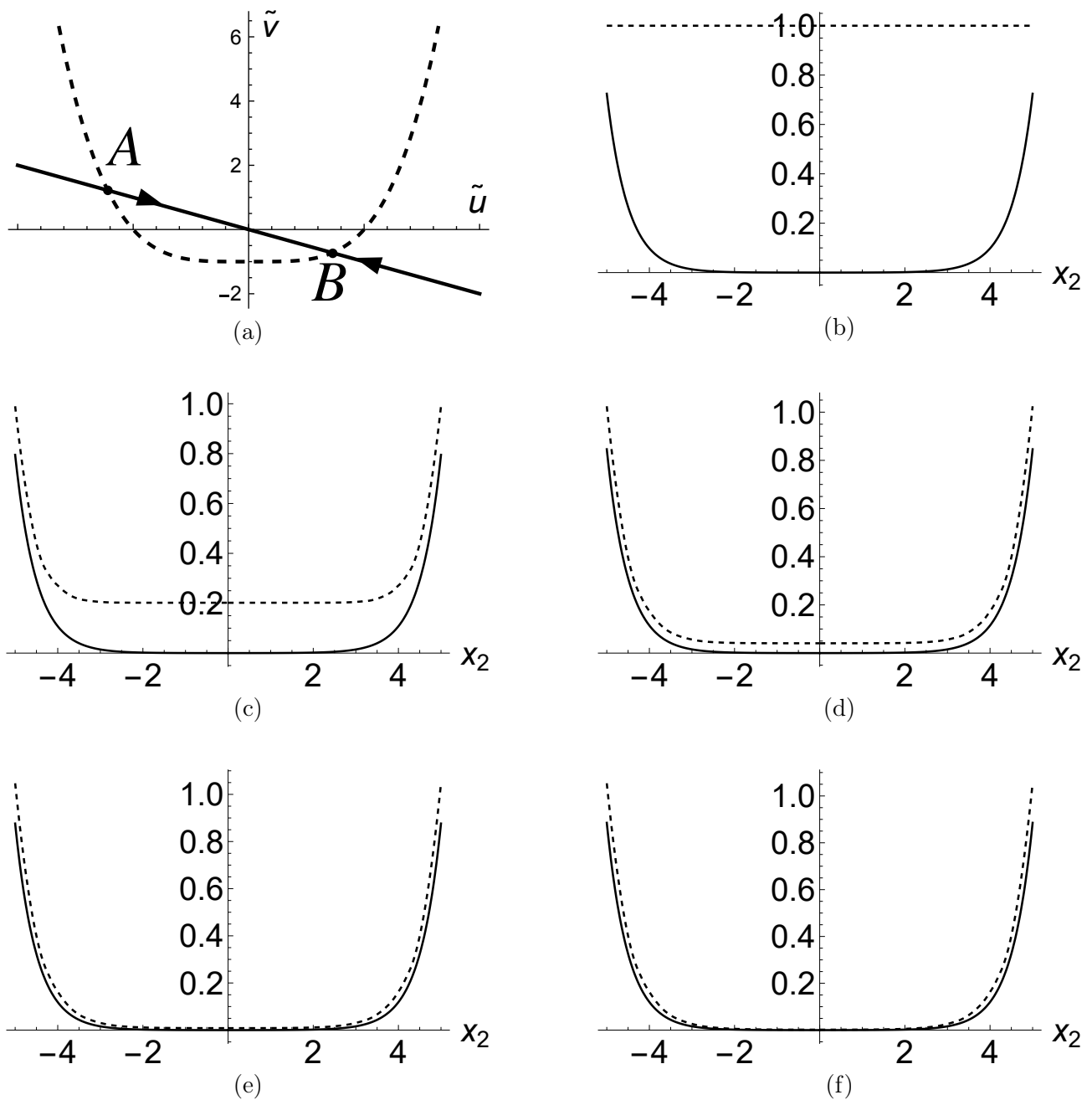


Рис. 1. (а) Фазовая плоскость для присоединенной системы, отвечающей задаче (23). Сплошные кривые — сепаратрисы, входящие в седло $(0, 0)$, пунктир — функция, задаваемая формулой $\tilde{v} = -g(\tilde{u}, \theta, t) = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t)$. (b)–(f) Зависимость асимптотики нулевого порядка для решений периодической задачи (23) (сплошная кривая) и решений соответствующей ей начально-краевой задачи (пунктир) от координаты x_2 при фиксированном $x_1 = 0$ и при t , пробегающих значения от 0 до 1,6 с шагом 0,4. Здесь $v^0 \equiv 1$, $k = 1$, $T = 2\pi$, $h \equiv 0$, $g_1 = 1 + 0,5 \sin t$, $\varepsilon = 0,5$.

16. Min G. G., Hamouda M., Jung C. Y., Temam R. M. Singular Perturbations and Boundary Layers. — Cham: Springer, 2018.
17. Nefedov N. N., Nikitin A. G., Nikulin E. I. Boundary-value problem for singularly perturbed integro-differential equation with singularly perturbed Neumann boundary condition// Russ. J. Math. Phys. — 2023. — 30, № 3. — P. 375–381.

18. *Omel'chenko O. E., Recke L., Butuzov V. F., Nefedov N. N.* Time-periodic boundary layer solutions to singularly perturbed parabolic problems// J. Differ. Equations. — 2017. — 262, № 9. — P. 4823–4862.
19. *O'Riordan E., Quinn J.* Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem// Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2011. — 81. — P. 187–195.
20. *Ovcharov V., Kurennya A., Rudakov V., Prigara V.* Temperature switching waves in a silicon wafer on lamp-based heating// Proc. SPIE 10224 Int. Conf. on Micro- and Nano-Electronics (October 3-7, 2016, Zvenigorod, Russian Federation), 2016. — P. 1022422.
21. *Pao C. V.* Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 234. — P. 695–716.
22. *Quinn J.* A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — 290. — P. 500–515.
23. *Semkin V., Shabanov A., Kapralov K., Kashchenko M., Sobolev A., Mazurenko I., Myltsev V., Mylnikov D., Nikulin E., Chernov A., Kameneva E., Bocharov A., Svintsov D.* Multifunctional 2D infrared photodetectors enabled by asymmetric singular metasurfaces// Adv. Opt. Mater. — 2025. — 13, № 12. — 2403189.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Никулин Егор Игоревич (Nikulin Egor Igorevich)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail: nikulin@physics.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 56–62
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-56-62

УДК 517.958

ФОРМИРОВАНИЕ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФфуЗИЕЙ

© 2025 г. А. Р. МАХМУДОВ, А. О. ОРЛОВ, В. Т. ВОЛКОВ

Аннотация. Рассмотрен процесс формирования решения вида фронта в уравнении реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя (фронта) в окрестности некоторой точки, получены оценки длительности переходного процесса.

Ключевые слова: контрастная структура, движущийся фронт, уравнение реакция-диффузия.

FRONT FORMATION IN THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM WITH NONLINEAR DIFFUSION

© 2025 А. R. MAKHMUDOV, A. O. ORLOV, V. T. VOLKOV

ABSTRACT. The process of the formation of a front-type solution in the reaction-diffusion equation in the case of spatially inhomogeneous nonlinear diffusion is considered. Sufficient conditions are formulated to ensure the formation of a sharp inner transition layer (front) in a neighborhood of a certain point, and estimates of the duration of the transition process are obtained.

Keywords and phrases: contrasting structure, moving front, reaction-diffusion equation.

AMS Subject Classification: 00A69

1. Введение. Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Такие уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах. В частности, уравнения типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция возникают в качестве математических моделей в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях, где исследуемые процессы характеризуются узкими пограничными областями быстрого изменения параметров процессов либо резкими внутренними слоями различных типов — стационарными (контрастные структуры) или движущимися (фронты). Причиной образования внутренних переходных слоев или движущихся фронтов в сингулярно возмущенных задачах типа реакция-диффузия-адвекция может служить выполнение условия баланса реакции в некоторой точке или на некоторой кривой, лежащей в области рассмотрения, или баланса адвекции, или адвекции и реакции, а также разрыв коэффициентов по пространственной координате.

Математическое описание таких процессов возможно на основе асимптотических методов для нелинейных сингулярно возмущенных задач, исследованию которых посвящена достаточно обширная литература. В частности, описанию движения фронтов в уравнениях указанного типа

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

при различных условиях посвящены работы [1, 2, 6–17], в том числе в задачах с периодическими условиями [6, 11–13, 15–17]. В указанных работах предполагается, что в начальный момент времени переходный слой (фронт) уже сформирован и описывается процесс его эволюции. Однако интерес представляет также и процесс формирования решения типа фронта, т.е. формулировка достаточных условий, при которых из решения начально-краевой задачи формируется резкий переходный слой. Эти вопросы рассматривались, например, в [3–5], где процесс формирования фронта изучен для пространственно одномерного [3, 4] и двумерного [5] уравнения реакция-диффузия.

В настоящей работе рассматривается процесс формирования фронта для уравнения реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя в окрестности некоторой точки, получены оценки длительности переходного процесса.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенную начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(D(u, x, \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - f(u, x, \varepsilon) &= 0, & x \in (-1, 1), & \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-1, t, \varepsilon) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{\text{init}}(x, \varepsilon), & x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

- (A1) Функции $D(u, x, \varepsilon) \geq D_0 > 0$ и $f(u, x, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими в области $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$, $x \in [-1, 1]$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
- (A2) Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет на отрезке $x \in [-1, 1]$ ровно три решения $u = \varphi^{(-)}(x)$, $u = \varphi^{(+)}(x)$ и $u = \varphi^{(0)}(x)$, причем

$$\underline{u} < \varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x) < \bar{u}, \quad x \in [-1, 1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x), x, 0) < 0, \quad x \in [-1, 1].$$

- (A3) Существует такая точка $x_0 \in (-1, 1)$, что

$$\begin{aligned} \underline{u} &< u_{\text{init}}(x, \varepsilon) < \varphi^{(0)}(x) && \text{при } x \in [-1, x_0], \\ u_{\text{init}}(x_0, \varepsilon) &= \varphi^{(0)}(x_0), \\ \varphi^{(0)}(x_0) &< u_{\text{init}}(x, \varepsilon) < \bar{u} && \text{при } x \in (x_0, 1]. \end{aligned}$$

Условие (A3) означает, что график начальной функции имеет единственную точку пересечения с графиком корня $u = \varphi^{(0)}(x)$ вырожденного уравнения.

3. Формирование фронта в промежутке времени $0 \leq t \leq A\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$. Сделаем в (1) замену $t = \varepsilon^2 \tau$. Тогда задача (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\bar{u}, x, \varepsilon) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} - f(\bar{u}, x, \varepsilon) &= 0, & x \in (-1, 1), & \quad \tau \in (0, \varepsilon^{-2}T], \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(-1, \tau, \varepsilon) &= 0, & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(1, \tau, \varepsilon) &= 0, & \tau \in [0, \varepsilon^{-2}T], \\ \bar{u}(x, 0, \varepsilon) &= u_{\text{init}}(x, \varepsilon), & x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{u}(x, \tau, \varepsilon) = u(x, \varepsilon^2 \tau, \varepsilon)$.

Положив в (2) $\varepsilon = 0$, получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$-\tilde{u}_\tau = f(\tilde{u}, x, 0), \quad \tau \in (0, +\infty), \quad \tilde{u}(x, 0) = u_{\text{init}}(x, 0), \quad (3)$$

где $x \in [-1, 1]$ — параметр и введено обозначение $\tilde{u}(x, \tau) = \bar{u}(x, \tau, 0)$.

Из условий (A2) и (A3) следует, что при каждом $x \in [-1, 1]$ корни $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ кубической нелинейности являются устойчивыми неподвижными точками этого уравнения, а именно,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{u}(x, \tau) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x), & x \in [-1, x_0), \\ \varphi^{(+)}(x), & x \in (x_0, 1]; \end{cases} \quad (4)$$

$$\tilde{u}(x_0, \tau) = \varphi^{(0)}(x_0), \quad \tau \in [0, +\infty).$$

Фиксируем δ так, чтобы

$$0 < \delta < \min(x_0 + 1, 1 - x_0). \quad (5)$$

Тогда для любого $\eta > 0$ существует такое $\tau_\delta > 0$, что при любом $\tau \geq \tau_\delta$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(-)}(x)| &\leq \eta, & x \in [-1, x_0 - \delta], \\ |\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(+)}(x)| &\leq \eta, & x \in [x_0 + \delta, 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначение

$$\min \left\{ \min_{x \in [-1, 1]} f_u(\varphi^{(-)}(x), x, 0), \min_{x \in [-1, 1]} f_u(\varphi^{(+)}(x), x, 0) \right\} = 2m. \quad (7)$$

Заметим, что из условия (A2) следует, что $m > 0$. Тогда существует такое $\eta_0 > 0$, что при любых $x \in [-1, 1]$ и всех u , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |u - \varphi^{(-)}(x)| &\leq \eta_0, & x \in [-1, x_0 - \delta], \\ |u - \varphi^{(+)}(x)| &\leq \eta_0, & x \in [x_0 + \delta, 1], \end{aligned} \quad (8)$$

выполняется оценка $f_u(u, x, 0) \geq m$. Поэтому предельный переход в (4) экспоненциальный, а именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть m и η_0 — числа, фиксированные в (7) и (8). Пусть $\delta > 0$ соответствует условию (5). Тогда существует такое $\tau_\delta > 0$, что при любом $\tau \geq \tau_\delta$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(-)}(x)| &\leq \eta_0 e^{-m(\tau - \tau_\delta)}, & x \in [-1, x_0 - \delta], \\ |\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(+)}(x)| &\leq \eta_0 e^{-m(\tau - \tau_\delta)}, & x \in [x_0 + \delta, 1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Пользуясь формулой конечных приращений, запишем правую часть уравнения (3) при $x \in [-1, x_0 - \delta]$ в виде

$$f(\tilde{u}(x, \tau), x, 0) = f(\varphi^{(-)}(x), x, 0) + f_u^*(x, \tau)(\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(-)}(x)) = f_u^*(x, \tau)(\tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(-)}(x)),$$

где $f_u^*(x, \tau) = f_u(u^*(x, \tau), x, 0)$, $u^*(x, \tau) \in (\varphi^{(-)}(x), \tilde{u}(x, \tau))$.

Положим $z(x, \tau) = \tilde{u}(x, \tau) - \varphi^{(-)}(x)$ и рассмотрим задачу Коши

$$z_\tau = -f_u^*(x, \tau)z(x, \tau), \quad \tau > \tau_\delta, \quad z(x, \tau_\delta) = \tilde{u}(x, \tau_\delta) - \varphi^{(-)}(x).$$

Тогда с учетом (4) и (8) для $g(\tau) = \eta_0 e^{-m(\tau - \tau_\delta)}$ имеем

$$g_\tau = -mg(\tau) \geq -f_u^*(x, \tau)g(\tau), \quad \tau > \tau_\delta, \quad g(\tau_\delta) = \eta_0 \geq z(\tau_\delta),$$

т.е. функция $g(\tau)$ — это верхнее решение задачи для $z(x, \tau)$. Аналогично, функция $-g(\tau)$ есть нижнее решение, что и доказывает лемму. Доказательство для $x \in [x_0 + \delta, 1]$ проводится аналогично с заменой $\varphi^{(-)}(x)$ на $\varphi^{(+)}(x)$. $\square$

Оценим производные $\tilde{u}(x, \tau)$. Введем обозначение $\tilde{f}_u(x, \tau) = f_u(\tilde{u}(x, \tau), x, 0)$. Заметим, что постоянные $\underline{u}$, $\bar{u}$ из условия (A2) являются нижним и верхним решениями задачи (3) соответственно. Для краткости введем обозначение $\tilde{T} = \varepsilon^{-2}T$. Тогда при $x \in [-1, 1]$, $\tau \in [0, \tilde{T}]$ имеем $\tilde{u}(x, \tau) \in [\underline{u}, \bar{u}]$. Поэтому для достаточно гладкой функции $f(u, x, \varepsilon)$ существует такое $p > 0$, что при любых $(x, \tau) \in [-1, 1] \times [0, \tilde{T}]$ имеет место оценка

$$-\tilde{f}_u(x, \tau) \leq p. \quad (10)$$

Получим теперь оценки производных функции $\tilde{u}(x, \tau)$ важные для дальнейшего анализа. Дифференцируя (3) по x , получаем задачу для $\tilde{u}_x(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_x)_\tau &= -\tilde{f}_u(x, \tau)\tilde{u}_x(x, \tau) - f_x(\tilde{u}(x, \tau), x, 0), \quad \tau \in (0, \tilde{T}], \\ \tilde{u}_x(x, 0) &= (u_{\text{init}})_x(x, 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем, что функция $h(\tau) = \theta e^{p\tau}$ — ее верхнее решение. Здесь p — константа, определяемая в (10), постоянная θ будет определена ниже:

$$\begin{aligned} h_\tau &= ph(\tau) \geq -\tilde{f}_u(x, \tau)h(\tau) - f_x(\tilde{u}(x, \tau), x, 0), \quad \tau \in (0, \tilde{T}], \\ h(0) &= \theta \geq (u_{\text{init}})_x(x, 0). \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что $u_{\text{init}}(x, 0) \in [\underline{u}, \bar{u}]$, $x \in [-1, 1]$, заключаем, что найдется достаточно большая константа θ , обеспечивающая выполнение неравенств. Значит, функция $h(\tau)$ действительно является верхним решением. Выбирая в качестве нижнего решения $-h(\tau)$, получаем окончательную оценку:

$$|\tilde{u}_x(x, \tau)| \leq \theta e^{p\tau}, \quad x \in [-1, 1], \quad \tau \in [0, \tilde{T}]. \quad (12)$$

Используя (12), можно аналогично оценить вторую производную:

$$|\tilde{u}_{xx}(x, \tau)| \leq \theta e^{2p\tau}, \quad x \in [-1, 1], \quad \tau \in [0, \tilde{T}]. \quad (13)$$

Лемма 2. Пусть $A \in (0, 1/p)$, где p фиксировано выше. Тогда для решения $\bar{u}(x, \tau, \varepsilon)$ задачи (2) справедливо представление

$$\bar{u}(x, \tau, \varepsilon) = \tilde{u}(x, \tau) + O(\varepsilon^{1-pA}) \quad (14)$$

при $x \in [-1, 1]$, $\tau \in [0, \tau_A]$, $\tau_A = A|\ln \varepsilon|$.

Доказательство. Введем функцию

$$U(x, \tau, \varepsilon) = \tilde{u}(x, \tau) + R(x, \tau, \varepsilon),$$

где

$$R(x, \tau, \varepsilon) = \varepsilon \left[\tilde{u}_x(0, \tau)\sigma(x) \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) - \tilde{u}_x(1, \tau)\sigma(1-x) \exp\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right) \right], \quad (15)$$

$\sigma(x)$ — срезающая функция, равная 1 при $x \in [0, \delta]$ и 0 при $x \in [2\delta, 1]$, δ — сколь угодно малое не зависящее от ε фиксированное число.

Рассмотрим выражение

$$L_\varepsilon U = \varepsilon^2(D(U, x, \varepsilon)U_x)_x - U_\tau - f(U, x, \varepsilon^2\tau). \quad (16)$$

Пользуясь оценками (12) и (13) и гладкостью функций $D(u, x, \varepsilon)$ и $f(u, x, \varepsilon)$, можно получить

$$L_\varepsilon U = O(\varepsilon e^{p\tau}), \quad x \in [-1, 1], \quad \tau \in [0, \tau_A]. \quad (17)$$

Сделав в задаче (2) замену

$$\bar{u}(x, \tau, \varepsilon) = U(x, \tau, \varepsilon) + w(x, \tau, \varepsilon)e^{p\tau}, \quad (18)$$

заметим, что

$$U_x(0, \tau, \varepsilon) = U_x(1, \tau, \varepsilon) = 0, \quad U(x, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, \varepsilon).$$

После несложных преобразований, использующих формулу конечных приращений, для функции $w(x, \tau, \varepsilon)$ получим задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\bar{D}(x, \tau, \varepsilon)w_x)_x + \varepsilon^2 D_u^{**}(x, \tau, \varepsilon)U_x(x, \tau, \varepsilon)w_x - w_\tau - \\ - w\left(p + f_u^{**}(x, \tau, \varepsilon) - \varepsilon^2(D_u^{**}(x, \tau, \varepsilon)U_x(x, \tau, \varepsilon))_x\right) = -e^{-p\tau}L_\varepsilon U = O(\varepsilon), \\ x \in (-1, 1), \quad \tau \in (0, \tau_A], \end{aligned} \quad (19)$$

$$w_x(0, \tau, \varepsilon) = w_x(1, \tau, \varepsilon) = 0, \quad \tau \in [0, \tau_A],$$

$$w(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Здесь черта означает, что функция вычисляется в точке $(\bar{u}(x, \tau, \varepsilon), x, \varepsilon)$, а верхний индекс $**$ — что функция вычисляется в некоторой промежуточной (не обязательно одной и той же для разных слагаемых) точке $(u^{**}(x, \tau, \varepsilon), x, \varepsilon)$, где $u^{**}(x, \tau, \varepsilon)$ заключено между $\bar{u}(x, \tau, \varepsilon)$ и $U(x, \tau, \varepsilon)$.

При достаточно малом ε имеем:

$$\kappa(x, \tau, \varepsilon) = p + f_u^{**}(x, \tau, \varepsilon) - \varepsilon^2 (D_u^{**}(x, \tau, \varepsilon) U_x(x, \tau, \varepsilon))_x > 0; \quad (20)$$

следовательно, для оператора в левой части (19) справедлив принцип сравнения (см. [18]).

Рассмотрим в качестве верхнего решения функцию εC , где C — достаточно большое положительное число. Очевидно, неравенство в начальный момент времени и граничные неравенства выполняются. Действуя дифференциальным оператором задачи (19), получаем

$$-\varepsilon C \kappa(x, \tau, \varepsilon) - O(\varepsilon) \leq 0. \quad (21)$$

Аналогично можно показать, что $-\varepsilon C$ — нижнее решение. Поэтому

$$|w(x, \tau, \varepsilon)| \leq \varepsilon C, \quad x \in [-1, 1], \quad \tau \in [0, \tau_A]. \quad (22)$$

Таким образом, справедлива следующая оценка для $w(x, \tau, \varepsilon)$:

$$w(x, \tau, \varepsilon) = O(\varepsilon) \quad \text{при } x \in [-1, 1], \tau \in [0, \tau_A]. \quad (23)$$

Далее, из (18) следует

$$\bar{u}(x, \tau, \varepsilon) = U(x, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p\tau} = U(x, \tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{1-pA}) \quad \text{при } x \in [-1, 1], \tau \in [0, \tau_A], \quad (24)$$

и, так как в то же время

$$R(x, \tau, \varepsilon) = O(\varepsilon e^{p\tau}) = O(\varepsilon^{1-pA}), \quad (25)$$

то окончательно имеем

$$U(x, \tau, \varepsilon) = \tilde{u}(x, \tau) + O(\varepsilon^{1-pA}). \quad (26)$$

Сравнивая (24) и (26), получаем требуемое равенство. Лемма доказана. $\square$

Объединяя результаты лемм 1 и 2, приходим к следующей теореме.

Теорема. Пусть выполнены условия (A1)–(A3), где постоянные m и p фиксированы в (7) и (10), а δ удовлетворяет (5). Положим

$$A = \frac{1}{p+m}, \quad r = \frac{m}{p+m}.$$

Тогда при достаточно малых ε для решения $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1) в момент времени $t = t_A(\varepsilon) = A\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$ справедливы представления

$$\begin{aligned} u(x, t_A(\varepsilon), \varepsilon) &= \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon^r), & x \in [-1, x_0 - \delta], \\ u(x, t_A(\varepsilon), \varepsilon) &= \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon^r), & x \in [x_0 + \delta, 1]. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$u(x, t_A(\varepsilon), \varepsilon) = \bar{u}(x, \tau_A(\varepsilon), \varepsilon) = \tilde{u}(x, \tau_A) + O(\varepsilon^{1-pA}) = \tilde{u}(x, \tau_A) + O(\varepsilon^r),$$

а в силу леммы 1

$$|\tilde{u}(x, \tau_A) - \varphi^{(-)}(x)| \leq \eta_0 e^{-m(\tau_A - \tau_\delta)} = O(\varepsilon^{mA}) = O(\varepsilon^r), \quad x \in [-1, x_0 - \delta].$$

Поэтому

$$u(x, t_A(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon^r), \quad x \in [-1, x_0 - \delta].$$

Второе равенство доказывается аналогично. Теорема доказана. $\square$

4. Заключение. Рассмотрен процесс формирования решения вида фронта в уравнении реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Доказано, что из начальной функции достаточно общего вида за асимптотически малый (порядка $\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$) промежуток времени формируется контрастная структура (фронт) с внутренними переходными слоями между уровнями, задаваемыми корнями вырожденного уравнения. Определены точки, в окрестности которых возможно появление внутренних переходных слоев. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя, получены оценки длительности переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия// Модел. анал. информ. сист. — 2017. — 24, № 3. — С. 259–279.
2. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 10. — С. 1594–1607.
3. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Шнайдер К. Р. О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2005. — 1, № 1. — С. 9–13.
4. Волков В. Т., Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Нефедов Н. Н. Формирование и динамика фронта в одной модели реакции-диффузии-адвекции// Мат. модел. — 2010. — 22, № 8. — С. 109–118.
5. Волков В. Т., Грачев Н. Е., Нефедов Н. Н., Николаев А. Н. О формировании резких переходных слоев в двумерных моделях реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — 47, № 8. — С. 1356–1364.
6. Волков В. Т., Нефедов Н. Н. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2006. — 46, № 4. — С. 615–623.
7. Коцюбинский К. А., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Стабилизация решения вида движущегося фронта в уравнении реакция-диффузия// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2021. — 76, № 6. — С. 3–11.
8. Левашова Н. Т., Чунжук Е. А., Орлов А. О. Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками// Теор. мат. физ. — 2024. — 220, № 1. — С. 93–112.
9. Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
10. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О. Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 6. — С. 763–776.
11. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О. О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубического типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — 60, № 9. — С. 1513–1532.
12. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией// Мат. заметки. — 2019. — 106, № 5. — С. 708–722.
13. Никулин Е. И. Движение фронта в задаче реакция-адвекция-диффузия с периодическими коэффициентами// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2022. — 77, № 5. — С. 70–76.
14. Орлов А. О. О движении фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностью// Диффер. уравн. — 2025. — 61, № 1. — С. 35–49.
15. Nikulin E. I., Nefedov N. N., Orlov A. O. Existence and asymptotic stability of solutions for periodic parabolic problems in Tikhonov-type reaction–diffusion–advection systems with KPZ nonlinearities// Russ. J. Math. Phys. — 2024. — 31, № 3. — P. 504–516.
16. Nefedov N. N., Nikulin E. I. Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — 22, № 2. — P. 215–226.
17. Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — 405, № 1. — P. 90–103.

18. *Wang J.* Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients// Nonlin. Anal. — 1998. — 34, № 1. — P. 113-142.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Махмудов Артем Русланович (Makhmudov Artem Ruslanovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: makhmudov.ar21@physics.msu.ru

Орлов Андрей Олегович (Orlov Andrei Olegovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Волков Владимир Тарасович (Volkov Vladimir Tarasovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: volkovvt@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 63–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-63-77

УДК 517.926

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ НЕЧЕТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И НЕОДНОРОДНОСТЯХ

© 2025 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Исследованы системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при нечетких начальных данных и неоднородностях. В случае матриц с неотрицательными элементами показано существование сильных решений однородных и неоднородных начальных задач. Особое внимание уделено неотрицательности решений соответствующих линейных задач. Она установлена при дополнительном предположении о неотрицательности нечетких начальных данных и неоднородностей. В качестве примеров приведены системы с нечеткими треугольными начальными данными и неоднородностями. Рассмотрено приложение к динамической модели межотраслевого баланса с нечеткими данными.

Ключевые слова: нечеткое линейное дифференциальное уравнение, положительное решение, нечеткая динамическая модель межотраслевого баланса.

ON NONNEGATIVE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS UNDER FUZZY INITIAL DATA AND INHOMOGENEITIES

© 2025 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. Systems of linear differential equations with variable coefficients with fuzzy initial data and inhomogeneities are examined. In the case of matrices with nonnegative elements, we prove the existence of strong solutions of homogeneous and inhomogeneous initial problems and periodic solutions. The main attention is paid to the nonnegativity of solutions to the corresponding linear problems. It is established under the additional assumption of nonnegativity of fuzzy initial data and heterogeneities. An application to a dynamic model of input-output balance with fuzzy data is considered.

Keywords and phrases: fuzzy linear differential equation, positive solution, fuzzy dynamic model of input-output balance.

AMS Subject Classification: 00A71

1. Введение. Нечеткие дифференциальные уравнения впервые рассмотрены в [19, 28]. Их изучение получило дальнейшее развитие в [23, 26, 29] и др. Исследования по нечетким дифференциальным уравнениям опирались на различные определения производных от нечеткозначных функций (см. [16, 17]). В настоящей работе используется производная по Сеиккала (см. [29]). Интерес к этой тематике не ослабевает в последнее время в связи с различными приложениями (см., например, [5, 13, 14, 18, 20]).

Как известно, неотрицательные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеют существенное значение в различных динамических моделях. Например, в теории вероятностей (система дифференциальных уравнений Колмогорова [3, гл. 4]), в математической экономике (динамическая модель межотраслевого баланса Леонтьева [7, гл. 1]), математической биологии (динамическая модель в иммунологии [9, гл. 2]) и других областях.

В настоящей работе изучены неотрицательные решения систем линейных дифференциальных уравнений с вещественными неотрицательными переменными коэффициентами при нечетких начальных данных и нечеткозначных неоднородностях. Основным предположением является неотрицательность коэффициентов матрицы системы. В этом случае установлена формула (аналогичная классической) решения однородной системы дифференциальных уравнений в случае нечеткого начального условия посредством фундаментальной матрицы системы. Кроме того, доказана формула для решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (аналогичная классической) в случае нечеткого начального условия и нечеткозначной неоднородности. Показана единственность решений соответствующих задач.

Эти результаты явились базой для изучения неотрицательных решений. А именно, при дополнительном предположении о неотрицательности нечеткого начального условия и нечеткозначной неоднородности установлена неотрицательность решения соответствующей начальной задачи для нечеткой системы дифференциальных уравнений.

Основные теоретические результаты работы иллюстрируются примерами дифференциальных систем с треугольными нечеткими начальными условиями и неоднородностями. Показано, что аналогичный вид будут иметь решения соответствующих систем.

Полученные в данной статье результаты представляют интерес для нового раздела в области нечетких дифференциальных уравнений — теории положительных решений.

В качестве приложения в настоящей работе рассмотрена модификация динамической модели межотраслевого баланса в случае нечетких начальных данных и нечеткозначной неоднородности.

В связи с этим отметим, что при наличии неопределенности в данных балансовой модели Леонтьева исследователи, как правило, используют два подхода: интервальный (см. [21, 22, 25]) и нечеткий (см. [2, 8, 10]). Эти подходы и различны, и близки. При интервальном подходе неопределенность характеризуется границами соответствующих интервалов. При нечетком подходе используется функция принадлежности нечеткого числа (нечеткого интервала) в качестве меры возможности попадания точки в соответствующий интервал — носитель. Таким образом, нечеткий подход содержит больше информации об имеющейся неопределенности, чем интервальный. С другой стороны, нечеткое число можно трактовать как совокупность соответствующих α -интервалов.

Практически в обоих упомянутых подходах используются экспертные оценки — либо для определения границ интервалов, либо для построения функции принадлежности.

Подчеркнем, что в известных работах по учету неопределенности в балансовых моделях Леонтьева [2, 8, 10, 21, 22, 25] рассматриваются модели, в которых входящие величины не меняются с течением времени. Характерная особенность предлагаемой в настоящей статье нечеткой модификации модели Леонтьева заключается в том, что она является динамической, а именно, ее параметры непрерывно зависят от времени. Эта модель является развитием классической динамической модели межотраслевого баланса Леонтьева (см., например, [7, гл. 1], [4]).

Исследование нечеткой динамической модели межотраслевого баланса в настоящей статье опирается на результаты по теории нечетких дифференциальных уравнений, полученные в данной работе.

Отметим, что работы по нечетким динамическим обобщениям балансовой модели Леонтьева (так же, как и динамическим интервальным моделям «затраты-выпуск»), по видимому, ранее не публиковались.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции. Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [1, гл. 5], [11, гл. 2, 3]). Множество таких нечетких чисел обозначим J .

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_{\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad z_0 = \text{cl}\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через z_{α}^{-} , а правую через z_{α}^{+} . Таким образом, $z_{\alpha} = [z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$. Выражения z_{α}^{-} и z_{α}^{+} называют соответственно левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа. Множество J характеризуется выполнением следующих условий на индексы нечеткого числа:

- (i) $z^{-}(\alpha) \leq z^{+}(\alpha)$ для всех $\alpha \in [0, 1]$;
- (ii) функция $z^{-}(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0;
- (iii) функция $z^{+}(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия (i)–(iii), задают нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^{-}(\alpha)$, $z^{+}(\alpha)$ и $u^{-}(\alpha)$, $u^{+}(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[z^{-}(\alpha) + u^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha) + u^{+}(\alpha)]$. Умножение на положительное число s характеризуется интервалами α -уровня $[sz^{-}(\alpha), sz^{+}(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число c — интервалами α -уровня $[cz^{+}(\alpha), cz^{-}(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и верхняя границы α -интервала имеют вид

$$z^{-}(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^{+}(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α -уровнями z_{α} и u_{α} задают метрику (см. [24])

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max \left\{ |z^{-}(\alpha) - u^{-}(\alpha)|, |z^{+}(\alpha) - u^{+}(\alpha)| \right\}. \quad (1)$$

Здесь $[z^{-}(\alpha), z^{+}(\alpha)]$ и $[u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z}, \tilde{u}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Фиксируем промежуток $[0, T]$ числовой оси. Отображение $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функций $\tilde{z}(t)$ при $t \in [0, T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x, t)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал

$$z_{\alpha}(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x, t) \geq \alpha\}$$

и $z_0(t) = \text{cl}\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x, t) > 0\}$. Обозначим через $z_{\alpha}^{-}(t) = z^{-}(t, \alpha)$ и $z_{\alpha}^{+}(t) = z^{+}(t, \alpha)$ соответственно левую и правую границы α -интервала. Таким образом, $z_{\alpha}(t) = [z_{\alpha}^{-}(t), z_{\alpha}^{+}(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1).

Замечание 1. Индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть α -индексы $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ интегрируемы (по Риману) на промежутке $[0, T]$ при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом (Римана) по промежутку $[0, T]$ от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют (см. [30]) такое нечеткое число

$$\tilde{g} = \int_0^T \tilde{z}(\tau) d\tau,$$

что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид

$$\left(\int_0^T \tilde{z}(t) dt \right)_{\alpha} = \left[\int_0^T z_{\alpha}^{-}(t) dt, \int_0^T z_{\alpha}^{+}(t) dt \right].$$

В этом случае нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ называют интегрируемой. Как известно (см. [25]), всякая нечеткозначная функция $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ с интегрируемыми (по Риману) ограниченными на $[0, T]$ α -индексами $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ является интегрируемой.

Согласно замечанию 1 непрерывная на $[0, T]$ нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ интегрируема.

Утверждение 1 (см. [30]). *Операция интегрирования нечеткозначных функций аддитивна и однородна, т.е. для нечеткозначных интегрируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем*

$$\int_0^T (\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t)) dt = \int_0^T \tilde{z}(t) dt + \int_0^T \tilde{w}(t) dt, \quad \int_0^T c\tilde{z}(t) dt = c \int_0^T \tilde{z}(t) dt$$

для любой вещественной постоянной c .

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары: множество C называют разностью Хукухары множеств A и B , если $A = B + C$; обозначение $C = A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ называют H -дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in (0, T)$ [3], если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют такие разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H -производной в точке t .

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : [0, T] \rightarrow J$ называют S -дифференцируемой или дифференцируемой по Сеиккала в точке $t \in (0, T)$ (см. [29]), если ее α -индексы $z_{\alpha}^{-}(t)$ и $z_{\alpha}^{+}(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_{\alpha}^{-})'(t)$ и $(z_{\alpha}^{+})'(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ образуют нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_{\alpha} = [(z_{\alpha}^{-})'(t), (z_{\alpha}^{+})'(t)]$.

Замечание 2 (см. [17]). Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ является H -дифференцируемой в точке $t \in (0, T)$. Тогда она S -дифференцируема в точке $t \in (0, T)$, причем H -производная совпадает с S -производной.

Пусть $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала при всех $t \in (0, T)$. Говорят (см. [17]), что выполнено условие непрерывности, если α -индексы производных $(z_{\alpha}^{\pm})'(t)$ непрерывны на $(0, T) \times [0, 1]$.

Замечание 3 (см. [17]). Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала на $(0, T)$ и выполнено условие непрерывности, то $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Хукухаре на $(0, T)$ и S -производная совпадает с H -производной.

Утверждение 2 (см. [29]). *Нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной, т.е. для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем*

$$(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t), \quad (c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$$

для любой вещественной постоянной $c \geq 0$.

Ниже будем рассматривать векторные нечеткозначные функции $\tilde{Z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_n(t))^T$ с нечеткозначными компонентами $\tilde{z}_i(t)$ (T — знак транспонирования). Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость таких функций будем понимать покоординатно.

[illegible]

Тогда фундаментальная матрица $B(t)$ при всех $t \in [0, T]$ и матрица Коши $V(t, s)$ при $t, s \in [0, T]$, $t \geq s$, имеют непрерывные неотрицательные коэффициенты.

Отметим, что для матрицы Коши это легко следует из представления

$$V(t, s) = E + \int_s^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_s^t A(\tau_2) \int_s^{\tau_2} A(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ + \int_s^t A(\tau_k) \int_s^{\tau_k} A(\tau_{k-1}) \dots \int_s^{\tau_2} A(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k + \dots, \quad t \geq s,$$

где E — единичная матрица. Как известно, приведенный выше ряд сходится равномерно по t на промежутке $[s, T]$. Соответствующий ряд в случае $s = 0$ характеризует фундаментальную матрицу $B(t) = V(t, 0)$.

Лемма 2. В условиях леммы 1 производная фундаментальной матрицы $B'(t)$ имеет непрерывные неотрицательные коэффициенты, производная матрицы Коши $V'_t(t, s)$ при $t \geq s$ имеет непрерывные неотрицательные коэффициенты.

Доказательство. В силу леммы 1 это следует из соотношений

$$B'(t) = A(t)B(t), \quad V'_t(t, s) = B'(t)B^{-1}(s) = A(t)B(t)B^{-1}(s) = A(t)V(t, s)$$

с учетом непрерывности и неотрицательности коэффициентов матриц $A(t)$, $B(t)$ и $V(t, s)$ при $t \geq s$. $\square$

Задаче (2), (3) поставим в соответствие нечеткую задачу Коши в векторной форме

$$\tilde{X}' = A(t)\tilde{X}, \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$\tilde{X}(0) = \tilde{\xi}, \quad (7)$$

где $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$.

Сильным решением задачи (6), (7) будем называть нечеткозначную векторную функцию $\tilde{X}(t)$, S -дифференцируемую на промежутке $(0, T)$ и удовлетворяющую на $(0, T)$ векторному дифференциальному уравнению (6), а также начальному условию (7).

Теорема 1. Пусть матрица $A(t)$ при всех $t \in [0, T]$ имеет вещественные коэффициенты $a_{i,j}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, которые непрерывны по t на $[0, T]$ и неотрицательны, т.е. выполнено условие (5). Если $\tilde{X}(t)$ — сильное решение задачи (6), (7), то его α -индексы $X_\alpha^\pm(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ удовлетворяют соотношениям

$$(X_\alpha^\pm)'(t) = A(t)X_\alpha^\pm(t), \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

$$X_\alpha^\pm(0) = \xi_\alpha^\pm. \quad (9)$$

Здесь $X_\alpha^\pm(t) = (x_{\alpha,1}^\pm(t), \dots, x_{\alpha,n}^\pm(t))^T$, $\xi_\alpha^\pm = (\xi_{\alpha,1}^\pm, \dots, \xi_{\alpha,n}^\pm)^T$, причем $x_{\alpha,i}^\pm(t)$ и $\xi_{\alpha,i}^\pm$ — α -индексы нечетких чисел $\tilde{x}_i(t)$ и $\tilde{\xi}_i$ соответственно. При этом

$$X_\alpha^\pm(t) = B(t)\xi_\alpha^\pm, \quad (10)$$

где $B(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4).

Обратно, пусть $\tilde{X}(t)$ — S -дифференцируемая векторная нечеткозначная функция и ее индексы $X_\alpha^\pm(t)$ удовлетворяют соотношениям (8), (9). Тогда $\tilde{X}(t)$ удовлетворяет соотношениям (6), (7), т.е. является сильным решением.

Доказательство. Пусть $\tilde{X}(t)$ — сильное решение уравнения (6). Тогда на основании интервального признака равенства нечетких чисел имеем

$$(\tilde{X}')_\alpha^\pm(t) = (A\tilde{X})_\alpha^\pm(t).$$

При этом по определению S -производной

$$(X_\alpha^\pm)'(t) = (AX)_\alpha^\pm(t).$$

Кроме того, с учетом неотрицательности коэффициентов $a_{i,j}(t) \geq 0$ получим

$$(A\tilde{X})_{\alpha}^{\pm} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}\tilde{x}_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}\tilde{x}_j \end{pmatrix}_{\alpha}^{\pm} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}\tilde{x}_j \right)_{\alpha}^{\pm} \\ \dots\dots\dots \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{n,j}\tilde{x}_j \right)_{\alpha}^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}(\tilde{x}_j)_{\alpha}^{\pm} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}(\tilde{x}_j)_{\alpha}^{\pm} \end{pmatrix} = AX_{\alpha}^{\pm}.$$

Отсюда следует формула (8).

Соотношение (9) следует из (7) в силу признака равенства нечетких чисел в интервальной форме. Из (8), (9) и определения фундаментальной матрицы получим (10).

Обратное утверждение вытекает из интервального признака равенства нечетких чисел в силу формулы $(A\tilde{X})_{\alpha}^{\pm} = AX_{\alpha}^{\pm}$, установленной выше. $\square$

Важным дополнением к теореме 1 является следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, причем $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ — решения задачи (8), (9). Тогда они порождают нечеткозначную функцию $\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi}$.

Доказательство. По условию $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ представимы формулами $X_{\alpha}^{\pm}(t) = B(t)\xi_{\alpha}^{\pm}$. Следовательно, компоненты $x_{\alpha,i}(t)$ вектора $X_{\alpha}^{\pm}(t)$ имеют вид

$$x_{\alpha,i}^{\pm}(t) = \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{\pm}.$$

При этом для любого $j = 1, \dots, n$ выражения $\xi_{\alpha,j}^{\pm}$ являются α -индексами нечеткого числа $\tilde{\xi}_j$, так что для них выполнены условия (i)–(iii) раздела 2. Поскольку $b_{i,j}(t) \geq 0$, то при любом $t \in [0, T]$ и $j = 1, \dots, n$ выражения $b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{\pm}$ также удовлетворяют условиям (i)–(iii) раздела 2 и, следовательно, являются α -индексами нечетких чисел $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Тогда по определению интервального сложения нечетких чисел суммы $\sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{\pm}$ определяют α -индексы нечетких чисел $\tilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$,

являющихся компонентами нечеткозначной функции $\tilde{X}(t)$, что и влечет утверждение 3. $\square$

Как показывают примеры (см. [15]), для систем нечетких дифференциальных уравнений с матрицами, элементы которых имеют разные знаки, решения соответствующих систем для α -индексов могут не определять α -индексы каких-либо нечеткозначных функций и, следовательно, не определять решений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда векторная нечеткозначная функция

$$\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} \quad (11)$$

есть сильное решение задачи (6), (7), причем единственное.

Доказательство. Покажем сначала дифференцируемость $\tilde{X}(t)$ по Сеиккала. Согласно условию $a_{i,j}(t) \geq 0$ и лемме 1 имеем $b_{i,j}(t) \geq 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$. При этом согласно лемме 2 имеем $b'_{i,j}(t) \geq 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим нечеткозначную функцию $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Как известно (см., пример 2), в предположении, что $b_{i,j}(t) \geq 0$ и $b'_{i,j}(t) \geq 0$, она непрерывно дифференцируема по Сеиккала. При этом $(b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j)' = b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$.

Рассмотрим компоненту $\tilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$ векторной функции $\tilde{X}(t)$, определяемой (11). Согласно утверждению 2, она дифференцируема по Сеиккала, причем $\tilde{x}'_i(t) = \sum_{j=1}^n b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Таким образом, $\tilde{X}(t)$ дифференцируема по Сеиккала. Кроме того $\tilde{X}'(t) = B'(t)\tilde{\xi} = A(t)B(t)\tilde{\xi} = A(t)\tilde{X}(t)$. Поэтому выражение $\tilde{X}(t)$, определяемое формулой (11), есть сильное решение уравнения (6). При этом $\tilde{X}(0) = B(0)\tilde{\xi} = E\tilde{\xi} = \tilde{\xi}$. Следовательно, выполнено (7).

Единственность решения задачи (6), (7) вытекает из теоремы 1 и единственности решения каждой из задач (8), (9). $\square$

Отметим, что (10) вытекает из (11) с учетом интервального признака равенства нечетких чисел и неотрицательности элементов $b_{i,j}(t)$ матрицы $B(t)$. Именно, $X_{\alpha}^{\pm}(t) = (B(t)\tilde{\xi})_{\alpha}^{\pm} = B(t)\xi_{\alpha}^{\pm}$.

Заметим, что дифференцируемость нечеткозначной функции по Сеиккала в точке $t \in (0, T)$, вообще говоря, не влечет непрерывность по метрике (1) в этой точке. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *В условиях теоремы 1 нечеткозначная векторная функция (11) непрерывна по метрике (1).*

Доказательство. Согласно (11)

$$\tilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Согласно лемме 1, $b_{i,j}(t) \geq 0$; тогда $[b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j]_{\alpha}^{\pm} = b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{\pm}$.

Кроме того, для всех $t, s \in [0, T]$ можем записать

$$b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{-} - b_{i,j}(s)\xi_{\alpha,j}^{-} = (b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s))\xi_{\alpha,j}^{-}.$$

Согласно свойствам нечетких чисел их индексы ограничены по α , т.е. $|\xi_{\alpha,j}^{-}| \leq C_j$ для всех $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$|b_{i,j}(t)\xi_{\alpha,j}^{-} - b_{i,j}(s)\xi_{\alpha,j}^{-}| \leq |b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s)| |\xi_{\alpha,j}^{-}| \leq C_j |b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s)|.$$

Аналогично для индексов с плюсом.

Поскольку $b_{i,j}(t)$ — непрерывные скалярные функции, то это влечет непрерывность по метрике (1) каждого слагаемого $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Отсюда вытекает непрерывность суммы $\tilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$, $i = 1, \dots, n$, а следовательно, утверждение 4. $\square$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 функция $\tilde{X}'(t)$ является непрерывной нечеткозначной векторной функцией.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что $\tilde{x}'_i(t) = \sum_{j=1}^n b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. При этом, согласно лемме 2, каждая из функций $b'_{i,j}(t)$ непрерывна. Тогда в соответствии с утверждением 4 непрерывны и суммы $\tilde{x}'_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, что и доказывает следствие 1. $\square$

Назовем нечеткое число $\tilde{z}$ неотрицательным и будем писать $\tilde{z} \geq 0$, если его левые α -индексы $z_{\alpha}^{-} \geq 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Отметим, что, например, треугольное нечеткое число (a, b, c) из примера 1 неотрицательно в предположении $a \geq 0$. Нечеткий вектор $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)^T$ назовем неотрицательным и будем писать $\tilde{Z} \geq 0$, если таковы все его компоненты $\tilde{z}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно вектор $\tilde{\xi}$ неотрицателен. Тогда сильное решение (11) также неотрицательно.*

Это вытекает из теоремы 2 и формулы (10).

Лемма 3 (см. [6, гл. 1, § 4]). *Пусть все коэффициенты матрицы $A(t)$ непрерывны и $a_{i,j}(t) > 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$, а $B(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (4). Тогда $B(t)X^0 > 0$ для любого (ненулевого) вектора X^0 с неотрицательными компонентами.*

Здесь положительность вектора понимается покоординатно.

Назовем нечеткое число $\tilde{z}$ положительным, если все его левые α -индексы $z_{\alpha}^{-} > 0$ при всех $\alpha \in [0, 1]$. Отметим, в частности, что треугольное нечеткое число (a, b, c) из примера 1 положительно, если $a > 0$.

С учетом леммы 3 устанавливается следующий факт.

Следствие 2. Пусть вещественные функции $a_{i,j}(t)$ непрерывны и $a_{i,j}(t) > 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$. Пусть дополнительно начальный вектор $\tilde{\xi}$ неотрицателен, причем не все левые α -индексы его компонент $\tilde{\xi}_i$ равны нулю. Тогда решение (11) задачи (6), (7) положительно.

Пример 3. Пусть все компоненты $\tilde{\xi}_i$ ($i = 1, \dots, n$) нечеткого вектора $\tilde{\xi}$ имеют треугольную форму $\tilde{\xi}_i \sim (a_i^0, b_i^0, c_i^0)$. Тогда решение (11) есть нечеткозначная векторная функция, каждая компонента которой имеет треугольный вид:

$$(B(t)\tilde{\xi})_i \sim \left(\sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)a_j^0, \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)b_j^0, \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)c_j^0 \right).$$

Это следует из представления

$$B(t)\tilde{\xi} = \left(\sum_{j=1}^n b_{1,j}(t)\tilde{\xi}_j, \dots, \sum_{j=1}^n b_{n,j}(t)\tilde{\xi}_j \right)^T$$

и неотрицательности функций $b_{i,j}(t)$ при всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$.

4. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с нечеткозначными неоднородностями. Ниже, как и в разделе 2, $A(t) = \{a_{i,j}(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матричная функция n -го порядка с вещественными элементами, непрерывными при всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим задачу Коши для векторно-матричного неоднородного нечеткого дифференциального уравнения

$$\tilde{X}' = A(t)\tilde{X} + \tilde{F}(t), \quad t \in (0, T), \quad (12)$$

$$\tilde{X}(0) = \tilde{\xi}. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{F}(t) = (\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_n(t))^T$ — заданная векторная функция с нечеткозначными компонентами, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)^T$ — заданный вектор начальных условий с нечеткозначными компонентами, $\tilde{X}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t))^T$ — искомая векторная функция с нечеткозначными компонентами.

Сильным решением задачи (12), (13) будем называть нечеткозначную S -дифференцируемую векторную функцию, удовлетворяющую уравнению (12) на заданном промежутке $(0, T)$, а также начальному условию (13).

Обозначим α -индексы нечеткозначных функций $\tilde{x}_i(t)$ через $x_{\alpha,i}^\pm(t)$, α -индексы нечеткозначных функций $\tilde{f}_i(t)$ через $f_{\alpha,i}^\pm(t)$ и α -индексы нечетких чисел $\tilde{\xi}_i$ через $\xi_{\alpha,i}^\pm$.

Теорема 4. Пусть $A(t)$ — матричная функция с непрерывными неотрицательными коэффициентами, $\tilde{F}(t)$ — непрерывная векторная нечеткозначная функция. Если $\tilde{X}(t)$ — сильное решение задачи Коши для нечеткого дифференциального уравнения (12) на промежутке $(0, T)$, удовлетворяющее (13), то его α -индексы $X_\alpha^\pm(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и всех $t \in (0, T)$ удовлетворяют равенствам

$$(X_\alpha^\pm)'(t) = AX_\alpha^\pm(t) + F_\alpha^\pm(t), \quad t \in (0, T), \quad (14)$$

$$X_\alpha^\pm(0) = \xi_\alpha^\pm. \quad (15)$$

Здесь $X_\alpha^\pm(t) = (x_{\alpha,1}^\pm(t), \dots, x_{\alpha,n}^\pm(t))^T$, $F_\alpha^\pm(t) = (f_{\alpha,1}^\pm(t), \dots, f_{\alpha,n}^\pm(t))^T$, $\xi_\alpha^\pm = (\xi_{\alpha,1}^\pm, \dots, \xi_{\alpha,n}^\pm)^T$.

Обратно, пусть $\tilde{X}(t)$ — S -дифференцируемая векторная нечеткозначная функция и ее индексы $X_\alpha^\pm(t)$ удовлетворяют соотношениям (14), (15). Тогда $\tilde{X}(t)$ удовлетворяет соотношениям (12), (13), т.е. является сильным решением.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Как известно, решение задачи (14), (15) дается формулой

$$X_\alpha^\pm(t) = B(t)\xi_\alpha^\pm + \int_0^t B(t)B^{-1}(\tau)F_\alpha^\pm(\tau) d\tau, \quad (16)$$

где $B(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы (4), а $B(t)B^{-1}(\tau) = V(t, \tau)$ — матрица Коши, т.е. оператор сдвига по траектории однородной задачи (4) за промежуток времени от τ до t .

Лемма 4. Пусть $\tilde{f} : [0, T] \rightarrow J$ — непрерывная (по метрике (1)) нечеткозначная функция, а $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярная непрерывная функция, причем $g(\tau) \geq 0$ при всех $\tau \in [0, T]$. Тогда нечеткозначная функция $\tilde{\varphi}(\tau) = g(\tau)\tilde{f}(\tau)$ непрерывна на промежутке $[0, T]$ по метрике (1) и, следовательно, интегрируема по Риману.

Доказательство. Обозначим α -индексы нечеткозначной функции $\tilde{f}(\tau)$ через $f_{\alpha}^{\pm}(\tau)$. Так как $g(\tau) \geq 0$, то α -индексы $\varphi_{\alpha}^{\pm}(t)$ нечеткозначной функции $\tilde{\varphi}(t)$ согласно правилу умножения нечетких чисел на положительные скаляры при всех $\tau \in [0, T]$ имеют вид $\varphi_{\alpha}^{\pm}(\tau) = g(\tau)f_{\alpha}^{\pm}(\tau)$. По условию α -индексы $\varphi_{\alpha}^{\pm}(\tau)$ — непрерывные функции при $\tau \in [0, T]$.

Кроме того, по определению α -интервалов имеем

$$f_0^{-}(\tau) \leq f_{\alpha}^{-}(\tau) \leq f_1^{-}(\tau), \quad f_1^{+}(\tau) \leq f_{\alpha}^{+}(\tau) \leq f_0^{+}(\tau), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Тогда найдется такая постоянная $c_1 > 0$, что

$$|f_{\alpha}^{\pm}(\tau)| \leq \max \left\{ |f_0^{\pm}(\tau)|, |f_1^{\pm}(\tau)| \right\} \leq c_1, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Фиксируем $t_1, t_2 \in [0, T]$ и рассмотрим разность

$$\varphi_{\alpha}^{\pm}(t_1) - \varphi_{\alpha}^{\pm}(t_2) = g(t_1)f_{\alpha}^{\pm}(t_1) - g(t_2)f_{\alpha}^{\pm}(t_2) = g(t_1)(f_{\alpha}^{\pm}(t_2) - f_{\alpha}^{\pm}(t_2)) + (g(t_1) - g(t_2))f_{\alpha}^{\pm}(t_2).$$

Тогда, обозначая через c_2 максимум функции $g(t)$ на $[0, T]$, можем записать

$$|\varphi_{\alpha}^{\pm}(t_1) - \varphi_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq c_2 |f_{\alpha}^{\pm}(t_2) - f_{\alpha}^{\pm}(t_2)| + c_1 |g(t_1) - g(t_2)|.$$

Отсюда в силу непрерывности $\tilde{f}(t)$ по метрике (1) и непрерывности $g(t)$ на $[0, T]$ и следует утверждение леммы 4. $\square$

В связи с теоремой 4 подчеркнем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда правые части формулы (16) определяют α -индексы нечеткозначной функции

$$\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} + \int_0^t B(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau. \quad (17)$$

Доказательство. По поводу первого слагаемого в правой части (16) см. утверждение 3. Рассмотрим второе слагаемое

$$W_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^t V(t, \tau)F_{\alpha}^{\pm}(\tau) d\tau.$$

Его компоненты $w_{\alpha, i}^{\pm}$ имеют вид

$$w_{\alpha, i}^{\pm}(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n v_{ij}(t, \tau) f_{\alpha, j}^{\pm}(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $v_{ij}(t, \tau)$ — элементы матричной функции $V(t, \tau)$.

Заметим, что в условиях утверждения 5 функции $v_{ij}(t, \tau)$ и $f_{\alpha, j}^{\pm}(\tau)$ непрерывны по τ в силу леммы 1 и замечания 1 соответственно. Кроме того, $v_{ij}(t, \tau) \geq 0$ при всех $\tau \leq t$ и всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда поскольку $f_{\alpha, j}^{\pm}(\tau)$ при всех $\tau \in [0, t]$ и всех $j = 1, \dots, n$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) раздела 2 на α -индексы нечетких чисел, то таковы и $w_{\alpha, i}^{\pm}$. Следовательно, $w_{\alpha, i}^{\pm}(t)$, определенные в (18), порождают при всех $t \in [0, T]$ нечеткие числа $\tilde{w}_i(t)$ по формуле

$$\tilde{w}_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n v_{ij}(t, \tau) \tilde{f}_j(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Отметим, что интеграл в правой части этой формулы корректно определен. Действительно, так как $v_{i,j}(t, \tau) \geq 0$ при всех $t, \tau \in [0, T]$, $t \geq \tau$, то согласно лемме 4 при фиксированном $t \in [0, T]$ каждая из функций $v_{i,j}(t, \tau)\tilde{f}_j(\tau)$ интегрируема. Тогда в силу утверждения 1 интегрируема их сумма $\sum_{j=1}^n v_{i,j}(t, \tau)\tilde{f}_j(\tau)$.

Таким образом, нечеткозначные функции $\tilde{w}_i(t)$, заданные в (19), являются компонентами векторной нечеткозначной функции

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t B(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau) d\tau = \int_0^t V(t, \tau)\tilde{F}(\tau) d\tau, \quad (20)$$

что и доказывает формулу (17), а значит и утверждение 5. $\square$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, векторная нечеткозначная функция $\tilde{F}(t)$ непрерывна. Тогда векторная нечеткозначная функция $\tilde{X}(t)$, определяемая формулой (17), является сильным решением задачи (12), (13), причем единственным.

Доказательство. Покажем, что нечеткозначная функция $\tilde{w}_i(t)$, определяемая формулой (19), дифференцируема по Сеиккала. Для этого рассмотрим производную от α -индексов $w_{\alpha,i}^{\pm}(t)$. Согласно (18) и правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$(w_{\alpha,i}^{\pm})'(t) = \sum_{j=1}^n v_{i,j}(t, t)f_{\alpha,j}^{\pm}(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^n (v_{i,j}(t, \tau))'_t f_{\alpha,j}^{\pm}(\tau) d\tau. \quad (21)$$

По определению $v_{i,j}(t, t) = 1$ при $i = j$ и $v_{i,j}(t, t) = 0$ при $i \neq j$. Кроме того, согласно лемме 2 выражение $(v_{i,j}(t, \tau))'_t$ непрерывно по τ и $(v_{i,j}(t, \tau))'_t \geq 0$ при $t \geq \tau$. Тогда каждое слагаемое в формуле (21) при всех $t \in (0, T)$ представляет собой α -индексы некоторого нечеткого числа, а их сумма определяет α -индексы производной по Сеиккала $\tilde{w}'_i(t)$. Поэтому из (21) следует

$$\tilde{w}'_i(t) = \tilde{f}_i(t) + \int_0^t (V(t, \tau))'_t \tilde{f}_i(\tau) d\tau = \tilde{f}_i(t) + \int_0^t B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{f}_i(\tau) d\tau.$$

Тогда векторная нечеткозначная функция $\tilde{W}(t)$, определенная формулой (20), дифференцируема по Сеиккала и

$$\tilde{W}'(t) = \tilde{F}(t) + \int_0^t B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau) d\tau.$$

Отсюда с учетом определения фундаментальной матрицы $B(t)$ получим

$$\tilde{W}'(t) = \tilde{F}(t) + \int_0^t A(t)B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau) d\tau = \tilde{F}(t) + A(t)\tilde{W}(t). \quad (22)$$

Таким образом, $\tilde{W}(t)$, а вместе с ним и $\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} + \tilde{W}(t)$ дифференцируемы по Сеиккала, причем $\tilde{X}(t)$ удовлетворяет соотношению (12). Тогда формула (17) дает сильное решение задачи (12), (13).

Единственность сильного решения задачи (12), (13) вытекает из теоремы 4 и единственности решений всех задач (14), (15). $\square$

Замечание 5. Теоремы 4, 5 сохраняют силу, если вместо непрерывности $\tilde{F}(t)$ потребовать интегрируемость и ограниченность на $[0, T]$ всех α -индексов $f_{\alpha,i}^{\pm}(t)$ нечетких компонент $\tilde{f}_i(t)$.

Ниже для доказательства непрерывности решения (17) используется следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес.

Лемма 5. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала на $[0, T]$, а производные ее α -индексов $(z_\alpha^\pm)'(t)$ — ограниченные и интегрируемые по Риману на $[0, T]$ функции. Тогда $\tilde{z}(t)$ непрерывна по метрике (1) на $[0, T]$.

Доказательство. Для α -индексов $z_\alpha^\pm(t)$ можем записать

$$z_\alpha^\pm(t) = z_\alpha^\pm(0) + \int_0^t (z_\alpha^\pm)'(\tau) d\tau.$$

Фиксируем $t_1, t_2 \in [0, T]$; пусть для определенности $t_1 < t_2$. Тогда

$$z_\alpha^\pm(t_2) - z_\alpha^\pm(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (z_\alpha^\pm)'(\tau) d\tau.$$

При этом аналогично рассуждениям леммы 4 в соответствии с условиями леммы 5 устанавливается соотношение

$$|(z_\alpha^\pm)'(\tau)| \leq \max \left\{ |(z_0^\pm)'(\tau)|, |(z_1^\pm)'(\tau)| \right\} \equiv r(\tau), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

При этом $r(\tau)$ — ограниченная интегрируемая по Риману на $[0, T]$ функция (см. [30]). Тогда

$$|z_\alpha^\pm(t_2) - z_\alpha^\pm(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |(z_\alpha^\pm)'(\tau)| d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} r(\tau) d\tau, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Это влечет непрерывность в метрике (1) функции $\tilde{z}(t)$. $\square$

Утверждение 6. В условиях теоремы 5 нечеткозначная функция (17) непрерывна по t по метрике (1).

Доказательство. Действительно, с учетом утверждения 4 это следует из формулы (22) в силу леммы 5. $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5 и дополнительно начальное условие $\tilde{\xi} \geq 0$ и неоднородность $\tilde{F}(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, T]$. Тогда решение (17) задачи (12), (13) неотрицательно.

Доказательство. В условиях теоремы 6 матрицы $B(t)$ и $B(t)B^{-1}(\tau) = V(t, \tau)$ при $t \geq \tau$ неотрицательны. Тогда в силу предположения $\tilde{\xi} \geq 0$ и $\tilde{F}(t) \geq 0$ неотрицательны оба слагаемых в правой части формулы (16) (в случае левых индексов). Поэтому решение (17) неотрицательно. $\square$

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 5, причем функции $a_{i,j}(t)$ непрерывны и $a_{i,j}(t) > 0$ при всех $i, j = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$. Пусть, кроме того, начальный вектор $\tilde{\xi} > 0$, а нечеткозначная векторная функция $\tilde{F}(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, T]$, либо $\tilde{\xi} \geq 0$ и $\tilde{F}(t) > 0$ при всех $t \in [0, T]$. Тогда решение (17) положительно.

Это следует из теорем 4, 5 в силу (16) и леммы 3.

Пример 4. Пусть в условиях теоремы 5 все компоненты $\tilde{\xi}_i$ начального значения и неоднородности $\tilde{f}_i(t)$ при $i = 1, \dots, n$ и всех $t \in [0, T]$ имеют треугольный вид. Так что $\tilde{\xi}_i \sim (a_i^0, b_i^0, c_i^0)$ и $\tilde{f}_i(t) \sim (\varphi_i(t), \psi_i(t), g_i(t))$, где a_i, b_i, c_i — заданные числа, а $\varphi_i(t), \psi_i(t), g_i(t)$ — заданные непрерывные функции. Тогда каждая компонента решения (17) векторного неоднородного уравнения (12)

с начальным условием (13) при всех $t \in [0, T]$ есть нечеткое число треугольного вида

$$\tilde{x}_i(t) \sim \left(\sum_{j=1}^n \left(b_{i,j}(t) a_j^0 + \int_0^t v_{i,j}(t, \tau) \varphi_j(\tau) d\tau \right), \sum_{j=1}^n \left(b_{i,j}(t) b_j^0 + \int_0^t v_{i,j}(t, \tau) \psi_j(\tau) d\tau \right), \sum_{j=1}^n \left(b_{i,j}(t) c_j^0 + \int_0^t v_{i,j}(t, \tau) g_j(\tau) d\tau \right) \right).$$

5. Динамическая межотраслевая модель Леонтьева с нечеткими данными. Одной из наиболее известных межотраслевых моделей производства является модель, созданная нобелевским лауреатом Василием Леонтьевым в 1950-х гг. (см. [7, гл. 1], [4, гл. 3, § 1]). Динамическая модель Леонтьева является экономической моделью роста валового общественного продукта и национального дохода. Интерес к данной модели у исследователей и практиков сохраняется и в настоящее время (см., например, [12]).

Пусть валовый продукт описывается вектором $X(t)$. Пусть A — неотрицательная квадратная матрица n -го порядка, элементы a_{ij} , которой описывают прямые материальные затраты i -й отрасли ($i = 1, \dots, n$) в производстве единицы продукции j -й отрасли ($j = 1, \dots, m$). Матрица B — неотрицательная квадратная матрица n -го порядка, коэффициенты b_{ij} которой описывают затраты продукции i -й отрасли для увеличения выпуска продукции j -й отрасли. Матрица B предполагается невырожденной.

Динамическая модель Леонтьева представляет собой следующее векторное дифференциальное уравнение ($t > 0$):

$$(E - A)X(t) = B \frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad (23)$$

где E — единичная матрица n -го порядка, $C(t)$ — вектор продукции непроеизводственного потребления (включая непроеизводственное накопление). Для векторного дифференциального уравнения (23) ставится начальное условие

$$X(0) = X^0. \quad (24)$$

Экономический смысл имеют только такие решения уравнения (23), при которых $X(t) \geq 0$.

Предполагается, что матрица A продуктивна. Это означает, что существует и неотрицательная матрица $(E - A)^{-1}$.

Как известно, стационарная модель межотраслевого баланса записывается следующим образом: $X = AX + Y$ или $X = (E - A)^{-1}Y$, где $(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных потребностей в выпуске продукции для получения единиц соответствующих видов конечной продукции.

Уравнение для конечного продукта (национального продукта) $Y(t)$ получается из (23) с учетом равенства $Y(t) = (E - A)X(t)$, а именно,

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt} + C(t), \quad (25)$$

где $B(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полной приростной капиталоемкости, т.е. полных затрат производства накопления на единичные приросты элементов используемого национального дохода.

Подчеркнем, что (25) — уравнение с неотрицательной матрицей $B(E - A)^{-1}$. К нему присоединяется вместо (24) начальное условие

$$Y(0) = Y^0. \quad (26)$$

Предположим, что начальные данные, предложенные экспертами, представляют собой нечеткий начальный вектор $\tilde{Y}^0$ (соответственно $\tilde{X}^0 = (E - A)^{-1}Y^0$) и нечеткий вектор $\tilde{C}(t)$ продукции непроеизводственного потребления. Тогда динамическая модель Леонтьева (25), (26) модифицируется как нечеткая динамическая модель относительно нечеткого вектора конечного продукта $\tilde{Y}(t)$:

$$\tilde{Y}(t) = B(E - A)^{-1} \frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} + \tilde{C}(t) \quad (27)$$

при начальном условии

$$\tilde{Y}(0) = \tilde{Y}^0. \quad (28)$$

В силу неотрицательности матрицы $B(E - A)^{-1}$ согласно теореме 4 для индексов $Y_\alpha^\pm(t)$ сильного нечеткого решения задачи (27), (28) при всех $\alpha \in [0, 1]$, $t > 0$ имеем

$$Y_\alpha^\pm(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY_\alpha^\pm(t)}{dt} + C_\alpha^\pm(t), \quad (29)$$

где $C_\alpha^\pm(t)$ — α -индексы неоднородности $\tilde{C}(t)$, а также

$$Y_\alpha^\pm(0) = [\tilde{Y}^0]_\alpha^\pm. \quad (30)$$

Таким образом, для каждого α -индекса $Y_\alpha^\pm(t)$ задача (29) при начальном условии (30) представляет собой классическую динамическую модель Леонтьева вида (25), (26) и к ней можно применить известные результаты.

Отметим, что от уравнения (29) можно перейти к каноническому виду

$$\frac{dY_\alpha^\pm(t)}{dt} = (E - A)B^{-1}(Y_\alpha^\pm(t) - C_\alpha^\pm(t)),$$

который иногда более удобен для исследований.

6. Заключение. Результаты настоящей работы представляют собой развитие известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений на случай систем дифференциальных уравнений с переменными вещественными коэффициентами и нечеткими начальными условиями и неоднородностями. Выделение систем с неотрицательными матрицами оказалось полезным для установления явного вида решений соответствующих нечетких задач: задачи Коши для однородной и неоднородной нечетких систем дифференциальных уравнений (формулы (11), (17)). Позволило установить их единственность, а также неотрицательность соответствующих решений в случае неотрицательности соответствующего нечеткого начального условия и нечеткой неоднородности. Кроме того, неотрицательность матрицы системы обеспечивает треугольный вид решения при треугольном начальном условии и неоднородности.

С другой стороны, неотрицательность матрицы системы не является необходимым условием неотрицательности решения. В частности, в работе автора [13] установлен вид ограниченного решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с нечеткозначной правой частью как свертки функции Грина с нечеткозначной неоднородностью. В ряде примеров функция Грина положительна. В этом случае неотрицательность нечеткозначной неоднородности влечет неотрицательность решения.

По поводу нечеткой модификации динамической межотраслевой модели Леонтьева, рассмотренной в настоящей работе, заметим, что в ней «нечеткость» характеризуется нечеткой информацией о конечном спросе в начальный момент времени и о количестве продукции производственного потребления. Динамические нечеткие обобщения модели Леонтьева с нечеткозначной матрицей прямых затрат — предмет дальнейшего исследования автора.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы допускают развитие на случай обобщенных производных нечеткозначных функций различного рода (см., например, [16, 27]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкин А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. Баранова А. О., Павлова В. Н. Исследование экономики России с использованием моделей с нечеткими параметрами. — Новосибирск: НГУ, 2009.
3. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие. — М.: Юстиция, 2018.
4. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1985.
5. Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А. Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Ч. 1. Позиционное управление // Информ. технол. — 2019. — 25, № 5.
6. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
7. Леонтьев В. В. Межотраслевая экономика. — М.: Экономика, 1997.

8. Лунева С. Ю., Пантелеев А. В. Анализ модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе// Информ. телекоммун. технол. — 2019. — 43. — С. 29–34.
9. Марчук Г. И. Избранные труды. Т. 4. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. — М.: РАН, 2018.
10. Пантелеев А. В., Савельева В. С. Алгоритмическое и программное обеспечение исследования математической модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе// Модел. анал. данных. — 2019. — 3. — С. 11–23.
11. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: Лаборатория знаний, 2015.
12. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева// Эконом. предприним. — 2017. — 2 ч. 1. — С. 913–924.
13. Хацкевич В. Л. Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения// Автомат. телемех. — 2023. — 8. — С. 43–60.
14. Ahmad L., Farooq M., Abdullah S. Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform/ arXiv: 1403.0242v1 [math.GM].
15. Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A. A new method for solving fuzzy linear differential equations// Soft Comput. — 2011. — 92. — P. 181–197.
16. Bede B., Gal S. G. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2005. — 151, № 3. — P. 581–599.
17. Buckley J. J., Feuring T. Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — 110, № 1. — P. 43–54.
18. Dai R., Chen M. On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations// Fuzzy Sets and Systems — 2023. — 453. — P. 95–114.
19. Dubois D., Prade H. Towards fuzzy differential// Fuzzy Sets Syst. — 1982. — 8. — P. 1–17.
20. Esmi E., Sanchez D. E., Wasques V. F., de Barros L. C. Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — 419. — P. 122–140.
21. Jerrell M. Applications of interval computations to regional economic input-output models// in: Applications of Interval Computations (. Kearfott R. B., Kreinovich V., eds.). — Kluwer, 1996. — P. 133–143.
22. Jerrell M. Interval arithmetic for input-output models with inexact data// Comput. Econ. — 1997. — 10, № 1. — P. 89–100.
23. Kaleva O. Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 301–317.
24. Kaleva O., Seikkala S. On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229.
25. Lorenzen G., Maas C. Zur Input-Output Analyse mit Intervalldaten// Jahrb. f. Nationalök. Stat. — 1989. — 206, № 3. — P. 251–263.
26. Park J. Y., Han H. K. Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations// Int. J. Math. Math. Sci. — 1999. — 22, № 2. — P. 271–279.
27. Pirzada U. M. paper Generalized Seikkala differentiability and its application to fuzzy initial value problem/ arXiv: 1812.04963v1 [math.GM].
28. Puri M. L., Ralescu D. A. Differential of fuzzy functions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — 91. — P. 552–558.
29. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 319–330.
30. Wu H.-C. The fuzzy Riemann integral and its numerical integration// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — 110, № 1. — P. 1–25.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович (Khatskevich Vladimir Lvovich)

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил

«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж

(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center

of the “N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy,” Voronezh, Russia)

E-mail: vlkhats@mail.ru



НОРМАЛЬНОСТЬ В ВЕЩЕСТВЕННЫХ AW^* -АЛГЕБРАХ

© 2025 г. С. А. ЧЕПУХАЛИН, А. А. РАХИМОВ

Аннотация. Исследуется понятие нормальности в вещественных AW^* -алгебрах. Рассмотрен вопрос о том, сохраняется ли нормальность при переходе от комплексной AW^* -алгебры к её вещественной части, доказана нормальность вещественных AW^* -факторов. Установлены условия, при которых вещественная AW^* -алгебра является нормальной, в частности, в случае локальной σ -конечности центра алгебры. Полученные результаты являются вещественными аналогами известных теорем о нормальности в AW^* -алгебрах и развивают теорию операторных алгебр в вещественном контексте.

Ключевые слова: вещественная AW^* -алгебра, нормальность, фактор, монотонная полнота, σ -конечность, аннулятор, проекция.

NORMALITY IN REAL AW^* -ALGEBRAS

© 2025 S. A. CHEPUKHALIN, A. A. RAKHIMOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the concept of normality in real AW^* -algebras. The authors examine whether normality is preserved when passing from a complex AW^* -algebra to its real part and prove that all real AW^* -factors are normal. Conditions are established under which a real AW^* -algebra is normal, in particular, when its center is locally σ -finite. The obtained results serve as real analogs of known theorems on normality in AW^* -algebras and contribute to the development of operator algebra theory in the real setting.

Keywords and phrases: real AW^* -algebra, normality, factor, monotone completeness, σ -finiteness, annihilator, projection.

AMS Subject Classification: 46L10, 46K10, 46L05

1. Введение. Известно, что каждая монотонная полная C^* -алгебра является AW^* -алгеброй; для AW^* -алгебр типа I также верно обратное. Однако в общем случае обратное утверждение все еще остается открытым, хотя некоторые попытки решить эту проблему были предприняты. В [6] показано, что AW^* -алгебра является нормальной тогда и только тогда, когда она является AW^* -подалгеброй монотонной полной C^* -алгебры. Из [6] также следует, что все AW^* -алгебры типа I являются нормальными (см. также [7]). Также известно (см. [7]), что конечные AW^* -алгебры являются нормальными. Более того, в [6] показано, что все AW^* -факторы являются нормальными. В этой статье мы рассмотрим вещественный аналог вышеперечисленных результатов, в частности, докажем, что все вещественные AW^* -факторы являются нормальными.

2. Предварительные сведения. Банахова * -алгебра A над полем $\mathbb{C}$ называется C^* -алгеброй, если $\|x^*x\| = \|x\|^2$, для любого $x \in A$. Вещественная банахова * -алгебра R называется *вещественной C^* -алгеброй*, если норму на R можно продолжить на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C^* -алгеброй. Известно, что вещественная банахова * -алгебра R является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R эрмитова

и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$. Эрмитовость алгебры R эквивалентна обратимости элемента $1 + aa^*$, для любого $a \in R$.

Далее, пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H . Слабо замкнутая *-подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей называется W^* -алгеброй. Вещественная банахова *-подалгебра $R \subset B(H)$ с единицей называется вещественной W^* -алгеброй, если R слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$ (см. [1, 2, 5]).

Пусть A — кольцо и S — непустое подмножество A . Положим $R(S) = \{x \in A \mid sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$ и назовем $R(S)$ правым аннулятором S . Аналогично, $L(S) = \{x \in A \mid xs = 0 \text{ для всех } s \in S\}$ обозначает левый аннулятор S . Бэрово *-кольцо — это такое кольцо A , что для каждого непустого подмножества S из A выполняется соотношение $R(S) = gA$ для подходящего проектора g . Равенство $L(S) = ((R(S^*))^* = ((hA))^* = Ah$ (для некоторого проектора h) показывает, что это определение также может быть дано через левый аннулятор.

AW*-Алгебра — это C^* -алгебра, которая одновременно является бэровским *-кольцом (см. [3]). Напомним, что если всякое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов AW*-алгебры счетно, то алгебра называется счетно разложимой или σ -конечной (см. [7]). AW*-Алгебра A называется локально счетно разложимой или локально σ -конечной, если для каждого ненулевого проектора $d \in A$, существует такой проектор e , что $0 < e \leq d$ и алгебра eAe счетно разложима (см. [6]). Алгебра A называется монотонно полной, если каждая ограниченная возрастающая сеть самосопряженных элементов имеет точную верхнюю границу. Алгебра A называется нормальной, если для каждой направленной вверх сети (e_λ) проекторов с точной верхней границей e в $P(A)$ проектор e является точной верхней границей (e_λ) в A (другими словами, если $a \in A, a \geq e_\lambda$, для каждого λ , то $a \geq e$).

3. Основные результаты. Сформулируем вспомогательные результаты из [2, 6].

Теорема 1 (см. [6, Theorem 4.8]). *Всякая собственно бесконечная AW*-алгебра, центр которой счетно разложим, является нормальной.*

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть R — вещественная W -алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

- (a) R является σ -конечной;
- (b) на R существует точное нормальное состояние;
- (c) $R + iR$ является σ -конечной.

Далее, пусть R — такая вещественная AW*-алгебра, что $A = R + iR$ — AW*-алгебра.

Лемма 2. *Если алгебра R локально σ -конечна, то алгебра $A = R + iR$ также локально σ -конечна.*

Доказательство. Пусть $e \in A$ — произвольный проектор. Если $e \in R$, то по условию существует такой ненулевой проектор $f \in R$, что $e \leq f$ и алгебра fRf является σ -конечной. Тогда ясно, что алгебра fAf также σ -конечна. Следовательно, A — локально σ -конечная алгебра.

Пусть $e \notin R$. Тогда возможны два случая: у проектора e есть вещественный ненулевой подпроектор e_1 или такого подпроектора нет. В первом случае утверждение следует из первой части доказательства. Во втором случае известно, что проекторы e и $\alpha(e)$ являются ортогональными, где α — инволютивный *-антиавтоморфизм, порождающий R . Поэтому элемент $g = 1/2(e + \alpha(e))$ является проектором в R . По условию теоремы 1 существует такой ненулевой проектор $f \in R$, что $f \leq g$ и fRf и fAf — σ -конечные алгебры. Кроме того, можно показать, что проекторы e и g эквивалентны, т.е. существует такой унитарный оператор u , что $e = ugu^*$. Следовательно, для проектора $f_1 = ufu^*$ имеем $0 < f_1 \leq e$ и f_1Af_1 — σ -конечная алгебра. $\square$

Лемма 3. *Если AW*-алгебра $A = R + iR$ нормальна, то вещественная AW*-алгебра R также нормальна.*

Доказательство. Пусть $(e_\lambda) \subset R$ — направленная вверх сеть проекторов и $e = \bigvee_\lambda e_\lambda$. Если для элемента $a \in R$ имеет место соотношение $a \geq e_\lambda$ при каждом λ , то $a \geq e$, так поскольку $a \in A$ и AW*-алгебра A нормальна. $\square$

Теперь докажем основные результаты работы.

Теорема 2. Пусть R — такой вещественный AW^* -фактор, что $A = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Тогда фактор R нормален.

Доказательство. Очевидно, что A также является AW^* -фактором. Согласно [6, следствие 4.7] алгебра A является нормальной. Тогда по лемме 3 алгебра R также нормальна. $\square$

Теорема 3. Пусть R — такая собственно бесконечная вещественная AW^* -алгебра, что $A = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Если центр $Z(R)$ алгебры R локально σ -конечен, то алгебра R нормальна.

Доказательство. Так как $Z(R)$ локально σ -конечен, то согласно лемме 2 алгебра $Z(A) = Z(R) + iZ(R)$ также локально σ -конечна. Согласно [1, теорема 4.7.4.] AW^* -алгебра $A = R + iR$ является собственно бесконечной. Тогда по теореме 1 AW^* -алгебра A нормальна, следовательно, по лемме 3 вещественная AW^* -алгебра R также нормальна. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A. Real W^* -Algebras, Actions of Groups and Index Theory for Real Factors. — Bonn–Beau-Bassin: CVDV Publishing House, 2010.
2. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
3. Berberian S. K. Baer * -Rings. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
4. Rakhimov A. A., Nurillaev M. E. On property of injectivity for real W^* -algebras and JW-algebras// Positivity. — 2018. — 22, № 5. — P. 1345–1354.
5. Rakhimov A. A., Nurillaev M. E., Boltaev K. K. Injectivity and nuclearity properties for real C^* -algebras// J. Math. Sci. — 2024. — 278, № 3. — P. 520–529.
6. Saito K., Wright J. D. M. All AW^* -factors are normal// J. London Math. Soc. (2). — 1991. — 44. — P. 143–154.
7. Wright J. D. M. Normal AW^* -algebras// Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. — 1980. — 85. — P. 137–141.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чепухалин Сергей Анатольевич (Chepukhalin Sergey Anatol'evich)
Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti,
Toshkent, O'zbekiston;
(Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
Ташкент, Узбекистан;
Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
Tashkent, Uzbekistan);
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Ташкентский филиал, Ташкент, Узбекистан
(Russian University of Economics named after G. V. Plekhanov,
Tashkent branch, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: sergey_rights@mail.ru

Рахимов Абдугафур Абдумаджидович (Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich)
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston
(Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
The National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan))
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 81–89
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-81-89

УДК 517.955.8

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВИДА ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2025 г. Е. А. ЧУНЖУК

Аннотация. Исследуется решение вида движущегося фронта для двумерного уравнения типа реакция-диффузия с кубической нелинейностью. Представлена методика получения асимптотического приближения движущегося фронта, распространяющегося в среде с разрывными характеристиками, рассмотрены основные особенности, возникающие при решении двумерной задачи.

Ключевые слова: уравнение типа реакция-диффузия, разрывная кубическая нелинейность, движущийся фронт, малый параметр, асимптотическое представление.

FEATURES OF THE MOVING-FRONT SOLUTION FOR A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM WITH A DISCONTINUOUS CUBIC NONLINEARITY

© 2025 Е. А. CHUNZHUK

ABSTRACT. In this paper, we examine solutions of the moving-front-type for a two-dimensional reaction-diffusion equation with cubic nonlinearity and propose a method for obtaining asymptotic approximations of moving fronts propagating in a medium with discontinuous characteristics is presented. The basic features arising in solving the two-dimensional problem are discussed.

Keywords and phrases: reaction-diffusion type equation, discontinuous cubic nonlinearity, moving front, small parameter, asymptotic approximation.

AMS Subject Classification: 35C20

1. Введение. В работе исследуется двумерное уравнение типа реакция-диффузия с разрывной кубической нелинейностью. Основное внимание уделяется анализу решения вида движущегося фронта; ключевой особенностью исследуемой задачи является наличие разрыва в правой части дифференциального уравнения. Уравнения автоволновой диффузии применяются для описания разнообразных процессов в физике, химии и биологии. Например, они используются в моделях свертываемости крови [13], распространения злокачественных новообразований [11, 16] и инфекционных заболеваний [10, 15], а также при описании развития городских агломераций [14] и других автоволновых процессов. Изучение таких уравнений позволяет расширить область их применимости и описать с их помощью новые явления.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Е. А. Чунжук выражает благодарность своему научному руководителю Н. Т. Левашовой за ценные рекомендации при проведении исследования.

Молодой ученый является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

К настоящему моменту имеется много работ по аналитическому исследованию уравнения автоволновой диффузии (см., например, [2, 12]). Часто для получения необходимой информации о решении исследуемой задачи используются асимптотические методы, которые позволяют определить поведение функций при малых значениях параметров, что особенно важно при анализе физических и математических моделей. Для сред с непрерывными характеристиками уже разработаны асимптотические алгоритмы и методы, на основе которых доказано существование решений вида движущегося фронта [3]. Для сред с разрывными характеристиками требуется теоретическое обоснование возможности распространения в такой среде автоволнового фронта, и решение таких задач особенно актуально для описания процессов на границах раздела различных материалов, с естественными или искусственными барьерами. Например, работы [6, 7, 14] посвящены анализу решений параболических задач, в которых присутствуют разрывы, что является актуальной темой исследований в настоящее время.

Так, в [8] была рассмотрена одномерная задача, в которой исследовались распространение автоволнового фронта в среде с барьерами и условия его стабилизации к стационарному решению с большим градиентом на границе раздела сред. В указанной работе был представлен модернизированный алгоритм построения асимптотического приближения решения задачи с разрывом, который базируется на асимптотическом методе А. Б. Васильевой для сингулярно возмущенных задач (см. [4, 5]). Применение этого алгоритма потребовало подробного рассмотрения поведения решения в окрестности точки локализации фронта и точки разрыва сред. В [8] подробно показано построение асимптотического приближения решения, получены выкладки для искомых функций и определены все неизвестные величины. В [1] рассмотрена двумерная задача типа реакция-диффузия в случае, когда правая часть уравнения непрерывна: исследовано решение вида движущегося фронта, построено асимптотическое приближение решения. Во всех упомянутых работах проведено обоснование асимптотики и доказано существование решений исходных задач с использованием метода дифференциальных неравенств (см. [9]).

В настоящей статье рассматривается двумерная задача типа реакция-диффузия в случае, когда автоволновой фронт проходит через границу разрыва сред. Эта работа отличается от упомянутых ранее наличием разрыва характеристик среды, который проходит вдоль гладкой кривой $h_0(x)$, поэтому в данном случае методика построения асимптотического приближения модифицирована с учетом условий задачи. Основная сложность заключается в нахождении связи между локальными координатами, связанными с двумя различными кривыми: кривой локализации фронта и линией раздела сред, а также в сшивании производных функций асимптотического приближения решения. В дальнейшем планируется провести обоснование асимптотики методом дифференциальных неравенств, как это сделано в ранее упомянутых работах.

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая двумерная начально-краевая задача:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = (u - \varphi^{(-)}(x, y))(u - q(x, y))(u - \varphi^{(+)}(x, y)), & x \in \mathbb{R}, y \in (0, a), t \in (0, T], \\ u_y(x, 0, t, \varepsilon) = u_y(x, a, t, \varepsilon) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in [0, T], \\ u(x, y, t, \varepsilon) = u(x + L, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, y \in [0, a], t \in [0, T], \\ u(x, y, 0, \varepsilon) = u_{\text{init}}(x, y), & x \in \mathbb{R}, y \in [0, a]. \end{cases} \quad (1)$$

где

$$q(x, y) = \begin{cases} q_l(x, y), & y \leq h_0(x), \\ q_r(x, y), & y > h_0(x), \end{cases} \quad q_l(x, h_0(x)) \neq q_r(x, h_0(x)),$$

ε — малый параметр, $h_0(x)$ — гладкая кривая, вдоль которой происходит разрыв характеристик среды, $u_{\text{init}}(x, y)$ — непрерывная функция. Обозначим правую часть уравнения через $f(u, x, y)$. Будем считать, что функции $f(u, x, y)$ и $u_{\text{init}}(x, y)$ — L -периодические по переменной x ($L > 0$, $L = \text{const}$). Введем обозначения

$$\begin{aligned} f^{(l)}(u, x, y) &= (u - \varphi^{(-)}(x, y))(u - q_l(x, y))(u - \varphi^{(+)}(x, y)), \\ f^{(r)}(u, x, y) &= (u - \varphi^{(-)}(x, y))(u - q_r(x, y))(u - \varphi^{(+)}(x, y)). \end{aligned}$$

Начальная функция $u_{\text{init}}(x, y)$ имеет вид сформировавшегося фронта, возрастающего от значений $\varphi^{(-)}(x, y)$ до значений $\varphi^{(+)}(x, y)$, локализованного в окрестности кривой $h_{00} \in \{(x, y) : \mathbb{R} \times [0, a]\}$. Будем считать, что для начальной функции выполняются условия согласования с граничными условиями задачи (1).

Условие 1. Пусть корни $\varphi^{(-)}(x, y)$, $q(x, y)$, $\varphi^{(+)}(x, y)$ функции $f(u, x, y)$ — известные функции, упорядоченные следующим образом:

$$\varphi^{(-)}(x, y) < q(x, y) < \varphi^{(+)}(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0, a]. \quad (2)$$

Условие 2. Будем рассматривать случай прохождения фронта через границу раздела сред при движении от границы $y = 0$ к границе $y = a$, и для этого потребуем выполнение неравенств

$$\frac{\varphi^{(-)}(x, y) + \varphi^{(+)}(x, y)}{2} < q_l(x, y) < q_r(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0, a].$$

Будем считать, что $y = h(x, t)$ — кривая, описывающая положение фронта. Для описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l, r) (координаты Вишика—Люстерника) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= l - r \sin \alpha, & y &= h(l, t) + r \cos \alpha, \\ \sin \alpha &= \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}, & \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

α — угол, отложенный против часовой стрелки от оси y до нормали к кривой $y = h(x, t)$, проведенной в область $y > h(x, t)$ в каждый момент времени t , r — расстояние от этой кривой по нормали к ней, l — x -координата точки на кривой $h(x, t)$, из которой проводится нормаль, и производные функции $h(x, t)$ в выражении (3) берутся при $x = l$.

Разрыв характеристик среды происходит вдоль стационарной гладкой кривой $h_0(x)$. Для описания фронта в окрестности разрыва сделаем переход к локальным координатам (l_0, r_0) аналогично тому, как это сделано ранее:

$$\begin{aligned} x &= l_0 - r_0 \sin \beta, & y &= h_0(l_0) + r_0 \cos \beta, \\ \sin \beta &= \frac{h_{0x}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}}, & \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}}. \end{aligned}$$

Теперь представим дифференциальные операторы через локальные переменные (l, r) . Выпишем оператор $\partial/\partial t$, действующий на функцию $u(x, y, t, \varepsilon)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(l, r, t), y(l, r, t), t, \varepsilon) + (v, \nabla)u(x(l, r, t), y(l, r, t), t, \varepsilon), \quad v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial t}; \frac{\partial y}{\partial t} \right\},$$

где $x(l, r, t)$ и $y(l, r, t)$ задаются формулами (3). После преобразований получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t, \varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_t}{\sqrt{1 + h_x^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r h_{xt} - h_t h_x \sqrt{1 + h_x^2}}{r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial l} \right) u(x(l, r, t), y(l, r, t), t, \varepsilon).$$

Отдельно выпишем оператор ∇ :

$$\nabla = \left\{ -\frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1 + h_x^2}}{r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial l}, \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{h_x \sqrt{1 + h_x^2}}{r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial l} \right\};$$

тогда для $\Delta u(x, y, t, \varepsilon)$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y, t, \varepsilon) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{h_{xx}}{r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial r} + \right. \\ &+ \frac{1 + h_x^2}{(r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2})^3} \left(2r h_x h_{xx}^2 + h_x h_{xx} (1 + h_x^2)^{3/2} - r h_{xxx} (1 + h_x^2) \right) \frac{\partial}{\partial l} + \\ &\left. + \frac{(1 + h_x^2)^2}{(r h_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2})^2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} \right) u(x(l, r, t), y(l, r, t), t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Введем растянутую переменную $\xi = r/\varepsilon$. Итоговый дифференциальный оператор, действующий на функцию $u(x, y, t, \varepsilon)$, представим в следующем виде

$$\left(\varepsilon^2 \Delta - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, y, t, \varepsilon) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2} \frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i\right) u(x(l, r, t), y(l, r, t), t, \varepsilon) \quad (4)$$

где G_i — дифференциальные операторы первого или второго порядков по переменным (ξ, l) .

3. Методика построения асимптотического приближения решения. Исследуемая задача представима в виде двух подзадач, которые можно интерпретировать как движение фронта до и после разрыва. Асимптотическое приближение решения задачи (1) для случая, когда фронт ещё не прошёл линию разрыва, будем искать в виде

$$U = \begin{cases} U^{l,(-)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq h(x, t), \\ U^{l,(+)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, h(x, t) \leq y \leq h_0(x), \\ U^{r,(+)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, h_0(x) \leq y \leq a. \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} U^{l,(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{l,(-)}(x, y, \varepsilon) + L^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{l,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \Pi^l(\rho_-, \varepsilon), \\ U^{l,(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{l,(+)}(x, y, \varepsilon) + L^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{l,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), \\ U^{r,(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{r,(+)}(x, y, \varepsilon) + R^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{r,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \Pi^r(\rho_+, \varepsilon). \end{aligned}$$

Асимптотическое приближение решения задачи (1) для случая, когда фронт уже прошёл линию разрыва, будем искать в виде

$$U = \begin{cases} U^{l,(-)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq h_0(x), \\ U^{r,(-)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, h_0(x) \leq y \leq h(x, t), \\ U^{r,(+)}(x, y, t, \varepsilon), & x \in \mathbb{R}, h(x, t) \leq y \leq a. \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U^{l,(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{l,(-)}(x, y, \varepsilon) + L^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{l,(-)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \Pi^l(\rho_-, \varepsilon), \\ U^{r,(-)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{r,(-)}(x, y, \varepsilon) + R^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{r,(-)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), \\ U^{r,(+)}(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{r,(+)}(x, y, \varepsilon) + R^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + Q^{r,(-)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \Pi^r(\rho_+, \varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь

- $\bar{u}^{l,(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ и $\bar{u}^{r,(\mp)}(x, y, \varepsilon)$ — функции регулярной части,
- $L^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon)$ и $R^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon)$ — функции переходного слоя в окрестности положения фронта,
- $Q^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon)$ и $Q^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon)$, зависящие от $\xi_0 = r_0/\varepsilon$, — функции переходного слоя в окрестности разрыва,
- $\Pi^l(\rho_-, \varepsilon)$ и $\Pi^r(\rho_+, \varepsilon)$ — пограничные функции, зависящие от растянутых переменных $\rho_- = y/\varepsilon$ и $\rho_+ = (y - a)/\varepsilon$.

Пограничные функции строятся стандартным образом (см. [4]) и экспоненциально убывают на бесконечности; в настоящей работе они не приводятся.

Функции регулярной части, функции переходного слоя и кривая $h(x, t)$ ищутся в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$\begin{aligned} \bar{u}^{l,(\mp)}(x, y, \varepsilon) &= \bar{u}_0^{l,(\mp)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{l,(\mp)}(x, y) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{l,(\mp)}(x, y) + \dots, \\ \bar{u}^{r,(\mp)}(x, y, \varepsilon) &= \bar{u}_0^{r,(\mp)}(x, y) + \varepsilon \bar{u}_1^{r,(\mp)}(x, y) + \varepsilon^2 \bar{u}_2^{r,(\mp)}(x, y) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) &= L_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \varepsilon L_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \varepsilon^2 L_2^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \dots, \\ R^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) &= R_0^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \varepsilon R_1^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \varepsilon^2 R_2^{(\mp)}(\xi, l, h(l, t), t) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) &= \varepsilon Q_1^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0)) + \varepsilon^2 Q_2^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \dots, \\ Q^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) &= \varepsilon Q_1^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0)) + \varepsilon^2 Q_2^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) + \dots, \end{aligned}$$

$$h(x, t) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \varepsilon^2 h_2(x, t) + \dots$$

Согласно методу А. Б. Васильевой уравнения для функций регулярной части получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε в следующих равенствах:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \bar{u}^{l,(\mp)}(x, y, \varepsilon) &= f^{(l)}(\bar{u}^{l,(\mp)}(x, y, \varepsilon), x, y), \\ \varepsilon^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \bar{u}^{r,(\mp)}(x, y, \varepsilon) &= f^{(r)}(\bar{u}^{r,(\mp)}(x, y, \varepsilon), x, y). \end{aligned}$$

Уравнения для функций переходного слоя получаются из следующих равенств:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2} \frac{\partial}{\partial l} \right) + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i \right) L^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) = \\ = f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + L^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + Q^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right) - \\ - f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + Q^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2} \frac{\partial}{\partial l} \right) + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i \right) L^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) = \\ = f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(-)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + L^{(-)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + Q^{l,(-)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right) - \\ - f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(-)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right) - \\ - f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + Q^{l,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right) + \\ + f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2} \frac{\partial}{\partial l} \right) + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i \right) R^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) = \\ = f^{(r)} \left(\bar{u}^{r,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + R^{(+)}(\xi, l, h(l, t), t, \varepsilon) + \right. \\ \left. + Q^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right) - \\ - f^{(r)} \left(\bar{u}^{r,(\mp)}(l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha) + Q^{r,(\mp)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l - \xi \varepsilon \sin \alpha, h(l, t) + \xi \varepsilon \cos \alpha \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} - \varepsilon \frac{h_{0xx}}{(1 + h_{0x}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i \right) Q^{l,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) = \\
& = f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(+)}(l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta) + Q^{l,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta \right) - \\
& \quad - f^{(l)} \left(\bar{u}^{l,(+)}(l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta), l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta \right), \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} - \varepsilon \frac{h_{0xx}}{(1 + h_{0x}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i \right) Q^{r,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) = \\
& = f^{(r)} \left(\bar{u}^{r,(+)}(l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta) + Q^{r,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon), l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta \right) - \\
& \quad - f^{(r)} \left(\bar{u}^{r,(+)}(l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta), l_0 - \xi_0 \varepsilon \sin \beta, h(l_0) + \xi_0 \varepsilon \cos \beta \right).
\end{aligned}$$

Потребуем также выполнения условий убывания функций переходного слоя на бесконечности:

$$L_i^{(\mp)}(-\infty, l, h(l, t), t) = 0, \quad R_i^{(+)}(+\infty, l, h(l, t), t) = 0, \quad Q_i^{l,r(+)}(\mp\infty, l_0, h_0(l_0)) = 0.$$

Сшивание функций асимптотического приближения решения будем проводить на кривых $h(x, t)$ и $h_0(x)$:

$$U^{l,(-)}(x, h(x, t), t, \varepsilon) = U^{l,(+)}(x, h(x, t), t, \varepsilon) = s(x, t), \quad (7)$$

$$U^{l,(+)}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = U^{r,(+)}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = p(x, t) + k(x). \quad (8)$$

Функции $p(x, t)$, $s(x, t)$ и $k(x)$ также представимы в виде разложения по степеням ε :

$$\begin{aligned}
p(x, t) &= p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, t) + \dots, \\
s(x, t) &= s_0(x, t) + \varepsilon s_1(x, t) + \varepsilon^2 s_2(x, t) + \dots, \\
k(x) &= \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x) + \dots
\end{aligned}$$

Здесь функции $p(x, t)$, $s(x, t)$ и $k(x)$ пока не известны, и будут определяться из условий сшивания производных по направлению нормали к кривым $h(x, t)$ и $h_0(x)$:

$$\frac{\partial U^{l,(-)}}{\partial n}(x, h(x, t), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{l,(+)}}{\partial n}(x, h(x, t), t, \varepsilon), \quad (9)$$

$$\frac{\partial U^{l,(+)}}{\partial n}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{r,(+)}}{\partial n}(x, h_0(x), t, \varepsilon). \quad (10)$$

4. Особенности построения решения двумерной задачи. В [1] для двумерной задачи типа реакция-диффузия с непрерывной правой частью показано, как найти функции регулярной части и переходного слоя. Еще раз отметим, что особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии разрыва характеристик среды, который проходит вдоль гладкой кривой $h_0(x)$, поэтому основная сложность заключается в нахождении связи между локальными координатами (l, r) и (l_0, r_0) . Эту связь необходимо учитывать в равенствах сшивания производных (9)–(10) в том случае, когда кривые $h(x, t)$ и $h_0(x)$ настолько близки друг к другу, что пересекаются их малые окрестности, в которых возможен переход к координатам Вишика—Люстерника. В настоящем разделе будут рассмотрены эти особенности задачи.

Для начала покажем, как связаны локальные координаты (l, r) и (l_0, r_0) . Вектор нормали к кривой $h(x, t)$ имеет вид

$$\mathbf{n} = \{-\sin \alpha; \cos \alpha\} = \left\{ -\frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} \right\}. \quad (11)$$

Переход от декартовых координат (x, y) к локальным криволинейным координатам осуществляется с помощью формул (3), что приводит к формулам

$$x = l - r \frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}}, \quad y = h(l, t) + r \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}}. \quad (12)$$

Напомним, что угол α отложен против часовой стрелки от положительного направления оси OY до вектора нормали к кривой в данной точке, l — это абсцисса точки кривой, из которой проводится нормаль. Все производные функции $y = h(x, t)$ берутся при $x = l$.

Координаты бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ в декартовой системе (x, y) связаны с координатами бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}$ в системе (r, l) матрицей перехода $\mathbf{C}$:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя формулы (12), получаем:

$$dx = -\frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} dr + \left(1 - r \frac{h_{xx}(1 + h_x^2) - h_{xx}h_x^2}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) dl, \quad (13)$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} dr + \left(h_x - r \frac{h_{xx}h_x}{(1 + h_x^2)^{3/2}}\right) dl. \quad (14)$$

Матрица перехода $\mathbf{C}$ имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{h_x}{\sqrt{1 + h_x^2}} & 1 - r \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2}} & h_x - r \frac{h_{xx}h_x}{(1 + h_x^2)^{3/2}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Аналогично находим матрицу перехода $\mathbf{C}_0$ от бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{pmatrix}$ к бесконечно малому вектору $\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{h_{0x}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}} & 1 - r_0 \frac{h_{0xx}}{(1 + h_{0x}^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}} & h_{0x} - r_0 \frac{h_{0xx}h_{0x}}{(1 + h_{0x}^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим матрицу перехода от $\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}$ к $\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}$. Пусть e — декартов базис, e' — базис, связанный с координатами Вишика—Люстерника на кривой $h(x, t)$, e'_0 — базис, связанный с координатами Вишика—Люстерника на кривой $h_0(x)$. Покажем их связь, записав следующие выражения:

$$e' = e\mathbf{C}, \quad e'_0 = e\mathbf{C}_0, \quad e = e'\mathbf{C}^{-1}, \quad e'_0 = e'\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0.$$

Тогда связь векторов можно выразить равенством

$$\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0 \begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}_0$ — матрица перехода:

$$\mathbf{A} = \frac{\sqrt{1 + h_x^2}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}} \begin{pmatrix} \frac{1 + h_x h_{0x}}{1 + h_x^2} & g_0 \frac{(h_{0x} - h_x)}{(1 + h_x^2)(1 + h_{0x}^2)} \\ \frac{h_{0x} - h_x}{g} & -\frac{g_0}{g} \frac{(1 + h_x h_{0x})}{(1 + h_{0x}^2)} \end{pmatrix}; \quad (17)$$

для краткости введены обозначения

$$g = rh_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}, \quad g_0 = -r_0 h_{0xx} + (1 + h_{0x}^2)^{3/2}.$$

Теперь рассмотрим особенности сшивания производных функций, входящих в асимптотическое приближение решения. Рассмотрим, например, сшивание производных (10) в порядке ε^{-1} :

$$\left. \frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0} \right|_{(x_0, h_0(x_0))} = \left. \frac{\partial R_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0} \right|_{(x_0, h_0(x_0))},$$

где для краткости указана лишь зависимость функций от параметров (ξ, l) . Производные от функций нужно взять по направлению нормали к кривой $h_0(x)$ в точке на этой кривой. Для функции $L_0^{(+)}(\xi, l)$ имеем

$$\left. \frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0} \right|_{(x_0, h_0(x_0))} = \left. \frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} \right|_{(x_0, h_0(x_0))} + \left. \frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \xi_0} \right|_{(x_0, h_0(x_0))};$$

для $R_0^{(+)}(\xi, l)$ выкладки аналогичны. Производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} = \frac{\partial r}{\partial r_0}, \quad \frac{\partial l}{\partial \xi_0} = \varepsilon \frac{\partial l}{\partial r_0}$$

берутся из равенства (16):

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{1 + h_x h_{0x}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2} \sqrt{1 + h_x^2}}, \quad \frac{\partial l}{\partial r_0} = \frac{\sqrt{1 + h_x^2}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}} \left(\frac{h_{0x} - h_x}{rh_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}} \right). \quad (18)$$

Остается определить, чему равны (ξ, l) на кривой $h_0(x)$.

Как было сказано ранее, $y = h(l, t)$ — кривая, описывающая положение фронта, и функции переходного слоя зависят от ξ . Проведем нормаль к кривой $h(l, t)$ из точки $(l, h(l, t))$ на кривой $h(l, t)$ до точки $(x_0, h_0(x_0))$ на кривой $h_0(x)$, эта нормаль будет соответствовать расстоянию r в координатах Вишика—Люстерника (12), и будут справедливы равенства

$$x_0 = l - r \frac{h_x(l, t)}{\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}, \quad h_0(x_0) = h(l, t) + r \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}. \quad (19)$$

Таким образом, будем полагать, что кривые связаны одним параметром l , т.е. что координата l не меняется, а для ξ из формулы (19) получим следующее выражение, с учетом $\xi = r/\varepsilon$:

$$\xi = \frac{(h_0(x_0) - h(l, t)) \sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}{\varepsilon}. \quad (20)$$

5. Заключение. В настоящей статье было исследовано двумерное уравнение типа реакция-диффузия с разрывной кубической нелинейностью. Ключевой особенностью работы является прохождение автоволнового фронта через разрыв характеристик среды. Полученные результаты расширяют основы аналитического исследования автоволновых уравнений, а также представляют теоретический и практический интерес для описания физических процессов на границах раздела материалов или при наличии барьеров.

В работе изложена методика построения асимптотического приближения решения с учетом специфики задачи, а именно, наличия разрыва характеристик среды вдоль стационарной кривой $h_0(x)$. Так, одна нестационарная кривая описывает положение фронта, другая гладкая стационарная кривая описывает разрыв характеристик среды. Для описания переходного слоя и фронта в окрестности разрыва были использованы локальные координаты Вишика—Люстерника, затем найдена взаимосвязь между ними. Помимо перехода к локальным координатам, был осуществлен пересчет производных функций переходного слоя для их сшивания в асимптотике. В дальнейшем исследовании планируется доказать существование решения вида движущегося фронта двумерной задачи с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия// Модел. анал. информ. сист. — 2017. — 24, № 3. — С. 259–279.
2. Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 10. — С. 1594–1607.
3. Божсвольнов Ю. В., Нефедов Н. Н. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2010. — 50, № 2. — С. 276–285.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
5. Васильева А. Б., Плотников А. А. Асимптотическая теория сингулярно возмущённых задач. — М.: Физ. ф-т МГУ, 2008.
6. Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Николаева О. А. Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми// Теор. мат. физ. — 2021. — 207, № 2. — С. 293–309.
7. Левашова Н. Т., Николаева О. А., Папкин А. Д. Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3 Физ. Астрон. — 2015. — № 5. — С. 12–16.
8. Левашова Н. Т., Чунжук Е. А., Орлов А. О. Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками// Теор. мат. физ. — 2024. — 220, № 1. — С. 93–112.
9. Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
10. Ait Mahiout L., Kazmierczak B., Volpert V. Viral infection spreading and mutation in cell culture// Mathematics. — 2022. — 10, № 2. — 256.
11. Colson C., Sanchez-Garduno F., Byrne H. M., Maini P. K., Lorenzi T. Travelling-wave analysis of a model of tumour invasion with degenerate, cross-dependent diffusion// Proc. Roy. Soc. A. — 2021. — 477, № 2256. — 20210593.
12. Fife P. C., McLeod J. B. The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1977. — 65. — P. 335–361.
13. Galochkina T., Bouchnita A., Kurbatova P., Volpert V. Reaction-diffusion waves of blood coagulation// Math. Biosci. — 2017. — 288. — P. 130–139.
14. Levashova N., Sidorova A., Semina A., Ni M. A spatio-temporal autowave model of Shanghai territory development// Sustainability. — 2019. — 11, № 13. — P. 3658.
15. Moussaoui A., Volpert V. The impact of immune cell interactions on virus quasi-species formation// Math. Biosci. Eng. — 2024. — 21, № 11. — P. 7530–7553.
16. Xu J., Vilanova G., Gomez H. A mathematical model coupling tumor growth and angiogenesis// PLoS ONE. — 2016. — 11, № 2. — e0149422.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чунжук Елизавета Анатольевна (Chunzhuk Elizaveta Anatolevna)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: chunzhukea@my.msu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 90–112
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-90-112

УДК 519.714, 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ.
ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД.
I. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

© 2025 г. В. И. ШИРЯЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются задачи синтеза позиционного управления линейными динамическими системами, когда необходимо гарантированное достижение цели управления, а возмущения, действующие на динамическую систему, и помехи в информационных каналах системы известны с точностью до множеств, из которых они могут принимать любые значения. Построены множества информационных множества и множества прогнозов, гарантированно содержащие вектор состояния. Задачи управления решены для случая задания требований к системе в виде множеств в фазовом пространстве, которым должен принадлежать вектор состояния с учетом ограничений на управление, либо при требованиях в виде квадратичного функционала. Показано применение функций Ляпунова для синтеза управления. Первая часть работы посвящена алгоритмам оценивания.

Ключевые слова: динамическая система, управление, оценивание, неопределенность возмущения, помеха, информационное множество, прогноз, функция Ляпунова.

CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS
UNDER INFORMATION DEFICIT.
GUARANTEED APPROACH.
I. ESTIMATION ALGORITHMS

© 2025 V. I. SHIRYAEV

ABSTRACT. In this paper, we consider the problems of synthesis of positional control for linear dynamic systems in the case where it is necessary to guarantee the achievement of the control goal, and the disturbances acting on the dynamic system and the interference in the information channels of the system are known with an accuracy of sets in which they can take any values. We construct information sets and forecast sets that contain the state vector. Control problems are solved for the case of specifying requirements for the system in the form of sets in the phase space to which the state vector must belong, taking into account the constraints on control, or with requirements in the form of a quadratic functional. The application of Lyapunov functions for control synthesis is shown. The first part of this work is devoted to evaluation algorithms.

Keywords and phrases: dynamic system, control, estimation, disturbance uncertainty, noise, information set, forecast, Lyapunov function.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	91
1. Алгоритмы оценивания	93
1.1. Построение информационного множества. Общий случай	94
1.2. Использование особенностей математической модели динамической системы	95
1.3. Адаптация к помехам и возмущениям	98
1.4. Минимаксный алгоритм фильтрации	99
1.5. Алгоритмы оценивания при неполной информации	102
1.6. Адаптивный фильтр Калмана	103
1.7. Гарантированный аналог фильтра Калмана	104
1.8. Интервальные наблюдатели	105
1.9. Адаптивный минимаксный алгоритм фильтрации	107
Список литературы	109

ВВЕДЕНИЕ

Задача синтеза управления динамическими системами в ситуациях с высоким уровнем неопределенности как возмущений, действующих на динамическую систему, так и помех в информационных каналах является актуальной, что характерно для ряда приложений и конфликтных ситуаций. Во многих случаях неопределенность не имеет стохастическую природу и возникает как из-за действия различных внешних возмущающих факторов, неконтролируемых изменений свойств объекта, так и из-за возникновения отказов, сбоев. Относительно всех неопределенных величин и процессов предполагается только то, что для них известны ограниченные множественные оценки (см. [3, 5, 6, 11, 15, 16, 19, 21, 32–36, 43–46]). При гарантированном подходе расчеты выполняются для наихудшего случая неопределенных величин и процессов.

Гарантированный подход к управлению динамическими системами стал возможен (см. [74, 76, 78]) вскоре после публикации в 1960 г. работы [76] Р. Калмана о фильтре. Применение гарантированного подхода к управлению, несмотря на предупреждения самого Р. Калмана об ограничениях на применения фильтра Калмана (см. [20]), сдерживается излишним пессимизмом гарантированных оценок и большими (по сравнению с фильтром Калмана) вычислительными ресурсами, необходимыми для реализации. Поэтому актуальными являются подходы, направленные на снижение указанных недостатков гарантированного подхода к управлению и оцениванию. Различные аспекты задач управления и оценивания при неполноте информации отражены в работах многих авторов; назовем лишь некоторых из них: Р. Калман, Н. Н. Красовский, А. А. Красовский, А. Б. Куржанский, И. Я. Кац, В. М. Кунцевич, Ф. Л. Черноусько, Н. Б. Филимонов, И. П. Гридасов, Б. Т. Поляк, В. М. Хлебников, Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кирилова, А. И. Матасов, А. Ф. Шориков, F. C. Schweppe, D. P. Bertsecas и др. (см. [1, 3, 5, 6, 9, 12–16, 21–24, 26–36, 39, 43–46, 48, 49, 52, 53, 55–57, 60, 74, 78]).

В работе используются определяющие соотношения минимаксной фильтрации (см., например, [8, 21, 34, 60, 78]), а неопределенность начального состояния, возмущений и помех, следуя В. М. Кунцевичу, задана множествами в виде выпуклых многогранников (см. [34]). Отметим, что информационное множество как результат решения задачи оценивания в этом случае будет также многогранником, что не происходит при задании эллипсоидами, зонотопами, множеств неопределенных величин и не приводит к снижению точности оценивания.

Так, несмотря на то, что в настоящее время считается обоснованным (см., например, [10]) применение обобщенного фильтра Калмана для интеграции бортовых навигационных систем (НС; см. [42]), эффективность применения обобщенного фильтра Калмана существенно зависит от адекватности математических моделей ошибок НС реальным процессам. Нарушение адекватности приводит к расходимости обобщенного фильтра Калмана (см. [10, 20, 50]). Поэтому развитие прикладной теории калмановской фильтрации связано с развитием методов защиты обобщенного

фильтра Калмана от расхожимости: от адаптивных к робастным, к гарантирующим модификациям фильтра Калмана, что достигается интеграцией различных подходов к защите обобщенного фильтра Калмана от расхожимости (см. [10]).

В работе рассматривается построение алгоритмов оценивания, когда необходима высокая точность оценивания. В силу особенностей задач статистическая информация о возмущениях, помехах либо отсутствует, либо недоступна, а точность оценок необходима в каждой реализации процесса, то делается выбор гарантированного подхода к оцениванию (см. [1, 30, 33, 60, 74, 78]), который, как известно, обладает и достоинствами, и недостатками.

Среди достоинств — минимальная информация о неопределенных факторах (начальном состоянии, о возмущениях и помехах; см. [33, 36, 44, 74, 78]) в виде множеств, из которых они могут принимать любое значение, а оценка вектора состояния находится также в виде информационного множества, которому гарантированно принадлежит вектор состояния, что является достоинством гарантированного подхода. Множества неопределенных факторов представляются выпуклыми многогранниками (см. [3, 25, 33, 55, 64–69]); в результате информационное множество так же будет многогранником.

Таким образом, при неполной информации в процессе находят применение как стохастический (см. [4, 8]), так и детерминированный подходы к построению фильтров, а также алгоритмы в статистически неопределенных ситуациях (см. [21]). Целесообразной может оказаться и разделение на несколько этапов, уровней обработки информации: первичная, вторичная, третичная. В [27] для первичной обработки сигналов датчиков в условиях неполной информации циклически подбираются параметры модели и циклического фильтра Калмана, который становится адаптивным. При неполноте информации алгоритма оценивания строятся и как банки фильтров (см. [37]), где каждый фильтр соответствует определенной модели процесса из заданного множества моделей. Эффективным является по существу «комплексирование» нескольких алгоритмов, построенных на разных информационных до определениях неопределенных факторов.

В работе ставится задача в разработке на основе гарантированного подхода адаптивного трехуровневого алгоритма, состоящего из нескольких фильтров на каждом уровне. Множества неопределенных факторов заданы многогранниками. Фильтры построены либо исходя из стохастического, либо из детерминированного подходов. Все уровни охвачены контурами обратной связи, что позволяет производить подстройку априори заданных параметров. В результате алгоритм оценивания приобретает свойство адаптивности.

Оценки возмущений для синтеза управления, также позволят повысить точность управления в условиях неопределенности (см. [2, 41, 47, 52, 59]). Современная теория управления многомерными динамическими системами находится в стадии развития, по отношению к результатам классической теории управления одномерными объектами с инженерными требованиями к точности, запасов устойчивости (по модулю и фазе) и времени регулирования. В настоящее время в теории управления прочное место заняли такие техники, как H_2 , H_∞ , l_1 и μ -синтез, которые весьма косвенно учитывают инженерные требования, преобладающие в классической теории автоматического управления (см. [24, 51, 54, 61]), что делает актуальной задачу сближения современной и классических теорий управления.

Таким образом, в результате решения задачи оценивания известно информационное множество, которому принадлежит вектор состояния динамической системы. В этих условиях задача синтеза управления рассматривается как задача управления будущими значениями вектора состояния: множествами прогнозов, если требования к динамической системе заданы в виде множеств в пространстве состояния системы (см., например, применение обобщенных множеств достижимости, [38]). В случае задания требований к системе в виде квадратичного функционала управление на каждом шаге находится как результат решения задачи квадратичного программирования. Синтез управления с помощью функций Ляпунова приводит к аналогичным экстремальным задачам.

Иной подход к оцениванию и управлению в условиях неопределенности рассматривается в [1, 6–9, 12, 13, 15, 16, 39, 43, 46, 48, 49, 57, 58, 70–73]. Работа примыкает к [27–31] и продолжает исследования [55, 63–69].

В разделе 1 рассмотрены алгоритмы гарантированного оценивания при различных априорных данных о неопределенных факторах. Приведены алгоритмы построения информационных множеств как для общего случая, так и с учетом особенностей математической модели процессов.

Путем оценки реализующихся помех, возмущений рассмотрена возможность адаптации алгоритма оценивания при неполноте априорной информации. Для этого рассмотрены существующие подходы к адаптации фильтра Калмана, а также фильтр Калмана, оценки которого гарантирующие. Интервальные наблюдатели при меньших вычислительных затратах также дают гарантированные оценки, точность которых может оказаться приемлемой.

Предложен адаптивный алгоритм, содержащий три этапа обработки, на каждом из которых может быть несколько параллельно работающих фильтров, построенных исходя либо из детерминированного, либо из стохастического подходов. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Раздел 2 посвящен синтезу управления, когда состояние системы известно с точностью до информационного множества. Требования к системе заданы в виде обобщенных множеств достижимости, либо с помощью множества, принадлежности которому вектора состояния необходимо обеспечить. Задача решается с учетом ограничений на вектор управления.

Рассмотрены синтез управления для квадратичного критерия качества и с помощью функций Ляпунова. Приводятся примеры.

1. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad (1.2)$$

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_{k+1} \in V, \quad (1.3)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $w_k \in \mathbb{R}^p$, $y_k \in \mathbb{R}^r$, $v_k \in \mathbb{R}^r$ — векторы состояния, управления, возмущения, измерения, ошибок измерения соответствующей размерности. Матрицы в системе (1.1), (1.2) и вектор управления u_k предполагаются известными, а система управляема и наблюдаема. Далее в разделе 1 данной работы полагаем управление u_k известным и в целях упрощения записи иногда $u_k \equiv 0$.

При гарантированном или минимаксном подходе к решению задачи оценивания в условиях неопределенности априорная информация о начальном состоянии системы x_0 , возмущениях w_k и ошибках измерений v_k задается в виде выпуклых многогранников, из которых они могут принимать любые значения (см. [21, 33, 34]):

$$x_0 \in X_0 = \{x_0 : A_0 x_0 \leq b_0\}, \quad w_k \in W = \{w_k : A_w w_k \leq b_w\}, \quad v_k \in V = \{v_k : A_v v_k \leq b_v\}. \quad (1.4)$$

Искомая оценка вектора состояния x_{k+1} формируется в виде информационного множества $\bar{X}_{k+1}$ (см. [21, 33, 34, 60, 78]), рекуррентные соотношения для которого имеют вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}, \quad \bar{X}_{k+1} &= X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\bar{X}_k + Bu_k + \Gamma W, \quad X[y_{k+1}] = \{x \in \mathbb{R}^n : Gx + Hv = y_{k+1} \quad \forall v \in V\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $X_{k+1/k}$ — множество прогнозов; $X[y_{k+1}]$ — множество, совместное с измерениями.

Сумма множеств в $X_{k+1/k}$ понимается в смысле Минковского (см. [8]), и реализация этой операции является наиболее вычислительно затратной. Подчеркнем, что информационное множество $\bar{X}_{k+1}$ является оценкой вектора состояния x_{k+1} системы (1.1)–(1.3) в виде множества $\bar{X}_{k+1} \ni x_{k+1}$ возможных значений вектора x_{k+1} , соответствующих реализовавшейся последовательности измерений y_i , $i = 1, \dots, k+1$, и априорной информации в виде математической модели (1.1)–(1.3) о динамической системе.

При необходимости за точечную оценку вектора x_{k+1} множеств может быть взят чебышевский центр $z_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$ (см. [21]), при этом ошибка $e_{k+1} = x_{k+1} - z_{k+1}$ оценки z_{k+1} будет минимальной в наихудшем случае реализации неконтролируемых факторов $x_0 \in X_0$, $w_i \in W$, $v_{i+1} \in V$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, что соответствует минимаксному подходу — расчету на наихудший случай.

Геометрической интерпретацией оценки z_{k+1} вектора состояния x_{k+1} в виде чебышевского центра z_{k+1} множества $\overline{X}_{k+1}$ является центр z_{k+1} сферы минимального радиуса r_{k+1} , описывающей сверху множество $\overline{X}_{k+1}$. Это свойство оценки z_{k+1} — являться центром описанной сферы минимального радиуса r_{k+1} — позволяет построить вычислительный алгоритм для нахождения оценки z_{k+1} , а радиус r_{k+1} , равный модулю ошибки e_{k+1} в наихудшем случае или $d_{k+1} = 2r_{k+1}$ — диаметр информационного множества (см. [33, 34]) можно рассматривать как критерий качества алгоритма оценивания (1.5).

1.1. Построение информационного множества. Общий случай. В настоящее время применяются два подхода к построению информационного множества $\overline{X}_{k+1}$ и множества прогнозов $X_{k+1/k}$. Первый оперирует с вершинами (угловыми точками) многогранников $X_0, W, V, X_{1/0}, \overline{X}_1, \dots, X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ (см., например, [73]) и может оказаться эффективным в задачах управления динамической системой невысокой размерности. По ходу процесса с ростом k число угловых точек у множеств $X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ увеличивается, что ограничивает применение этого подхода ростом размерности динамической системы для построения множества $X_{k+1/k}$ в (1.5), где основная вычислительная операция — нахождение суммы множеств $A\overline{X}_k, \Gamma W$ в смысле Минковского. Пусть, например, заданы множества $A_0 \subset \mathbb{R}^n, B_0 \subset \mathbb{R}^n$; тогда их сумма $C_0 = A_0 + B_0$ в смысле Минковского, как известно, равна

$$C_0 = \{c \in \mathbb{R}^n : c = a + b \ \forall a \in A_0, \ \forall b \in B_0\}.$$

Второй подход (см. [33, 34, 64–69]) использует представление многогранников $X_0, W, V, X_{1/0}, \overline{X}_1, \dots, X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ системами линейных неравенств (1.4). Тогда для $k = 0$ из (1.1)–(1.4) получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} + Ax_k + \Gamma w_k &= -Bu_k, \quad k = 0; \\ Gx_{k+1} + Hv_{k+1} &= y_{k+1}; \\ x_0 &\in X_0, \quad w_0 \in W, \quad v_1 \in V_1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Систему линейных уравнений и неравенств (далее для краткости пишем «система линейных неравенств») будем рассматривать как информационное множество $\overline{X}_1$, заданное неявно. Для явного задания многогранника $\overline{X}_1$ надо найти уравнения всех его граней; тогда получим

$$\overline{X}_1 = \{x_1 : A_1 x_1 \leq b_1\}, \tag{1.7}$$

либо найти все вершины множества $\overline{X}_1$, используя лишь систему (1.6). В рамках второго подхода переход от неявного (1.6) к явному (1.7) заданию множества $\overline{X}_1$ будем рассматривать как задачу аппроксимации многогранника сверху многогранником $\overline{X}_{a1} \supset \overline{X}_1$ с меньшим числом граней (см., например, [25, 68]).

Пусть теперь $k = 1$. Присоединив к системе (1.6) аналогичную систему для $k = 0$, т.е. систему (1.1)–(1.4) для $k = 1$, получим

$$\begin{aligned} x_0 &\in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_i \in V, \quad i = 0, 1; \\ Gx_{i+1} + Hv_{i+1} &= y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + Ax_i + \Gamma w_i &= -Bu_i. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для $k = 2$ к системе (1.8) присоединим систему (1.1)–(1.4). В результате для $k = N - 1$ из (1.1)–(1.4) получим неявное задание множества $\overline{X}_i, i = 1, \dots, N$, в виде системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} x_0 &\in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_{i+1} \in V, \quad i = 0, \dots, k - 1; \\ Gx_{i+1} + Hv_{i+1} &= y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + Ax_i + \Gamma w_i &= -Bu_i, \end{aligned} \tag{1.9}$$

а в результате решения задачи аппроксимации множества $\overline{X}_i \subset \overline{X}_{ai}, i = 1, \dots, N$ (см. [68]), где явно задано множество $\overline{X}_{ai}$, аппроксимирующее информационное множество $\overline{X}_i$:

$$\overline{X}_{ai} = \{x : A_{ai}x \leq b_{ai}\}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.10}$$

Сделаем несколько замечаний.

1. При нехватке вычислительных ресурсов размерность системы линейных неравенств (1.9) можно уменьшить, отбрасывая неравенства, соответствующие началу процесса, и вести обработку на скользящем «окне» шириной L , т.е. в (1.9) $i = k_1, \dots, k_2$, $k_2 - k_1 = L$, $\overline{X}_{k_1}$ задано. В крайнем по отношению к (1.9) случае имеем $L = 1$, и приходим к системе линейных неравенств вида (1.6).

2. Система линейных неравенств (1.9) позволяет решать задачи сглаживания, т.е. находить $\overline{X}_{i/k}$, в том числе и задачу $\overline{X}_{0/N}$, имеющую важные приложения (см. [1]).

3. Из системы (1.9) можно найти оценки $\overline{W}_i$, $\overline{V}_{i+1}$ для возмущений w_i и помех v_{i+1} и использовать их для адаптации алгоритма фильтрации (1.5), (1.6), (1.9).

4. Система неравенств (1.9) позволяет решать задачи прогнозирования, построения множеств достижимости, управления, сменив оптимизационную парадигму (см. [51–54]), в том числе и терминального управления, с использованием принципа «гибких кинематических траекторий» и при задании ограничений, как на управление u_i , так и на вектор состояния x_{k+1} .

Если требования к динамике системы (1.1)–(1.3) заданы в виде выпуклого множества $\tau_d \subset \mathbb{R}^n$ в фазовом пространстве системы, то поскольку вектор состояния x_{k+1} системы (1.1)–(1.3) известен с точностью до принадлежности к информационному множеству $\overline{X}_{k+1}$, то задача синтеза позиционного управления при наличии ограничений в виде множеств X_{k+1} , U_k на вектор состояния $x_{k+1} \in X_{k+1}$ и управление $u_k \in U_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сводится к нахождению последовательности u_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, при которых система линейных неравенств

$$x_{k+1} \in X_{k+1}, \quad x_{k+1} \in \tau_d, \quad x_{k+1} \in \overline{X}_{k+1}, \quad u_k \in U_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

была бы совместной. Здесь множество $\overline{X}_{k+1}$ представлено либо множественно-множественными отображениями (1.5), либо системой неравенств (1.9).

5. Система неравенств (1.9) позволяет находить и оценки параметров динамической системы (1.1). Пусть, например, для некоторых элементов a_{ij} матрицы A из (1.1) известно только то, что $a_{ij} \in [a_{ij}^I, a_{ij}^{II}]$. В результате получаем более сложную, нелинейную систему неравенств, в решении которой получим оценки векторов состояния x_k , возмущений w_k , помех v_k , параметров a_{ij} .

6. В случае нелинейной модели динамической системы

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

$$y_{k+1} = \varphi(x_{k+1}, v_{k+1}), \quad (1.12)$$

решение задачи оценивания сводится к решению системы нелинейных неравенств, аналогичных (1.9):

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_i \in V, \quad i = 0, 1, \dots, k; \\ \varphi(x_{i+1}, v_{i+1}) = y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + f(x_i, u_i, w_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2. Использование особенностей математической модели динамической системы. Рассмотрим линейную дискретную систему (см. [44])

$$x_{k+1} = Ax_k + D_1 w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

$$y_k = Gx_k + D_2 w_k, \quad (1.15)$$

$$\|w_k\| \leq 1, \quad (1.16)$$

где $\|\dots\|$ — евклидова норма вектора.

Помехи измерениям v_k в динамической системе (1.1)–(1.3) равны возмущениям $v_k = w_k$ в (1.14)–(1.16), $D_1 D_2^T = 0$ и не задано множество $X_0 \ni x_0$. На этом различия в динамических системах (1.1)–(1.3) и (1.14)–(1.16) заканчиваются. В работах [44, 56, 57] на основе метода инвариантных эллипсоидов построен фильтр, уравнения которого имеют вид

$$\check{x}_{k+1} = A\check{x}_k + L(y_k - G\check{x}_k), \quad \check{x}_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

$$x_k \in E_k = \{x : (x - \check{x}_k)^T P^{-1}(x - \check{x}_k) \leq 1\}, \quad (1.18)$$

где постоянные матрицы L, P отыскиваются с помощью аппарата линейных матричных неравенств. Достоинство фильтра (1.17), (1.18) заключается в гарантированной оценке, т.е. $\check{x}_k$ гарантированно принадлежит инвариантному эллипсоиду (1.18): если $x_0 - \check{x}_0 \in E_0$ (малые отклонения), то и $x_k - \check{x}_k \in E_k$, а из условия $x_0 - \check{x}_0 \notin E_0$ (большие отклонения) следует $x_k - \check{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} E_k$. В фильтре (1.5) $d_{k+1} \in [0, dV]$, d_{k+1} (диаметр информационного множества) зависит от измерений y_{k+1} . В фильтре (1.17), (1.18) $d_{k+1} = \text{const}$.

Для динамической системы (1.14)–(1.16) возможны три ситуации.

1. Из модели процесса (1.14) можно найти

$$w_k = D_1^{-1}x_{k+1} - D_2^{-1}(Ax_k + Bu_k) \quad (1.19)$$

и, подставляя w_k в уравнение измерения (1.15), получить модель динамической системы с уравнением измерения

$$y_{k+1} = G_1x_{k+1} + G_2x_k + B_2u_k \quad (1.20)$$

без ошибок измерения, что приведет к повышению точности оценивания алгоритма (1.5). В уравнении (1.20) матрицы имеют вид

$$G_1 = G - D_2D_1^{-1}, \quad G_2 = -D_2D_1^{-1}, \quad B_2 = -D_2D_1^{-1}B. \quad (1.21)$$

2. Из уравнения измерения (1.15) можно найти

$$w_k = D_2^{-1}(y_k - Gx_k). \quad (1.22)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.14), получим модель динамической системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_1x_k + Bu_k + Dy_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + D_2w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ A_1 &= A - D_1D_2^{-1}G, \end{aligned} \quad (1.23)$$

в которой неопределенные факторы только $x_0 \in X_0$, а множество прогнозов

$$X_{k+1/k} = A_1\bar{X}_k + Bu_k + Dy_k$$

не содержит операции суммирования множеств. В этом случае $w_k \in W = [w_{1k}, w_{2k}]$ и из (1.11)–(1.13) получим систему неравенств вида

$$\begin{aligned} b_{1k} &\leq -x_{k+1} + Ax_k \leq b_{2k}; \\ y_{1i} &\leq Gx_{i+1} \leq y_{2i}, \quad i = k, k+1; \\ x_k &\in \bar{X}_k, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где множество $\bar{X}_k$ и значения $b_{jk}, y_{ji}, j = 1, 2, i = k, k+1$, известны:

$$b_{jk} = -Bu_k + D_1w_{jk}, \quad y_{ji} = y_i + D_2w_{ji-1}.$$

Система неравенств (1.24) является частным случаем системы (1.9), и для ее решения могут быть разработаны более эффективные методы построения информационного множества $\bar{X}_{k+1}$ по сравнению с более общим случаем динамической системы вида (1.1)–(1.3).

3. Случай

$$w_{k+1} \approx w_k, \quad v_k \approx N(0, \delta_v^2), \quad y_k = x_k^1 + v_k, \quad x_k = (x_k^I, x_k^{II}) \quad (1.25)$$

и установлено, что событие $x_i \notin E_i, i = k, k+1$, невозможно, E_k — доверительный эллипсоид фильтра Калмана. Выражения для оценки $\check{x}_k$ и доверительного эллипсоида фильтра Калмана имеют вид (см. [33, 50, 55])

$$\check{x}_{k+1} = A\check{x}_k + Bu_k + K_{k+1}[y_{k+1} - G(A\check{x}_k + Bu_k)], \quad K_{k+1} = P_{k+1}G^TR^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

$$E_{k+1} = \{x : (x - \check{x}_{k+1})P_{k+1}^{-1}(x - \check{x}_{k+1}) \leq l^2\}, \quad (1.27)$$

где P_{k+1} — ковариационная матрица ошибок оценивания. Вероятность выполнения условия $x_{k+1} \in E_{k+1}$ равна 0,989 при оптимальных оценках $\check{x}_{k+1}$, для $x_{k+1} \in \mathbb{R}^2$ и $l = 3$.

Введем множество $X_{2k+1} = \text{Conv}\{E_k \cup E_{k+1}\}$ ($\text{Conv}\{\dots\}$ — выпуклая оболочка множества), для которого $x_{k+1} \in X_{2k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$, будем называть, по аналогии с минимаксным фильтром

(ММФ) информационным множеством фильтра Калмана. Это позволяет применить к динамической системе (1.1)–(1.3) оба фильтра. Для этого динамическую систему (1.1)–(1.3) представим в виде

$$\begin{aligned}x_{k+1}^1 &= A_1^1 x_k^1 + A_1^2 x_k^2 + \Gamma_1 w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\y_{k+1} &= x_{k+1}^1 + v_{k+1}, \\x_{k+1}^2 &= A_1^2 x_k^1 + A_2^2 x_k^2 + \Gamma_2 w_k.\end{aligned}\tag{1.28}$$

Тогда с учетом уравнения (1.28) для минимаксного фильтра получим

$$\begin{aligned}\bar{X}_{k+1}^1 &= X_{k+1/k}^1 \cap (y_{k+1} - V), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\X_{k+1/k}^1 &= A_1^1 \bar{X}_k^1 + \Gamma_2 W + A_2^2 \check{x}_k^2.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Реализация фильтра (1.29) проще из-за меньшей размерности вектора x_k^1 . Кроме того, возможно повышение точности оценок, если объединить оценки минимаксного фильтра и фильтра Калмана:

$$X_{k+1/k}^1 = \bar{X}_{k+1}^1 \cap X_{2k+1}^1, \quad k = 0, 1, 2, \dots.\tag{1.30}$$

Такое объединение можно сделать и для всего вектора x_{k+1} , используя разный уровень интеграции двух фильтров. Совместное применение двух фильтров целесообразно и тогда, когда только по части координат вектора требуется гарантированная оценка в виде информационного множества. Тогда, представив $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$, где x_k^1 — вектор, для которого необходима гарантированная оценка, приходим к модели процесса вида (1.28) с уравнением измерения

$$y_{k+1} = G_1 x_{k+1}^1 + v_{k+1} + d_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $d_{k+1} = G_2 \check{x}_{k+1}^2$ известна.

Пример 1.1. Воспользуемся особенностями матриц A , G , D_1 , D_2 модели (1.14), (1.15), которая описывает линеаризованную модель динамики вертолета Bell201A-1 (см. [56]), для получения гарантированной оценки вектора состояния x_k . Соответствующие матрицы системы в уравнениях (1.14), (1.15) имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -0,005 & 0,004 & 0,326 & -0,004 & -0,402 & -0,073 & -9,81 & 0 \\ -0,198 & -0,567 & 0,357 & -0,038 & -0,215 & 0,568 & 0 & 0 \\ 0,004 & -0,003 & -0,295 & 0,007 & 0,227 & 0,015 & 0 & 0 \\ 0,013 & -0,001 & -0,407 & -0,065 & -0,409 & 0,267 & 0 & 9,81 \\ 0,013 & -0,01 & -0,815 & -0,04 & -0,821 & 0,144 & 0 & 0 \\ -0,028 & -0,023 & 0,106 & 0,071 & -0,279 & -0,74 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1^T = (0,068; -1,115; 0,006; -0,017; -0,013; 0,14; 0; 0),$$

$$D_2^T = (0; 0,1; 0; 0; 0; 0; 0,5; 0).$$

Отличные от нуля элементы матрицы G равны $c_{12} = c_{27} = c_{38} = c_{46} = c_{53} = c_{65} = 1$. Векторы x_k , w_k , y_k имеют размерность 8, 1, 6 соответственно.

Для данной в модели динамики вертолета матрицы D_2 найдем выражение для ошибки измерения, например, из уравнения для первой компоненты y_{1k} вектора измерений y_k

$$w_k = 10(y_k - x_k).\tag{1.31}$$

Подставляя w_k (1.31) в (1.14), получим для вертолета модель динамической системы (1.23), реализация для которой алгоритм оценивания требует меньше вычислительных затрат и рассмотрена в разделе 2.2.

Кроме того, данная модель динамики вертолета позволяет найти точное значение всех компонент вектора состояния x_k , а не оценки $\bar{X}_k$ с помощью алгоритма фильтрации. Действительно, из

уравнения измерения (1.15) и матрицы D_2 следует, что $x_{2k} = y_{1k}$, $x_{8k} = y_{2k}$, $x_{6k} = y_{4k}$, $x_{5k} = y_{6k}$. Из модели процесса (1.14) для переменных x_{ik} , $i = 2, 5, 6$, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{21}x_{1k} + a_{24}x_{4k} + d_{21}w_k &= z_{2k}; \\ a_{51}x_{1k} + a_{54}x_{4k} + d_{51}w_k &= z_{5k}; \\ a_{61}x_{1k} + a_{64}x_{4k} + d_{61}w_k &= z_{6k}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$\begin{aligned} d_{i1} &= d_i - 0,05a_{i3}, \quad i = 2, 5, 6, \\ z_{2k} &= y_{1k+1} - a_{22}y_{1k} - a_{23}y_{5k} - a_{25}y_{6k} - a_{26}y_{4k}, \\ z_{5k} &= y_{6k+1} - a_{52}y_{1k} - a_{53}y_{5k} - a_{55}y_{6k} - a_{56}y_{4k}, \\ z_{6k} &= y_{4k+1} - a_{62}y_{1k} - a_{63}y_{5k} - a_{65}y_{6k} - a_{66}y_{4k} \end{aligned}$$

вычисляются по априорным данным и измерениям y_{ik+1} , $i = 1, 4, 6$; y_{jk} , $j = 1, 4, 5, 6$.

Система (1.32) при заданных значениях a_{ij} , d_{1i} , $i = 2, 5, 6$; $j = 1, 2, 3, 4$, имеет единственное решение; таким образом, значения x_{1k} , x_{4k} , w_k вычисляются на $(k+1)$ -м шаге. Знание w_k позволяет непосредственно из уравнения измерения (1.15) найти $x_{3k} = y_{5k} - 0,05w_k$, $x_{7k} = y_{2k} - 0,1w_k$. Следовательно, по уравнениям (1.14), (1.15) и измерениям y_{k+1} найдено значение вектора состояния x_k системы без использования уравнений фильтра (1.5).

Для управления представляет интерес множество прогнозов $X_{k+1/k}$ (1.5). Так, например, для первой и четвертой координат, которые измеряются без ошибок, для диаметров множеств получим

$$dX_{ik+1/k} = d_{i1}dW, \quad dW = 2, \quad dX_{1k+1/k} = 0,136, \quad dX_{4k+1/k} = 0,34.$$

Для системы (1.14), (1.15) для первой и четвертой координат имеем соотношения для диаметров множеств фильтров

$$dE_{x1} = 1,3 > dX_{1k+1/k} = 0,136, \quad dE_{x4} = 0,64 > dX_{4k+1/k} = 0,34,$$

где dE_{x1} и dE_{x4} — диаметры по первой и четвертой координатам фильтра (1.17), (1.18).

Иными словами, точность оценивания гарантирующего фильтра (1.17), (1.18) по 1-й и 4-й координатам для рассмотренных исходных данных [56], хуже точности прогноза в алгоритме (1.5).

1.3. Адаптация к помехам и возмущениям. Диаметр информационного множества $\bar{X}_k$ зависит (см. [68]) от реализовавшихся измерений y_i , $i = 1, \dots, k$, которые, в свою очередь, зависят от реализации неопределенных факторов — помех v_{i+1} и возмущений w_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Множество $\bar{X}_i$ может стягиваться в точку $x_k = \bar{X}_k$ для некоторого $i = k$, а может и не изменяться ($\bar{X}_i \approx \bar{X}_{i+1}$), и в этом случае измерения y_i , y_{i+1} являются неинформативными. Это приводит к необходимости осуществлять адаптацию минимаксного фильтра путем нахождения оценок для помех $\hat{V}$ и возмущений $\hat{W}$, например, из решения системы линейных неравенств (1.9) и далее при $i > N$ использовать в системе линейных неравенств (1.9). В качестве индикатора того, что $w_i \in \hat{W}_N$, $v_{i+1} \in \hat{V}_{N+1}$, $i > N$, можно взять невязку $l_i = y_i - GA\hat{x}_{i-1}$ и условие $l_i \in Q_N = \text{Conv}\{l_1, \dots, l_N\}$, $i > N$, где $\hat{x}_{i-1}$ — оценка фильтра Калмана для системы (1.1), (1.2).

Найдем оценки возмущений w_i , помех v_{i+1} непосредственно из соотношений (1.5) для случая, когда матрицы Γ и H в (1.1), (1.2) — единичные. Тогда из соотношений (1.5) для найденной оценки $\bar{X}_{k+1}$ имеем

$$\bar{X}_{k+1} = y_{k+1} - \hat{V}_{k+1} \quad \text{или} \quad \hat{V}_{k+1} = y_{k+1} - \bar{X}_{k+1}.$$

Аналогично из (1.5) из выражения для множества $\bar{X}_{k+1/k}$ для оценки $\hat{W}_k$ имеем

$$\bar{X}_{k+1} = A\bar{X}_k + Bu_k + \Gamma\hat{W}_k, \quad \Gamma\hat{W}_k = \bar{X}_{k+1} \setminus A\bar{X}_k - Bu_k,$$

где $\setminus$ — обозначение геометрической разности множеств. С учетом априорной информации о помехах и возмущениях $w_k \in W$ получим апостериорные оценки

$$\bar{V}_k = \hat{V}_{k+1} \cap V, \quad \Gamma\bar{W}_k = \Gamma\hat{W}_k \cap \Gamma W. \quad (1.33)$$

Большие возможности для адаптации создаются при совместном использовании нескольких параллельно работающих фильтров, построенных исходя из разных информационных доопределений неопределенных факторов модели процесса.

1.4. Минимаксный алгоритм фильтрации. Для оценки вектора состояния x_k системы (1.1)–(1.3) применим три фильтра (минимаксный фильтр, гарантирующий фильтр, фильтр Калмана), для которых $x_k \in X_{kj}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $X_{k1} = \bar{X}_k$ – информационное множество минимаксного фильтра (1.5), $X_{k2} = E_k$ – инвариантный эллипсоид (1.15), $X_{k3} = \text{Conv } X_k$, $X_k = E_{k-1} \cup E_k$, где E_k – доверительный эллипсоид фильтра Калмана (1.24). Рассматривается случай, когда для любых двух смежных моментов времени $k-1$, k хотя бы один раз $x_i \in E_j$, $i = k-1, k$.

Предлагается алгоритм минимаксной фильтрации, в котором осуществляется одновременное применение трех параллельно работающих фильтров: минимаксного, гарантирующего и фильтра Калмана, так что получаем множество

$$X_k = \bigcap_{j=1,2,3} X_{kj}, \quad x_k \in X_{kj}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.34)$$

которое будем называть информационным множеством алгоритма минимаксной фильтрации, по аналогии с информационным множеством $\bar{X}_k$ минимаксного фильтра, а также с множеством X_{k3} фильтра Калмана. Множество прогнозов определяется как $X_{k+1/k} = AX_k + Bu_k + \Gamma W$. Отметим, что рассматриваются последовательности множеств в системе (1.1)–(1.3), для которых $x_k \in X_{kj}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots$. В качестве гарантирующего фильтра можно взять любой фильтр, использующий эллипсоиды, зонотопы (см. [5, 11, 44, 48, 56, 57]), обеспечивающий повышение точности и реализуемый при располагаемых вычислительных ресурсах.

Если чебышевский радиус множества X_{k3} , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет заданным требованием по точности оценивания вектора x_k , то фильтр Калмана позволяет в этом случае получать гарантированные множественные оценки в виде множеств X_{k3} , $k = 1, 2, \dots$, и его можно применить без привлечения минимаксного и гарантирующего фильтров. Кроме того, наряду с применением в (1.34) трех фильтров, исходя из требований по точности, может оказаться достаточным использование любых двух из трех фильтров. Если в составе двух фильтров будет применяться минимаксный фильтр, то при удовлетворении требований по точности информационное множество X_{k1} нужно положить равным либо множеству $X[y_{k+1}]$, либо множеству прогнозов $X_{k+1/k}$.

Для снижения вычислительных затрат необходимо исключить в алгоритме минимаксного фильтра операции суммирования множеств. В тех случаях, когда для возмущений w_k в динамической системе (1.1)–(1.3) возможно построение математической модели (см. [28]), исключаем операцию суммирования множеств, расширяя вектор состояния x_k . К исключению операции суммирования множеств приводит и неявное задание информационных множеств системой линейных неравенств (1.8), (1.9).

Использование особенностей модели динамической системы (1.1)–(1.3) для представления в виде (1.23), где нет операции примирования множеств. Так же в модели процесса (1.23) при матрице $\Gamma_1 = 0$ применение двух фильтров позволяет исключить операцию суммирования множеств. Из (1.23) получим оценку для ошибок измерений

$$\hat{V}_{k+1} = y_{k+1} - \bar{X}_{k+1},$$

для которой найдем аппроксимирующий сверху эллипсоид $E_k \supset \hat{V}_k$ с матрицей $\hat{R}_k$, которую можно рассматривать как оценку либо ковариационной матрицы ошибок измерений фильтра Калмана, либо соответствующей матрицы гарантирующего фильтра.

Кроме того, если множество X_k (1.34) аппроксимировать сверху эллипсоидом с матрицей P_k , то ее можно использовать для коррекции фильтра Калмана и гарантирующего фильтра, что будет приводить к адаптации трех параллельно работающих фильтров: минимаксного, гарантирующего и фильтра Калмана.

Пример 1.2 (см. [57]). Рассмотрим систему (1.1)–(1.3) с вектором состояния $x_k = (x_{1k}, x_{2k})^T$, управлением $u_k = 0,98$, возмущениями $w_k = (w_{1k}, w_{2k})^T$, измерениями $y_k \in \mathbb{R}^1$, ошибками $v_k \in \mathbb{R}^1$

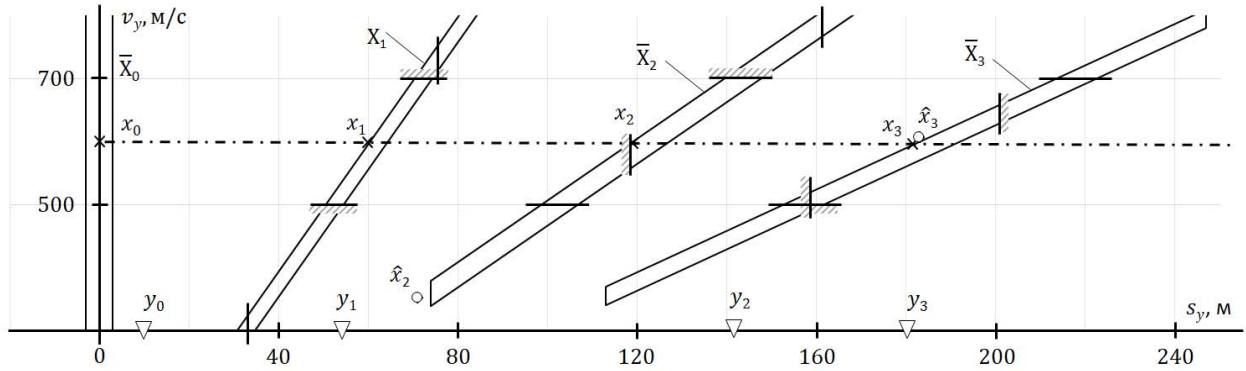


Рис. 1.1. Динамика множеств X_k , $\bar{X}_k$, оценок $\hat{x}_k$, измерения y_k , траектория движения — пунктирная линия, проходящая через точки x_k , для начального участка траектории при $k = 0, 1, 2, 3$ на фазовой плоскости.

и с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = (0, 1)^T, \quad G = (0, 1), \quad \Gamma = I \text{ (единичная матрица)},$$

которая описывает движение снаряда в вертикальной плоскости. В системе (1.1): $x_{1k} = s_y(k)$, $x_{2k} = v_y(k)$ — проекции координаты и скорости снаряда на ось y , $b = 10^{-4}$ — коэффициент сопротивления воздуха, $[k, k+1] = 0,1$ с — интервал времени между измерениями. Возмущения w_k и ошибки измерения v_k (м) распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q = \text{diag}\{\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2\}$, $\sigma_{w1}^2 = 0,1$ м², $\sigma_{w2}^2 = 0,1$ м²/с² и дисперсией $\sigma_v^2 = 500$ м².

Сравним результаты расчета трех алгоритмов фильтрации: информационные множества $\bar{X}_k$ (1.5), инвариантные эллипсоиды E_k (1.18) и доверительные эллипсоиды фильтра Калмана (1.27) — и найдем оценку X_k (1.29) вектора состояния x_k , воспользовавшись результатами расчета (см. [57]) для гарантирующего фильтра, фильтра Калмана с начальными значениями оценок для ГА, фильтра Калмана $\check{x}_0 = \hat{x}_0 = 0$, $P_0 = \text{diag}\{\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2\}$, $\sigma_{x1}^2 = 0,1$ м², $\sigma_{x2}^2 = 10^5$ м²/с². Для минимаксного фильтра, в соответствии с данными для фильтра Калмана, взяты множества (1.4)

$$X_0 = \{x_0 : |x_{i0}| \leq 3\sigma_{xi}, i = 1, 2\}, \quad W = \{w_k : |w_{ki}| \leq 3\sigma_{wi}, i = 1, 2\}, \quad V = \{v_k : |v_{ki}| \leq 3\sigma_v\}.$$

Согласно [55, 64, 68] информационные множества X_{k1} , X_k строятся в виде многогранников (рис. 1.1). Для этого E_k фильтра Калмана аппроксимируются сверху многогранником (рис. 1.2), и поскольку $x_k \in E_k$ при $k = 0, 1, 2, 3, 70, 71, 72, 73$, то для упрощения построения множество X_{k3} состоит из одного эллипса E_k .

Из результатов расчета (см. рис. 1.1, рис. 1.2) множеств X_k алгоритма минимаксной фильтрации (1.32) для двух участков траектории следует, что множества X_k , $k = 1, 71, 72, 73$, формировались только двумя фильтрами, минимаксным и фильтром Калмана, для рассматриваемых исходных данных. Поскольку размеры множеств X_{k2} ГА и X_{k3} фильтра Калмана значительно больше, чем у информационного множества $X_{k1} = \bar{X}_k$ минимаксного фильтра, и, учитывая их расположение на фазовой плоскости, можно отметить, что множество X_1 (рис. 1.1) образовано лишь пересечением двух множеств X_{11} и X_{13} минимаксного фильтра и фильтра Калмана.

Для второго участка траектории (рис. 1.2) размеры множества X_{k3} уменьшились, и оно пересекается со множеством $X_{k1} = \bar{X}_k$, что и приводит к повышению точности оценивания, так как $X_1 = X_{k1} \cap X_{k3}$.

Отметим, что оценки $X_{k1} = X_k$ минимаксного фильтра, а значит, и оценки X_k алгоритма минимаксного фильтра зависят от реализовавшихся возмущений и ошибок измерений, так же как и от множеств X_0 , W , V . В данном примере $X_{01} \supset \mathcal{E}_{l0}$ — весьма грубая оценка второй компоненты x_{20} вектора x_k (см. [57]). Более реалистические оценки второй компоненты $x_{20} \in [500; 700]$ и

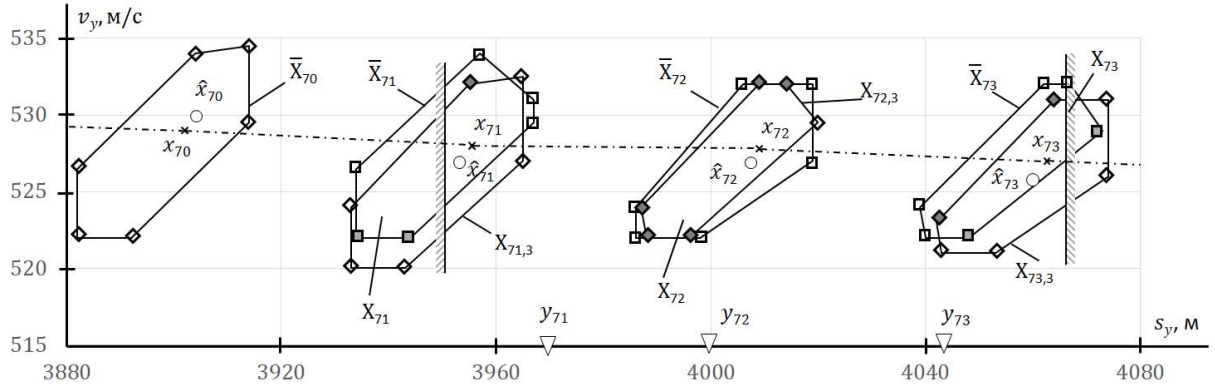


Рис. 1.2. Динамика множества X_k , $\bar{X}_k$, X_{k3} , оценок $\hat{x}_k$, измерения y_k , траектория движения — пунктирная линия, проходящая через точки x_k для участка траектории при $k = 70, 71, 72, 73$ на фазовой плоскости.

ошибок измерений $V = \{v_k : |v_k| \leq \delta_v\}$ приводят, как следует из расчетов (рис. 1.1), к уменьшению размеров множества $\bar{X}_k$, а значит, и к повышению точности оценивания. Так (рис. 1.1) возникает дополнительное ограничение для $k = 0, 1$, $x_{2k} \in [500; 700]$; $k = 2$, $x_{12} \leq 120$; $k = 3$, $x_{13} \in [160; 200]$; для $k = 71$, $x_{171} \geq 3951$ (рис. 1.2); $k = 73$, $x_{173} \leq 4066$. На рис. 1.2 вершины множеств $\bar{V}_k$, X_{k3} , образующие множество $X_k = \bar{X}_k \cap \bar{X}_{k3}$, затенены.

Множество X_{k2} ГА значительно больше множества X_{k3} фильтра Калмана для $k = 76$, отношение больших осей эллипсов ГА и фильтра Калмана более 6, и поэтому отсутствует в X_k алгоритме минимаксной фильтрации в данном примере.

Пример 1.3. Рассмотрим вновь задачу оценивания вектора x_k , описывающего движение снаряда в вертикальной плоскости (см. [57, 65]):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + Bu_k + v_{k+1}, \quad (1.35)$$

где $x_k = (s_y(k), v_y(k))^T$ — вектор состояния, компоненты которого — проекции координаты и скорости снаряда на вертикальную ось, $u_k = -g\Delta t$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ — интервал дискретизации. В уравнении (1.15) будем пренебрегать сопротивлением воздуха, а матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (0, 1)^T, \quad G = (1, 0), \quad \Gamma = I \text{ (единичная матрица)}.$$

Возмущения w_k и ошибки измерения v_k (м) распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q = \text{diag}\{\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2\}$, $\sigma_{w1}^2 = 0,1 \text{ м}^2$, $\sigma_{w2}^2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и дисперсией $\sigma_v^2 = 500 \text{ м}^2$.

Найдем оценку X_k вектора состояния x_k , воспользовавшись результатами расчета (см. [57]) для фильтра Калмана с начальными значениями оценок для фильтра Калмана $\check{x}_0 = \hat{x}_0 = 0$, $P_0 = \text{diag}\{\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2\}$, $\sigma_{x1}^2 = 0,1 \text{ м}^2$, $\sigma_{x2}^2 = 10^5 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Для минимаксного фильтра, в соответствии с данными для фильтра Калмана, взяты множества

$$X_0 = \{x_0 : |x_{10}| \in [0; 3], |x_{20}| \in [500; 700]\}, \quad W = \{w : |w_{ki}| \leq 1, i = 1, 2\}, \quad V = \{v : |v_k| \leq 67\}$$

и вектор $x_0 = (0; 600)^T \in X_0$.

Обозначим через $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$ компоненты вектора $x_k \in \mathbb{R}^2$; тогда для оценок имеем

$$\begin{aligned} \bar{X}_{k+1} &= X_{k+1/k}^1 \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k}^1 &= \bar{X}_k^1 + 0,1\hat{x}_k^2 + W, \quad X[y_{k+1}] = y_{k+1} - V, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $\hat{x}_k^2$ — оценка фильтра Калмана. Оценки $\hat{x}_k^2$ для малых k могут оказаться грубыми, и поэтому возможно, что $x_k^1 \notin X_{k+1/k}$. Для исключения такой ситуации, в данном примере для $k \leq 2$, уравнение для множества прогнозов возьмем в виде

$$X_{k+1/k}^1 = \bar{X}_k^1 + 0,1X_{k+1/k}^2 + W^1, \quad X_{k+1/k}^2 = \bar{X}_k^2 + u_{k-1} + W^2. \quad (1.37)$$

В результате расчета для $k = 1, 2$ получим:

$$\bar{X}_1^1 = X_{1/0}^1 = [52; 74], \quad \bar{X}_2^1 = X_{2/1}^1 = [101; 145].$$

Для $k = 3$ расчет проведем по уравнению (см. далее): $\bar{X}_3^1 = X_{3/2}^1 = [135; 181, 3]$. Если найти

$$\hat{V}_k = y_e - X_k^1, \quad \hat{V} = U\hat{V}_k = [-21; 45], \quad d\hat{V} = 66, \quad d\bar{X}_3^1 = 18,$$

то возьмем $\tilde{V} = [-6; 22]$; тогда $\bar{X}_3^1 = [168; 186]$.

Для $k = 4$ получим:

$$X_4^1 = [227; 242], \quad x_4^1 = 239, \quad \hat{x}_4^1 = 241, \quad \hat{V}_4 = 236 - X_4^1 = [-6; 0] \subset \hat{V}_3 \subset \tilde{V}.$$

Для $k = 5, \dots, 10$ получены следующие результаты:

$$\bar{X}_5^1 = [295; 303]; \quad \bar{X}_6^1 = [353; 363]; \quad e_6 < 0; \quad \bar{X}_7^1 = [413; 425], \quad e_7 > 0; \quad \bar{X}_8^1 = [477; 480],$$

знаки e_5, e_8 не определены. Сравнивая $d\bar{X}_k^1$ с расчетами (см. [65]0, получаем, например, для $k = 3$: $d\bar{X}_3^1 = 18$ против 40 в [65], следовательно, ошибки оценивания уменьшены более чем в два раза.

1.5. Алгоритмы оценивания при неполной информации. Адаптивные фильтры Калмана с подстройкой матриц ковариаций возмущений и шумов измерений. При совместном использовании нескольких алгоритмов фильтрации в условиях неполной информации будем применять адаптивный алгоритм фильтра Калмана в линейной нестационарной системе с неизвестными матрицами ковариаций возмущений и шумов измерений. Специфика прикладной задачи может подсказать наиболее подходящую математическую модель процесса и возможности информационного доопределения по ходу процесса оценивания для уменьшения неопределенности в информации, что и является основой либо для выбора алгоритма адаптации, либо для его построения.

Возможными приложениями адаптивных фильтров (см. [8, 10, 40]) являются задачи навигации, управления и слежения за движущимися объектами, движение которых описывается линейной моделью (1.1)–(1.3):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad (1.38)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + H v_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.39)$$

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad (1.40)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.1)–(1.3). Пусть вместо (1.3) заданы априорное гауссовское распределение начального состояния $x_0 = Nx(0; P_0)$ с матрицей ковариации P_0 и последовательность измерений $y^0 = (y_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Необходимо найти оценку вектора состояния x_T и характеристику точности этой оценки.

Последовательность y^0 получена как результат реализации набора векторов $\xi = \text{Cov}(w_t, v_t)$, $t = 1, 2, \dots$, являющегося белым гауссовским шумом с нулевым средним и с матрицей ковариации

$$Q = \begin{pmatrix} Q_w & Q_{wv} \\ Q_{vw} & Q_v \end{pmatrix}.$$

На коротком промежутке времени, например, по десяти последним измерениям $y^0 = (y_t)$, $M = 10$, оценка матрицы ковариаций Q_n вычисляется по формуле

$$Q_n = \gamma Q_{n-1} + (1 - \gamma) \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \xi_{n,k} \xi_{n,k}^T,$$

где $(\xi_{n,k})$, $k = 1, 2, \dots$, — оценки возмущений и шумов на этом n -м отрезке, $\gamma = 0,2$ — параметр, обеспечивающий невырожденность случайных матриц Q_n (см. [3]).

Более общо, для отрезка $n = 1, \dots, N$ вычисляется средний коэффициент усиления фильтра K_n , оценки $\hat{x}_t$, $t = 1, \dots, M$, и ошибки прогноза измерений $\xi_k = y_k - Cx_{k/k-1}$, а также эмпирические матрицы ковариаций ошибок оценивания и прогнозирования измерений:

$$P_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M (x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T, \quad R_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \xi_t^2.$$

1.6. Адаптивный фильтр Калмана. Как пример комплексирования алгоритмов в условиях неполной информации, когда характеристики возмущений и ошибок измерений точно неизвестны и могут быть аномально большие негауссовские ошибки, отметим алгоритм, в котором совместно используется адаптивный фильтр Калмана и обобщенный метод наименьших модулей для модели линейной нестационарной динамической системы (1.1), (1.2) (см. [40]). Для случая, когда w_k , v_k — векторы нормально распределенных величин, $\text{Cov } w_k = Q_k$, $\text{Cov } v_{k+1} = R_k$, в [40] приведена оценка матриц Q и R осреднением на скользящем окне ширины N :

$$\hat{R}_k \cong \frac{1}{N} \sum_{j=i-N+1}^k v_j v_j^T - G M_i G^T, \quad \hat{Q}_k \cong \frac{1}{N} \sum_{j=i-N+1}^k (K_j v_j v_j^T K_j^T + M_j - A P_{j-1} A^T),$$

где

$$v_j = y_j - G A \hat{x}_{j-1}, \quad M_j = A P_{j-1} A^T + \hat{Q}_{j-1}, \quad P_j = M_j G^T (G M_j G^T + R_j)^{-1}.$$

В нестационарной системе осреднения на скользящем окне можно использовать L -фильтр:

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= (1 - L) \hat{R}_{k-1} + L(v_k v_k^T - G M_k G^T), \\ \hat{Q}_k &= (1 - L) \hat{Q}_{k-1} + L(K_k v_k v_k^T K_k^T + D_k - A P_{k-1} A^T), \end{aligned}$$

где $L < 1$ — настраиваемый коэффициент.

В [1] рассмотрен подход к задаче оценивания динамических систем, который не требует априорной информации о неопределенных факторах как необходимой для применения фильтра Калмана или гарантированного подхода к оцениванию (см. [57, 69]). Следовательно, при возникновении подобной ситуации такой алгоритм, используемый совместно с минимаксным фильтром (1.5), минимаксным алгоритмом фильтрации (см. [69]) может привести к повышению эффективности фильтрации:

$$x_{k+1} = F x_k + G q_k + g_k, \quad z_k = H x_k + r_k, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (1.41)$$

где q_k , r_k — неизвестные векторы; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.1), (1.2), все матрицы известны и могут быть переменными. Имеется априорная информация $\bar{x}_0$ о начальном состоянии системы $\bar{x}_0 = x(0) + r(0)$.

Характерные значения возмущений (погрешностей в динамике) q_k , ошибок (шумов) r_k в измерениях, в априорной информации известны и заданы положительными величинами R_j , Q_j , Π_j , соответственно:

$$\begin{aligned} r_j(k) &\cong R_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, K; \\ q_j(k) &\cong Q_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad k = 0, 1, \dots, K-1; \\ \bar{r}_j(k) &\cong \Pi_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Кроме того, в редкие моменты времени ошибки измерений могут быть аномально большими, превышающими Π_j , R_j , Q_j , а погрешности в динамике могут приводить к скачкообразным изменениям компонент фазового вектора.

Предположений о вероятностных свойствах шумов не делается. Оценка векторов состояния динамической системы решается как вариационная задача l_1 -аппроксимации:

$$\bar{L}(x, q) = \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x_0)\|_{l_1} + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1} q_k\|_{l_1} + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}(y_k - H x_k)\|_{l_1} \rightarrow \text{img}_{(x, q)} \quad (1.42)$$

при ограничениях

$$x_{k+1} - Fx_k - Gq_k - g_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1.$$

Здесь введены обозначения

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (x, q) = (x_0, x_1, \dots, x_k, q_0, q_1, \dots, q_{k-1}),$$

$$\Pi^{-1} = \text{diag} \{ \Pi_1^{-1}, \dots, \Pi_n^{-1} \}, \quad Q^{-1} = \text{diag} \{ Q_1^{-1}, \dots, Q_n^{-1} \}, \quad R^{-1} = \text{diag} \{ R_1^{-1}, \dots, R_n^{-1} \}.$$

Ее решение опирается на квадратичную задачу сглаживания

$$J(x, q) = \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x_0)\|_{L_2} + \left(\sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q_k\|_{L_2}^2 + \|R^{-1}(y_k - Gx_k)\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \rightarrow \min_{(x, q)}$$

и имеет вид

$$\hat{x}_{i/N} = \hat{x}_i - C_i(\bar{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+1/N}), \quad \hat{x}_{N/N} \cong \hat{x}_N, \quad \hat{w}_{i/N} = \bar{w}_i - B_i(\bar{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+1/N}),$$

$$P_{i/N} = P_i - P_i A^T \Lambda_i A P_i, \quad Q_{i/N} = Q - Q \Gamma^T \Lambda_i \Gamma Q, \quad C_i = P_i A M_{i+1}^{-1}, \quad B_i = Q \Gamma M_{i+1}^{-1},$$

где $\bar{x}_i$, $\hat{x}_i$ — прогноз и оценка вектора состояния x_i алгоритма, уравнения которого совпадают с уравнениями фильтра Калмана для системы (1.41), с матрицами $P_0 = \Pi$, Q и R из критерия (1.35); $\hat{x}_{i/N}$, $\hat{w}_{i/N}$ — сглаженные оценки, $P_{i/N}$, $Q_{i/N}$ — матрицы, аналогичные соответствующим ковариационным матрицам фильтра Калмана.

1.7. Гарантированный аналог фильтра Калмана. Приведем основные результаты (см. [71]) по эллипсоидальному гарантированному оцениванию для линейной динамической системы:

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad y = Gx + v, \quad w \in E(0, W(t)), \quad v \in E(0, V(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.43)$$

где смысл обозначений тот же, что и в [57, 60], система (1.43) может быть и не стационарной, $E(x, \theta)$ — эллипсоид с центром в заданном векторе x и симметрической положительно определенной матрицей θ , т.е.

$$E(\kappa, \theta) = \{ l \in \mathbb{R}^1 : \theta^{-1}(l - \kappa, l - \kappa) \leq 1 \}.$$

Матрицы $W(t)$, $V(t)$ известны.

В [71] построен фильтр в форме нестационарной линейной системы

$$\dot{\rho} = F(t)\rho + K(t)y, \quad \rho \in \mathbb{R}^n, \quad \rho(0) = x(0), \quad (1.44)$$

где вектор $\rho(t)$ — искомая оценка вектора $x(t)$, а $F(t)$, $K(t)$ — некоторые неизвестные матрицы. Под $x(0)$ понимается центр эллипсоида при $t = 0$. Для вектора $e(t) = x(t) - \rho(t)$ ошибок фильтра также введен эллипсоид

$$e(t) \in E(f(t), \Sigma(t)), \quad \Sigma(0) = \Sigma_0.$$

Матрицы $F(t)$, $K(t)$ фильтра (1.35) находятся в результате решения экстремальной задачи

$$J = \text{Tr}(L(T)\Sigma(T)) \rightarrow \min$$

при условиях $f(t) \equiv 0$, (1.1)–(1.3), и уравнения фильтра (1.35) могут быть получены в виде

$$\dot{\rho} = A\rho + \Sigma H^T V^{-1}(y - G\rho), \quad \rho(0) = x(0),$$

$$\dot{\Sigma} = A\Sigma + \Sigma A - \Sigma H^T V^{-1} H \Sigma + B W B^T, \quad \Sigma(0) = \Sigma_0, \quad (1.45)$$

которые совпадают с уравнениями фильтра Калмана для стохастической системы, если вместо матриц V и W эллипсоидов подставить ковариационные матрицы соответствующих белых шумов.

Повторная фильтрация. Если оценку $\rho(t)$ рассматривать как новое наблюдение (измерение), то в [72] поставлена снова задача фильтрации в динамической системе с новыми наблюдениями:

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad \rho = x - e. \quad (1.46)$$

Обозначая x^1 новую оценку вектора x для ошибки, получим:

$$\begin{aligned} e &= x - x^1, & e &\in E(0, D(t)), \quad D(0) = \Sigma, \\ \dot{x}^1 &= A_s x^1 + D \Sigma_y^{-1} (\rho - x^1), & x^1(0) &= \rho(0), \\ \dot{D} &= A_s D + D A_s^T - D \Sigma_s^{-1} D + B W_s B^T, & D(0) &= \Sigma_0, \\ A_s(t) &= A + \frac{1}{2q_s(t)} I_n, & W_s(t) &= q_s(t)(1 + L_s(t)^{-1})W(t), \\ \Sigma_s(t) &= q_s(t)(1 + L_s(t))\Sigma(t), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $L_s(t) \geq 0$ и $q_s(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ — произвольные скалярные функции, I_n — единичная матрица порядка n .

В [72] отмечается, что, построив оценку x^1 с помощью фильтра (1.47), ее можно взять за новое наблюдение и использовать ее аналогично для построения следующей эллипсоидальной оценки. Сравнивая интервальное и эллипсоидальное оценивание в [35] показана целесообразность двухэтапной процедуры построения эллипсоидальных систем, когда на первом этапе определяются интервальные оценки минимального объема с дальнейшей аппроксимацией, а на втором этапе — эллипсоид минимального объема.

1.8. Интервальные наблюдатели. При построении наблюдателей актуальной является проблема (см. [15, 16, 19, 32, 57]) неопределенности в модели процесса (неизвестные параметры модели, начального состояния или/и внешних возмущений и шумов измерения), что в значительной степени решается использованием интервальных наблюдателей (ИН), которые определяют оценку множества допустимых значений всего вектора состояния (информационного множества), как и оценку только для заданной линейной функции вектора состояния или для части его координат.

Соответствующий ИН может оказаться проще наблюдателя полной размерности и расширится класс систем, для которых он может быть построен.

Отметим, что ИН, как и минимаксный фильтр в гарантированном подходе, дает интервальную оценку вектора состояния и оценку ошибки оценивания в детерминированных системах, подобно фильтру Калмана в стохастических системах.

Пример 1.4 (см. [16]). Рассмотрим пример нагруженного электропривода, управляющего одной степенью подвижности многосвязного манипулятора, описанную уравнениями

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u + L\rho, \quad y = Hx + v, \quad (1.48)$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $\rho \in \mathbb{R}^1$, где x_1 — угол поворота выходного вала редуктора, x_2 — скорость вращения ротора, x_3 — ток якоря. Матрицы в (1.48) имеют вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad H^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \equiv 0.$$

Переходя в (1.48) к дискретному времени, получим:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & r\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 - r\alpha_2 & r\alpha_3 \\ 0 & r\alpha_4 & 1 + r\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad B = rG(t), \quad G = rH,$$

где (см. [16])

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, \quad y_k = x_{3k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ r &= 0,5, \quad \alpha_1 = \frac{1}{i_r} = 10^{-2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_b h^*(kr)}{J + H(kr)} = 27,5, \\ \alpha_3 &= \frac{km}{J} + H^*(t) = 2 \cdot 10^2, \quad \alpha_4 = \frac{km}{I_m} = -80, \quad \alpha_5 = -\frac{R_m}{L_m} = -10^3, \\ g &= \frac{ky}{L_m} = 2 \cdot 10^{-5}, \quad b = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5 = 1 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (1.49)$$

При расчете принимались следующие значения параметров манипулятора и электропривода: $i_r = 100$, $R_m = 0,50$ м, $L_m = 5 \cdot 10^{-4}$ Гн; $k_y = 100$, $k_m = 0,04$ Н·м/А, $J = 10^{-4}$ кг·м², $k_B = 0,04$ В·с, $H^*(t) = h^*(t) = 10^{-4}$ — известные компоненты, характеризующие, соответственно, степени подвижности манипулятора и кориолисовых и скоростных сил. В [16] синтезирован интервальный наблюдатель оценивания переменной $z = x_2$, т.е. $N = (0; 1; 0)$, $z = Nx$.

Пусть неопределенность X_0 начального состояния x_0 задана в виде $X_0 = X_0^1 x X_0^2 x X_{30}$, где $X_0^1 = [0; 0; 1]$, $X_0^2 = [0; 0; 1]$ — только по первой и второй компоненте вектора $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Тогда при $k = 1$ и получении $y_1 = x_{31}$ из уравнений для компонент системы (1.49) находим:

$$x_{20} = \frac{1}{4}(-y_1 + x_{30} + 10^4 u_0), \quad x_{21} = 2,37x_{20} + 10x_{30},$$

и неопределенность остается только в первой компоненте $X_{11/0} = X_0^1 + 5 \cdot 10^{-4} x_{20}$, обусловленная неопределенностью начального состояния X_0^1 первой компоненты. Ситуация с неопределенностью сохраняется и при $k = 2, 3, \dots$. Компонента x_{2k} , начиная с $k = 1, 2, \dots$, оценивается точно.

Пример 1.5 (см. [19]). Рассмотрим модель нагруженного электропривода, отличающуюся от модели примера 1.4 учетом нелинейности сухого трения и матрицей H :

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u + C(t)\Psi(x, u), \quad y = Hx, \quad (1.50)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x, u) = -\gamma_1(t) - \gamma_2(t) \operatorname{sign}\{x_2(t)\}, \quad \gamma_1 = \frac{M_B(t)}{J + H^*(t)}, \quad \gamma_2 = \frac{M_{TP}(t)}{J + H^*(t)}.$$

Здесь $M_B(t)$ — известное переменное моментное воздействие, учитывающее гравитационные силы и эффекты взаимовлияний между всеми степенями подвижности манипулятора в процессе его движения, M_{TP} — величина номинального момента сухого трения, J — момент инерции ротора электродвигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный в этому ротору.

В [19] построен скользящий наблюдатель для идентификации появления неучтенного моментного воздействия $\tilde{M}(t)$:

$$\tilde{M}(t) = -\hat{k}_B(t)x_2(t) - \hat{M}_{TP}(t) \operatorname{sign}\{x_2(t)\}, \quad (1.51)$$

где

$$\hat{k}_B(t) = 0,5k_B, \quad \hat{M}_{TP}(t) = 0,5M_{TP}.$$

Появление дефекта моделировалось изменением k_B и M_{TP} на 50% при $t = 3$ с. У синтезированного наблюдателя максимальная ошибка не превышала 35% от величины $M(t)$.

Применяем алгоритм гарантированного оценивания (1.5). При $k = 0$ из (1.49) известны x_{10} , x_{30} . При $k = 1$ известны x_{10} , x_{31} . Из уравнения (1.49) модели находим x_{20} , что позволяет из уравнения для x_{2k+1} вычислить x_{21} . Таким образом, при $k = 1$, зная y_0 , y_1 , получим точное значение вектора состояния x_0 , x_1 и т. д. Тогда, согласно [49], можно получить точное значение $M_{k\tau}$, т.е. решить задачу идентификации без ошибок.

1.9. Адаптивный минимаксный алгоритм фильтрации. Будем рассматривать минимаксный фильтр (см. [69]) как основной базовый фильтр для построения адаптивного алгоритма оценивания, состоящего из совокупности фильтров с организованной на нескольких этапах обработкой. Среди фильтров, вошедших в состав минимаксного алгоритма фильтрации (МДФ), основным является минимаксный фильтр, реализующий следующие множественно-множественные отображения:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\in \bar{X}_{k+1}, \quad X_{k+1/k} \cap X_k[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\bar{X}_k + Bu_k + \Gamma W, \quad X[y_{k+1}] = b\{x \in \mathbb{R}^n : Gx + Hv = y_{k+1} \forall v \in V\}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где $\bar{X}_{k+1}$, $X_{k+1/k}$, $X[y_{k+1}]$ — множества, соответственно, информационное, прогнозов и совместное с измерениями.

Для случая, когда множества X_0 , W , V — многогранники, а матрицы A , B зависят от параметра L , решение задачи одновременного определения оценок векторов состояния и параметров для линейной нестационарной системы (1.1)–(1.3) приведено в виде операций над множествами (см. [33]), когда задана априорная гарантированная оценка скорости изменения параметров во времени:

$$\|\Delta\rho_k = \rho_{k+1} - \rho_k\|_\infty \leq \gamma,$$

где ρ_k — вектор параметров системы, γ — заданная константа, относительно которой не принимается предположение о ее малости;

$$\|\dots\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

— норма, x_i — i -я компонента вектора x .

Отметим важное свойство минимаксного фильтра при использовании многогранников: зависимость размеров информационного множества от реализации, возмущений и помех. Если множества неопределенных факторов являются грубыми оценками для реализующихся в ходе процесса, то и информационные множества будут грубыми оценками (см. [6, 14]), вплоть до того, что размеры информационного множества не будут зависеть от текущих измерений. Пессимизм, грубость оценок — известный недостаток гарантированного подхода.

Если множества неопределенных факторов заданы без закругления и возмущения, и помехи принимают значения вблизи границ и на границах множеств, информационные множества значительно уменьшаются при поступлении очередного измерения и даже могут стягиваться в точку — т.е. состоят из одной точки, вектора состояния системы (см. [67–69]). Это делает актуальной задачу построения адаптивного фильтра к реализации неопределенных факторов, к которым будем относить и случай неизвестных параметров объекта управления.

Необходимость адаптации возникает и при использовании фильтра Калмана. Так, в задачах сопровождения (высокодинамических) аэробаллистических объектов одним из существенных упрощений, закладываемых в фильтр Калмана, является предположение о линейном характере уравнений движения и наблюдения (см. [58]) и нормальное распределение неопределенных факторов, что на практике часто не подтверждается. В [58] для этого случая предлагается использовать ансамблевый фильтр Калмана, который использует множество ансамблей параметров. По сути неопределенность приводит к необходимости использовать банк фильтров (см. [37]).

Как уже отмечалось, равенство $d\bar{X}_k = 0$ означает, что информационное множество «стянулось» в точку $x_k = \bar{X}_k$, несмотря на возмущение w_{k-1} и ошибки измерения v_k , если они принимают значения на границе множеств W и V . Следовательно, в алгоритме фильтрации по ходу процесса должно реализовываться такое уменьшение dW_{k-1} и dV_{k-1} , чтобы $d\bar{X}_k = d\bar{X}_{k+1}$. Для этого в минимаксном алгоритме фильтрации проведем следующие изменения.

Введем этап первичной обработки (см. [9]), на котором можно было бы получить апостериорные оценки для W_k , V_{k+1} . Тогда на следующем этапе вторичной обработки полученные оценки возмущений и ошибок будут использованы в алгоритмах вторичной обработки в виде нескольких параллельно работающих фильтров (банк фильтров), где каждый из фильтров может быть построен, исходя из разных информационных доопределений модели процесса, так как это сделано в МДФ (см. [69]).

Далее, на этапе третичной обработки, имея информационные множества $\overline{X}_{ik}$ от каждого из i -х фильтров этапа вторичной обработки из условия, что $x_k \in \overline{X}_{ik}$ для всех фильтров, на выходе алгоритма (третичной) обработки получим:

$$x_k \in \overline{X}_k = \bigcap_{i=1, \dots, l} X_{ik}, \quad \hat{x}_k \in \overline{X}_k,$$

где $\hat{x}_k$ — точечная оценка, в качестве которой может быть взят чебышевский центр множества $\overline{X}_k$. Знание $\overline{X}_k$ позволяет согласно (1.28) (см. [69]) найти оценки $\hat{W}_{k+1}$, $\hat{V}_k$ для фильтров первичной и вторичной обработки, что придает свойство адаптивности алгоритму фильтрации.

Первичная обработка. В качестве фильтров на этапе первичной обработки предлагается использовать фильтр (см. [1]), адаптивный фильтр (см. [28]), полиномиальный или циклический фильтр Калмана (см. [17, 28]) и минимаксный фильтр (1.5). Полиномиальный фильтр Калмана является адаптивным, и его рекомендуется применять в критических режимах работы динамических систем (см. [28]), характерным для которого является неопределенность, в том числе, математической модели объекта управления.

Рассмотрим построение алгоритма первичной обработки из параллельно работающих полиномиального фильтра Калмана первого порядка (см. [17]) и минимаксного фильтра (1.5) для многочлена первой степени, для которого справедлива модель

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad y_k = Gx_k + v_k,$$

где $x_k \cong (x_k, \dot{x}_k)^T$ — вектор состояния, составленный из значения функции $x(t)$ и ее первой производной $\dot{x} = dx/dt$ в точке $t = k$, возмущения w_k , ошибки v_k — случайные некоррелированные последовательности с нулевыми средними и известной ковариационной матрицей Q и дисперсией δ^2 ; матрицы A и G равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения полиномиального фильтра Калмана имеют вид

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_k + K_k(y_{k+1} - GA\hat{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для уравнений минимаксного фильтра имеем:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{k+1} &= X_{k+1/k} \cap X_k[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\overline{X}_k + W, \quad X[y_{k+1}] = y_{k+1} - V, \end{aligned}$$

где $w_k \in W$, $v_k \in V$, $x_0 \in X_0$; W , V , X_0 заданы (см. [69]). Выходом алгоритма первичной обработки являются:

$$X_k = \overline{X}_k \cap X_{2k}, \quad X_{2k} = E_k \cup E_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и тогда находим оценку для множества ошибок измерений:

$$\check{V}_k = y_k - \overline{X}_k, \quad \check{V}_k = V_k \cap V,$$

и прогноз для $(k+1)$ -го шага множества ошибок таков:

$$\check{V}_{k+1/k} = \check{V}_k + y_{k+1} - y_k,$$

который используем в уравнении минимаксного фильтра. Эффективность первичной обработки повышается, если ввести следующие ограничения (калибровку) на величину измерения y_{k+1} и, тем самым, на ошибки измерения:

$$z_k = \begin{cases} a_k & \forall y_{k+1} < a_k, \\ y_{k+1} & \forall y_{k+1} \in [a_k, b_k], \\ b_k & \forall y_{k+1} > b_k, \end{cases} \quad (1.53)$$

где $a_k < b_k$ — это наименьшее и наибольшее значение первых координат угловых точек информационного множества $\overline{X}_k$. Откалиброванные измерения z_k необходимо подставлять в уравнения фильтров вместо y_{k+1} .

На этапах вторичной и третичной обработки используем алгоритм МАФ, состоящий из трех фильтров: минимаксного (1.10), гарантирующего (см. [57, 69]) и Калмана. Поскольку необходимо найти гарантированные оценки, то состав фильтров в части второго и третьего может меняться в зависимости от специфики задачи оценивания.

Для повышения точности оценивания в канале с фильтром Калмана можно применить повторную (см. [72]) фильтрацию (1.9), переходя к дискретному времени, а для снижения вычислительных затрат в канале с минимаксным фильтром применять математическую модель процесса в виде (см. [69])

$$\begin{aligned}x_{k+1}^1 &= A_1^1 x_k^1 + A_1^2 \hat{x}_k^2 + \Gamma_1 w_k, & y_{k+1} &= x_{k+1}^1 + v_{k+1}, & k &= 0, 1, 2, \dots, \\x_{k+1}^2 &= A_2^1 x_k^1 + A_2^2 x_k^2 + \Gamma_2 w_k,\end{aligned}$$

и с уравнениями минимаксного фильтра в виде

$$\bar{X}_{k+1}^1 = X_{k+1/k}^1 \cap (y_{k+1} - V), \quad X_{k+1/k}^1 = A_1^1 \bar{X}_k^1 + \Gamma_2 W + A_1^1 \hat{x}_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В ситуации, когда $d\bar{X}_k \geq d_3$ — заданное значение диаметра, определяющее требуемую точность оценивания, совместное использование минимаксного фильтра и фильтра Калмана может повысить точность оценивания. Поскольку $x_k \in \bar{X}_k$, то очевидно требование для оценок фильтра Калмана: $\hat{x}_k \in \bar{X}_k$. В этих целях либо на этапе первичной обработки, либо на данном этапе, используя z_k (1.53) вместо y_k в уравнениях фильтров, получим, что из $\hat{x}_k \in X_k$, $z_{k+1} \in X_k$ следует $\hat{x}_k \in X_{k+1}$.

Поскольку $dX_{k+1,3} < dX_{k,3}$, то и $dX_{k+1} < dX_k$, а так как $x_k \in X_k$, $\hat{x}_k \in X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то обеспечивается сходимость $\hat{x}_{k+1}$ к x_{k+1} при $k \rightarrow +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П. А., Матасов А. И. Итерационный алгоритм для l-аппроксимации в динамических задачах оценивания// Автомат. телемех. — 2015. — № 5. — С. 7–26.
2. Андриевский Б. Р., Фуртат И. Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Ч. 2. Приложение// Автомат. телемех. — 2020. — № 1. — С. 35–91.
3. Антонов М. О., Афансьева К. Е., Коблов А. И., Ширяев В. И. Алгоритмы оценивания и управления беспилотных летательных аппаратов на этапе посадки// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2005. — № 2. — С. 166–173.
4. Антонов М. О., Елсаков С. М., Ширяев В. И. Высокоточная система посадки летательных аппаратов. — М.: Эдитус, 2015.
5. Бакан Г. М., Кузсуль Н. Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств// Автоматика. — 1999. — № 3. — С. 29–40.
6. Бакан Г. М. Оптимизация алгоритмов гарантированного оценивания состояния динамических систем// Автомат. телемех. — 2000. — № 1. — С. 27–36.
7. Баландин Д. В., Федюков А. А. Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2021. — № 5. — С. 5–17.
8. Барабанов А. Е. Линейная фильтрация с адаптивной подстройкой матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения// Автомат. телемех. — 2016. — № 1. — С. 30–49.
9. Бек В. В., Вишняков Ю. С., Мазлин А. Р. Интегрированные системы терминального управления. — М.: Наука, 1989.
10. Будкин В. Л., Булгаков С. Л., Михеенков Ю. П., Чернодаров А. В., Патрикеев А. П. Бортовая реализация адаптивно-робастных оценивающих фильтров: практические результаты// Науч. вестн. МГТУ ГА. Сер. Авионика и электротехн. — 2005. — № 89 (7). — С. 59–71.
11. Волосов В. В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления// Пробл. управл. информ. — 1996. — № 4. — С. 37–53.
12. Габасов Р., Дмитриук Н. М., Кириллова Ф. М. О проблеме оптимального управления динамическими системами в реальном времени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз.. — 2020. — 183. — С. 98–112.

13. *Гридазов И. П.* Синтез минимаксных линейных систем управления в условиях неопределенности корреляционных свойств возмущений и помех при моментных ограничениях управления// Изв. АН. Техн. киберн. — 1994. — № 1. — С. 132–140.
14. *Дегтярь В. Г., Шалимов Л. Н.* Синтез управления морских стратегических ракетных комплексов. — М.: Машиностроение, 2014.
15. *Ефимов Д. В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями// Автомат. телемех. — 2016. — № 2. — С. 5–49.
16. *Жиравок А. Н., Зуев А. В., Бобко Е. Ю., Тимошенко А. А.* Построение интервальных наблюдателей для нестационарных систем// Мехатрон. автомат. управл. — 2024. — 25, № 1. — С. 513–519.
17. *Зотиков Б. Д., Нейфельд А. А.* О параметрическом синтезе стационарных полиномиальных фильтров первого порядка// Автомат. телемех. — 1992. — № 6. — С. 56–64.
18. *Зубов П. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016.
19. *Зуев А. В., Жиравок А. Н., Филаретов В. Ф., Проценко А. А.* Идентификация дефектов в нестационарных системах на основе скользящих наблюдателей// Мехатрон. автомат. управл. — 2021. — 22, № 1. — С. 625–632.
20. *Калман Р. Е.* Идентификация систем с шумами// Усп. мат. наук. — 1985. — 40, № 4 (244). — С. 27–41.
21. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях// Автомат. телемех. — 1978. — № 1. — С. 79–87.
22. *Квинто Я. И., Хлебников М. В.* Верхние оценки отклонений траекторий в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями// Пробл. управл. — 2019. — № 3. — С. 16–21.
23. *Коган М. М.* Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных линейных системах при неизвестных ковариациях// Автомат. телемех. — 2015. — № 1. — С. 50–66.
24. *Коган М. М.* Адаптивное H_∞ -оптимальное управление// Автомат. телемех. — 2022. — № 8. — С. 123–139.
25. *Костоусова Е. К.* О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем// Автомат. телемех. — 1997. — № 3. — С. 57–68.
26. *Кошечев А. С., Куржанский А. Б.* Адаптивное оценивание революции многошаговых систем в условиях неопределенности// Изв. АН. Техн. киберн. — 1983. — № 2. — С. 72–93.
27. *Красовский А. А.* Циклическое оценивание при первичной обработке сигналов датчиков// Автомат. телемех. — 1988. — № 6. — С. 52–60.
28. *Красовский А. А.* Адаптивные полиномиальные наблюдатели и идентификация в критических режимах// Автомат. телемех. — 1996. — № 1. — С. 142–155.
29. *Красовский А. А., Наумов А. И.* Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем интеллекта// Изв. АН. Теор. сист. управл. — 2001. — № 1. — С. 69–75.
30. *Красовский Н. Н.* Управление при дефиците информации// Докл. АН СССР. — 1985. — 280, № 3. — С. 536–540.
31. *Красовский Н. Н.* Задачи управления и стабилизации динамических систем// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1998. — 60. — С. 24–41.
32. *Кумков С. И., Федотов А. А.* Интервальное оценивание параметров движения самолета в условиях сильного искажения измерений// Автомат. телемех. — 2010. — № 2. — С. 112–127.
33. *Кунцевич В. М.* Определение гарантированных оценок векторов состояния и параметров линейных динамических систем при ограниченных возмущениях// Докл. АН СССР. — 1986. — 288, № 3. — С. 567–570.
34. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наукова думка, 2006.
35. *Кунцевич В. М., Волосов В. В.* Эллипсоидальные и интервальные оценки вектора состояния семейств линейных и нелинейных дискретных динамических систем// Киберн. сист. анализ. — 2015. — 71, № 1. — С. 73–84.
36. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Физматлит, 1977.
37. *Лайниотис Д. Г.* Разделение — единый метод построения адаптивных систем. I. Оценивание// Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр. — 1976. — 64, № 8. — С. 8–27.
38. *Лотов А. В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 250, № 5. — С. 1081–1083.

39. *Лычак М. М.* Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода// Пробл. управл. информ. — 1999. — № 5. — С. 34–41.
40. *Миллер Б. М., Колосов К. С.* Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана// Автомат. телемех. — 2020. — № 1. — С. 72–92.
41. *Никифоров В. О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. I. Объекты с известными параметрами// Автомат. телемех. — 2004. — № 1. — С. 13–24.
42. *Пешехонов В. Г.* Высокоточная навигация без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем// Гироскопия и навигация. — 2022. — 30, № 1. — С. 3–11.
43. *Поддубный В. В.* Рестриктивная фильтрация в навигационных системах// Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2002. — № 25. — С. 202–215.
44. *Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов// Докл. РАН. — 2008. — 418, № 6. — С. 749–753.
45. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014.
46. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации// Автомат. телемех. — 2022. — № 3. — С. 7–32.
47. *Рутковский В. Ю., Суханов В. М.* Проблемы нелинейного управления ориентацией деформируемых космических аппаратов. Ч. 2. Идентификация, оценивание и алгоритмы управления в условиях неопределенности модели объекта// Мехатрон. автомат. управл. — 2006. — № 1.. — С. 15–24.
48. *Сальников Н. Н.* Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации// Пробл. управл. информ. — 2014. — № 2. — С. 144–156.
49. *Сальников Н. Н., Губарев В. Ф., Мельничук С. В.* Применение модифицированного эллипсоидального фильтра в комплексированной бесплатформенной инерциальной системы// Пробл. управл. информ. — 2018. — № 2. — С. 87–102.
50. *Степанов О. А.* Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние// Мехатрон. автомат. управл. — 2010. — № 1. — С. 10–16.
51. *Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.* Синтез следящих систем на основе аппарата линейно-квадратичной оптимизации// Мехатрон. автомат. управл. — 2016. — 17, № 1. — С. 795–801.
52. *Филимонов Н. Б.* Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования// Мехатрон. автомат. управл. — 2003. — № 2. — С. 11–15.
53. *Филимонов Н. Б.* Стохастический и детерминированный подходы в задачах параметрического оценивания// Тр. I Всеросс. науч.-техн. конф. «Механика, автоматизация, управления». — М.: Новые технологии, 2004. — С. 187–190.
54. *Филимонов Н. Б.* Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы// Мехатрон. автомат. управл. — 2010. — № 1. — С. 2–11.
55. *Фокин Л. А., Ширяев В. И., Подивилова Е. О.* Об использовании калмановского и минимаксного алгоритмов оценивания погрешностей интегрированной навигационной системы// Тр. ФГУП «НППЦАП». Системы и приборы управления. — 2013. — № 3. — С. 65–79.
56. *Хлебников М. В.* Разреженная фильтрация при ограниченных внешних возмущениях// Автомат. телемех. — 2022. — № 2. — С. 35–50.
57. *Хлебников М. В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров// Автомат. телемех. — 2023. — № 4. — С. 64–95.
58. *Ходатаев Н. А., Тимошенко А. В., Казанцев А. М., Скосаренко А. Е.* Интеллектуальный алгоритм сопровождения высокодинамических аэробалистических объектов на основе оценок траектории движения// Изв. вузов. Приборостроение. — 20–2. — 67, № 1.
59. *Цыкунов А. М.* Робастное управление с компенсацией ограниченных возмущений и помех// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 19–6. — № 3.
60. *Черноусько Ф. Л.* Гарантированные оценки неопределенных величин при помощи эллипсоидов// Докл. АН СССР. — 1980. — 251, № 1. — С. 51–54.
61. *Честнов В. Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H²-оптимизации// Автомат. телемех. — 2019. — № 1. — С. 132–152.
62. *Шалыгин А. С., Лысенко Л. Н., Толтегин О. А.* Методы моделирования ситуационного управления движением беспилотных летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 2012.
63. *Ширяев В. И.* К устойчивости в целом системы третьего порядка со «своими» нелинейностями в одном частном случае// Диффер. уравн. — 1973. — 9, № 1. — С. 2102–2104.

64. *Ширяев В. И.* Синтез управления линейными системами при неполной информации// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1994. — № 3. — С. 229–237.
65. *Ширяев В. И.* Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности// Мехатроника. — 2001. — № 8. — С. 2–5.
66. *Ширяев В. И., Коблов А. И., Лепинин Е. Ф.* Оценивание параметров движения роботов команды противника при игре в футбол// Мехатроника. — 2002. — № 1. — С. 6–8.
67. *Ширяев В. И.* Управление динамическими системами в условиях неопределенности// Искусств. интеллект. — 2008. — № 3. — С. 224–231.
68. *Ширяев В. И., Подвигилова Е. О.* Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности// Мехатрон. автомат. управл. — 2014. — № 7. — С. 10–16.
69. *Ширяев В. И.* Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности. Ч. 1// Мехатрон. автомат. управл. — 2024. — 25, № 6. — С. 279–288.
70. *Шматков А. М.* Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости для динамической системы с возмущениями, ограниченными по величине// Докл. РАН. — 2006. — 411, № 4. — С. 460–463.
71. *Шматков А. М.* Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2011. — № 5. — С. 33–40.
72. *Шматков А. М.* Сглаживающий фильтр на основе аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 4. — С. 98–508.
73. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II// Автомат. телемех. — 1996. — № 9. — С. 139–150.
74. *Bertsekas D., Rhodes I.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — 16, № 2. — P. 117–128.
75. *Combastel C., Zhang Q.* Robust fault diagnosis based on adaptive estimation and set-membership computations IFAC Proc. Vol. — 2006. — 39, № 13. — P. 1204–1209.
76. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems// Trans. ASME. J. Basic Eng. — 1960. — № 82. — P. 35–45.
77. *Le V. T. H., Stoica C., Alamo T., Camacho E. C., Dumur D.* Zonotopes: From Guaranteed State-estimation to Control. — Wiley, 2013.
78. *Schweppe F. C.* Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs// IEEE Trans. Automat. Control. — 1968. — 13, № 1. — P. 22–28.
79. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — P. 976–1024.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ширяев Владимир Иванович (Shiryaev Vladimir Ivanovich)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: shiriaevvi@susu.ru

CONTENTS

Revaz Valerianovich Gamkrelidze (<i>obituary</i>)	3
Application of Picard's method to Cauchy problem solution to some fractional differential equations (<i>N. A. Antonov</i>)	5
Contrast structures in a reaction-diffusion system with multiscale diffusion coefficients and discontinuous reaction functions (<i>K. A. Kotsyubinsky</i>)	11
Periodic traveling waves of the Kuramoto–Sivashinsky equation (<i>A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, D. G. Frolov</i>)	25
Formation of a boundary-layer solution in a problem for a system of reaction-diffusion equations in a limited volume (<i>N. T. Levashova</i>)	38
On periodic solutions with boundary layers in problems with nonlinear singular boundary conditions (<i>E. I. Nikulin</i>)	45
Front formation in the reaction-diffusion problem with nonlinear diffusion (<i>A. R. Makhmudov, A. O. Orlov, V. T. Volkov</i>)	56
On nonnegative solutions of systems of linear differential equations with variable coefficients under fuzzy initial data and inhomogeneities (<i>V. L. Khatskevich</i>)	63
Normality in real AW*-algebras (<i>S. A. Chepukhalin, A. A. Rakhimov</i>)	78
Features of the moving-front solution for a two-dimensional problem with a discontinuous cubic nonlinearity (<i>E. A. Chunzhuk</i>)	81
Control of dynamic systems under information deficit. Guaranteed approach. I. Estimation algorithms (<i>V. I. Shiryayev</i>)	90

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический государственный университет, ВИНТИ РАН)
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, МГУ им. М. В. Ломоносова)
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова, Университет имени Бар-Илана)
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем им. А. К. Айламазяна)
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт», МГУ им. М. В. Ломоносова)
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор (Иркутский государственный университет)
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Корпусов Максим Олегович
Лукьяненко Дмитрий Витальевич
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Сачков Юрий Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.