

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 239



Москва 2025

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 239 (№ 2, 2025)

Дата публикации 17 февраля 2025 г.

Издается с 1995 года
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска

А. В. Аргучинцев,

М. В. Шамолин

Научный редактор выпуска

Е. Е. Букжалёв

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN (печатная версия)

0233-6723

ISSN (электронная версия)

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 239

МАТЕРИАЛЫ
6 МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»
(DYSC 2024)

Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.
Часть 2



Москва 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Решение типа бегущей волны смешанной задачи для нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка (<i>Е. Ю. Гражданцева</i>)	3
Комбинаторный алгоритм перечисления и пересчета композиций натурального числа с ограничениями (<i>О. В. Кузьмин, М. В. Стрихарь</i>)	13
Необходимые условия минимума в вариационных задачах с запаздыванием при наличии вырождений (<i>М. Дж. Марданов, Т. К. Меликов</i>)	25
Вихревые модели сдвиговых ламинарных и турбулентных течений (<i>В. Л. Миронов, С. В. Миронов</i>)	32
Методы краевых задач для улучшения управления в системах с ограничениями (<i>Д. О. Трунин</i>)	43
Начально-краевые задачи для некоторых нелинейных смешанных операторов теплопроводности (<i>В. Н. Ханхасаев, С. И. Муняев</i>)	53
Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. IV. Системы девятого порядка (<i>М. В. Шамолин</i>)	62



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-3-12

УДК 517.957

РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА

Аннотация. В работе предлагается решение типа бегущей волны одной смешанной задачи для нелинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа модуля. Определены условия согласования данных задачи, допускающие существование решения типа бегущей волны.

Ключевые слова: нелинейная гиперболическая система первого порядка, нелинейность модульного типа, смешанная задача, решение типа бегущей волны.

SOLUTION OF A TRAVELING-WAVE TYPE TO A MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2025 Е. Yu. GRAZHDANTSEVA

ABSTRACT. In this paper, we propose a solution of a traveling-wave type to a mixed problem for a nonlinear hyperbolic system of first-order partial differential equations with a modulus-type nonlinearity and obtain conditions for the existence of a solution of a traveling-wave type.

Keywords and phrases: nonlinear first-order hyperbolic system, modulus-type nonlinearity, mixed problem, solution of a traveling-wave type.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Дифференциальными уравнениями в частных производных и системами дифференциальных уравнений в частных производных описывают множество физических процессов. В частности, гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных и системами таких описывают всевозможные волновые процессы, происходящие в средах (жидкости, газе, в электромагнитном поле и тому подобные), эффект гидроудара в напорном трубопроводе и многие другие процессы. Библиография, посвященная исследованиям таких уравнений и систем весьма обширна. Появляются новые подходы к получению решений подобных уравнений и систем, а также связанных с ними задач ((см. например, [3, 4, 6, 10–13, 15])). Данная работа посвящена исследованию одной смешанной задачи для нелинейной однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа модуля. Для исследуемой задачи найдено решение типа бегущей волны.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Определение 1 (см. [8]). Решением типа бегущей волны называют функцию вида $w(x, y) = W(z)$, $z = kx - my$, где k и m — произвольные постоянные.

Замечание 1 (см. [8]). Величина m/k играет роль скорости распространения волны; m может быть любого знака. Если переменная x играет роль пространственной переменной, а переменная y — времени, то значение $m = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ отвечает пространственно однородному решению.

Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — функции свободных переменных x и y , дифференцируемые по каждой переменной и по совокупности переменных при всех $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — постоянные коэффициенты, причем $ac > 0$. Полагая $v > 0$, преобразуем систему (1) в систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

решение которой имеет вид

$$v = v(x, y) = \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, \quad u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A$$

(см. [4]), где A, B, C — произвольные постоянные. При $v < 0$ система (1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} - bv^2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

которая, в свою очередь, имеет решение вида

$$v = v(x, y) = -\frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, \quad u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A$$

(см. [4]), где A, B, C — произвольные постоянные. При $v = 0$ система (1) вырождается в систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

имеющую решение

$$v = v(x, y) = 0, \quad u = u(x, y) = A,$$

где A — произвольное число. Таким образом, обобщая выше изложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для произвольных $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ система (1) имеет решение типа бегущей волны, которое определяется совокупностью пар функций

$$\begin{cases} v = v(x, y) = \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, & u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A, \\ v = v(x, y) = -\frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, & u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Убедиться в справедливости теоремы можно непосредственной подстановкой решений в уравнения системы (1). Действительно, для первой пары функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ совокупности (2) их частные производные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{(ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(ac - B^2)B^2}{bc^2(y + Bx + C)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(ac - B^2)B}{bc^2(y + Bx + C)^2}. \end{aligned}$$

После подстановки этих функций в уравнения системы (1) получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| &= \frac{(ac - B^2)B^2}{bc^2(y + Bx + C)^2} - a \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)^2} + \\ &+ b \frac{(ac - B^2)^2}{b^2c^2(y + Bx + C)^2} = \frac{(ac - B^2)B^2 - ac(ac - B^2) + (ac - B^2)^2}{bc^2(y + Bx + C)^2} = \\ &= \frac{acB^2 - B^4 - a^2c^2 + acB^2 + a^2c^2 - 2acB^2 + B^4}{bc^2(y + Bx + C)^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2} + c \frac{(ac - B^2)B}{bc^2(y + Bx + C)^2} = \frac{-(ac - B^2)B + (ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2} = 0,$$

подтверждающие, что первая пара функций совокупности (2) является решением системы (1). Аналогично, после подстановки второй пары функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ совокупности (2) в уравнения системы (1) получаем цепочки равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| &= -\frac{(ac - B^2)B^2}{bc^2(y + Bx + C)^2} + a \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)^2} = \\ &- b \frac{(ac - B^2)^2}{b^2c^2(y + Bx + C)^2} = \frac{-(ac - B^2)B^2 + ac(ac - B^2) - (ac - B^2)^2}{bc^2(y + Bx + C)^2} = \\ &= \frac{-acB^2 + B^4 + a^2c^2 - acB^2 - a^2c^2 + 2acB^2 - B^4}{bc^2(y + Bx + C)^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2} - c \frac{(ac - B^2)B}{bc^2(y + Bx + C)^2} = \frac{(ac - B^2)B - (ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2} = 0,$$

которые показывают, что вторая пара функций совокупности (2) является решением системы (1), поскольку частные производные этих функций имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{(ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(ac - B^2)B^2}{bc^2(y + Bx + C)^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)^2}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(ac - B^2)B}{bc^2(y + Bx + C)^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

2. Основные результаты. Предполагая, что неизвестные функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$v(x_0, 0) = \varphi, \quad u(x_0, 0) = \psi, \quad (3)$$

$$v(x_*, y_*) = f, \quad u(x_*, y_*) = g, \quad (4)$$

где $x_0, x_*, y_*, \varphi, \psi, f, g$ — действительные числа, удовлетворяющие условиям $x_0 \neq x_*, y_* \neq 0$, получаем смешанную задачу для гиперболической системы (1), (3), (4).

Для смешанной задачи (1), (3), (4)) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть действительные числа $x_0, x_*, y_*, \varphi, \psi, f, g, a, b, c$ таковы, что $x_0 \neq x_*, y_* \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, ac > 0$ и выполнены условия

$$a(\varphi - f)^2 \neq c(g - \psi)^2, \quad (5)$$

$$\varphi f b(y_*(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* - x_0)) = a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2. \quad (6)$$

Тогда смешанная задача (1), (3), (4) имеет решение вида

$$v = v(x, y) = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x, y)}, \quad (7)$$

$$u = u(x, y) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}v(x, y) + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f}, \quad (8)$$

где

$$K(x, y) = (\varphi - f)^2 y + c(\varphi - f)(g - \psi)x + y_* f(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* f - x_0 \varphi). \quad (9)$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(\varphi - f)(g - \psi), \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(g - \psi)^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)(g - \psi), \end{aligned}$$

то после подстановки функций (7) и (8) в уравнения системы (1) получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(g - \psi)^2 - \\ &- a \cdot \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)^2 + b \cdot \left(\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x, y)} \right)^2 = \\ &= \frac{ac(\varphi - f)^2(g - \psi)^2 - c^2(g - \psi)^4 - a^2(\varphi - f)^4 + ac(g - \psi)^2(\varphi - f)^2}{bK^2(x, y)} + \\ &+ \frac{(a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2)^2}{bK^2(x, y)} = 0 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} ac(\varphi - f)^2(g - \psi)^2 - c^2(g - \psi)^4 - a^2(\varphi - f)^4 + ac(g - \psi)^2(\varphi - f)^2 &= \\ &= - (a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2)^2; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(\varphi - f)(g - \psi) + \\ &+ c \cdot \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)(g - \psi) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функции (7) и (8) удовлетворяют уравнениям системы (1). Далее, обращаясь к условиям (3) и (4), имеем равенства:

$$\begin{aligned} v(x_0, 0) &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x_0, 0)}, \quad u(x_0, 0) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot v(x_0, 0) + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f}, \\ v(x_*, y_*) &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x_* y_*)}, \quad u(x_*, y_*) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot v(x_*, y_*) + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f}. \end{aligned}$$

Кроме того, для функции $K(x, y)$ вида (9) справедливы равенства

$$\begin{aligned} K(x_0, 0) &= c(\varphi - f)(g - \psi)x_0 + y_* f(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* f - x_0 \varphi) = \\ &= c(g - \psi)(\varphi x_0 - f x_0 + x_* f - x_0 \varphi) + y_* f(\varphi - f) = \\ &= cf(g - \psi)(x_* - x_0) + y_* f(\varphi - f) = f(c(g - \psi)(x_* - x_0) + y_*(\varphi - f)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(x_*, y_*) &= (\varphi - f)^2 y_* + c(\varphi - f)(g - \psi)x_* + y_* f(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* f - x_0 \varphi) = \\
&= (\varphi - f)(\varphi y_* - f y_* + y_* f) + c(g - \psi)(\varphi x_* - f x_* + x_* f - x_0 \varphi) = \\
&= (\varphi - f)\varphi y_* + c\varphi(g - \psi)(x_* - x_0) = \varphi(c(g - \psi)(x_* - x_0) + y_*(\varphi - f)).
\end{aligned}$$

Из условий (5), (6) следует равенство

$$c(g - \psi)(x_* - x_0) = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{\varphi f b}. \quad (11)$$

Следовательно, учитывая равенство (11), для функции $K(x, y)$ вида (9), получим равенства

$$K(x_0, 0) = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{\varphi b}, \quad K(x_*, y_*) = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{fb}.$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
v(x_0, 0) &= \varphi, \quad u(x_0, 0) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}\varphi + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f} = \psi, \\
v(x_*, y_*) &= f, \quad u(x_*, y_*) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}f + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f} = g,
\end{aligned}$$

которые подтверждают, что функции (7) и (8) удовлетворяют условиям (3) и (4). Таким образом, функции (7) и (8) являются решением задачи (1), (3), (4). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть действительные числа $x_0, x_*, y_*, \varphi, \psi, f, g, a, b, c$ таковы, что $x_0 \neq x_*, y_* \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, ac > 0$ и удовлетворяют условию (5) и соотношению

$$-\varphi fb(y_*(\varphi - f) + c(g - \psi)(x_* - x_0)) = a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2. \quad (12)$$

Тогда смешанная задача (1), (3), (4) имеет решение вида

$$v = v(x, y) = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x, y)}, \quad (13)$$

$$u = u(x, y) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}v(x, y) + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f}, \quad (14)$$

где функция $K(x, y)$ определена формулой (9).

Доказательство. Поступая аналогично доказательству теоремы (2), учитывая условие (12), можно убедиться в том, что функции (13) и (14) являются решением задачи (1), (3), (4). Действительно, частные производные функций (13) и (14) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(\varphi - f)(g - \psi), \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)^2, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(g - \psi)^2, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{g - \psi}{\varphi - f} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)(g - \psi).
\end{aligned}$$

Подставляя функции (13) и (14) в уравнения системы (1), получим следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| &= -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(g - \psi)^2 + \\ &+ a \cdot \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)^2 - b \cdot \left(\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK(x, y)} \right)^2 = \\ &= \frac{-ac(\varphi - f)^2(g - \psi)^2 + c^2(g - \psi)^4 + a^2(\varphi - f)^4 - ac(g - \psi)^2(\varphi - f)^2}{bK^2(x, y)} + \\ &+ \frac{(a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2)^2}{bK^2(x, y)} = 0 \end{aligned}$$

согласно (10);

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot c(\varphi - f)(g - \psi) - \\ &- c \cdot \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{bK^2(x, y)} \cdot (\varphi - f)(g - \psi) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функции (13) и (14) удовлетворяют уравнениям системы (1). Далее, поскольку согласно условий (5) и (12) имеем

$$K(x_0, 0) = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{\varphi b}, \quad K(x_*, y_*) = -\frac{a(\varphi - f)^2 - c(g - \psi)^2}{fb}.$$

Следовательно, для функций (12) и (13) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} v(x_0, 0) &= \varphi, \quad u(x_0, 0) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}\varphi + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f} = \psi, \\ v(x_*, y_*) &= f, \quad u(x_*, y_*) = -\frac{g - \psi}{\varphi - f}f + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f} = g, \end{aligned}$$

Таким образом, убеждаемся, что функции (12) и (13) удовлетворяют также условиям (3) и (4). Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Условия (5), (6), (12) являются условиями согласования числовых данных задачи (1), (3), (4), допускающие для данной задачи существование решения типа бегущей волны.

Замечание 3. Нарушение условия (5) дает тривиальное решение задачи (1), (3), (4), которое принимает вид

$$v = v(x, y) = 0, \quad u = u(x, y) = A,$$

где A — произвольное число.

Пример 1. Найти функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 0,5 \frac{\partial v}{\partial y} + 8v|v| = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

и условиям

$$v(1; 0) = 0, \quad u(1; 0) = 100, \quad v(2; 10) = 140, \quad u(2; 10) = 50.$$

Здесь $x_0 = 1$, $x_* = 2$, $y_0 = 10$, $a = 0,5$, $b = 8$, $c = 4$, $\varphi = 0$, $\psi = 100$, $f = 140$, $g = 50$.

Условие (5) и условие (6) из теоремы 2 выполнены. Следовательно, согласно теореме 2 искомые функции имеют следующий вид:

$$v(x, y) = \frac{-25}{19600y + 28000x - 252000}, \quad u(x, y) = -\frac{5}{14}v(x, y) + 100.$$

Эти гиперболические поверхности, имеющие асимптотическую плоскость $19600y + 28000x - 252000 = 0$, представлены на рис. 1.

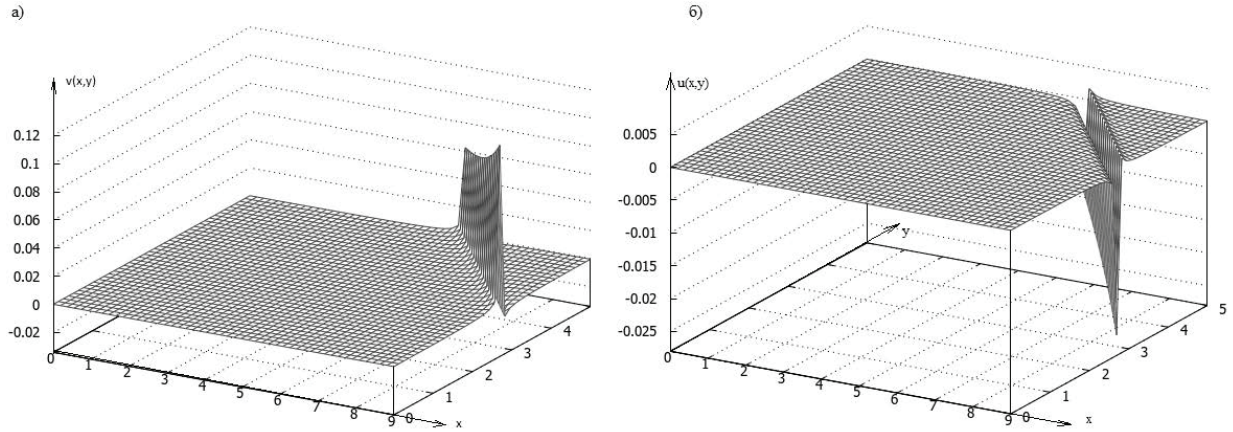


Рис. 1. Графики функций $v = v(x, y)$ (слева) и $u = u(x, y)$ (справа).

3. Физическое приложение. Известно, что движение жидкости в напорном трубопроводе описывают системой следующих уравнений:

- (i) уравнение движения, которое вытекает из интегрального закона сохранения импульса:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial(VG)}{\partial l} + \omega \frac{\partial p}{\partial l} = -\eta\chi - \rho g \omega \frac{dz}{dl};$$

- (ii) уравнение неразрывности, которое вытекает из интегрального закона сохранения массы (см. [12, 14]):

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial l} = 0;$$

- (iii) уравнение энергии, которое вытекает из интегрального закона сохранения энергии (см. [2, 7, 12]):

$$\rho\omega \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + G \frac{\partial h}{\partial l} - \omega V \frac{\partial p}{\partial l} = q_w \chi,$$

- (iv) замыкающие соотношения, получающиеся при выборе давления p и температуры T в качестве основных термодинамических переменных (тогда $\rho = \rho(p, T)$, $h = h(p, T)$):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \sigma_p \rho, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\sigma_T \rho.$$

Здесь t — время, l — координата вдоль трубы, ρ — плотность жидкости, ω — площадь поперечного сечения трубы, G — массовый расход, $V = G/(\rho\omega)$ — средняя по сечению скорость потока жидкости, $\tau = \lambda\rho|V|V/8$ — касательное напряжение трения о стенки (см. [5]), λ — коэффициент гидравлического трения (см. [1]), χ — смоченный периметр, g — ускорение силы тяжести, $z = z(l)$ — вертикальная отметка оси трубопровода, $h = e + p/\rho$, $g_w = K(T_{env} - T)$ — приток тепла к жидкости через стенки трубы, приходящийся на единицу площади поверхности трубы, e — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\sigma_p = \sigma_p(p, T)$ — коэффициент изотермической сжимаемости жидкости, $\sigma_T = \sigma_T(p, T)$ — коэффициент объемного расширения жидкости. Выбирая в качестве

основных переменных давление $p = p(l, t)$, скорость $v = v(l, t)$ и температуру $T = T(l, t)$ и учитывая оценки физического состояния объекта, получаем систему уравнений (см. [14])

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial l} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial l} = k \frac{q_w \chi}{\rho \omega c_p (1 - k \varepsilon T)}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{\tau \chi}{\rho \omega} - g \frac{dz}{dl}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial l} + \varepsilon T \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{q_w \chi}{\rho \omega c_p (1 - k \varepsilon T)}, \\ a = \sqrt{\omega / \left(\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial p} \right)_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - k \varepsilon T}} \end{cases} \quad (16)$$

Гидравлический удар является быстропротекающим процессом, когда теплообмен с внешней средой не успевает развиться, поэтому полагают $q_w \approx 0$ и, пренебрегая конвективными членами $v \cdot \partial v / \partial l$ и $v \cdot \partial p / \partial l$, первые два уравнения системы (16) можно рассматривать как автономную систему уравнений относительно переменных p и v (см. [9, 12]):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -\lambda \frac{v|v|}{2d} - g \frac{dz}{dl}, \quad (17)$$

которая и является системой уравнений, описывающей явление гидравлического удара. Здесь λ — коэффициент гидравлического трения (коэффициент сопротивления трению), a — скорость распространения волн давления (скорость звука в воде), d — внутренний диаметр трубопровода, g — ускорение силы тяжести. Переходя к координатам давление p и расход x , систему уравнений (17), описывающих явление гидравлического удара, можно записать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial l} + c \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial l} + a \frac{\partial u}{\partial y} + b|x|x = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что система (18) идентична системе (1), поэтому систему (1) можно рассматривать как систему, упрощенно описывающую процесс движения (а именно, явление гидравлического удара) жидкости (воды) в напорном трубопроводе (см. [11]), где x — пространственная переменная, обозначающая длину трубы, $y = t$ — время; функция $v = v(x, t)$ — массовый расход жидкости, функция $u = u(x, t)$ — давление жидкости; a, b, c — постоянные коэффициенты, связанные с диаметром трубы; кроме того, коэффициент b связан с плотностью транспортируемой среды, а коэффициент c — со скоростью распространения волн давления (скорость звука в воде), т.е.

$$a = \frac{4}{\pi d^2}, \quad b = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 \rho}, \quad c = \frac{\pi d^2}{4q^2},$$

где λ — коэффициент сопротивления трению, d — диаметр, ρ — плотность, q — скорость распространения волн. Тогда задача (1), (3), (4) представляет собой задачу определения давления и расхода при условии, что известны расход и давление на определенных участках трубы в определенное время.

Пример 2. Пусть требуется определить закон изменения расхода жидкости $v = v(x, t)$ и изменения давления жидкости $u = u(x, t)$ при ее течении в напорном трубопроводе диаметра $d = 0,5$ м согласно следующим данным: $\rho = 1000$ кг/м³; $q = 900$ м³/с; $\lambda = 0,11$, если в начале движения на расстоянии 0,1 м от начала отсчета длины трубы расход составил 0,1 м³/с, при давлении жидкости 1 МПа, а на расстоянии 100 м от начала трубы через 1 с расход жидкости составляет 0,001 м³/с, а давление — 1,15 МПа. Тогда согласно [11] получаем смешанную задачу для системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial v}{\partial t} + 0,003v|v| = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \cdot 10^{-4} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (19)$$

с условиями

$$v(0,1;0) = 0,1, \quad u(0,1;0) = 1, \quad v(100;1) = 0,001, \quad u(100;1) = 1,15,$$

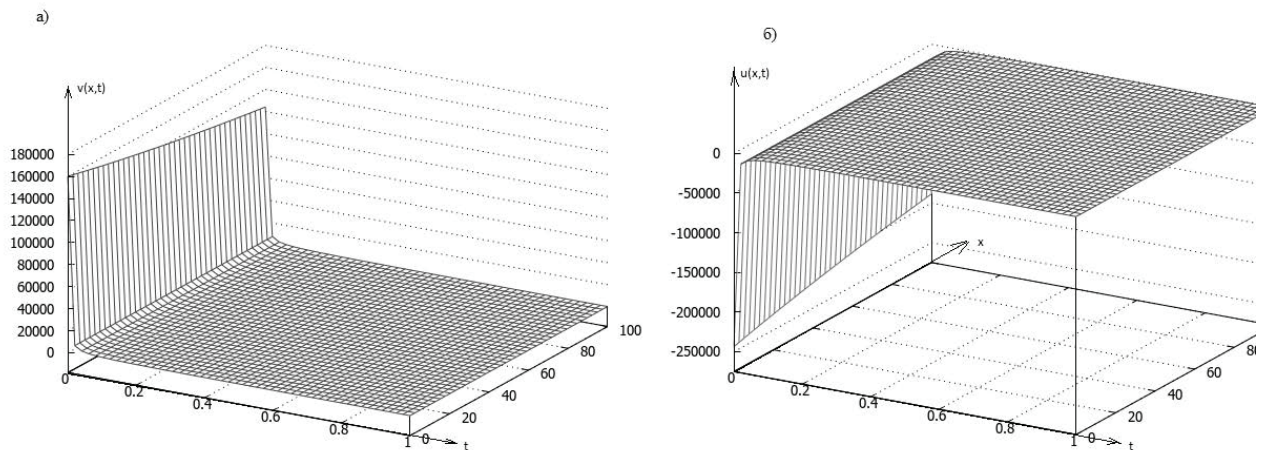


Рис. 2. Графики функций $v = v(x, t)$ (слева) и $u = u(x, t)$ (справа).

решением которой, согласно теореме 3 (поскольку $x_0 = 0,1$; $x_* = 100$; $t_0 = 1$; $\varphi = 0,1$; $\psi = 1$; $f = 0,001$; $g = 1,15$) являются функции

$$v(x, t) \approx \frac{16334,5}{99t + 0,12x + 0,10197}; \quad u(x, t) \approx -1,52v(x, t) + 1,15,$$

графики которых представлены на рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. — М.: Недра, 1982.
2. Бондарев Э. А., Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. Воронова Ю. Г. О задаче Коши для одной линейной гиперболической системы уравнений // Изв. Уфим. науч. центра РАН. — 2012. — № 6. — С. 5–9.
4. Гражданцева Е. Ю. О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений // Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2022. — 27, № 140. — С. 328–338.
5. Картвелишвили Н. А. Динамика напорных трубопроводов. — М.: Энергия, 1979.
6. Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифф. уравн. — 2006. — 42, № 1. — С. 91–100.
7. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979.
8. Полянин А. Д. Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения // Докл. РАН. — 2004. — 398, № 1. — С. 33–37.
9. Рождественский Б. И., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
10. Сафиулова Р. Р. Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида // Мат. заметки ЯГУ. — 2008. — 15, № 2. — С. 48–68.
11. Сидлер И. В., Новицкий Н. Н., Гражданцева Е. Ю. Альтернативные методы решения гиперболической системы уравнений в упрощенной задаче гидравлического удара // Автомат. информ. ТЭК. — 2023. — № 9 (602). — С. 53–60.
12. Тарасевич В. В. Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах / Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
13. Федотов Е. М. Неконформные схемы МКЭ для гиперболических систем линейных уравнений /// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки., 2010. — 152. — С. 245–254.
14. Чарный И. А. Неуставившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975.
15. Sartabanov Zh. A., Zhumagazyev A. Kh., Abdikalikova G. A. Multiperiodic solution of linear hiperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2020. — № 2 (98). — P. 125–140.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гражданцева Елена Юрьевна (Grazhdantseva Elena Yur'evna)

Иркутский государственный университет, Иркутск;

Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;

L. A. Melentiev Energy Systems Institute

of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)

E-mail: grelyur@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 13–24
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-13-24

УДК 519.1, 519.116, 511.344

КОМБИНАТОРНЫЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ И ПЕРЕСЧЕТА КОМПОЗИЦИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2025 г. О. В. КУЗЬМИН, М. В. СТРИХАРЬ

Аннотация. Предложен алгоритм перечисления и пересчета композиций натурального числа на основе комбинаторных объектов иерархической структуры, таких как треугольник Паскаля, пирамида Паскаля и гиперпирамиды Паскаля. Получено рекуррентное соотношение, лежащее в основе перечисления и пересчета композиций натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей, а также формула для пересчета в явном виде и производящая функция числа композиций.

Ключевые слова: композиция числа, гиперпирамида Паскаля, пирамида Паскаля, треугольник Паскаля, полиномиальные коэффициенты, триномиальные коэффициенты, биномиальные коэффициенты, рекуррентное соотношение, производящая функция, числа Фибоначчи, числа Трибоначчи, числа Тетраначчи, числа Пентаначчи.

THE LISTING AND COUNTING COMBINATORIAL ALGORITHM FOR COMPOSITIONS OF A NATURAL NUMBER WITH CONSTRAINTS

© 2025 O. V. KUZMIN, M. V. STRIKHAR

ABSTRACT. In this paper, we propose a listing and counting algorithm for compositions of a natural number based on combinatorial objects of a hierarchical structure, such as Pascal's triangle, Pascal's pyramid, and Pascal's hyperpyramids. We obtain the recurrent relation that is the basis for listing and counting of compositions of a natural number with an arbitrary constraints on the values of its natural parts and the formula for explicit counting of compositions and a generating function for the number of compositions.

Keywords and phrases: composition of number, Pascal's hyperpyramid, Pascal's pyramid, Pascal's triangle, polynomial coefficients, trinomial coefficients, binomial coefficients, recurrence relation, generating function, Fibonacci numbers, Tribonacci numbers, Tetranacci numbers, Pentanacci numbers.

AMS Subject Classification: 05A05, 11B75, 11B39, 11P81

1. Введение. Структура многих информационных объектов может быть представлена в виде иерархической или рекурсивной зависимости, что приводит к возможности описания этих объектов с помощью формальных комбинаторных множеств, для которых применимы различного рода алгоритмы комбинаторной генерации (см. [1–3]). Для реализации процедуры построения элементов ряда комбинаторных множеств в конце XX в. было введено понятие обобщенной пирамиды Паскаля (см. [4]). В 2010 г. были изучены сечения обобщенной пирамиды Паскаля (см. [6]), которые позволили расширить число исследуемых комбинаторных множеств и получить ряд новых

иерархических и рекурсивных зависимостей. Частными случаями обобщенной пирамиды Паскаля являются треугольник и пирамида Паскаля (см. [4]). Данная работа является продолжением изучения композиций натурального числа с ограничениями (см. [5]), в которой были выведены формулы для пересчета числа композиций с тремя ограничениями на основе плоских сечений пирамиды Паскаля и получены рекуррентные соотношения и производящие функции числа таких композиций. Получено новое рекуррентное соотношение между элементами гиперпирамиды Паскаля, которое позволит пересчитывать и перечислять композиции натурального числа с произвольным количеством ограничений на значения его натуральных частей.

2. Основные понятия. Композицией натурального числа называется его представление в виде упорядоченной суммы других натуральных чисел (см. [8]). Слагаемые, составляющие композицию, называются ее *частями*, а количество частей называется *длиной композиции*. Известно, что для числа n существует 2^{n-1} композиций, из которых $\binom{n-1}{k-1}$ композиций имеют длину k . Числа

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

называются *биномиальными коэффициентами*. Например, для числа 5 существует $2^{5-1} = 16$ композиций, из которых $\binom{5-1}{3-1} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ композиций имеют длину 3:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 = 4 + 1 = 1 + 4 = 3 + 2 = 2 + 3 = \\ &= 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \end{aligned}$$

В данной работе мы накладываем ограничения на значения натуральных частей, а именно, исследуем композиции натурального числа m , состоящие строго из частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, которые, для определенности в дальнейшем, образуют упорядоченное множество натуральных чисел, т.е. $m_1 < m_2 < \dots < m_s$. Например, для числа $m = 5$ существует 13 композиций, состоящих строго из частей $m_1 = 1, m_2 = 2$ и $m_3 = 3$:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 + 2 = 2 + 3 = \\ &= 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, далее положим, наибольший общий делитель всех частей равным 1, т.е. $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$. В противном случае, если $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = \mu \neq 1$, то рассматриваемые композиции числа m будут существовать только в случае $m = \mu k$, $k \in \mathbb{B} = \{1, 2, 3, \dots\}$, и число таких композиций будет совпадать с числом композиций числа k , составленных из частей $m_1/\mu, m_2/\mu, \dots, m_s/\mu$, где $\gcd(m_1/\mu, m_2/\mu, \dots, m_s/\mu) = 1$.

Треугольником Паскаля (см. [4]) называется бесконечная иерархическая треугольная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

с начальными условиями $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{k} = 0$, если $\min(n, k, n-k) < 0$, где, как упоминалось ранее, числа $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ являются биномиальными коэффициентами, т.е. коэффициентами разложения степени бинома

$$(x_0 + x_1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k x_1^{n-k}.$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

и равенству (правилу симметрии)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

подтверждающему наличие оси симметрии в треугольнике Паскаля.

Пирамидой Паскаля (см. [4]) называется бесконечная иерархическая трехгранная пирамидальная структура, элементы которой для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\binom{n+1}{k, l} = \binom{n}{k-1, l} + \binom{n}{k, l-1} + \binom{n}{k, l},$$

с граничными условиями

$$\binom{0}{0, 0} = 1, \quad \binom{n}{k, l} = 0, \text{ если } \min(n, k, l, n-k-l) < 0.$$

В n -м сечении (треугольнике) пирамиды ($n = 0, 1, 2, \dots$), параллельном основанию, располагаются *триномиальные коэффициенты*

$$\binom{n}{k, l} = \frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}$$

— коэффициенты разложения степени тринома в форме

$$(x_0 + x_1 + x_2)^n = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k, l} x_0^k x_1^l x_2^{n-k-l}.$$

Любой внутренний элемент пирамиды Паскаля, стоящий в n -м сечении, равен сумме трех элементов, расположенных в углах элементарного треугольника $(n-1)$ -го сечения пирамиды.

Триномиальные коэффициенты $\binom{n}{k, l}$ удовлетворяют граничным условиям

$$\binom{n}{0, 0} = \binom{n}{n, 0} = \binom{n}{0, n} = 1$$

и равенствам

$$\binom{n}{k, l} = \binom{n}{l, k} = \binom{n}{n-k-l, l} = \binom{n}{k, n-k-l},$$

подтверждающим наличие трех осей симметрии в пирамиде Паскаля.

Полиномиальными коэффициентами называются числа вида

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{s-1}! (n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1})!}, \quad (1)$$

которые являются обобщениями биномиальных и триномиальных коэффициентов на случай размерности s и совпадают с коэффициентами разложения степени многочлена:

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 + \dots + x_{s-1})^n &= \\ &= \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \dots \sum_{k_{s-1}=0}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-2}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} x_0^{k_1} x_1^{k_2} \dots x_{s-1}^{n-k_1-k_2-\dots-k_{s-1}}. \end{aligned}$$

Гиперпирамидой Паскаля (см. [9]) называется бесконечный иерархический s -мерный массив полиномиальных коэффициентов, элементы которого для целых неотрицательных $n, k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} &= \binom{n}{k_1-1, k_2, \dots, k_{s-1}} + \binom{n}{k_1, k_2-1, \dots, k_{s-1}} + \\ &+ \dots + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}-1} + \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} \end{aligned}$$

и граничным условиям

$$\binom{0}{0, 0, \dots, 0} = 1; \quad \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}} = 0,$$

если $\min(n, k_1, k_2, \dots, k_{s-1}, n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1}) < 0$.

Применяемое представление (1) упорядочивает расположение полиномиальных коэффициентов в гиперпирамиде Паскаля, подобно тому, как расположены биномиальные и триномиальные коэффициенты соответственно в треугольнике и пирамиде Паскаля (см. [4]).

3. Соотношения для перечисления и пересчета композиций. Для удобства дальнейшего изложения определим декартовые координаты элементов гиперпирамиды Паскаля, для чего разместим вершину $\binom{0}{0, 0, \dots, 0}$ гиперпирамиды Паскаля в точке $(0, 0, 0, \dots, 0)$ s -мерного евклидова пространства, а ее элементы $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_{s-1}}$ — соответственно в точках $(n, k_1, k_2, \dots, k_{s-1})$ s -мерной целочисленной решетки, имеющих неотрицательные координаты. Тем самым устанавливается соответствие между точками s -мерного евклидова пространства и элементами гиперпирамиды Паскаля, которая в декартовых координатах будет ограничена гиперплоскостями

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_{s-1} = 0, \quad n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1} = 0.$$

Рассмотрим произвольное сечение (см. [7]) гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью, представляющее собой некоторый $(s-1)$ -мерный массив полиномиальных коэффициентов. Уравнение гиперплоскости такого сечения будет иметь вид

$$n + \lambda_1 \cdot k_1 + \lambda_2 \cdot k_2 + \dots + \lambda_{s-1} \cdot k_{s-1} = \text{const}, \quad (2)$$

где λ_i — некоторые рациональные коэффициенты, $i = 1, 2, \dots, s-1$.

Для нахождения композиций натурального числа m , состоящих из частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, пронумеруем все сечения гиперпирамиды Паскаля, заданные уравнением вида (2), начиная от вершины гиперпирамиды, и положим

$$\lambda_i = \frac{m_i}{m_s} - 1, \quad i = 1, 2, \dots, s-1;$$

$$m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{B}, \quad m_1 < m_2 < \dots < m_s, \quad \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1.$$

В этом случае все $\lambda_i > -1$, поэтому число элементов сечения конечно, и уравнение m -го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля принимает вид

$$n + \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) k_1 + \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) k_2 + \dots + \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) k_{s-1} = \frac{m}{m_s}. \quad (3)$$

Рассмотрим сумму

$$S_m(m_1, m_2, \dots, m_s), \quad m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{B}, m_1 < m_2 < \dots < m_s, \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1,$$

элементов m -го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля.

Теорема 1. Сумма элементов m -го сечения гиперпирамиды Паскаля с параметрами $m_1, m_2, \dots, m_s \in \mathbb{B}, m_1 < m_2 < \dots < m_s, \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$, гиперплоскостью (3), определяется по формуле

$$S_m(m_1, m_2, \dots, m_s) = \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m}{m_1}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m}{m_2} - i_1\right]} \dots \sum_{i_{s-1}=0}^{\left[\frac{m}{m_{s-1}} - i_1 - i_2 - \dots - i_{s-2}\right]} \left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1\right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1\right) i_{s-1} \right). \quad (4)$$

Доказательство. Поскольку элементу вида

$$\left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} \right)_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}$$

в декартовых координатах соответствует точка

$$\left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1}, i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \right)$$

и при подстановке ее координат в уравнение гиперплоскости (3) получаем верное равенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} \right) + \\ & + \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 + \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 + \dots + \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} = \frac{m}{m_s}, \end{aligned}$$

то все элементы этого вида содержатся в гиперплоскости, определяемой уравнением (3). Никаких других элементов гиперпирамиды Паскаля в этой гиперплоскости нет, так как рассмотрены все возможные целые неотрицательные значения величин $i_1, i_2, \dots, i_{s-1}$ для элементов гиперпирамиды Паскаля, расположенных в узлах s -мерной целочисленной решетки.

Точки пересечения гиперплоскости сечения (3) с ограничивающими гиперпирамиду Паскаля гиперплоскостями

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad \dots, \quad k_{s-1} = 0, \quad n - k_1 - k_2 - \dots - k_{s-1} = 0,$$

определяют граничные точки сечения гиперпирамиды Паскаля, а именно, элементы

$$\left(\frac{m}{m_s}, 0, \dots, 0 \right), \left(\frac{m}{m_1}, 0, \dots, 0 \right), \left(0, \frac{m}{m_2}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(0, 0, \dots, 0, \frac{m}{m_{s-1}} \right),$$

которые, в свою очередь, задают верхние и нижние пределы суммирования. Следовательно, сумма элементов m -го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью вида (3) определяется по формуле (4), что и требовалось доказать. $\square$

4. Число композиций с произвольными значениями частей. Докажем, что сумма m -го гиперплоского сечения гиперпирамиды Паскаля вида (4) есть число композиций натурального числа m с ограничениями на значения натуральных частей $m_1, m_2, \dots, m_s, m_1 < m_2 < \dots < m_s, \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$.

Теорема 2. Число различных композиций натурального числа m , состоящих из натуральных частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, где $m_1 < m_2 < \dots < m_s, \gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$, равно сумме полиномиальных коэффициентов, составляющих m -е гиперплоское сечение гиперпирамиды Паскаля вида (4).

Доказательство. Обозначим через $x_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}$ количество различных композиций числа m , состоящих из i_1 частей вида m_1, i_2 частей вида $m_2, \dots, i_{s-1}$ частей вида m_{s-1} и соответственно $(m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1})/m_s$ частей вида m_s :

$$\begin{aligned} m = & \underbrace{m_1 + m_1 + \dots + m_1}_{i_1} + \underbrace{m_2 + m_2 + \dots + m_2}_{i_2} + \dots + \underbrace{m_{s-1} + m_{s-1} + \dots + m_{s-1}}_{i_{s-1}} + \\ & \underbrace{m_s + m_s + m_s + \dots + m_s + m_s}_{(m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1})/m_s}. \end{aligned}$$

Поскольку длины таких композиций равны

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} + \frac{m - m_1 i_1 - m_2 i_2 - \dots - m_{s-1} i_{s-1}}{m_s} = \\ = \frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
 x_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}} &= \frac{\left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} \right)!}{i_1! i_2! \dots i_{s-1}! \left(\frac{m}{m_s} - \frac{m_1}{m_s} i_1 - \frac{m_2}{m_s} i_2 - \dots - \frac{m_{s-1}}{m_s} i_{s-1} \right)!} = \\
 &= \left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} \right)_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, общее число различных композиций натурального числа m , состоящих из натуральных частей $m_1, m_2, \dots, m_s$ равно

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i_1=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_1} \right\rfloor} \sum_{i_2=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_2} - i_1 \right\rfloor} \dots \sum_{i_{s-1}=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_{s-1}} - i_1 - i_2 - \dots - i_{s-2} \right\rfloor} x_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}} = \\
 &= \sum_{i_1=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_1} \right\rfloor} \sum_{i_2=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_2} - i_1 \right\rfloor} \dots \sum_{i_{s-1}=0}^{\left\lfloor \frac{m}{m_{s-1}} - i_1 - i_2 - \dots - i_{s-2} \right\rfloor} \left(\frac{m}{m_s} - \left(\frac{m_1}{m_s} - 1 \right) i_1 - \left(\frac{m_2}{m_s} - 1 \right) i_2 - \dots - \left(\frac{m_{s-1}}{m_s} - 1 \right) i_{s-1} \right)_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}} = \\
 &= S_m(m_1, m_2, \dots, m_s),
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание. Число $S_0 = \binom{0}{0,0,\dots,0}$ соответствует вершине гиперпирамиды Паскаля и условно определяет количество композиций числа $m = 0$, состоящих из любых натуральных частей. Поэтому далее берем значения m из множества неотрицательных целых чисел, т.е. считаем, что $m \in \mathbb{B}_0$, это позволит в дальнейшем получить рекуррентные соотношения и производящие функции для числа композиций.

5. Рекуррентное соотношение. Введем обозначение $S_m = S_m(m_1, m_2, \dots, m_s)$ и рассмотрим последовательность $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, композиций натурального числа m , состоящих из строго натуральных частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, где $m_1 < m_2 < \dots < m_s$, $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$.

Теорема 3. Последовательность чисел $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \dots + S_{m-m_s} \quad (5)$$

с начальными условиями

$$S_0 = 1, \quad S_1 = S_2 = \dots = S_{m_1-1} = 0; \quad (6)$$

величины S_m при $m = m_1, \dots, m_2 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1}; \quad (7)$$

величины S_m при $m = m_2, \dots, m_3 - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2}; \quad \dots; \quad (8)$$

величины S_m при $m = m_{s-1}, \dots, m_s - 1$ задаются соотношениями

$$S_m = S_{m-m_1} + S_{m-m_2} + \dots + S_{m-m_{s-1}}. \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, имеется только s возможностей для того, чтобы составить композицию числа m из частей $m_1, m_2, \dots, m_s$. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$, а затем добавить в сумму справа

число m_1 . Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$, а затем добавить в сумму справа число m_2 и т. д. В s -м случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_s)$ при помощи чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$, а затем добавить в сумму справа число m_s . Указанные возможности и образуют рекуррентное соотношение (5).

Если $m = 0$, то имеем условие $S_0 = 1$, оговоренное отдельно в приведенном выше замечании. Если же $1 \leq m \leq m_1 - 1$, то не существует ни одной композиции числа m , составленной из частей $m_1, m_2, \dots, m_s$. Таким образом, получаем начальные условия (6).

Если $m_1 \leq m \leq m_2 - 1$, то существует ровно столько композиций числа m , сколько существует композиций числа $m - m_1$. Получили соотношение (7).

Если $m_2 \leq m \leq m_3 - 1$, то можно составить композицию числа m только из частей m_1 и m_2 . В данном случае имеется только две возможности сделать это. В первом случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_1)$ при помощи чисел m_1 и m_2 , а затем добавить в сумму справа число m_1 . Во втором случае можно сначала составить композицию числа $(m - m_2)$ при помощи чисел m_1 и m_2 , а затем добавить в сумму справа число m_2 . Указанные возможности и образуют рекуррентную формулу (8).

Рассуждая аналогично, приходим к соотношению (9), справедливому при $m_{s-1} \leq m \leq m_s - 1$. $\square$

6. Производящая функция. Поставим в соответствие последовательности сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}$, формальный степенной ряд и запишем производящую функцию для этих сумм.

Теорема 4. *Производящая функция сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, имеет вид*

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \dots - x^{m_s}}. \quad (10)$$

Доказательство. В силу теоремы 2 последовательность сумм $\{S_m\}$, $m \in \mathbb{B}_0$, удовлетворяет рекуррентным соотношениям (5)–(9), где $S_0 = 1$. Перепишем рекуррентное соотношение (5) в виде

$$S_{m+m_s} = S_{m+m_s-m_1} + S_{m+m_s-m_2} + \dots + S_m.$$

Умножим это рекуррентное соотношение почленно на x^{m+m_s} и просуммируем по m в пределах от нуля до бесконечности:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s} x^{m+m_s} &= x^{m_1} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s-m_1} x^{m+m_s-m_1} + \\ &+ x^{m_2} \sum_{m=0}^{\infty} S_{m+m_s-m_2} x^{m+m_s-m_2} + \dots + x^{m_s} \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m. \end{aligned}$$

Пусть

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m x^m;$$

тогда из предыдущего равенства имеем

$$f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m = x^{m_1} \left(f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m \right) + x^{m_2} \left(f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m \right) + \dots + x^{m_s} f(x).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m &= x^{m_1} f(x) - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m + \\ &+ x^{m_2} f(x) - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m + \dots + x^{m_s} f(x), \end{aligned}$$

Перенесем слагаемые, содержащие $f(x)$, в левую часть равенства:

$$\begin{aligned}
f(x) - x^{m_1} f(x) - x^{m_2} f(x) - \dots - x^{m_s} f(x) = \\
= \sum_{m=0}^{m_s-1} S_m x^m - x^{m_1} \sum_{m=0}^{m_s-m_1-1} S_m x^m - x^{m_2} \sum_{m=0}^{m_s-m_2-1} S_m x^m - \dots - x^{m_{s-1}} \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^m.
\end{aligned}$$

Обозначим через y правую часть равенства и преобразуем ее отдельно, учитывая начальные условия (6) и рекуррентные соотношения (7)–(9):

$$\begin{aligned}
y &= \left(S_0 + \sum_{m=1}^{m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) - \\
&\quad - x^{m_1} \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}-m_1}^{m_s-m_1-1} S_m x^m \right) - \\
&\quad - x^{m_2} \left(\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}-m_2}^{m_s-m_2-1} S_m x^m \right) - \dots - x^{m_{s-1}} \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^m = \\
&= \left(1 + \sum_{m=1}^{m_1-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) - \\
&\quad - \left(\sum_{m=0}^{m_2-m_1-1} S_m x^{m+m_1} + \sum_{m=m_2-m_1}^{m_3-m_1-1} S_m x^{m+m_1} + \dots + \sum_{m=m_{s-1}-m_1}^{m_s-m_1-1} S_m x^{m+m_1} \right) - \\
&\quad - \left(\sum_{m=0}^{m_3-m_2-1} S_m x^{m+m_2} + \dots + \sum_{m=m_{s-1}-m_2}^{m_s-m_2-1} S_m x^{m+m_2} \right) - \dots - \sum_{m=0}^{m_s-m_{s-1}-1} S_m x^{m+m_{s-1}} = \\
&= \left(1 + 0 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_m x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_m x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_m x^m \right) - \\
&\quad - \left(\sum_{m=m_1}^{m_2-1} S_{m-m_1} x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_1} x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_1} x^m \right) - \\
&\quad - \left(\sum_{m=m_2}^{m_3-1} S_{m-m_2} x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_2} x^m \right) - \dots - \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} S_{m-m_{s-1}} x^m = \\
&= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (S_m - S_{m-m_1}) x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} (S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2}) x^m + \dots + \\
&\quad + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} (S_m - S_{m-m_1} - S_{m-m_2} - \dots - S_{m-m_{s-1}}) x^m = \\
&= 1 + \sum_{m=m_1}^{m_2-1} 0 \cdot x^m + \sum_{m=m_2}^{m_3-1} 0 \cdot x^m + \dots + \sum_{m=m_{s-1}}^{m_s-1} 0 \cdot x^m = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(x) (1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \dots - x^{m_s}) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{1 - x^{m_1} - x^{m_2} - \dots - x^{m_s}},$$

что и требовалось доказать. $\square$

7. Алгоритм перечисления и пересчета композиций. Используя полученные выше рекуррентные соотношения (5)–(9), можно составить следующий комбинаторный алгоритм для перечисления и пересчета композиций натурального числа m с ограничениями на значения его натуральных частей. Приведем пример для четырех частей, т.е. считаем, что $s = 4$.

1. Задаем значения натурального числа m и, в порядке возрастания, значения частей m_1, m_2, m_3, m_4 , так, чтобы $\gcd(m_1, m_2, m_3, m_4) = 1$.
2. Находим число композиций, используя рекуррентные соотношения (5)–(9), и составляем композиции по следующему правилу:
 - 2.1. Для $m = 0$ согласно замечанию, приведенному после теоремы 1, в любом случае формально считаем, что $S_0 = 1$. Благодаря этому в дальнейшем сможем найти композиции самих частей.
 - 2.2. Если $1 \leq m \leq m_1 - 1$, то согласно начальным условиям (6) не существует ни одной композиции числа m , составленной из частей m_1, m_2, m_3, m_4 .
 - 2.3. Если $m_1 \leq m \leq m_2 - 1$, то согласно соотношению (7) существует столько композиций числа m , сколько существует композиций числа $(m - m_1)$ и все они состоят только из частей вида m_1 . Находим их путем добавления к имеющимся композициям числа $(m - m_1)$ справа числа m_1 .
 - 2.4. Если $m_2 \leq m \leq m_3 - 1$, то количество композиций находим согласно рекуррентной формуле (8) и составляем композицию числа m только из частей m_1 и m_2 следующим образом: ко всем существующим композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1 , а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_2)$ добавляем справа число m_2 .
 - 2.5. Если $m_3 \leq m \leq m_4 - 1$, то количество композиций находим согласно соотношению (9) и составляем композицию числа m только из частей m_1, m_2 и m_3 следующим образом: ко всем найденным композициям числа $(m - m_1)$ добавляем справа число m_1 , ко всем существующим композициям числа $(m - m_2)$ добавляем справа число m_2 , а ко всем имеющимся композициям числа $(m - m_3)$ добавляем справа число m_3 .
 - 2.6. Начиная с $m = m_4$ количество композиций находим согласно формуле (5) и составляем композицию числа m уже из всех частей m_1, m_2, m_3 и m_4 следующим образом: ко всем существующим композициям чисел $(m - m_1)$, $(m - m_2)$, $(m - m_3)$ и $(m - m_4)$ добавляем справа соответственно числа m_1, m_2, m_3 и m_4 .
3. Как только m достигает заданного значения, получаем окончательный результат.

8. Числа Фибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m , состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем три композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

При $m = 4$ получаем пять композиций: $m = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, образуется последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

сумм вида $S_m(1, 2)$, $m \in \mathbb{B}_0$, расположенных в сечениях треугольника Паскаля при $\lambda_1 = -1/2$. Число композиций в данном случае согласно (4) может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2) = \sum_{i=0}^m \binom{(m+i)/2}{i}$$

и удовлетворяет, исходя из (5)–(9), рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2}, \quad S_0 = S_1 = 1.$$

Заметим, что эта последовательность совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи (см. [10, A000045]):

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1;$$

при этом $S_m = F_{m+1}$. Исходя из (10), заключаем, что производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

9. Числа Трибоначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m , состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 3$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем четыре композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.

При $m = 4$ получаем семь композиций: $m = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, получаем последовательность

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \dots$$

сумм вида $S_m(1, 2, 3)$, $m \in \mathbb{B}_0$, плоских сечений пирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -2/3$, $\lambda_2 = -1/3$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2, 3) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \binom{(m+2i_1+i_2)/3}{i_1, i_2}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Трибоначчи (см. [10, A000073]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3}, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+2}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

10. Числа Тетраначчи. Рассмотрим последовательность композиций числа m , состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$.

При $m = 1$ получаем одну композицию: $m = 1$.

При $m = 2$ получаем две композиции: $m = 1 + 1 = 2$.

При $m = 3$ получаем четыре композиции: $m = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.

При $m = 4$ получаем восемь композиций: $m = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1 = 4$.

В итоге, учитывая, что $S_0 = 1$, получаем последовательность

$$1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, \dots$$

сумм вида $S_m(1, 2, 3, 4)$, $m \in \mathbb{B}_0$, гиперплоских сечений четырехмерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -3/4$, $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_3 = -1/4$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2, 3, 4) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \sum_{i_3=0}^{[m/3-i_1-i_2]} \binom{(m+3i_1+2i_2+i_3)/4}{i_1, i_2, i_3}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3} + S_{m-4}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 4.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Тетраначчи (см. [10, A000078]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3} + a_{m-4}, \quad a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+3}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4}.$$

11. Числа Пентаначчи, числа k -наччи. В результате пересчета композиций натурального числа m , состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ и $m_5 = 5$ получаем последовательность

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, 236, 464, 912, \dots,$$

которая образуется на гиперплоских сечениях пятимерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -4/5$, $\lambda_2 = -3/5$, $\lambda_3 = -2/5$, $\lambda_4 = -1/5$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2, 3, 4, 5) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \sum_{i_3=0}^{[m/3-i_1-i_2]} \sum_{i_4=0}^{[m/4-i_1-i_2-i_3]} \binom{(m+4i_1+3i_2+2i_3+i_4)/5}{i_1, i_2, i_3, i_4}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + S_{m-3} + S_{m-4} + S_{m-5}, \quad S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 4, \quad S_4 = 8.$$

Заметим, что полученная последовательность композиций числа m совпадает с последовательностью чисел Пентаначчи (см. [10, A001591]), определяемой при помощи рекуррентного соотношения

$$a_m = a_{m-1} + a_{m-2} + a_{m-3} + a_{m-4} + a_{m-5}, \quad a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = 1;$$

при этом $S_m = a_{m+4}$. Производящая функция рассматриваемой последовательности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5}.$$

В общем случае числа k -наччи получаются в результате пересчета композиций натурального числа m , состоящих из натуральных частей $m_1 = 1$, $m_2 = 2, \dots, m_k = k$, которые образуются на гиперплоских сечениях k -мерной гиперпирамиды Паскаля при $\lambda_1 = -(k-1)/k$, $\lambda_2 = -(k-2)/k$, $\dots$, $\lambda_{k-1} = -1/k$. Число композиций в данном случае может быть вычислено по формуле

$$S_m = S_m(1, 2, \dots, k) = \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{[m/2-i_1]} \dots \sum_{i_{k-1}=0}^{[m/k-1-i_1-i_2-\dots-i_{k-2}]} \binom{(m+(k-1)i_1+(k-2)i_2+\dots+i_{k-1})/k}{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}$$

и удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_m = S_{m-1} + S_{m-2} + \dots + S_{m-k}, \\ S_0 = S_1 = 1, \quad S_2 = S_0 + S_1, \quad \dots, \quad S_{k-1} = S_0 + S_1 + \dots + S_{k-2}.$$

Производящая функция последовательности чисел k -наччи имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - \dots - x^k}.$$

12. Заключение. В работе рассмотрены композиции натурального числа m , состоящие из произвольных частей $m_1, m_2, \dots, m_s$, где для определенности $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ и $\gcd(m_1, m_2, \dots, m_s) = 1$. Выявлена взаимосвязь между количеством композиций числа m и соответствующей ему суммой элементов m -го гиперплоского сечений иерархической комбинаторной конфигурации, называемой гиперпирамидой Паскаля. Доказано рекуррентное соотношение, на основе которого построен комбинаторный алгоритм перечисления и пересчета композиций и найдена формальная производящая функция числа композиций. В частных случаях приведены примеры таких известных комбинаторных чисел, как числа Фибоначчи, Трибоначчи, Тетраначчи, Пентаначчи и k -наччи, которые получаются при подсчете числа композиций из различных частей.

Полученные в данной работе соотношения позволяют совершенствовать известные алгоритмы перечисления композиций (см. [1, 2]) или строить новые, вычислять длины и количество композиций чисел фиксированной длины, а также вычислять количество композиций, и находить соответствующие коэффициенты производящих функций в явном виде через суммы элементов гиперплоских сечений гиперпирамиды Паскаля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин А. В., Бирюков Е. С. О практической реализации некоторых алгоритмов, связанных с проблемой композиции чисел// Киберн. программ. — 2015. — № 1. — С. 27–45.
2. Кручинин В. В. Алгоритмы генерации и нумерации композиций и разбиений натурального числа n // Докл. ТУСУР. — 2008. — 17, № 3. — С. 113–119.
3. Кручинин В. В. Модификация метода построения алгоритмов комбинаторной генерации на основе применения производящих функций многих переменных и приближенных вычислений// Докл. ТУСУР. — 2022. — 25, № 1. — С. 55–60.
4. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
5. Кузьмин О. В., Стрихарь М. В. Композиции чисел с ограничениями и иерархическая структура плоских сечений пирамиды Паскаля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 234. — С. 67–74.
6. Кузьмин О. В., Серегина М. В. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации// Дискр. мат. — 2010. — 22, № 3. — С. 83–93.
7. Стрихарь М. В. Сумма элементов сечения гиперпирамиды Паскаля гиперплоскостью// в кн.: Актуальные задачи прикладной дискретной математики (О. В. Кузьмин, ред.). — Иркутск: Изд-во ИГУ, 2024.
8. Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.
9. Okbaeva N. Pascal's triangle, its planar and spatial generalizations// in: Int. Sci. J. Theor. Appl. Sci., 2022. — 03 (107). — P. 815–823.
10. Sloane N. J. A. The on-line encyclopedia of integer sequences/ <https://oeis.org>.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кузьмин Олег Викторович (Kuzmin Oleg Viktorovich)

Иркутский государственный университет, Иркутск

(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: kuzminov@mail.ru

Стрихарь Марина Валерьевна (Strikhar, Marina Valerievna)

Забайкальский институт железнодорожного транспорта, Чита

(Transbaikalian Institute of Railway Transport, Chita, Russia)

E-mail: mseryogina@mail.ru



НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫРОЖДЕНИЙ

© 2025 г. М. Дж. МАРДАНОВ, Т. К. МЕЛИКОВ

Аннотация. Рассматривается вариационная задача с запаздыванием при вырождении условия Вейерштрасса. Получены необходимые условия типа равенства и неравенства как для сильного, так и для слабого локального минимума. Приведен конкретный пример, демонстрирующий эффективность полученных результатов.

Ключевые слова: вариационная задача с запаздывающим аргументом, сильный (слабый) локальный минимум, необходимые условия типа равенства (неравенства), вырождение в точке.

NECESSARY CONDITIONS FOR A MINIMUM IN VARIATIONAL PROBLEMS WITH DELAY IN THE PRESENCE OF DEGENERACIES

© 2025 M. J. MARDANOV, T. G. MELIKOV

ABSTRACT. This article examines the minimum of an extremal in the variational problem with delay under the degeneracy of the Weierstrass condition. We obtain necessary conditions of equality type and inequality type for a strong as well as for a weak local minimum. Necessary conditions of equality and inequality types are obtained for strong as well as weak local minimum. A specific example demonstrating the effectiveness of the results in this paper is provided.

Keywords and phrases: variational problem with delayed argument, strong (weak) local minimum, necessary condition type equality (inequality), degeneration at the point.

AMS Subject Classification: 49Kxx

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе рассматривается следующая векторная вариационная задача с запаздывающим аргументом:

$$S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x(t-h), \dot{x}(t), \dot{x}(t-h)) dt \rightarrow \min_{x(\cdot)}, \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad x(t_1) = x_1, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n -мерное пространство, $t_0, t_1 \in (-\infty, +\infty)$, x_0 и x_1 — заданные точки, $h = \text{const} > 0$, $t_1 - t_0 > h$,

$$L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad \varphi(t) \in C^1([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n)$$

— заданные непрерывно дифференцируемые функции по совокупности аргументов, $y = y(t) = x(t - h)$, $\dot{y} := \dot{y}(t) = \dot{x}(t - h)$, $t \in I := [t_0, t_1]$; более того, $x(t) \in KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$, $\hat{I} := [t_0 - h, t_1]$ и $KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$ — класс кусочно гладких функций.

Функции $x(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (2), назовем допустимыми функциями.

Пусть $\bar{x}(\cdot)$ — допустимая функция. Для сокращения записи и удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{L}(\tau) &:= L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau), \dot{\bar{y}}(\tau)), \\ \bar{L}(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &:= L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau) + \xi, \dot{\bar{y}}(\tau)), \\ \bar{L}(\tau, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &:= L(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \dot{\bar{x}}(\tau), \dot{\bar{y}}(\tau) + \xi);\end{aligned}\tag{3}$$

аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{L}_x(\tau)$, $\bar{L}_y(\tau)$, $\bar{L}_{\dot{x}}(\tau)$, $\bar{L}_{\dot{y}}(\tau)$, $\bar{L}_x(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot))$ и $\bar{L}_y(\tau, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot))$, где $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$\begin{aligned}E(\bar{L})(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &:= \bar{L}(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\tau)) - \bar{L}(\tau) - \bar{L}_{\dot{x}}^T(\tau)\xi, \\ E(\bar{L})(\nu, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &:= \bar{L}(\nu, \xi; \dot{\bar{y}}(\nu)) - \bar{L}(\nu) - \bar{L}_{\dot{y}}^T(\nu)\xi;\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}Q_k(\bar{L})(\tau, \lambda, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &:= \lambda^k E(\bar{L})(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + (1 - \lambda^k) E(\bar{L})\left(\tau, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)\right), \\ Q_k(\bar{L})(\nu, \lambda, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &:= \lambda^k E(\bar{L})(\nu, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) + (1 - \lambda^k) E(\bar{L})\left(\nu, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)\right),\end{aligned}\tag{5}$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $k = 1, 2$;

$$\begin{aligned}M(\bar{L}_x)(\tau, \lambda, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &:= \lambda \left[\bar{L}_x^T(\tau, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) - \bar{L}_x^T(\tau) \right] \xi + (1 - \lambda) \left[\bar{L}_x^T\left(\tau, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)\right) - \bar{L}_x^T(\tau) \right] \xi, \\ M(\bar{L}_y)(\nu, \lambda, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &:= \lambda \left[\bar{L}_y^T(\nu, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) - \bar{L}_y^T(\nu) \right] \xi + (1 - \lambda) \left[\bar{L}_y^T\left(\nu, \frac{\lambda}{\lambda - 1}\xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)\right) - \bar{L}_y^T(\nu) \right] \xi,\end{aligned}\tag{6}$$

где $\tau, \nu \in \{t, t + h\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0, 1)$.

Напомним некоторые понятия, необходимые в дальнейшем (см., например, [20, 22]). Допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ называется сильным (слабым) локальным минимумом в задаче (1)–(2), если существует такое число $\bar{\delta} > 0$ (соответственно, $\hat{\delta} > 0$), что неравенство $S(x(\cdot)) \geq S(\bar{x}(\cdot))$ выполняется для всех допустимых функций $x(\cdot)$, для которых

$$\|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C(\hat{I}, \mathbb{R}^n)} = \hat{\delta};$$

соответственно,

$$\max \left\{ \|x(\cdot) - \bar{x}\|_{C(\hat{I}, \mathbb{R}^n)}, \|x(\cdot) - \dot{\bar{x}}(\cdot)\|_{L_\infty(\hat{I}, \mathbb{R}^n)} \right\} = \hat{\delta}.$$

Очевидно, что любой сильный локальный минимум одновременно является и слабым, но обратное верно не всегда (см. [20]).

Напомним также (см. [13]) некоторые известные необходимые условия сильного и слабого локального минимума для рассматриваемой задачи (1)–(2):

- (а) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то вдоль функции $\bar{x}(\cdot)$ первая вариация функционала (1) равна нулю, т.е. с учетом (3) равенство

$$\delta S(\bar{x}(\cdot); \delta x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\bar{L}_x^T(t) + \bar{L}_y^T(t + h) \right] \delta x(t) + \left[\bar{L}_{\dot{x}}^T(t) + \bar{L}_{\dot{y}}^T(t + h) \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt = 0 \tag{7}$$

выполняется для всех $\delta x(t) \in KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$ и $\delta x(t) = 0$ при $t \in [t_0 - h, t_0] \cup \{t_1\}$ (см. [13]);

- (б) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), а функция $\tilde{x}(\cdot)$ непрерывна в точках множества $\tilde{I} \subset I$, где $I \setminus \tilde{I}$ является конечным множеством, причем функции $L(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности

переменных, то функция является решением уравнения Эйлера (см. [13]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{L}_{\dot{x}}(t) &= \bar{L}_x(t), & t \in \tilde{I} \cap (t_1 - h, t_1], \\ \frac{d}{dt} [\bar{L}_{\dot{x}}(t) + \bar{L}_{\dot{y}}(t + h)] &= \bar{L}_x(t) + \bar{L}_y(t + h), & t \in \tilde{I} \cap [t_0, t_1 - h); \end{aligned} \quad (8)$$

- (с) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом в задаче (1)–(2), то вдоль нее выполняется аналог условия Вейерштрасса, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие неравенства (см. [22]):

$$\begin{aligned} E(\bar{L})(t, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &\geq 0 & \forall t \in I^* \cap [t_1 - h, t_1], \\ E(\bar{L})(t, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(t + h, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &\geq 0 & \forall t \in I^* \cap [t_0, t_1 - h]; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $I^* \subseteq [t_0, t_1]$ — множество точек, в которых функции $\dot{\bar{x}}(\cdot)$ непрерывны; функции $E(\bar{L})(\cdot; \dot{\bar{x}}(\cdot))$ и $E(\bar{L})(\cdot; \dot{\bar{y}}(\cdot))$ определяются формулой (4);

- (d) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\xi \in B_\delta(0)$ выполняются неравенства (9), где $B_\delta(0)$ — шар радиуса δ с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ (см. [22]).

Допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ называется экстремалью задачи (1)–(2), если она удовлетворяет уравнению (7). Следует отметить, что применение условия Вейерштрасса (9) как необходимого условия минимума более эффективно, если в каждой точке $t \in I$ неравенства (9) переходят в равенство только при $\xi = 0$. Однако может случиться так, что хотя бы в одной точке $\theta \in I$ неравенства (9) перейдут в равенство в нескольких точках $\xi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае говорят, что условия Вейерштрасса (9) вырождаются в точке θ .

Ясно, что задача (1)–(2) в терминах теории оптимального управления принимает вид

$$S(x(\cdot), x_{n+1}(\cdot)) = x_{n+1}(t_1) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & u(t) \in KC(\hat{I}, \mathbb{R}^n), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = L(t, x(t), x(t - h), u(t), u(t - h)), & t \in (t_0, t_1]; \end{cases} \quad (11)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) = \dot{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad x(t_1) = x_1, \quad x_{n+1}(t_0) = 0, \quad (12)$$

где $KC(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$ — класс кусочно непрерывных функций.

Как известно, вырожденные случаи в теории оптимального управления изучаются в терминах особых управлений. Для оптимальности особых управлений в задачах управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, получен ряд важных результатов (см., например, [1, 3–5, 8, 11, 12, 14–16, 20]). В дальнейшем некоторые из этих результатов были существенно обобщены на задачи управления с запаздываниями только в фазовых переменных (см., например, [2, 6, 7, 9, 10, 17–19, 21]) и на задачи с запаздываниями в управлении (см., например, [6, 17, 19]).

2. Специальные вариации экстремали. Пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2) и $v := (\theta, \lambda, \xi) \in [t_0, t_1 - h] \times (0, 1) \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — произвольная фиксированная точка. Следуя [21], введем следующие специальные вариации экстремали $\bar{x}(\cdot)$:

- (i) вариация, введенная справа относительно точки $\theta \in [t_0, t_1 - h]$:

$$x^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \quad (13)$$

где функция $q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon)$ определена соотношением

$$q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \theta)\xi, & t \in [\theta, \theta + \lambda\varepsilon), \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta - \varepsilon)\xi, & t \in [\theta + \lambda\varepsilon, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (14)$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, $\bar{\varepsilon} = \min\{h, t_1 - \theta - h\}$;

(ii) вариация, введенная слева относительно точки $\theta \in (t_0, t_1 - h]$:

$$x^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \quad (15)$$

$$q^{(-)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \theta)\xi, & t \in (\theta - \lambda\varepsilon, \theta], \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta + \varepsilon)\xi, & t \in (\theta - \varepsilon, \theta - \lambda\varepsilon], \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus (\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases} \quad (16)$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, $\bar{\varepsilon} = \min\{h, \theta - t_0\}$.

Далее вычисляются приращения функционала (1), соответствующие вариациям (13), (15), и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функции $L(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов и допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2), вдоль которой для векторов $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta$, $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, условия Вейерштрасса в любой точке интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_1) \subset [t_0, t_1 - h]$ вырождаются, т.е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} E(\bar{L})(t, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(t + h, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= 0 \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1), \\ E(\bar{L})\left(t, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)\right) + E(\bar{L})\left(t, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)\right) &= 0 \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, пусть функция $\bar{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в интервалах $(\bar{t}_0 - h, \bar{t}_1 - h)$, $(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ и $(\bar{t}_0 + h, \bar{t}_1 + h)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом в задаче (1)–(2), то выполняется равенство

$$M(\bar{L}_x)(t, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)(t + h, \bar{\lambda}, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = 0 \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1), \quad (18)$$

где функции $M(\bar{L}_x)(\cdot, \dot{\bar{x}}(\cdot))$ и $M(\bar{L}_y)(\cdot, \dot{\bar{y}}(\cdot))$ определяются по формуле (6);

(ii) если функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то существует число $\delta > 0$, при котором для каждого $\left(\bar{\lambda}, \eta, \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - 1}\eta\right) \in (0, 1) \times B_\delta(0) \times B_\delta(0)$, удовлетворяющего условиям (17), выполняется равенство (18), где $B_\delta(0)$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Пусть функции $L(\cdot)$, $L_{\dot{x}}(\cdot)$ и $L_{\dot{y}}(\cdot)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, а функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом задачи (1)–(2). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) если $\theta \in [t_0, t_1 - h]$ ($\theta \in (t_0, t_1 - h]$) и функция $\bar{x}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема в правой (левой) полукрестности каждой из точек $\theta - h$, θ и $\theta + h$; кроме того, вдоль неё для числа $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, а также для векторов $\eta \neq 0$ и $(\bar{\lambda} - 1)^{-1}\bar{\lambda}\eta$ условия Вейерштрасса (9) вырождаются справа (слева) в точке θ , т.е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} E(\bar{L})(\theta_+, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h)_+, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= \\ = E(\bar{L})(\theta_+, \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h)_+, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

или

$$\begin{aligned} E(\bar{L})(\theta_-, \eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h)_-, \eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= \\ = E(\bar{L})(\theta_-, \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta; \dot{\bar{x}}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h)_-, (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

то выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda} \left[M(\bar{L}_x)(\theta_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)((\theta + h)_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) \right] + \\ & + \frac{d}{dt} \left[Q_2(\bar{L})(\theta_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + Q_2(\bar{L})((\theta + h)_+, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda} \left[M(\bar{L}_x)(\theta_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)((\theta + h)_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) \right] + \\ & + \frac{d}{dt} \left[Q_2(\bar{L})(\theta_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + Q_2(\bar{L})((\theta + h)_-, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) \right] \leq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $E(\bar{L})(\cdot)$, $Q_2(\bar{L})(\cdot)$, $M(\bar{L}_x)(\cdot)$ и $M(\bar{L}_y)(\cdot)$ определяются по формулам (4)–(6);

- (ii) если $\theta \in (t_0, t_1 - h)$, функция $\bar{x}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности каждой из точек $\theta - h$, θ и $\theta + h$; кроме того, вдоль неё для числа $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, а также для векторов $\eta \neq 0$ и $(\bar{\lambda} - 1)^{-1} \bar{\lambda} \eta$ условия Вейерштасса вырождаются в точке θ , т.е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} & E(\bar{L})(\theta, \eta; \dot{x}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h, \eta; \dot{y}(\cdot)) = 0, \\ & E(\bar{L})(\theta, (\bar{\lambda} - 1)^{-1} \bar{\lambda} \eta; \dot{x}(\cdot)) + E(\bar{L})(\theta + h, (\bar{\lambda} - 1)^{-1} \bar{\lambda} \eta; \dot{y}(\cdot)) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

то справедливо равенство

$$M(\bar{L}_x)(\theta, \bar{\lambda}, \eta; \dot{x}(\cdot)) + M(\bar{L}_y)(\theta + h, \bar{\lambda}, \eta; \dot{y}(\cdot)) = 0. \quad (24)$$

Теорема 3. Пусть функции $L(\cdot)$, $L_{\dot{x}}(\cdot)$ и $L_{\dot{y}}(\cdot)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, а допустимая функция является слабым локальным минимумом задачи (1)–(2). Тогда существует число $\delta > 0$, при котором справедливы следующие утверждения:

- (i) если выполняются предположения, сделанные в части (i) теоремы 2, то вдоль функции $\bar{x}(\cdot)$ для всех точек $(\eta, (\bar{\lambda} - 1)^{-1} \bar{\lambda} \eta, \bar{\lambda}) \in B_\delta(0) \times B_\delta(0) \times (0, 1)$, удовлетворяющих условию (19) (соответственно, (20)), имеет место неравенство (21) (соответственно, (22));
- (ii) если выполняются предположения, сделанные в части (ii) теоремы 2, то для всех $(\eta, (\bar{\lambda} - 1)^{-1} \bar{\lambda} \eta, \bar{\lambda}) \in B_\delta(0) \times B_\delta(0) \times (0, 1)$, удовлетворяющих условию (23), имеет место равенство (24).

Для показа эффективности полученных результатов, например, эффективности теоремы 1, рассмотрим следующий пример.

Пример. Рассмотрим задачу

$$S(x(\cdot)) = \int_0^3 \left[(1 - x) \dot{x}^2 - (1 + y) \dot{y}^2 + \dot{x} \dot{y} \right] dt \rightarrow \min_{x(\cdot)}, \quad (25)$$

$$x(t) = 0, \quad t \in [-1, 0], \quad q \quad x(3) = 0, \quad (26)$$

где $y = y(t) = x(t - 1)$, $h = 1$, $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (1 - x) \dot{x}^2 - (1 + y) \dot{y}^2 + \dot{x} \dot{y}$.

Исследуем на минимум допустимую функцию $\bar{x}(t) = 0$, $t \in [-1, 3]$. Вдоль этой функции с учетом (3), (4) и (6) проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned}\bar{L}(t) &= \bar{L}_x(t) = \bar{L}_y(t) = \bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_{\dot{y}}(t) = 0, & t \in [0, 3], \\ \bar{L}_{\dot{y}}(t+1) &= \bar{L}_y(t+1) = 0, & t \in [0, 2]; \\ \bar{L}(t, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &= \xi^2, & t \in [0, 3]; & \bar{L}(t+1, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\xi^2, & t \in [0, 2]; \\ \bar{L}_x(t, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &= -\xi^2, & t \in [0, 3]; & \bar{L}_y(t+1, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\xi^2, & t \in [0, 2]; \\ E(\bar{L})(t, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &= \xi^2, & t \in [0, 3]; & E(\bar{L})(t+1, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\xi^2, & t \in [0, 2]; \\ M(\bar{L}_x)(t, \lambda, \xi; \dot{\bar{x}}(\cdot)) &= -\lambda\xi^2 - (1-\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} \xi \right)^2 = -\frac{\lambda}{\lambda-1} \xi^2, & t \in [0, 3]; \\ M(\bar{L}_y)(t+1, \lambda, \xi; \dot{\bar{y}}(\cdot)) &= -\lambda\xi^2 - (1-\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda-1} \xi \right)^2 = -\frac{\lambda}{\lambda-1} \xi^2, & t \in [0, 2].\end{aligned}$$

В силу этих вычислений приходим к следующим выводам:

- (а) в силу (7) или (8) допустимая функция $\bar{x}(\cdot) = 0$ является экстремалью задачи (25)–(26);
- (б) функция $\bar{x}(\cdot) = 0$ удовлетворяет условиям Вейерштрасса (9):

$$\xi^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [2, 3] \quad \text{и} \quad \xi^2 = 0 \quad \forall t \in [0, 2], \quad \forall \xi \in \mathbb{R};$$

- (с) ясно, что вдоль функции $\bar{x}(\cdot) = 0$ для всех точек $\left(\lambda, \eta, \frac{\lambda}{\lambda-1} \eta \right) \in (0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ условия Вейерштрасса (9) вырождаются в любой точке интервала $(0, 2)$.

Отсюда, применяя теорему 2, заключаем, что утверждение (18) не выполняется:

$$\frac{2\lambda}{\lambda-1} \eta^2 = 0 \quad \forall (t, \lambda, \eta) \in (0, 2) \times (0, 1) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Поэтому в силу части (i) теоремы 1 экстремаль $\bar{x}(\cdot) = 0$ не может быть сильным локальным минимумом задачи (25)–(26).

Далее, так как для всех $\eta \neq 0$ и $\lambda \in (0, 1)$ равенство (18) не выполняется, то ясно, что в силу части (ii) теоремы 1 экстремаль $\bar{x}(\cdot) = 0$ не является даже слабым локальным минимумом задачи (25)–(26).

Насколько нам известно, в теории особого оптимального управления аналоги теорем 1, 2 и 3 не доказаны.

Сравнивая данную работу с [21], легко приходим к заключению, что если в задаче (1)–(2) число $h = 0$, то теоремы 1, 2 и 3 совпадают с аналогичными результатами работы [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия // Мат. сб. — 1976. — 100, № 142. — С. 610–643.
2. Ащепков Л. Т., Эппель Д. С. Аналог условия Келли в оптимальных системах с запаздыванием // Диффер. уравн. — 1974. — № 4. — С. 591–597.
3. Габасов Р. К теории необходимых условий оптимальности особых управлений // Докл. АН СССР. — 1968. — 183, № 2. — С. 300–302.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
5. Гороховик В. В., Гороховик С. Я. Различные формы обобщенных условий Лежандра–Клебша // Автомат. телемех. — 1982. — № 7. — С. 28–33.
6. Марданов М. Дж., Меликов Т. К. К теории особых оптимальных управлений в динамических системах с запаздыванием в управлении // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — 57, № 5. — С. 747–767.
7. Меликов Т. К. Рекуррентные условия оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием // Докл. РАН. — 1992. — 322, № 5. — С. 843–846.
8. Меликов Т. К. О необходимых условиях оптимальности высокого порядка // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1995. — 35, № 7. — С. 1134–1138.

9. Меликов Т. К. Аналог условия Келли в оптимальных системах с последствием нейтрального типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1998. — 38, № 9. — С. 1490–1499.
10. Меликов Т. К. Об оптимальности особых управлений в системах с последствием нейтрального типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2001. — 41, № 9. — С. 1332–1343.
11. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — Наука: М., 1988.
12. Срочко В. А. Исследование второй вариации на особых управлениях// Диффер. уравн. — 1974. — 10, № 6. — С. 1050–1066.
13. Isayeva A. M. Necessary conditions in delayed variational problems with free right end// Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. — 2022. — 42, № 4. — P. 81.
14. Kelley H. J. A second variation test for singular extremals// AIAA J. — 1964. — 2, № 8. — P. 1380–1382.
15. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals// in: Topics in Optimization (G. Leitman, ed.). — New York: Academic Press, 1967. — P. 63–101.
16. Krener A. The high order maximal principle and its application to singular extremals// SIAM J. Control Optim. — 1997. — 15, № 2. — P. 256–293.
17. Malik S. T. On necessary optimality conditions for singular controls in dynamical system with a delay in control// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2018. — 39, № 15. — P. 1669–1689.
18. Mardanov M. J. On optimality conditions for singular controls// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1980. — 253, № 4. — P. 815–818.
19. Mardanov M. J., Melikov T. K. Analogue of the Kelley condition for optimal systems with retarded control// Int. J. Control. — 2017. — 90, № 7. — P. 1299–1307.
20. Mardanov M. J., Melikov T. K., Malik S. T. Necessary conditions for the extremum in non-smooth problems of variational calculus// J. Comput. Appl. Math. — 2022. — 399, № 2. — 113723.
21. Mardanov M. J., Melikov T. K., Malik S. T. Necessary conditions for a minimum in classical calculus of variations in the presence of various types of degenerations// J. Comput. Appl. Math. — 2023. — P. 418. — 114668.
22. Melikov T. K., Hajiyeva G. V. Necessary conditions for an extremum in nonsmooth variational problems involving retarded argument// Proc. 7th Int. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications (Baku, Azerbaijan, August 26–28, 2020), 2020. — P. 284–286.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марданов Мисир Джумаил оглы (Mardanov Misir Jumail ogly)

Институт математики и механики Министерства науки и образования

Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан;

Бакинский государственный университет, Баку, Республика Азербайджан

(Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Science and Education

of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan;

Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan)

E-mail: misirmardanov@yahoo.com

Меликов Телман Кули (Melikov Telman Kuli)

Институт математики и механики Министерства науки и образования

Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан;

Институт систем управления Министерства науки и образования

Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан

(Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Science and Education

of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan;

Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education

of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan)

E-mail: t.melik@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 32–42
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-32-42

УДК 517.956

ВИХРЕВЫЕ МОДЕЛИ СДВИГОВЫХ ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2025 г. В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

Аннотация. Обсуждается математическая модель ламинарных и турбулентных сдвиговых течений жидкости и газов в прямоугольных каналах на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих продольное движение и вращение вихревых трубок. Показано, что в случае плоского стационарного течения данная система уравнений имеет двухпараметрические аналитические решения для распределений скорости в поперечном сечении канала, которые хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и результатами численного моделирования. В качестве примеров обсуждаются модельные аппроксимации профилей скорости ламинарных течений неньютоновской жидкости и развитых турбулентных потоков жидкостей и газов в прямоугольных каналах.

Ключевые слова: уравнение вихревых потоков, неньютоновская жидкость, турбулентность, тензор Рейнольдса, вихревая вязкость.

VORTEX MODELS OF SHEAR LAMINAR AND TURBULENT FLOWS

© 2025 V. L. MIRONOV, S. V. MIRONOV

ABSTRACT. We discuss a mathematical model of laminar and turbulent shear flows of liquids and gases in rectangular channels based on a system of differential equations describing the longitudinal motion and rotation of vortex tubes. We show that in the case of a plane steady flow, this system of equations has two-parameter analytical solutions for velocity distributions in the cross-section of the channel, which are in good agreement with known experimental data and the results of numerical simulations. Model approximations of velocity profiles of laminar flows of non-Newtonian liquids and developed turbulent flows of liquids and gases in rectangular channels are discussed as examples.

Keywords and phrases: equation of vortex flows, non-Newtonian liquid, turbulence, Reynolds tensor, eddy viscosity.

AMS Subject Classification: 35Q35; 76A05; 76F25

1. Введение. Характеристики потоков жидкостей и газов в прямоугольных каналах хорошо изучены и являются основой для верификации различных теоретических моделей. Однако несмотря на простоту постановки задачи математическое описание течений жидкостей с большой вязкостью, а также турбулентных потоков жидкостей и газов представляет собой сложную проблему. Действительно, в случае ламинарного потока жидкости с малой вязкостью под действием градиента давления (течение Пуазейля) профиль средней скорости в поперечном сечении канала хорошо изучен и описывается простой параболической функцией. Такие жидкости характеризуются линейной связью между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости (закон Ньютона) и называются ньютоновскими. К ним, например, относятся вода, водные растворы сахара и хлорида натрия, спирты, ароматические углеводороды. Однако увеличение вязкости жидкости приводит к изменению ее реологических свойств и, в первую очередь, это сказывается

на распределении скоростей в канале. Экспериментальные профили скорости в поперечном сечении канала перестают быть параболическими. Для описания течения жидкостей с повышенной вязкостью широко используют эмпирическое соотношение между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости, называемое степенным законом Оствальда—де Ваале (см. [2,7]). Такие жидкости называются неньютоновскими. К ним относятся, например, растворы и расплавы полимеров, суспензии и эмульсии. Основным недостатком модели Оствальда—де Ваале является то, что параметры, входящие в эту модель, существенно зависят от скорости движения жидкости и в этом смысле являются не характеристиками вязкой жидкости как таковой, а характеристиками динамических свойств потока (см. [2]).

С другой стороны, увеличение скорости истечения потока приводит к потере устойчивости ламинарного течения, и оно становится турбулентным (см. [6, 11, 19]). Теоретическое описание турбулентных течений основано на решении уравнения Навье—Стокса, усредненного по времени, в котором влияние флуктуирующей части скорости на средние характеристики течения учитываются тензором напряжений Рейнольдса (см. [12, 16]). Однако непосредственное вычисление компонент тензора Рейнольдса представляет собой очень сложную задачу, поэтому широкое применение находят различные феноменологические модели, устанавливающие связь данного тензора с поперечным градиентом скорости. Одна из основных идей заключается в представлении коэффициента связи (турбулентной / вихревой вязкости) в виде функции, зависящей от координат в потоке. Это предположение позволяет удовлетворительно согласовывать теоретические расчеты с экспериментальными данными, используя различные модели пограничного слоя (см. [6, 8, 10–12, 16, 19]). Однако в моделях такого типа турбулентная вязкость представляет собой очень сложную кусочно гладкую функцию, параметры которой также зависят от скорости истечения потока (числа Рейнольдса Re). Все вышеуказанное приводит к тому, что согласование теоретических моделей течений с результатами экспериментов сопряжено с большим объемом многопараметрических численных расчетов и фактически не вскрывает физическую сущность наблюдаемых в эксперименте особенностей.

Мы предлагаем альтернативные модели сдвиговых течений, основанные на системе дифференциальных уравнений, описывающих поступательное движение и вращение вихревых трубок (см. [13]). Эти уравнения были нами ранее применены для гидродинамического описания электронно-ионной плазмы, а также электронной жидкости в металлах и полупроводниках (см. [14, 15]). В настоящей работе данный подход применяется для описания стационарных ламинарных течений неньютоновской жидкости и полностью развитых турбулентных потоков жидкостей и газов.

2. Уравнения модели вихревого течения. В основе предлагаемой нами модели вихревого потока лежит концепция вихревых трубок Гельмгольца (см. [9]). Согласно этой концепции элементы жидкости совершают одновременно поступательное движение и поворот вокруг мгновенной оси вращения. При этом в потоке можно выделить поле вихревых линий, касательными к которым являются векторы мгновенной угловой скорости. Частицы, расположенные вдоль вихревых линий, образуют вихревые нити, которые движутся поступательно вместе с потоком. В свою очередь, пучки вихревых нитей образуют вихревые трубки, которые и являются основными структурными элементами вихревого потока. С математической точки зрения данная концепция приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида (см. [13]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w} + \nabla u &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) u + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{w} - \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \xi &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \xi + \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

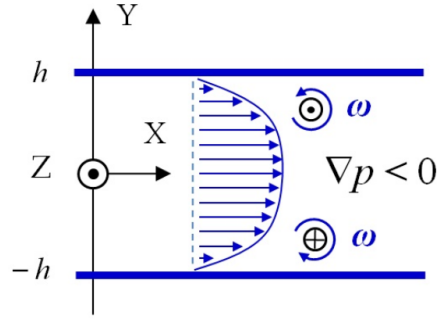


Рис. 1. Схематическое изображение стационарного течения Пуазейля в прямоугольном канале. Горизонтальными стрелками показано распределение скорости в поперечном сечении канала. Вертикальными стрелками обозначено направление вращения вихревых трубок в разных пристеночных областях течения.

Здесь c — скорость звука; μ — кинематическая вязкость жидкости; $\mathbf{v}$ — локальная скорость потока; u — энтальпия на единицу массы жидкости; $\mathbf{w}$ — вектор угла поворота вихревых трубок; ξ — параметр описывающий скручивание вихревых трубок (см. [13]). Первое уравнение системы (1) представляет собой модифицированное уравнение Навье—Стокса. Второе уравнение — это условие неразрывности потока с учетом самодиффузии в жидкости. Третье уравнение описывает динамику вращения вихревых трубок. Последнее уравнение описывает закручивание вихревых трубок. Получение общего решения данной системы представляет собой трудную задачу. Однако для плоского течения данная система уравнений существенно упрощается и допускает аналитические решения.

3. Плоское течение. В качестве базовой модели мы будем рассматривать плоское (в плоскости x, y) течение Пуазейля в прямоугольном канале шириной $2h$ под действием постоянного градиента давления ∇p (см. рис. 1).

В этом случае скорость потока $\mathbf{v}$ имеет только x компоненту и зависит только от координаты y и времени: $v_x = v_x(y, t)$. Аналогично, вектор $\mathbf{w}$ имеет только z компоненту и зависит также от координаты y и времени: $w_z = w_z(y, t)$. Кроме того, мы предполагаем, что вихревые трубки не закручиваются ($\xi = 0$), а энтальпия зависит только от координаты x и градиент энтальпии постоянен:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g.$$

Данный параметр определяется напором жидкости в канале. Тогда в проекциях на оси X и Z система (1) принимает следующую простую форму:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial w_z}{\partial y} - g &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial w_z}{\partial t} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В следующих разделах мы рассмотрим, как эта простая модель описывает ламинарные и турбулентные потоки.

4. Стационарный ламинарный поток неньютоновской жидкости. Для описания полностью развитого стационарного потока необходимо провести усреднение по времени уравнений (2). При этом для любой функции $a(y, t)$ усреднение сводится к следующей процедуре:

$$\bar{a}(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(y, t) dt.$$

Для учета вращений трубок мы выделяем в функции $w_x(y, t)$ часть, описывающую регулярное вращение с частотой $\omega_z(y)$, и нерегулярную фазу $\varphi_z(y, t)$:

$$w_z(y, t) = 2c\omega_z(y)t + \varphi_z(y, t).$$

Тогда после усреднения имеем

$$-\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + 2\omega_z(y) = 0. \quad (3)$$

Здесь усредненные функции зависят только от координаты y и введена величина $\lambda = \mu/c$, представляющая собой характерный пространственный масштаб, определяемый вязкостью жидкости.

Течение Пуазейля характеризуется линейным законом распределения угловой скорости в потоке. Будем предполагать что $\omega_z(y) = \kappa y$. В этом случае система уравнений (3) принимает следующий вид:

$$-\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\kappa y = 0. \quad (4)$$

В качестве граничных условий принимаем условия полного прилипания жидкости к стенкам канала:

$$\bar{v}_x(h) = \bar{v}_x(-h) = 0, \quad \bar{\varphi}_z(h) = \bar{\varphi}_z(-h) = 0. \quad (5)$$

Тогда решение системы (4) с граничными условиями (5) записывается следующим образом:

$$\bar{v}_x = \eta g h \frac{\text{ch}(h/\lambda) - \text{ch}(y/\lambda)}{\text{sh}(h/\lambda)} + g h^2 \frac{(1 - \eta)}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_z = -\eta g h \frac{\text{sh}(y/\lambda)}{\text{sh}(h/\lambda)} + \eta g y. \quad (7)$$

Здесь η — безразмерный параметр, определяемый поперечным градиентом угловой скорости, кинематической вязкостью и градиентом давления (величиной напора жидкости):

$$\eta = 1 - \frac{2\kappa\lambda}{g}. \quad (8)$$

Данный параметр описывает отклонение от ньютоновского закона для напряжения сдвига. Действительно, при $\eta = 0$ профиль скорости является параболическим и описывает течение ньютоновской жидкости. В этом случае все вихревые трубки вращаются в фазе ($\bar{\varphi}_z(y) = 0$), а градиент угловой скорости вращения вихревых трубок жестко связан с вязкостью жидкости и напором в потоке $\kappa = g/(2\lambda)$. При нарушении этого соотношения профиль скорости перестает быть параболическим.

При $\eta = 1$ профиль скорости является чисто гиперболическим. На рис. 2 приведены нормированные распределения средней скорости $\bar{v}_x/\bar{v}_0$ (где $\bar{v}_0$ — усредненная скорость потока при $y = 0$), рассчитанные по формуле (6) для нескольких значений параметра $\alpha = \lambda/h$. Из рисунка видно, что параметр α определяет в основном изменение профилей скорости вблизи стенок канала. На рис. 3 приведены нормированные распределения фазы $\bar{\varphi}_z/\bar{\varphi}_0$ (где $\bar{\varphi}_0$ — фаза при $y/h = -1$), рассчитанные по формуле (7) для нескольких значений параметра α . При значениях $\alpha < 0,05$ распределение фазы становится практически линейным.

Распределение скорости (6) можно использовать для аппроксимации результатов экспериментальных измерений. В качестве примера на рис. ?? приведены результаты фитинга экспериментальных распределений скорости (см. [7]) в прямоугольном канале для водного раствора полиакриламида с разной концентрацией полимера и при различных напорах жидкости в канале (различных числах Рейнольдса, соответствующих максимальной скорости потока на центральной линии канала). Как видно, наблюдается хорошее согласие между экспериментальными данными и модельными профилями скорости.

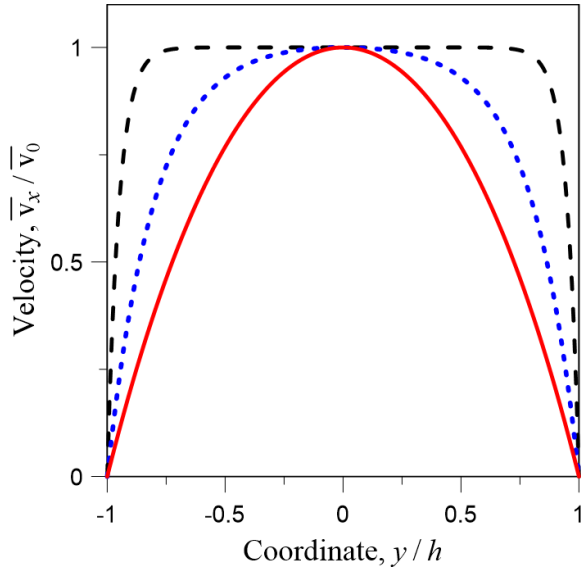


Рис. 2. Распределение усредненной скорости при различных параметрах α . Сплошная линия $\alpha = 0,9$; пунктирная линия $\alpha = 0,2$; штриховая линия $\alpha = 0,05$. Параметр $\eta = 1$.

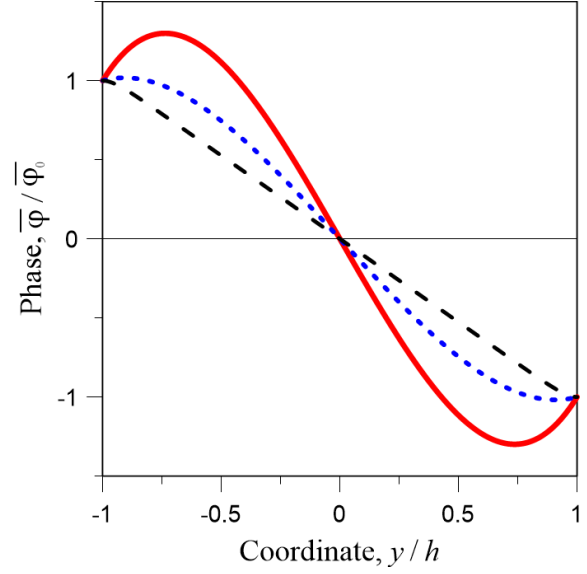


Рис. 3. Распределение фазы вращения вихревых трубок при различных параметрах α . Сплошная линия $\alpha = 0,9$; пунктирная линия $\alpha = 0,7$; штриховая линия $\alpha = 0,05$.

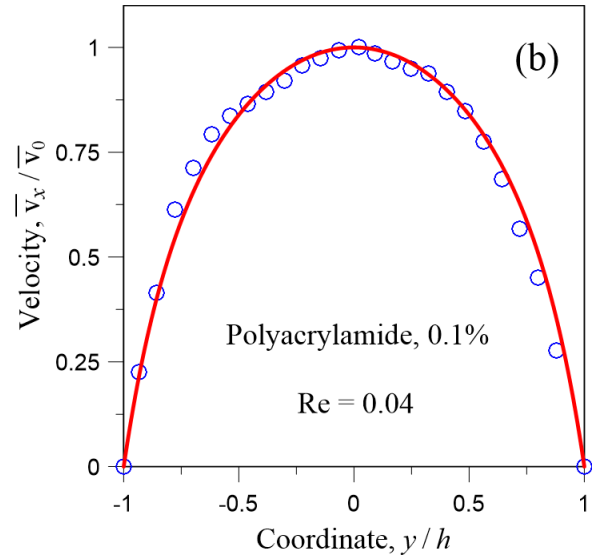
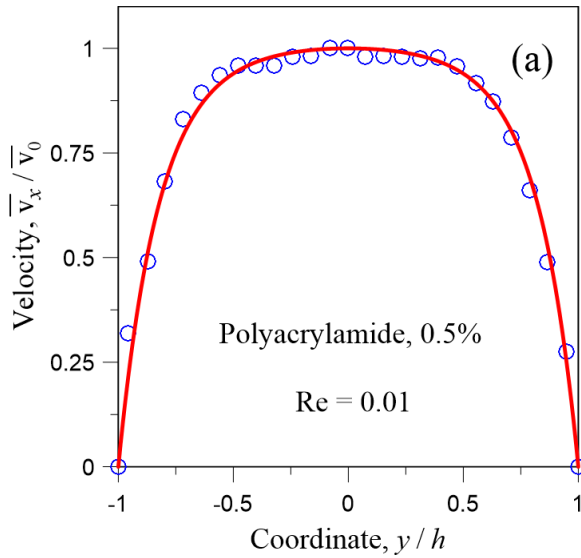


Рис. 4. Нормированные профили скорости для водного раствора полиакриламида с разной концентрацией полимера и при различных числах Рейнольдса. Экспериментальные данные показаны кружками (см. [7]). Результаты фитинга на основе выражения (6) показаны сплошными линиями. Подгоночные параметры (a) $\alpha = 0,172$; $\eta = 0,98$; (b) $\alpha = 0,17$; $\eta = 0,7$.

5. Турбулентные потоки. Для построения модели турбулентных потоков необходимо учитывать флуктуации всех величин, описывающих движение жидкости. В частности, в рамках принятых приближений для скорости и вектора угла вращения имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) &= 2c\omega(\mathbf{r})t + \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (9)$$

где величины $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi'(\mathbf{r}, t)$ описывают пульсации скорости и фазы на фоне средних значений. После подстановки (9) в исходные уравнения (1) и усреднения по времени для плоского течения получаем следующие уравнения в проекциях на оси X и Z :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_x v'_y} + \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y} - g &= 0, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_z}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\varphi'_z v'_y} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + 2\omega_z(y) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь корреляторы $\overline{v'_x v'_y}$ and $\overline{\varphi'_z v'_y}$ представляют собой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Для их вычисления мы используем гипотезу Буссинеска (см. [3, 17]) о линейной связи между компонентами тензора Рейнольдса и поперечными градиентами скорости и фазы:

$$-\overline{v'_x v'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad (11)$$

$$-\overline{\varphi'_z v'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y}, \quad (12)$$

где μ_T — кинематическая турбулентная вязкость (вихревая вязкость). В дальнейшем будем предполагать $\mu_T = \text{const}$ и $\omega_z(y) = \kappa y$, что приводит нас к очень простым уравнениям, описывающим турбулентный поток:

$$-\lambda_T \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\kappa y = 0. \quad (13)$$

Здесь величина

$$\lambda_T = (\mu + \mu_T) / c \quad (14)$$

является характерным пространственным масштабом турбулентности. По форме уравнения (13) совпадают с уравнениями для ламинарного потока (4), но имеют другой пространственный масштаб изменения функций, описывающих стационарный поток. В качестве граничных условий остаются условия полного прилипания жидкости к стенкам канала (5). С учетом всего этого для усредненной скорости турбулентного потока имеем следующее распределение:

$$\bar{v}_x = \sigma g h \frac{\text{ch}(h/\lambda_T) - \text{ch}(y/\lambda_T)}{\text{sh}(h/\lambda_T)} + g h^2 \frac{(1 - \sigma)}{2\lambda_T} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (15)$$

Здесь параметр σ определяется поперечным градиентом угловой скорости, вихревой вязкостью и величиной напора жидкости:

$$\sigma = 1 - \frac{2\kappa\lambda_T}{g}. \quad (16)$$

Для сравнения с экспериментальными данными использовалось нормированное распределение $\bar{v}_x/\bar{v}_0$, где $\bar{v}_0$ — усредненная скорость потока при $y = 0$. В этом случае нормированный профиль скорости зависит только от двух параметров $\beta = \lambda_T/h$ и σ , определяемого формулой (16). В качестве примера на рис. 5 приведено сравнение нормированных профилей усредненной скорости, рассчитанных по формуле (15), с экспериментальными кривыми для $\text{Re} = 3500$ (см. [19]) и $\text{Re} = 64600$ (см. [6]). На рис. 6 показаны результаты сравнения профилей средней скорости, рассчитанных с использованием формулы (15) и данных численного моделирования для $\text{Re} = 2013$ (см. [20]) и $\text{Re} = 41441$ (см. [1]). Как видно, во всех случаях аналитические профили хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

6. Обсуждение.

6.1. Неньютоновские жидкости. Для плоского стационарного течения уравнение Навье—Стокса в проекции на ось X записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) + g = 0, \quad (17)$$

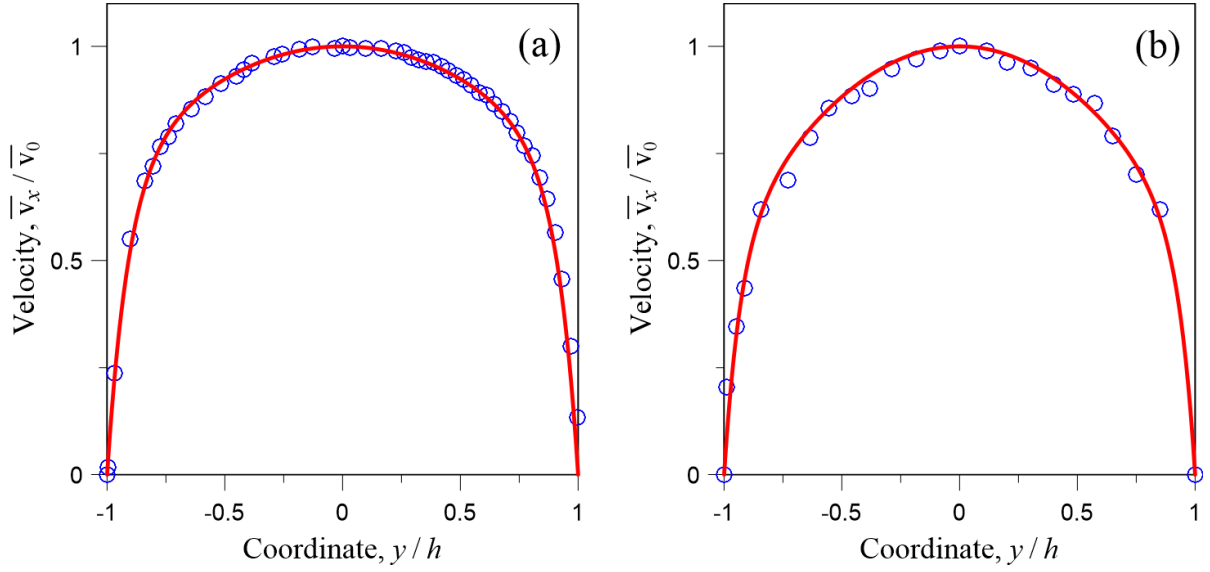


Рис. 5. Профили усредненной скорости. Экспериментальные данные (см. [6, 19]) показаны кружками, результаты подгонки по формуле (15) показаны сплошной линией. (a) $Re = 3500$ (см. [19]); подгоночные параметры $\beta = 0,08$; $\sigma = 0,93$. (b) $Re = 64600$ (см. [6]); подгоночные параметры $\beta = 0,08$; $\sigma = 0,87$.

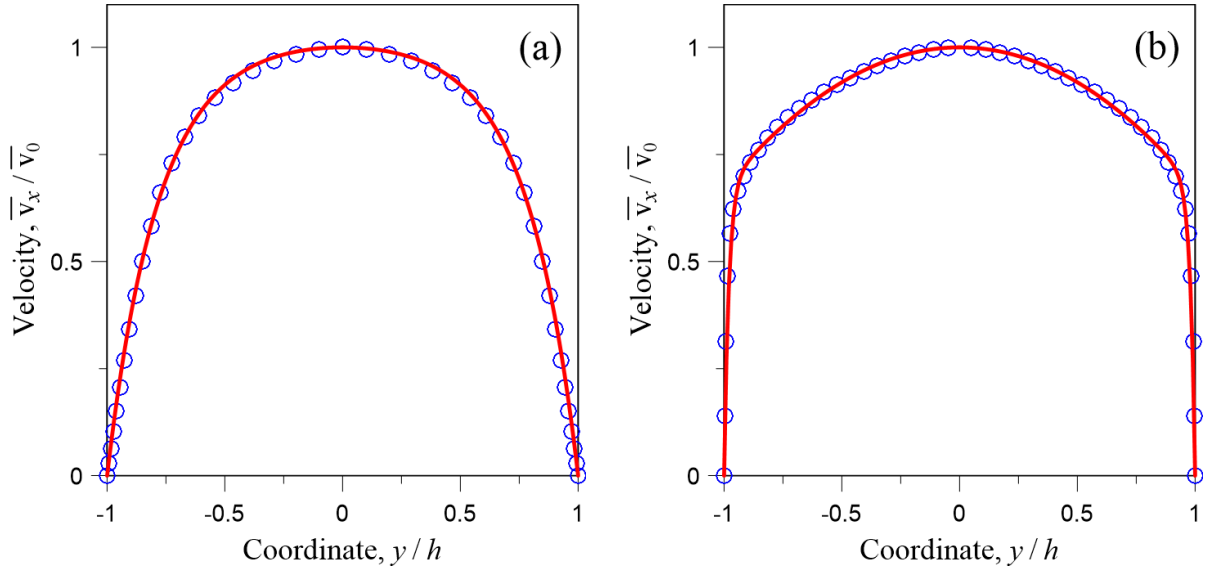


Рис. 6. Профили усредненной скорости. Данные численного моделирования (см. [1, 20]) показаны кружками, результаты подгонки по формуле (15) показаны сплошной линией. (a) $Re = 2013$ (см. [20]); подгоночные параметры $\beta = 0,21$; $\sigma = 0,975$. (b) $Re = 41441$ (см. [1]); подгоночные параметры $\beta = 0,02$; $\sigma = 0,981$.

где τ_{xy} — напряжение сдвига. Ньютоновские жидкости характеризуются линейной связью между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости (закон Ньютона):

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (17) приводит к уравнению, описывающему параболический профиль скорости в поперечном сечении канала. В широко распространенной модели неньютоновской жидкости

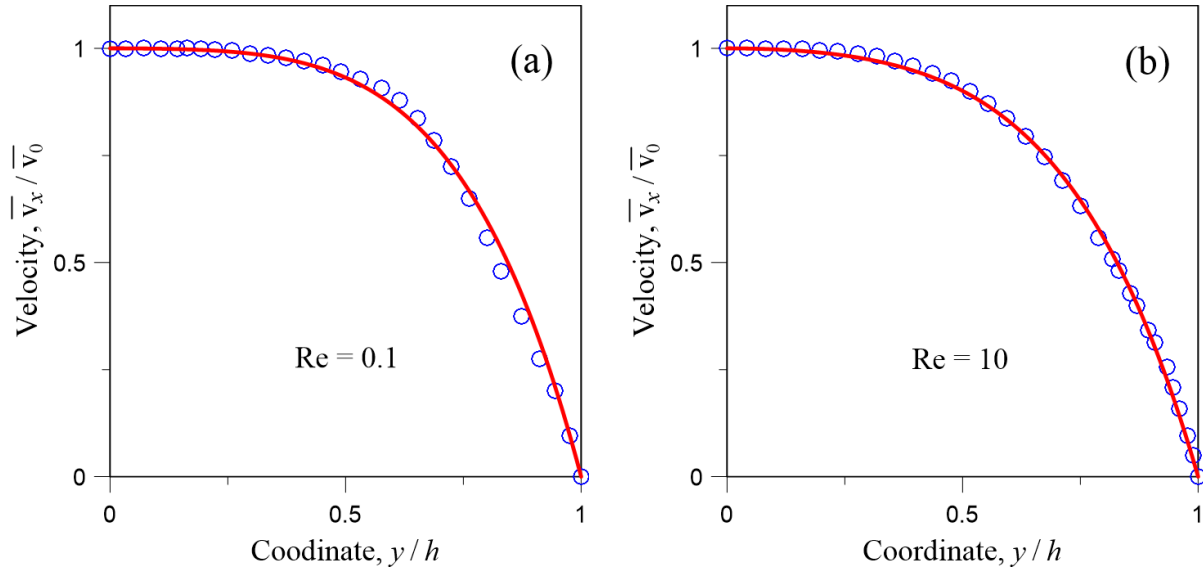


Рис. 7. Профили скорости в потоке раствора полиакриламида (0,4%) с различными Re . Круги — экспериментальные данные (см. [2]), сплошные линии — модельные профили (15). (a) $\alpha = 0,22$; $\sigma = 0,99$. Индекс $n = 0,34$. (b) $\alpha = 0,22$; $\sigma = 0,93$. Индекс $n = 0,4$.

соотношение между напряжением сдвига и градиентом скорости описывается эмпирическим степенным законом Оствальда—де Ваале

$$\tau_{xy} = K \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n, \quad (19)$$

где K — густота жидкости, а n — показатель степени ($0 < n < 1$). При этом эффективная вязкость жидкости оказывается зависящей от индекса n :

$$\mu_e = K \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{n-1}. \quad (20)$$

Подстановка (19) в (17) приводит к тому, что профиль скорости описывается степенной функцией вида

$$\frac{v_x}{v_0} = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (21)$$

Это выражение достаточно хорошо описывает стационарные профили скорости неньютоновской жидкости.

Таким образом, реологические свойства такой неньютоновской жидкости, казалось бы, можно пытаться характеризовать индексом n в законе Оствальда—де Ваале. Однако, как показали эксперименты, для одной и той же жидкости индекс n определяется не только ее вязкостью, но и существенно зависит от напора жидкости в канале, т.е. от числа Рейнольдса (см. [2]). С этой точки зрения индекс n является характеристикой не столько вязких свойств самой жидкости, сколько характеристикой динамических свойств потока.

Предложенная нами двухпараметрическая модель вихревого течения позволяет аппроксимировать профили скорости в канале при разных Re одним и тем же параметром α , который определяется кинематической вязкостью жидкости. В качестве примера на рис. 7 показаны результаты аппроксимации экспериментальных профилей (см. [2]) для потоков водного раствора полиакриламида (0,4%) с существенно различными Re . Подгонка с помощью модельного распределения (21) на основе закона Оствальда—де Ваале показывает, что значения индекса n существенно различаются и составляют $n = 0,34$ для $Re = 0,1$ и $n = 0,4$ для $Re = 10$. С другой стороны, аппроксимация тех же профилей скорости с помощью модельного распределения (15) показывает, что в широком диапазоне чисел Re эта жидкость характеризуется одной и той же кинематической вязкостью

(параметр $\alpha = 0,22$), но разными значениями параметра σ , зависящими от напора жидкости и скорости вращения вихревых трубок.

6.2. Турбулентные потоки. При описании турбулентных течений ситуация еще более сложная. Один из широко используемых подходов к описанию турбулентного течения основан на решении усредненного по времени уравнения Навье—Стокса. В этой модели имеется только одно уравнение, которое для плоского течения Пуазейля имеет следующий вид:

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_x v'_y} - g = 0.$$

В этом случае гипотеза Буссинеска (11) с постоянной (не зависящей от координат в потоке) турбулентной вязкостью не описывает профиль скорости турбулентного течения. Профиль остается параболическим. Поэтому для получения удовлетворительного согласия с экспериментальными данными в рамках данной модели принято считать, что турбулентная вязкость зависит от координат в потоке ($\mu_T = \mu_T(y)$). Это приводит к следующему уравнению:

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T(y) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) - cg = 0, \quad (22)$$

в котором главная проблема — выбор феноменологической модели профиля турбулентной вязкости $\mu_T(y)$. Аналитическое выражение для вихревой вязкости, которое обеспечивает хорошее совпадение с экспериментальными данными было предложено Сессом (см. [4]). Согласно модели Сесса профиль турбулентной вязкости в поперечном сечении канала можно представить в следующем виде (см. [18]):

$$\mu_T(y) = \frac{\mu}{2} \left\{ 1 + \frac{K^2 \text{Re}^2}{9} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(1 + 2 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(1 - \exp \left[\left(\left| \frac{y}{h} \right| - 1 \right) \frac{\text{Re}}{A} \right] \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{\mu}{2}, \quad (23)$$

где Re — число Рейнольдса, K — константа Кармана логарифмического профиля скорости, A — постоянная Дрифта (см. [21]). Профиль усредненной скорости находится из уравнений (22) и (23) следующим образом:

$$\bar{v}_x(y) = \frac{cg}{h} \int_{-h}^y \frac{1 + y/h}{\mu + \mu_T(y)} dy, \quad (24)$$

где интеграл может быть рассчитан численными методами. Аппроксимация экспериментальных результатов функцией (24) представляет собой трудоемкую задачу.

В предлагаемой нами вихревой модели турбулентный поток описывается двумя уравнениями (10). В этом случае гипотеза Буссинеска (11) и (12) с постоянной (не зависящей от координат) вихревой вязкостью (см. уравнения (13) и (14)) немедленно дает комбинированный гиперболический-параболический профиль средней скорости (15) в аналитической форме. Распределение средней скорости определяется всего лишь двумя параметрами β и σ , зависящими от числа Рейнольдса.

Зависимости $\beta = \beta(\text{Re})$ и $\sigma = \sigma(\text{Re})$ могут быть использованы для оценки величины турбулентной вязкости μ_T по формуле (14) и поперечного градиента угловой скорости κ по формуле (16) с использованием экспериментальных значений скорости звука, кинематической вязкости, ширины канала и экспериментальных чисел Рейнольдса следующим образом:

$$\mu_T = ch \beta(\text{Re}) - \mu, \quad \kappa = \frac{1 - g\sigma(\text{Re})}{2h\beta(\text{Re})}.$$

Функции $\beta = \beta(\text{Re})$ и $\sigma = \sigma(\text{Re})$ могут быть протабулированы на основе либо экспериментальных данных, либо на основе результатов численного моделирования. В качестве примера на рис. 8 приведены зависимости параметров β и σ от числа Рейнольдса (показаны кружками), полученные посредством фитирования по формуле (15) профилей скорости, рассчитанных методом численного моделирования (см. [5]).

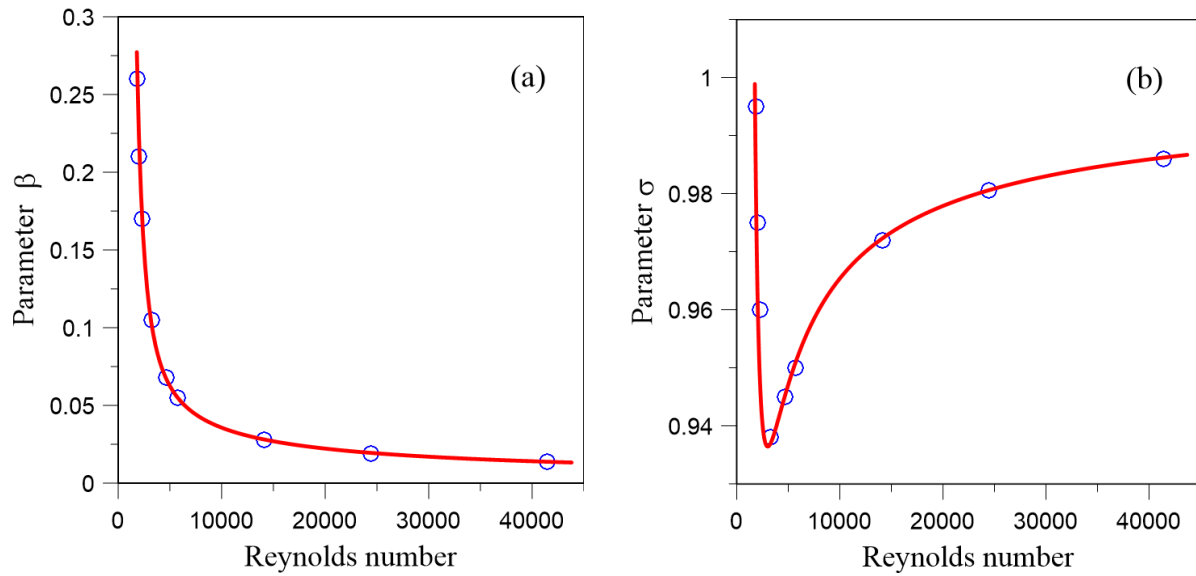


Рис. 8. Зависимости параметров β (a) и σ (b) от числа Рейнольдса. Кругами показаны результаты подгонки по формуле (15) профилей скорости, полученных в численном моделировании (см. [5]). Сплошные линии соответствуют степенным аппроксимирующим функциям (25) и (26).

Результаты фитирования (см. рис. 8) можно аппроксимировать, например, комбинацией степенных функций. Так, для параметра β возможна аппроксимация следующего вида:

$$\beta = \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-3} + 1,155 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-0,65}. \quad (25)$$

Данная зависимость представлена сплошной линией на рис. 8(a). Для параметра σ возможна аппроксимация следующего вида:

$$\sigma = 1 + 1,2 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-4} - 1,155 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-0,65}. \quad (26)$$

Данная зависимость представлена сплошной линией на рис. 8(b).

Аппроксимирующие функции (25) и (26) могут быть полезны для прогнозирования профилей распределения средней скорости в турбулентном потоке, а также для оценки турбулентной вязкости и градиента угловой скорости вращения вихревых трубок.

7. Заключение. Таким образом, мы показали, что при упрощающих предположениях предлагаемая модель вихревого плоского течения приводит к системе двух уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В случае стационарного течения Пуазейля в прямоугольном канале эти уравнения допускают аналитические решения. Распределение средней скорости в поперечном сечении канала представляется в виде комбинации степенной и гиперболической функций, зависящих от двух параметров. На основе данной модели рассмотрены ламинарные течения неньютоновской жидкости и стационарные полностью развитые турбулентные потоки. Показано, что рассчитанные профили скорости для данных течений хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abe H. Poi1020-4th-A-ver2.dat// in: DNS Data Base for Turbulent Channel Flow with Heat Transfer (Kawamura H., ed.). — https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/poi/text/Poi1020_4th_A_ver2.dat.
2. Ansari S., Rashid M., Waghmare P. R., Nobes D. S. Measurement of the flow behavior index of Newtonian and shear-thinning fluids via analysis of the flow velocity characteristics in a mini-channel// SN Appl. Sci. — 2020. — 2. — 1787.

3. *Boussinesq J.* Essai sur la th'eorie des eaux courantes// J. Math. Pures Appl. Ser. 3 — 1878. — 4. — P. 335–376.
4. *Cess R. D.* A Survey of the Literature on Heat Transfer in Turbulent Tube Flow. — Westinghouse Research Report No. 8-0529-R24, 1958.
5. DNS Database of Wall Turbulence and Heat Transfer. — <https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/>.
6. *El Telbany M. M. M., Reynolds A. J.* Velocity distributions in plane turbulent channel flows// J. Fluid Mech. — 1980. — 100. — P. 1–29.
7. *Fu T., Carrier O., Funfschilling D., Ma Y., Li H. Z.* Newtonian and Non-Newtonian flows in microchannels: inline rheological characterization// Chem. Eng. Technol. — 2016. — 39. — P. 987–992.
8. *Hanjalic K., Launder B. E.* A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows// J. Fluid Mech. — 1972. — 52. — P. 609–638.
9. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen// J. Reine Angew. Math. — 1858. — 55. — P. 25–55.
10. *Henry F. S., Reynolds A. J.* Analytical solution of two gradient-diffusion models applied to turbulent Couette flow// J. Fluids Eng. — 1984. — 106. — P. 211–216.
11. *Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C.* Measurements in fully developed turbulent channel flow// J. Fluids Eng. — 1975. — 97. — P. 568–578.
12. *McComb W. D.* Theory of turbulence// Rep. Progr. Phys. — 1995. — 58. — P. 1117–1206.
13. *Mironov V. L., Mironov S. V.* Generalized sedeonic equations of hydrodynamics// Eur. Phys. J. Plus. — 2020. — 135. — P. 708.
14. *Mironov V. L.* Self-consistent hydrodynamic two-fluid model of vortex plasma// Phys. Fluids. — 2021. — 33. — P. 037116.
15. *Mironov V. L.* Self-consistent hydrodynamic model of electron vortex fluid in solids// Fluids. — 2022. — 7. — P. 330.
16. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion// Phil. Trans. Roy. Soc. London A. — 1895. — 186. — P. 123–164.
17. *Schmitt F. G.* About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity// C. R. Méc. — 2007. — 335. — P. 617–627.
18. *Symon S., Madhusudanan A., Illingworth S. J., Marusic I.* Use of eddy viscosity in resolvent analysis of turbulent channel flow// Phys. Rev. Fluids. — 2023. — 8. — 064601.
19. *Thurlow E. M., Klewicki J. C.* Experimental study of turbulent Poiseuille–Couette flow// Phys. Fluids. — 2000. — 12. — P. 865–875.
20. *Tsukahara T.* Poi070-2nd-A.dat// in: DNS Data Base for Turbulent Channel Flow with Heat Transfer (*Kawamura H.*, ed.). — https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/poi/text/Poi070_2nd_A.dat.
21. *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall// J. Aeronaut. Sci. — 1956. — 23. — P. 1007–1011.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Миронов Виктор Леонидович Mironov Viktor Leonidovich
Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород
(Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, Nizhnii Novgorod, Russia)
E-mail: mironov@ipmras.ru

Миронов Сергей Викторович Mironov Sergey Viktorovich
Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород
(Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, Nizhnii Novgorod, Russia)
E-mail: sermironov@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 43–52
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-43-52

УДК 517.977

МЕТОДЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2025 г. Д. О. ТРУНИН

Аннотация. В классе нелинейных по состоянию задач оптимального управления с ограничениями предлагается новый подход к улучшению управлений на основе решения специальных краевых задач. Для решения краевых задач рассматриваются методы возмущений, которые основаны на параметризации задачи оптимального управления с помощью параметра возмущения. Решение построенной невозмущенной краевой задачи сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра. Для решения возмущенной краевой задачи предлагается итерационный процесс, на каждой итерации которого решается задача, по трудоемкости аналогичная невозмущенной задаче.

Ключевые слова: управляемая система с ограничениями, краевая задача улучшения управления, метод возмущений, итерационные алгоритмы.

METHODS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR IMPROVING CONTROL IN SYSTEMS WITH CONSTRAINTS

© 2025 D. O. TRUNIN

ABSTRACT. In the class of state-nonlinear optimal control problems with constraints, a new approach to improving controls is proposed. This approach is based on solving special boundary-value problems by perturbation methods and parametrization of the optimal control problem by the perturbation parameter. The solution of the constructed unperturbed boundary-value problem is reduced to the solution of an algebraic equation for one unknown parameter. To solve the perturbed boundary-value problem, an iterative process is proposed, at each iteration of which a problem is solved that is similar in complexity to the unperturbed problem.

Keywords and phrases: controlled system with constraints, boundary-value problem of control improvement, perturbation method, iterative algorithms.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Традиционным подходом к решению задач оптимального управления с ограничениями являются методы на основе штрафных и нагруженных, а также модифицированных функционалов Лагранжа (см. [1, 4]). Данный подход основывается на сведении задачи оптимального управления с ограничений к последовательности задач без ограничений, к решению которых применяются соответствующие методы. Для повышения эффективности решения задач без ограничений разработаны различные специализированные методы.

В [5] в классе управляемых линейных по состоянию систем с квадратичным критерием оптимальности без ограничений были предложены методы нелокального улучшения управления. Эти методы основываются на специальных формулах приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений. Улучшение управления достигается в результате

решения двух задач Коши. Такая особенность методов является существенным фактором для повышения эффективности решения задач оптимального управления.

В [2] в классах нелинейных задач были построены методы нелокального улучшения управления, развивающие и обобщающие ранее известные методы (см. [5]). Эти методы также основаны на нестандартных формулах приращения целевого функционала без остаточных членов разложений, для получения которых были разработаны специальные модификации сопряженной системы. Улучшение управления достигается в результате решения краевой задачи, которая существенно проще известной краевой задачи принципа максимума. В классе линейных по состоянию задач оптимального управления решение такой краевой задачи сводится к решению двух задач Коши, и рассматриваемые методы становятся эквивалентными методам, предложенным в [5]. В общем случае для решения указанной краевой задачи улучшения управления были разработаны итерационные алгоритмы на основе известного в математике подхода возмущений.

В [3] предложены методы улучшения управления для класса нелинейных по состоянию задач оптимального управления на основе задач о неподвижной точке. Задача улучшения управления рассматривается как задача о неподвижной точке оператора управления, для решения которой модифицируются известные методы неподвижных точек.

В [6] методы из [3] были обобщены на класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Условие нелокального улучшения допустимого управления конструируется в форме системы функциональных уравнений в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением, к решению которой применяется аппарат теории и методов неподвижных точек.

В данной статье рассматриваются новые методы для улучшения управления в системах с ограничениями на основе построения специальных краевых задач. Для решения конструируемых краевых задач улучшения управления предлагается подход, основанный на возмущении исходной задачи оптимального управления.

2. Постановка задачи. Рассматривается класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \quad (3)$$

В рассматриваемой задаче $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ — вектор управления; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ задано; функция $f(x, u, t)$ нелинейна и дифференцируема по x , линейна по u и непрерывна по t на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$; $U \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклое компактное множество; $c \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, $c_1 = 0$; $x_1^1 \in \mathbb{R}$ — заданное число; интервал времени T фиксирован. К виду (1)–(3) могут быть приведены различные задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями.

Рассмотрим множество доступных управлений в задаче (1)–(3):

$$V = \{u \in PC^r(T) : u(t) \in U, t \in T\}.$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение задачи Коши (1) при $u = v(t)$, $t \in T$. Рассмотрим множество допустимых управлений:

$$W = \{u \in V : x_1(t_1, u) = x_1^1\}.$$

В задаче (1)–(3) функция Понтрягина имеет вид

$$H(p, x, u, t) = H_0(p, x, t) + \langle H_1(p, x, t), u \rangle.$$

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u, \lambda) = \Phi_0(u) + \lambda(x_1(t_1, u) - x_1^1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что для допустимого управления u

$$L(u, \lambda) = \Phi_0(u).$$

Пусть $u^0 \in V$, $v \in V$. В соответствии с [3] имеет место формула приращения функционала Лагранжа без остаточных членов приращений:

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = - \int_T \left\langle H_1(p(t, u^0, v, \lambda), x(t, v), t), v(t) - u^0(t) \right\rangle dt, \quad (4)$$

где $p(t, u^0, v, \lambda)$, $t \in T$ — решение модифицированной сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \left\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t, v) - x(t, u^0) \right\rangle &= \\ &= H(p, x(t, v), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ p_1(t_1) &= -\lambda, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$, удовлетворяющее условию

$$\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0).$$

3. Краевые задачи улучшения управления. Введем в рассмотрение экстремальное отображение

$$u^*(p, x, t) = \arg \max_{v \in U} H(p, x, v, t), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^*(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \left\langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle &= \\ &= H(p, x(t), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $(x^*(t), p^*(t))$, $t \in T$, — решение краевой задачи (5). Сформируем выходное управление $v(t) = u^*(p^*(t), x^*(t), t)$, $t \in T$. Тогда выходное управление v обеспечивает улучшение целевого функционала: $\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0)$.

Доказательство. Введем обозначение $\lambda^* = -p_1^*(t_1)$. Тогда

$$p^*(t) = p(t, u^0, v, \lambda^*), \quad x^*(t) = x(t, v), \quad v(t) = u^*(p(t, u^0, v, \lambda^*), x(t, v), t), \quad t \in T.$$

С учетом формулы приращения (4) получаем $L(v, \lambda^*) \leq L(u^0, \lambda^*)$. В силу допустимости управлений u^0 и v имеем $\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0)$, что и требовалось доказать. $\square$

Для фиксированного параметра $\alpha > 0$ определим вектор-функцию

$$u^\alpha(p, x, t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_1(p, x, t)), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad t \in T,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме. Имеет место следующая оценка (см. [5]):

$$\int_T \left\langle H_1(p, x, t), u^\alpha(p, x, t) - u^0(t) \right\rangle dt \geq \frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (6)$$

Тогда из (4) и (6) следует оценка приращения функционала

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|u^\alpha(p, x, t) - u^0(t)\|^2 dt. \quad (7)$$

Рассмотрим краевую задачу улучшения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u^\alpha(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \langle H_x(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t) - x(t, u^0) \rangle + \langle r(t), x(t) - x(t, u^0) \rangle &= \\ &= H(p, x(t), u^0(t), t) - H(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $(x^\alpha(t), p^\alpha(t))$, $t \in T$ — решение краевой задачи (8). Сформируем выходное управление

$$v(t) = u^*(p^\alpha(t), x^\alpha(t), t), \quad t \in T.$$

Тогда выходное управление v обеспечивает улучшение целевого функционала с оценкой

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u^0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt.$$

Доказательство. Введем обозначение $\bar{\lambda} = -p_1^\alpha(t_1)$. Тогда

$$p^\alpha(t) = p(t, u^0, v, \bar{\lambda}), \quad x^\alpha(t) = x(t, v), \quad v(t) = u^\alpha(p(t, u^0, v, \bar{\lambda}), x(t, v), t), \quad t \in T.$$

С учетом (4), (6), (7) имеем

$$L(v, \bar{\lambda}) - L(u^0, \bar{\lambda}) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt.$$

В силу допустимости управлений u^0 и v имеем

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u^0) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt,$$

что и требовалось доказать. $\square$

4. Методы возмущений. К решению краевых задач улучшения (5), (8) применим подход возмущений, основанный на параметризации исходной задачи оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$.

Выделим в задаче (1)–(3) линейную по состоянию часть и представим ее в форме

$$\dot{x} = A_0(u, t)x + b_0(u, t) + f_1(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

$$\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min,$$

$$x_1(t_1) = x_1^1.$$

Рассмотрим возмущенную задачу оптимального управления с параметром возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\dot{x} = A_0(u, t)x + b_0(u, t) + \varepsilon f_1(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (9)$$

$$\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \rightarrow \min, \quad (10)$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \quad (11)$$

Для задачи (9)–(11) определим возмущенную функцию Понтрягина

$$H_\varepsilon(p, x, u, t) = \langle p, A_0(u, t)x + b_0(u, t) \rangle + \varepsilon \langle p, f_1(x, u, t) \rangle.$$

В силу линейности по u возмущенная функция Понтрягина имеет следующую структуру:

$$H_\varepsilon(p, x, u, t) = H_{\varepsilon 0}(p, x, u, t) + \langle H_{\varepsilon 1}(p, x, t), u \rangle.$$

Введем в рассмотрение возмущенное экстремальное отображение

$$u_\varepsilon^*(p, x, t) = \arg \max_{v \in U} H_\varepsilon(p, x, v, t), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T. \quad (12)$$

Определим возмущенное отображение на основе операции проектирования

$$u_\varepsilon^\alpha(p, x, t) = P_U(u^0(t) + \alpha H_{\varepsilon 1}(p, x, t)), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \quad (13)$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Краевую задачу улучшения на основе возмущенного экстремального отображения (12) в возмущенной задаче оптимального управления определим как возмущенную краевую задачу

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(u_\varepsilon^*(p, x, t), t)x + b_0(u_\varepsilon^*(p, x, t), t) + \varepsilon f_1(x, u_\varepsilon^*(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_{\varepsilon x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \left\langle H_{\varepsilon x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle &= \\ &= H_\varepsilon(p, x(t), u^0(t), t) - H_\varepsilon(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Невозмущенная краевая задача улучшения получается из (14) при $\varepsilon = 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(u_0^*(p, x, t), t)x + b_0(u_0^*(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_{0x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Невозмущенная задача (15) сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра $\lambda = -p_1(t_1)$.

Для решения возмущенной краевой задачи (14) при $\varepsilon \in (0, 1]$ предлагается итерационный процесс с индексом $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{k+1} &= A_0(u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t)x^{k+1} + b_0(u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t) + \\ &\quad + \varepsilon f_1(x^{k+1}, u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t), \quad t \in T, \\ x^{k+1}(t_0) &= x^0, \quad x_1^{k+1}(t_1) = x_1^1, \\ \dot{p} &= -H_{\varepsilon x}(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \left\langle H_{\varepsilon x}(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t), x^k(t) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x^k(t) - x(t, u^0) \right\rangle &= \\ &= H_\varepsilon(p^{k+1}, x^k(t), u^0(t), t) - H_\varepsilon(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ p_j^{k+1}(t_1) &= -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (16)$$

Краевую задачу улучшения на основе возмущенного отображения (13) в возмущенной задаче оптимального управления определим как возмущенную

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(u_\varepsilon^\alpha(p, x, t), t)x + b_0(u_\varepsilon^\alpha(p, x, t), t) + \varepsilon f_1(x, u_\varepsilon^\alpha(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_{\varepsilon x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \left\langle H_{\varepsilon x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle + \left\langle r(t), x(t) - x(t, u^0) \right\rangle &= \\ &= H_\varepsilon(p, x(t), u^0(t), t) - H_\varepsilon(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Невозмущенная краевая задача улучшения получается из (17) при $\varepsilon = 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0(u_0^\alpha(p, x, t), t)x + b_0(u_0^\alpha(p, x, t), t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{p} &= -H_{0x}(p, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ x(t_0) &= x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

Невозмущенная задача (18) сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра $\lambda = -p_1(t_1)$.

Для решения возмущенной краевой задачи (17) при $\varepsilon \in (0, 1]$ предлагается итерационный процесс с индексом $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{k+1} &= A_0(u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t)x^{k+1} + b_0(u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t) + \\ &\quad + \varepsilon f_1(x^{k+1}, u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t), \quad t \in T, \\ x^{k+1}(t_0) &= x^0, \quad x_1^{k+1}(t_1) = x_1^1, \\ \dot{p} &= -H_{\varepsilon x}(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t) - r(t), \\ \langle H_{\varepsilon x}(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t), x^k(t) - x(t, u^0) \rangle &+ \langle r(t), x^k(t) - x(t, u^0) \rangle = \\ &= H_\varepsilon(p^{k+1}, x^k(t), u^0(t), t) - H_\varepsilon(p^{k+1}, x(t, u^0), u^0(t), t), \\ p_j^{k+1}(t_1) &= -c_j, \quad j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

В качестве начального приближения (x^0, p^0) итерационных процессов (16), (19) при $k = 0$ выбирается решение невозмущенной задачи. На каждой итерации процессов (16), (19) решается задача, по трудоемкости аналогичная невозмущенной задаче.

Итерационные процессы (16), (19) применяются до первого улучшения управления u^0 . Если улучшение происходит, то для полученного управления строится новая краевая задача улучшения и процесс повторяется. Если же улучшение не происходит, то увеличиваем значение параметра возмущения. При этом в качестве начального приближения итерационного процесса выбирается решение возмущенной задачи при меньшем значении параметра возмущения.

Таким образом, на основе последовательного решения задач улучшения управления формируется соответствующий итерационный метод построения релаксационной последовательности управлений, удовлетворяющих терминальному ограничению в исходной задаче оптимального управления.

Отметим, что для построения релаксационной последовательности управлений начальное управление u^0 можно выбирать из класса доступных управлений, которое может не удовлетворять терминальному ограничению. Такая возможность является существенным фактором для повышения эффективности использования предлагаемых методов краевых задач.

5. Примеры. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие возможность улучшения допустимых и экстремальных управлений на основе решения краевых задач.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, 2], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(2) \rightarrow \min, \\ x_1(2) &= 1. \end{aligned}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 0, t \in T$. При этом $x_1(t, u^0) \equiv 1, x_2(t, u^0) = t, t \in T, \Phi_0(u^0) = 2$.

Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, 2], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon x_1^2, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(2) \rightarrow \min, \\ x_1(2) &= 1. \end{aligned}$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(p, x, t) = p_1 u + \varepsilon p_2 x_1^2.$$

Определим возмущенное отображение на основе операции максимизации (12)

$$u_\varepsilon^*(p_1) = \text{sign } p_1, \quad p_1 \in \mathbb{R}.$$

Положим значение параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad t \in T = [0, 2], \\ \dot{x}_2 &= x_1^2, \\ \dot{p}_1 &= -p_2(x_1 + 1), \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(2) = 1, \quad p_2(2) = -1. \end{aligned} \tag{20}$$

Краевая задача (20) сводится к краевой задаче меньшей размерности

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad t \in T = [0, 2], \\ \dot{p}_1 &= x_1 + 1, \\ x_1(0) &= 1, \quad x_1(2) = 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \in [0, 1], \\ t - 1, & t \in [1, 2], \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}, & t \in [0, 1], \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

является решением краевой задачи (21). Сформируем выходное управление:

$$v(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0 :

$$\Phi_0(v) = \frac{2}{3} < \Phi_0(u^0) = 2.$$

Следующие примеры иллюстрируют возможность строгого улучшения допустимого управления, удовлетворяющего принципу максимума.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(\pi) \rightarrow \min, \\ x_1(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим допустимое управление $u^0 \equiv 0$, $t \in T$. При этом $x_1(t, u^0) = x_2(t, u^0) \equiv 0$, $t \in T$. Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon x_1^2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(\pi) \rightarrow \min, \\ x_1(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(p, x, t) = p_1 u - \varepsilon p_2 x_1^2.$$

Определим возмущенное отображение на основе операции максимизации (12):

$$u_\varepsilon^*(p_1) = \text{sign } p_1, \quad p_1 \in \mathbb{R}.$$

Положим значение параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad t \in T = [0, \pi], \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2, \\ \dot{p}_1 &= p_2 x_1, \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0, \quad p_2(\pi) = -1. \end{aligned} \tag{22}$$

Краевая задача (22) сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sign } p_1, \quad t \in T = [0, \pi], \\ \dot{p}_1 &= -x_1, \\ x_1(0) &= 0, \quad x_1(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -t + \pi, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases} \quad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{\pi^2}{8}, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{1}{2}t^2 - \pi t + \frac{3\pi^2}{8}, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

является решением краевой задачи (23). Сформируем выходное управление:

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -1, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0 :

$$\Phi_0(v) = -\frac{\pi^3}{12} < \Phi_0(u^0) = 0.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(\pi) \rightarrow \min, \\ x_1(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим допустимое управление $u^0 \equiv 0$, $t \in T$. При этом $x_1(t, u^0) = x_2(t, u^0) \equiv 0$, $t \in T$. Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon x_1^2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ \Phi_0(u) &= x_2(\pi) \rightarrow \min, \\ x_1(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(p, x, t) = p_1 u - \varepsilon p_2 x_1^2.$$

Определим возмущенное отображение на основе операции проектирования (13):

$$u_{\varepsilon}^{\alpha}(p_1) = \begin{cases} 1, & \alpha p_1 > 1, \\ -1, & \alpha p_1 < -1, \\ \alpha p_1, & -1 \leq \alpha p_1 \leq 1. \end{cases}$$

Положим значение параметра проектирования $\alpha = 1$ и параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Предположим, что $|p_1(t)| \leq 1$, $t \in T$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1, & t \in T = [0, \pi], \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2, \\ \dot{p}_1 &= p_2 x_1, \\ \dot{p}_2 &= 0, \\ x_1(0) &= 0, & x_2(0) = 0, & x_1(\pi) = 0, & p_2(\pi) = -1. \end{aligned} \tag{24}$$

Краевая задача (24) сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1, & t \in T = [0, \pi], \\ \dot{p}_1 &= -x_1, \\ x_1(0) &= 0, & x_1(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \sin t, \quad p_1(t) = \cos t, \quad t \in T,$$

является решением краевой задачи (25) (условие $|p_1(t)| \leq 1$, $t \in T$ выполняется). Соответствующее выходное управление

$$v(t) = \cos t, \quad t \in T.$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0 :

$$\Phi_0(v) = -\frac{\pi}{2} < \Phi_0(u^0) = 0.$$

6. Заключение. Предлагаемые методы краевых задач для нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе нелинейных задач с ограничениями характеризуются следующими свойствами.

1. Отсутствие трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов.
2. Точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации последовательных приближений управления.
3. Возможность строгого улучшения неоптимальных экстремальных управлений.
4. Трудоемкость метода на каждой итерации определяется трудоемкостью решения вспомогательной конечномерной параметрической задачи.

Указанные свойства являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987.
2. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
3. Булдаев А. С. Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — 1. — С. 35–53.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994.
5. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
6. Трунин Д. О. Проекционные методы улучшения управлений в нелинейных управляемых системах с терминальными ограничениями // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 142–149.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Трунин Дмитрий Олегович (Trunin Dmitry Olegovich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: tdobsu@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 53–61
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-53-61

УДК 517.95; 532.5

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2025 г. В. Н. ХАНХАСАЕВ, С. И. МУНЯЕВ

Аннотация. В работе рассматривается вычислительная модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода, описывающая процесс коммутационного отключения электрической дуги с добавлением периода устойчивого горения её до момента отключения и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гиперболо-параболическим. Численный расчет проведен ведется в пакете MathCad-15 по неявной разностной схеме методом теплового баланса. Доказана корректность постановки первой краевой задачи для некоторого нелинейного уравнения высокого порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейное уравнение смешанного типа, неявная разностная схема, третье краевое условие, метод теплового баланса, уравнение высокого порядка.

INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SOME NONLINEAR MIXED HEAT CONDUCTIVITY OPERATORS

© 2025 V. N. KHANKHASAEV, S. M. MUNYAEV

ABSTRACT. In this paper, we consider a computational model for a mixed nonlinear heat equation with boundary conditions of the third kind that describes the process of switching off an electric arc including the interval of its stable combustion until the moment of switching off and replacing the strictly hyperbolic heat equation with a hyperbolic-parabolic equation. The numerical simulation of this problem based on an implicit difference scheme and the heat balance method was performed by using the MathCad-15 software. Also, we prove the well-posedness of the first boundary-value problem for some high-order nonlinear equation.

Keywords and phrases: hyperbolic heat equation, nonlinear equation of mixed type, implicit difference scheme, third boundary condition, heat balance method, high order equations.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

1. Введение. Пылеугольное топливо для получения тепловой и электрической энергии используется уже более столетия. Для его воспламенения и дальнейшего сжигания в определенном режиме необходимо довести температуру парового котла до нужного уровня. До недавнего времени это достигалось при помощи дорогостоящего и вредного для окружающей среды топочного мазута. Сегодня в развитых странах применяются современные плазменно-топливные технологии; при этом используемая плазма, по сути, аналогична дуговому разряду короткого замыкания, возникающих в высоковольтных сетях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

В таких кратковременных переходных процессах с очевидной нестационарностью классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной гипотезе Фурье, создают грубые искажения температурных полей, т.е. классические гипотезы о пропорциональности плотности потока тепла вектору градиента температуры приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Для разрешения этого парадокса многими учеными на основе молекулярно-кинетических представлений, учитывающих гипотезу о конечности времени соударения молекул и представление о длине свободного пробега, был получен новый обобщенный закон тепломассопереноса, в котором фигурирует дополнительный элемент — так называемое время релаксации, т.е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. При этом получается уравнение тепломассопереноса гиперболического типа.

2. Постановка начально-краевой задачи. Продолжая упомянутые исследования, рассмотрим нелинейное уравнение смешанного типа в частных производных второго порядка

$$k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + c(x, t) u(x, t) + bu^r(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

в области $G = [0, L] \times [-T_1, T_2]$; здесь коэффициент тепловой релаксации $k(x, t)$ удовлетворяет условиям $k(x, t) = 0$ при $t \leq 0$ и $k(x, t) > 0$ при $t > 0$; $\lambda(x, t)$ — коэффициент теплопроводности, $f(x, t)$ — переменный по пространственной и временной координатам внутренний источник тепла, $r > 1$ — целый параметр законов излучения.

Начально-краевая задача заключается в поиске решения уравнения (1) при выполнении следующих граничных условий третьего рода и заданного начального профиля температуры $u_0(x)$:

$$\left[\mp \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_{0,L} u(x, t) \right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t), \quad t \in [-T_1, T_2], \quad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \quad (3)$$

где $\alpha_{0,L}$ и $q_{0,L}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня (см. [4]). Расчет ведется по квазилинейной методике, описанной в [4] для нелинейных уравнений.

Для численного расчета поставленной задачи в пакете MathCad-15, зададим конкретные значения коэффициентов уравнения (1): $k(x, t) = k$ при $t > 0$, $a(x, t) = a > 0$, $\lambda(x, t) = x + 2$, $c(x, t) = c < 0$. Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(x + 2) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + cu(x, t) + bu(x, t)^r + f(x, t). \quad (4)$$

3. Численное решение поставленной задачи. Проведем дискретизацию по пространственной и временной переменным: $\{x_i\}_{i=1}^N$, $x_i = ih$, $h = L/N$; $\{\tau_j\}_{j=0}^{M=M_1+M_2}$, $\tau_1 = T_1/M_1$ при $t \leq 0$ и $\tau_2 = T_2/M_2$ при $t > 0$. Составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема ячейки $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ на промежутке времени $[t_{j-1}, t_j]$ с использованием интегро-интерполяционного метода (см. [4]). В таком случае неявная разностная схема будет выглядеть следующим образом:

$$k \frac{(U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}))}{\tau^2} + a \frac{(U_i^{j+1} - U_i^j)}{\tau} = [W_{i+0,5} - W_{i-0,5}] + cU_i^{j+1} + b(U_i^j)^r + f(ih, (j+1)\tau), \quad (5)$$

где $x_{i\pm 0,5} = (x_i \pm h/2)$, $W_{i\pm 0,5}$ — потоки тепла. Основанием для расчета является обычный закон Фурье:

$$W_{i+0,5} \approx \lambda_{i+0,5} \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{h^2}, \quad W_{i-0,5} \approx \lambda_{i-0,5} \frac{U_i^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \quad (6)$$

Эффективные теплопроводности $\lambda_{i\pm 0,5}$ определим следующим образом:

$$\lambda_{i\pm 0,5} = 2 \frac{\lambda(x_i) \lambda(x_{i\pm 1})}{\lambda(x_i) + \lambda(x_{i\pm 1})}. \quad (7)$$

Используя тот же метод конечных объемов, составляем разностные уравнения для краевых элементарных объемов [4], учитывая при этом тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из краевых условий (2):

$$\begin{aligned} -\lambda_{0,5} \frac{U_1^{j+1} - U_0^{j+1}}{h} + \alpha_0 U_0^{j+1} = \\ = q_0((j+1)\tau) + \frac{h}{2} \left[cU_0^{j+1} + b(U_0^j)^r + f(0, (j+1)\tau) - a \frac{U_0^{j+1} - U_0^j}{\tau} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{N-0,5} \frac{U_N^{j+1} - U_{N-1}^{j+1}}{h} + \alpha_L U_N^{j+1} = \\ = q_L((j+1)\tau) + \frac{h}{2} \left[cU_N^{j+1} + b(U_N^j)^r + f(Nh, (j+1)\tau) - a \frac{U_N^{j+1} - U_N^j}{\tau} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученная система является частным случаем системы канонического вида (см. [4]) для метода прогонки:

$$A_i U_{i-1}^{j+1} + B_i U_i^{j+1} + C_i U_{i+1}^{j+1} = F_i, \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (10)$$

Получаем следующую схему:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\lambda_{0,5}}{h} + \alpha_0 - \frac{ch}{2} + \frac{ah}{2\tau} \right] U_0^{j+1} - \left[\frac{\lambda_{0,5}}{h} \right] U_1^{j+1} = \\ = q_0((j+1)\tau) + \frac{hb}{2} (U_0^j)^r + \frac{h}{2} f(0, (j+1)\tau) + \frac{ah}{2\tau} U_0^j; \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\lambda_{i-0,5}}{h^2} \right] U_{i-1}^{j+1} + \left[\frac{k}{\tau^2} + \frac{a}{\tau} + \frac{\lambda_{i+0,5}}{h^2} + \frac{\lambda_{i-0,5}}{h^2} - c \right] U_i^{j+1} - \left[\frac{\lambda_{i+0,5}}{h^2} \right] U_{i+1}^{j+1} = \\ = b(U_i^j)^r + f(ih, (j+1)\tau) + \frac{2k}{\tau^2} U_i^j - \frac{k}{\tau^2} U_i^{j-1} + \frac{a}{\tau} U_i^j; \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\lambda_{N-0,5}}{h} \right] U_{N-1}^{j+1} + \left[\frac{\lambda_{N-0,5}}{h} + \alpha_L - \frac{ch}{2} + \frac{ah}{2\tau} \right] U_N^{j+1} = \\ = q_L + \frac{bh}{2} (U_N^j)^r + f(Nh, (j+1)\tau) + \frac{ah}{2\tau} U_N^j. \end{aligned} \quad (11c)$$

4. Формирование начальных условий для гиперболического этапа. Первоначально уравнение (4) соответствует параболическому типу, т.е. $k(x, t) = 0$ при $t \leq 0$, где начальное условие для уравнения (4) имеет вид (3). Однако $k(x, t) > 0$ при $0 < t \leq T_2$, и уравнение (4) преобразуется в гиперболический вид, для которого требуется найти первое начальное условие $u(x, 0)$ из предыдущего расчета для параболического этапа при $t = 0$:

$$u(x_i, 0) = U_i^{M_1}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (12)$$

Далее требуется определить второе начальное условие для гиперболического уравнения. Для этого указанное условие зададим с повышением порядка аппроксимации по времени до второго, в отличие от первого порядка для формулы

$$\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_2}. \quad (13)$$

Запишем ряд Тейлора на точном решении $u(x, t)$ по времени в окрестности $t = 0$:

$$u(x_i, \tau_2) = u(x_i, 0) + \tau_2 \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, 0)}{\partial t^2} + O(\tau_2^3), \quad (14)$$

где вторую производную выведем из уравнения (4):

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + (x + 2) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] - \frac{a}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{c}{k} u(x, t) + \frac{b}{k} u^r(x, t) + \frac{1}{k} f(x, t). \quad (15)$$

Найдем отсюда неизвестное дискретное значение:

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2 \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial x} + \frac{(x_i + 2)}{k} \frac{\partial^2 u(x_i, 0)}{\partial x^2} - \frac{a}{k} \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial x} + \frac{c}{k} u(x_i, 0) + \frac{b}{k} u^r(x_i, 0) + \frac{1}{k} f(x_i, 0) \right] + O(\tau_2^3),$$

т.е.

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2 \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2^2}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i + 2)}{k} \frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \frac{a}{k} \frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k} U_i^{M_1} + \frac{b}{k} (U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k} f(ih, M_1\tau) \right] + O(\tau_2^3).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} &= \frac{U_i^{M_1+1} - U_i^{M_1}}{\tau_2} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \\ &+ \frac{\tau_2}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i + 2)}{k} \frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \frac{a}{k} \frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{k} U_i^{M_1} + \frac{b}{k} (U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k} f(ih, M_1\tau) \right] + O(\tau_2^3). \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе начальное условие для расчета гиперболического этапа со вторым порядком аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} &= \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i + 2)}{k} \frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{k} \frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k} U_i^{M_1} + \frac{b}{k} (U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k} f(ih, M_1\tau) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

После установления всех необходимых компонентов уравнение (4) с начально-краевыми условиями (2)–(3) решается методом прогонки в среде Mathcad-15. Полученные температурные поля хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Результаты расчета представлены в виде графика на рис. 1.

5. Постановка задачи для нелинейного уравнения шестого порядка. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ , состоящей из конечного числа $(n - 1)$ -мерных поверхностей класса C^2 , позволяющей для любой точки пересечения гладких кусков границы Γ выбрать некоторую окрестность этой точки и неособое преобразование $y = y(x)$ старых переменных x к новым переменным y класса C^2 , при котором образом пересечения границы Γ с выбранной окрестностью является часть гиперплоскости $y_1 = 0$ и цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси y_1 .

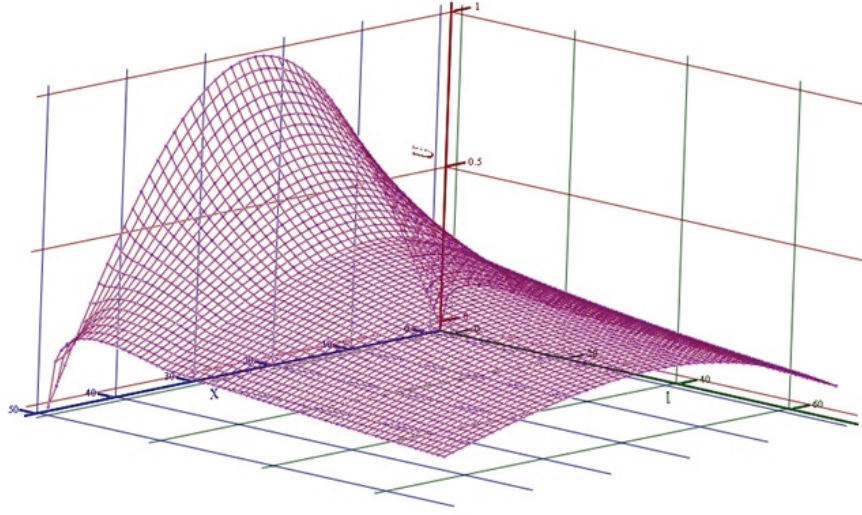


Рис. 1. Результаты расчета.

В области D рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка:

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^n L_i^* A_i(x, D_\beta u, L_j u) + \sum_{|\alpha| \leq 2} D_\alpha^* B_\alpha(x, D_\beta u, L_j u) = h(x), \quad (17)$$

$$|\beta| \leq 2, \quad j = \overline{0, n}, \quad L_0 = K, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} K, \quad i = \overline{1, n}, \quad D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u|_\Gamma = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = f_2(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = f_3(x), \quad (18)$$

где K — произвольный линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка:

$$Ku \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \quad (19)$$

с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющий неравенству

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \geq \alpha_1 \|u\|_{W_r^2(D)}, \quad m, r \geq 2, \quad (20)$$

для любых функций $u(x) \in C_K$ из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе Γ вместе с первой производной по нормали; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ ; Γ_0 — часть границы Γ , совпадающая с характеристической поверхностью оператора K :

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in \Gamma : \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu_i \nu_j \right) (x) = 0 \right\}. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что широкий класс эллиптических, параболических и гиперболических операторов второго порядка, а также операторов с вырождением и операторов смешанного типа, в частности, введенный в [1] смешанный оператор теплопроводности при достаточно малой функции релаксации, удовлетворяют неравенству (20) для функций из C_K . В качестве конкретного оператора K вида (19) можно взять также линейный смешанный оператор теплопроводности (1)

из второй части данной статьи с обобщением на n -мерный случай:

$$Ku \equiv k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \sum_{i,j=2}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x, t) + c(x, t) u(x, t),$$

где переменная t играет роль переменной x_1 , а переменная x изменяется в пространстве $\mathbb{R}^{(n-1)}$. При выполнении некоторых условий, приведенных в [2, 5], показано, что неравенство (20) выполняется при $m = r = 2$.

Если же говорить о структуре всего уравнения (17), то первое слагаемое есть оператор шестого порядка, определяющий тип уравнения и энергетическое пространство; второе слагаемое есть подчиненный оператор, максимум четвертого порядка; условия на нелинейные функции A_i , $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$, $i, j = \overline{0, n}$, $|\alpha|, |\beta| \leq 2$, будут приведены далее.

Определим банаховы пространства H_+ и $H_\oplus$ с нормами

$$\|u\|_+ = \|Ku\|_{W_m^1(D)}, \quad \|u\|_\oplus = \|Ku\|_{W_m^1(D)} + \|u\|_{W_e^2(D)}, \quad e \geq 2,$$

полученные замыканием по этим нормам множества функций

$$C_L = \left\{ u \in C_K : \frac{\partial u^2}{\partial \nu^2} \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Из (20) следует, что $\|\cdot\|_+$ — действительно норма, а пространства H_+ и $H_\oplus$ сепарабельны. Опираясь на работы [5, 6], можно показать, что они также рефлексивны и для них имеет место следующая лемма.

Лемма. Для любой функции $u(x) \in C_K$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое α_2 , что выполнено неравенство

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \geq \alpha_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \quad \Gamma_\varepsilon = \left\{ x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \rho(x, \Gamma_0) > \varepsilon \right\}. \quad (22)$$

Доказательство проводится с использованием теорем вложения Соболева, неравенства (19), аналогично схеме, приведенной в [5].

Из теорем вложения пространств Соболева и неравенства (19) непосредственно следует, что краевые условия класса функций C_K выполняются и для функций из пространств H_+ и $H_\oplus$. После введения непрерывного оператора следа для второй производной по нормали на $\Gamma \setminus \Gamma_0$ и продолжения его по непрерывности на пространство H_+ получаем, что по неравенству (22) дополнительное краевое условие класса функций C_L наследуется и для пространства H_+ , т.е. для функций из H_+ выполнены однородные краевые условия (18).

В формулировках, приведённых ниже, выражения в скобках означают версии соответствующего утверждения для пространства $H_\oplus$, в отличие от основного варианта — для пространства H_+ (в случае $r \geq e$ в пространстве $H_\oplus$ нет необходимости).

Предположим, что функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ из (18) допускают продолжение $f(x)$ внутрь области D из пространства $W_m^3(D) \cap W_k^2(D)$, где $k = \max(r, e)$. Тогда совокупность функций вида $u(x) = z(x) + f(x)$, где $z(x) \in H_+$ ($H_\oplus$), образует пространство $H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$).

Определение 1. Функцию $u(x) \in H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$) будем называть *слабым обобщенным решением* первой краевой задачи (17), (18), если для всех $v(x) \in C_L$, $j = \overline{0, n}$ и $|\beta| \leq 2$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i=0}^n \left(A_i(x, D_\beta u, L_j u) L_i v \right) + \sum_{|\alpha| \leq 2} \left(B_\alpha(x, D_\beta u, L_j u), D_\alpha v \right) = (h, v).$$

Определение 2. Функцию $u(x) \in H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$) будем называть *сильным обобщенным решением* первой краевой задачи (17), (18), если существует такая последовательность функций $z_i(x) \in C_L$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_i + f - u\|_{+(\oplus)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|L(z_i + f) - h\|_{-(\ominus)} = 0,$$

где H_- , $H_\ominus$ — негативные пространства к H_+ и $H_\oplus$, построенные относительно гильбертова пространства $L_2(D)$.

Приведем ряд предположений для различных уравнений вида (17), означающих условия на поведение нелинейных функций A_i , $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$, $i, j = \overline{0, n}$, $|\alpha|, |\beta| \leq 2$.

1⁰. *Условия ограниченности и непрерывности* $L : H_+(f) \rightarrow H_-(D)$. Функции A_i , $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. почти при всех $x \in D$ непрерывны по совокупности переменных ξ_β , η_j , при всех значениях ξ_β , η_j измеримы по x и удовлетворяют неравенствам

$$|A_i(x, \xi_\beta, \eta_j)| \leq \alpha_3 \left(a(x) + \sum_{|\beta| \leq 2} |\xi_\beta|^{p_{i\beta}} + \sum_{j=0}^n |\eta_j|^{p_{ij}} \right),$$

$$|B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)| \leq \alpha_3 \left(b(x) + \sum_{|\beta| \leq 2} |\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + \sum_{j=0}^n |\eta_j|^{p_{\alpha j}} \right),$$

где при $n > k$

$$\begin{array}{lll} j = \overline{0, n} : & |\beta| = 2 : & |\beta| < 2 : \\ i = \overline{0, n} : & p_{ij} = m - 1; & p_{i\beta} = \frac{k}{m'}; & p_{i\beta} = \frac{kn}{m'(n-k)}; \\ |\alpha| = 2 : & p_{\alpha j} = \frac{m}{k'}; & p_{\alpha\beta} = k - 1; & p_{\alpha\beta} = \frac{n(k-1)}{n-k}; \\ |\alpha| < 2 : & p_{\alpha j} = \frac{m(n(k-1)+k)}{nk}; & p_{\alpha\beta} = \frac{n(k-1)+k}{n}; & p_{\alpha\beta} = \frac{n(k-1)+k}{n-k} \end{array}$$

и $p_{i\beta}$, $p_{\alpha\beta}$ ($i = \overline{0, n}$, $|\alpha| \leq 2$, $|\beta| < 2$) — любые неотрицательные числа при $n \leq k$ и

$$a(x), b(x) \in L_{p'}(D), \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

2⁰. *Условие коэрцитивности оператора* Lu . Для любой функции $u(x) \in H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$) имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^n \left(A_i(x, D_\beta u, L_j u), L_i u \right) + \sum_{|\alpha| \leq 2} \left(B_\alpha(x, D_\beta u, L_j u), D_\alpha u \right) \geq \alpha_4 \|u\|_+^m - \alpha_5.$$

Для любой функции $u(x) \in H_\oplus(f)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^n \left(A_i(x, D_\beta u, L_j u), L_i u \right) + \sum_{|\alpha| \leq 2} \left(B_\alpha(x, D_\beta u, L_j u), D_\alpha u \right) \geq \alpha_6 \left(\|u\|_+^m + \|u\|_{W_e^2(D)}^e \right) - \alpha_7,$$

где $j = \overline{0, n}$, $|\beta| \leq 2$.

3⁰. *Условие полуограниченности вариации оператора* Lu . Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$) из шара $\|u\|_+ \leq R$ ($\|u\|_\oplus \leq R$) справедливо неравенство

$$(Lu - Lv, u - v) \geq -c(R, \|u - v\|_{W_s^1(D)}),$$

где $c(R, \rho) \geq 0$ — такая непрерывная функция, что $c(R, \xi\rho)/\xi \xrightarrow{\xi \rightarrow +0} 0$ для любых R и ρ , $1 \leq s < kn/(n-k)$ при $n > k$, s — любое неотрицательное число при $n \leq k$.

4⁰. *Условие строгой монотонности оператора* Lu . Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ ($H_\oplus(f)$), $u(x) \neq v(x)$, справедливо неравенство $(Lu - Lv, u - v) > 0$.

5⁰. Условие дефинитности вариации оператора Lu . Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ имеет место неравенство

$$(Lu - Lv, u - v) \geq \alpha_8 \|u - v\|_+^m.$$

Для любых функций $u(x), v(x) \in H_\oplus(f)$ имеет место неравенство

$$((Lu - Lv, u - v) \geq \alpha_9 (\|u - v\|_+^m + \|u - v\|_{W_e^2(D)}^e)).$$

Как и в работах [5, 6], с помощью операторной теоремы (см. [3, с. 29]) доказывается следующий результат.

Теорема. Если выполнены предположения 1⁰–3⁰, то первая краевая задача (17), (18) для любой функции $h(x) \in H_- (H_\ominus)$ имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение из пространства $H_+(f) (H_\oplus(f))$. Если выполнены предположения 1⁰, 2⁰, 4⁰, то это решение единственно, а при выполнении условий 1⁰, 2⁰, 5⁰ слабое решение совпадает с сильным, т.е. отображение

$$L : H_+(f) \rightarrow H_- \quad (L : H_\oplus(f) \rightarrow H_\ominus)$$

является гомеоморфизмом.

6. Заключение. При исследовании ряда прямых и обратных задач для линейных и нелинейных уравнений $Ku = h$ смешанного типа второго и третьего порядков бывает актуально получение корректных постановок краевых задач для уравнений четвертого и шестого порядков в связи с предложенным Ю. А. Дубинским подходом (см. [3]), когда с уравнением $Ku = h$, которое в общем случае неразрешимо для произвольной правой части h даже из вполне гладких пространств, связывается уравнение $K^*Ku = K^*h$, которое уже разрешимо всегда в этих пространствах. Тогда исходное уравнение разрешимо с точностью до ядра оператора K^* , которое может быть описано с помощью некоторых ортогональных условий на область значений оператора Ku , соответствующего первоначальной некорректной задаче. Если при этом при некоторых условиях на коэффициенты уравнения оператор K^*K осуществляет гомеоморфизм, как показано в настоящей работе даже в еще более общем случае, то численные приближения по методу Галеркина сходятся сильно к гладкому решению из соболевских пространств W_p^l , что очень важно для эффективности численного расчета, а также для доказательства устойчивости некоторых разностных схем для уравнений $Ku = h$.

В случае строгой эллиптичности оператора Ku постановка первой краевой задачи для уравнения (17) не вызывает проблем, и эта задача Дирихле в чистом виде входит частным случаем в данную работу (в частности, упомянем работы Ц. Б. Шойнжурова и его учеников, в которых исследуются различные аналогичные нелинейные эллиптические уравнения и для которых найдены минимумы функционалов погрешности кубатурных формул для численных расчетов в банаховых пространствах W_p^l . В работе В. Н. Врагова [2] для достаточно общих уравнений вида (19)) смешанного типа с помощью метода конечно-разностной аппроксимации доказана оценка (20) данной работы в гильбертовом случае. Кроме этого, в [2] даны оценки скорости сходимости сильных решений для гипербола-параболических уравнений.

В работе [1], посвященной математическому моделированию процесса гашения электрической дуги в потоке газа, численно и аналитически решаются различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье. В [5] приведены обобщение этого оператора теплопроводности на смешанный тип и постановки первой краевой задачи для нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка. Так как энергетическое пространство в этой работе и в [5, 6] строится не только для эллиптических операторов $K^*Ku = K^*h$, то для корректности постановки необходимо освободить характеристическую часть границы от некоторых краевых условий, что показано получением определенных априорных внутренних и граничных оценок и применением теорем вложения Соболева.

Кроме этого, обратные задачи для уравнений $Ku = h$ иногда переопределены из-за избыточной информации о решении на всей границе и получение самих решений, как численно, так и аналитически, затруднено вследствие некорректности постановки, тогда как наличие этих дополнительных краевых условий помогает численному решению корректно поставленной первой

краевой задачи для уравнения $K^*Ku = K^*h$, для которой было бы интересным создание различных устойчивых разностных схем. В дальнейшем предполагается численное решение краевых задач для уравнений шестого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н. Об одном обобщении уравнений Навье—Стокса // Электричество. — 1996. — 11. — С. 17–23.
2. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
3. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки техн. Совр. пробл. мат. Нов. достиж. — 1976. — С. 1–130.
4. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. — М.: Высшая школа, 1990.
5. Ханхасаев В. Н. К теории нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка // в кн.: Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1988. — С. 154–165.
6. Ханхасаев В. Н. Разрешимость задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения смешанного типа 4-го порядка // в кн.: Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 1982. — С. 172–177.
7. Шашков А. Г. Волновые явления теплопроводности. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ханхасаев Владислав Николаевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ;

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia;

Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: hanhvladnick@mail.ru

Муняев Сергей Иннокентьевич

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ

(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: sergmoon1986@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 62–97
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-62-97

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ. IV. СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к многообразию меньшей размерности. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 236. — С. 72–88. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 237. — С. 49–75. Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 238. — С. 69–100.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION. IV. NINTH-ORDER SYSTEMS

© 2025 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the ninth order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of lower-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented. The first part of the paper: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **236** (2024), pp. 72–88. The second part of the paper: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **237** (2024), pp. 49–75. The third part of the paper: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **238** (2024), pp. 69–100.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

4. Инварианты однородных систем девятого порядка	63
4.1. Введение	63
4.2. Некоторые примеры из динамики пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил	64
4.3. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля	72
4.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	82
4.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования	83
4.6. Системы со знакопеременной диссипацией	85
Список литературы	93

4. ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

4.1. Введение. Как известно (см. [14, 15, 83]), нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками.

Как и в разделах 1–3, наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с четырьмя степенями свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [50, 51, 58, 75]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на четырехмерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние

энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она таковыми обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-либо знака и, как следствие, у системы наблюдается наличие хотя бы одного первого интеграла (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела.

В данном разделе 4 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система с четырьмя степенями свободы на своем восьмимерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

4.2. Некоторые примеры из динамики пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил. Рассмотрим движение однородного осесимметричного пятимерного твердого тела с передним плоским торцом (четырёхмерным диском) в неконсервативном поле сил в условиях квазистационарности. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр четырёхмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \dots x_5$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \dots, Dx_5$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \dots, I_5 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [8, 19]), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству $\mathbb{R}^5$, при котором касательные силы воздействия среды на четырёхмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} & \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_{10} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_9 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\ & + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_x}{m}, \\ & \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ & + \omega_{10} v \cos \alpha - \omega_8 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \\ & - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_9 \omega_8 + \omega_6 \omega_7 + \omega_3 \omega_4) - \sigma \omega_{10} = 0, \\ & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_9 v \cos \alpha + \omega_8 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_8 \omega_{10} - \omega_5 \omega_7 - \omega_2 \omega_4) + \sigma \omega_9 = 0, \\ & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_7 v \cos \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \sigma(\omega_6 \omega_{10} + \omega_5 \omega_9 - \omega_1 \omega_4) - \sigma \dot{\omega}_7 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\
& + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_4 v \cos \alpha + \omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
& - \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \sigma(\omega_3 \omega_{10} + \omega_2 \omega_9 + \omega_1 \omega_7) + \sigma \dot{\omega}_4 = 0,
\end{aligned}$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, $v > 0$.

Вспомогательная матрица для вычисления момента неконсервативной силы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
& (\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4 \omega_7 + \omega_3 \omega_6 + \omega_2 \omega_5) = 0, \\
& (\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1 \omega_5 - \omega_3 \omega_8 - \omega_4 \omega_9) = 0, \\
& (\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4 \omega_{10} - \omega_2 \omega_8 - \omega_1 \omega_6) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3 \omega_{10} + \omega_2 \omega_9 + \omega_1 \omega_7) = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7 \omega_9 + \omega_6 \omega_8 + \omega_1 \omega_2) = 0, \\
& (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5 \omega_8 - \omega_7 \omega_{10} - \omega_1 \omega_3) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_4)\dot{\omega}_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1 \omega_4 - \omega_6 \omega_{10} - \omega_5 \omega_9) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_2 + \lambda_3)\dot{\omega}_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9 \omega_{10} + \omega_5 \omega_6 + \omega_2 \omega_3) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8 \omega_{10} - \omega_5 \omega_7 - \omega_2 \omega_4) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8 \omega_9 + \omega_6 \omega_7 + \omega_3 \omega_4) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2.
\end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (4.2.1), (4.2.3) 15-го порядка является прямое произведение пятимерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(5)$: $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^4 \times \mathfrak{so}(5)$.

Сразу же заметим, что система (4.2.1), (4.2.3), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3 = I_4 = I_5$, обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0. \quad (4.2.4)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \quad (4.2.5)$$

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [78])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (4.2.6)$$

то в системе (4.2.1), (4.2.3) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (4.2.7)$$

Случай (4.2.7) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы восьмого порядка после некоторого преобразования системы 15-го порядка (4.2.1), (4.2.3).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega) =$$

$$= \sum_{i,j=0, i \leq j}^4 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_{r_i} \omega_{r_j} = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_{r_0} = v. \quad (4.2.8)$$

Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1} = \omega_4, \dots, \omega_{r_4} = \omega_{10}$ посредством композиции трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{34}(-\beta_1) \circ \mathbf{T}_{23}(-\beta_2) \circ \mathbf{T}_{12}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \quad (4.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{34}(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{23}(\beta_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ 0 & \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{12}(\beta_3) &= \begin{pmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 & 0 & 0 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos \beta_3 + \omega_7 \sin \beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \cos \beta_2 + \omega_9 \sin \beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos \beta_3 + \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 + \omega_9 \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{10} \sin \beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{10} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Систему (4.2.1), (4.2.3) в случаях (4.2.4), (4.2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \left(\sum_{s=1}^4 z_s^2 \right) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_4 v - \sigma \left(\sum_{s=1}^4 z_s^2 \right) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_3 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (4.2.14)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (4.2.15)$$

$$\dot{\beta}_3 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (4.2.16)$$

$$\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.17)$$

$$\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.18)$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.19)$$

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (4.2.20)$$

Здесь введены следующие функции:

$$\begin{aligned} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \beta_3 \right) \rangle, \\ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3 \right) \rangle, \\ \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_3 + \frac{\pi}{2} \right) \rangle, \end{aligned}$$

здесь $\langle \dots, \dots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$, а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \\ &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^5 x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \beta_2, \beta_3). \end{aligned}$$

И теперь здесь $i_{sN}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $s = 1, \dots, 5$, ($i_{1N}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N}\}$ на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \right),$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \end{pmatrix}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, \dots, 4$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (4.2.12)–(4.2.20) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_4 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} Z_4' &= \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \{ -Z_3 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &\quad - Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \} - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \\ Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\times \left\{ Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \right. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$+ Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \Big\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.24)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left[-Z_4 + Z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left[-Z_1 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right] + \\ + \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.25)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left\{ Z_4 - Z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_2 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.26)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.27)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.28)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.29)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе девятого порядка (4.2.21)–(4.2.29) может быть выделена независимая подсистема восьмого порядка (4.2.22)–(4.2.29), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (4.2.7) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

Система (4.2.21)–(4.2.29) содержит динамические уравнения движения пятимерного твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.30)$$

$$\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha, \quad (4.2.31)$$

$$Z'_4 = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_4 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.32)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \sigma n_1 Z_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.33)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.34)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.35)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.2.36)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.2.37)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (4.2.38)$$

4.2.1. *Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19], динамические функции s , x_{2N} , x_{3N} , x_{4N} и x_{5N} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{2N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad (4.2.39)$$

$$x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3,$$

$$x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{5N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0,$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (4.2.21)–(4.2.29), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Тогда, благодаря условиям (4.2.6), (4.2.39) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.2.21)–(4.2.29)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.40)$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (4.2.41)$$

$$Z'_4 = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.42)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.43)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.44)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.45)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.2.46)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.2.47)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (4.2.48)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/3I_2$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (4.2.40)–(4.2.48) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T\mathbb{S}^4\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$,

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$.

Теорема 4.1. Система (4.2.40)–(4.2.48) обладает шестью независимыми первыми интегралами (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–3) необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

4.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для тел произвольной размерности.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{5N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на четырехмерный диск, $Q = (Q_1, \dots, Q_5)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \dots, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, \dots, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}. \quad (4.2.49)$$

Здесь $(h_1, \dots, h_5)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то $x_{2N} = Q_2 - h_1\omega_{10}/v$, $x_{3N} = Q_3 + h_1\omega_9/v$, $x_{4N} = Q_4 - h_1\omega_7/v$, $x_{5N} = Q_5 + h_1\omega_4/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19] допустим равенства $Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1$, $Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2$, $Q_4 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3$, $Q_5 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3$, $A > 0$, а динамические функции s , x_{2N} , x_{3N} , x_{4N} и x_{5N} примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_{10}}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_9}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - h \frac{\omega_7}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - h \frac{\omega_4}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = \dots = h_5$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (4.2.22)–(4.2.29), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h_1}{v} z_3, \\ \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= -\frac{h_1}{v} z_2, \\ \Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h_1}{v} z_1.\end{aligned}\tag{4.2.51}$$

Тогда, благодаря условиям (4.2.6), (4.2.50) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.2.21)–(4.2.29)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\tag{4.2.52}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_4 \cos^2 \alpha,\tag{4.2.53}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_4^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_4 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.54}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= (1 + bH_1)Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.55}$$

$$\begin{aligned}Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_2 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.56}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_1 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.57}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\tag{4.2.58}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1},\tag{4.2.59}$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3},\tag{4.2.60}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/3I_2$, $H_1 = Bh/3I_2 n_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (4.2.52)–(4.2.60) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times TS^4\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере $S^4\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$.

Теорема 4.2. Система (4.2.52)–(4.2.60) обладает шестью независимыми первыми интегралами (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–3) необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

4.3. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{v}, \dot{z}_4, \dots, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, v\dot{\beta}_2, v\dot{\beta}_3)^T &= A(\alpha, \beta)P, \\ P^T &= (v^2, vz_4, \dots, vz_1, z_4^2, z_4z_3, z_4z_2, z_4z_1, z_3^2, z_3z_2, z_3z_1, z_2^2, z_2z_1, z_1^2), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 9×15 (система, аналогичная (1.3.1), (2.3.1), (3.3.1)).

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые переменные $Z_k, z_k = Z_k v, k = 1, \dots, 4, Z = (Z_1, \dots, Z_4)$, систему (4.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q, \\ Q^T &= (1, Z_4, \dots, Z_1, Z_4^2, Z_4Z_3, Z_4Z_2, Z_4Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$(Z_4', \dots, Z_1', \alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3')^T = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_4\Psi(\alpha, Z), \dots, Z_1\Psi(\alpha, Z), 0, 0, 0, 0)^T, \quad (4.3.3)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (4.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать восемь оставшихся уравнений в качестве системы (4.3.3) на восьмимерном фазовом многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (4.3.2), (4.3.3) девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha), \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4.3.4)$$

$$\alpha' = f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha),$$

$$\begin{aligned} Z_4' &= -f_4(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z) = \zeta_4(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_3 Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z) = \zeta_3(Z; \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2 Z_4 - f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] Z_2 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_1 Z_4 - f_1(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] Z_1 Z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha) g_1(\alpha) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= Z_3 f_1(\alpha), \\ \beta'_2 &= Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),\end{aligned}$$

$DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)| / d\xi$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $\dots$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (4.3.4), (4.3.5) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*.

Уравнение (4.3.4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (4.3.5) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, см. также [36, 38]).

Система (4.3.4), (4.3.5) имеет более общий вид, чем система (4.2.30)–(4.2.38), взятая из динамики пятимерного твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, а также при

$$\begin{aligned}f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_4(\alpha) \equiv -1, \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \quad h(\beta_2) = -\frac{1}{\sin \beta_2}, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \quad \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2, \\ \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\ \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) = -\sin \beta_2 \cos \beta_2,\end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Рассмотрим структуру системы (4.3.5). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с 13 ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (в частности, на расслоении (четырехмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

Действительно, выбрав новые координаты $z_1, \dots, z_4$ в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= z_4 f_4(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 &= z_3 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (4.3.5)):

$$Z'_k = \zeta_k(Z; \alpha, \beta), \quad k = 1, \dots, 4,\tag{4.3.8}$$

при этом уравнения (4.3.6) почти всюду эквивалентны совокупности (4.3.7), (4.3.8), которая, прежде всего, присутствует в системе (4.3.5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (4.3.7) выбрать равенства

$$\begin{aligned}\alpha' &= Z_4 f_4(\alpha), \\ \beta'_1 &= Z_3 f_1(\alpha), \\ \beta'_2 &= Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2).\end{aligned}$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (4.3.6).

(a) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного пятимерного твердого тела.

(b) Системы на касательном расслоении более общей четырехмерной поверхности вращения.

(c) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (4.3.4), (4.3.5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системах (1.3.5), (1.3.6), (2.3.4), (2.3.5) и (3.3.4), (3.3.5), они не нарушают консервативности, поскольку система (4.3.4), (4.3.5) обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов.

4.3.1. О количествах неизвестных функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ функций при $n = 4$, т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (4.3.7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь тринадцатью ($n(n-1)+1$ функцией при $n = 4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (4.3.6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 7 ($n(n-1)/2 + 1$ функция при $n = 4$). Таким образом, мы имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(4)$) на имеющиеся $A(4) = 20$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ функции при $n = 4$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 20, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(4)$, тем больше разность $A(4) - B(4)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(4) = 16$ условий на имеющиеся $A(4) = 20$ функций. Число $B(4)$ складывается из трех слагаемых: $B(4) = B_1(4) + B_2(4) + B_3(4)$.

Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \quad (4.3.9)$$

т.е. $B_1(4) = 3$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$).

Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \\ \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

т.е. $B_2(4) = 6$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$).

Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned}
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

т.е. $B_3(4) = 7$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$).

Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned}
B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,
\end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества произвольных функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(4) - B(4) = 4$.

Замечание 4.1. Пусть выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), при этом реализуется система дифференциальных равенств (4.3.11). Тогда справедливы следующие 7 ($n(n-1)/2 + 1$ при $n = 4$) тождеств:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2), \\
& \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^1(\beta_1), \quad \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \\
& \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^2(\beta_2), \\
& \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha),
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

а также 3 ($(n-1)(n-2)/2$ при $n = 4$) тождества

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\
& \Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2).
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых трех равенств из (4.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Из (4.3.14) следуют первая строка тождеств из (4.3.12) и первая строка тождеств из (4.3.13).

Далее, в условиях замечания вторая группа из двух равенств из (4.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

И, наконец, в условиях замечания третья группа из одного равенства из (4.3.11) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (4.3.16)$$

Из (4.3.16) следует третья строка тождеств из (4.3.12).

Из последней строки (4.3.11) также следует последняя строка тождеств из (4.3.12). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 4.1.

Замечание 4.2. Пусть выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), при этом реализуются 10 тождеств (4.3.12) и (4.3.13). Тогда система дифференциальных равенств (4.3.11) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2)h^2(\beta_2), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) &+ \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) &+ \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Таким образом, при выполнении 9 условий (4.3.9), (4.3.10) 7 условий (4.3.11) и 7 условий (4.3.17) в упомянутом смысле эквивалентны.

4.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы девятого порядка достаточно знать, вообще говоря, восемь независимых инвариантов.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4.3.4), (4.3.5) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

И то, что полный набор состоит из шести, а не из восьми, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (4.3.6), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (4.3.18)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (4.3.19)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (4.3.7) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (4.3.6).

Теорема 4.3. Если выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17), то система (4.3.4), (4.3.5), рассмотренная на произведении $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, обладает полным набором, состоящим из шести гладких первых интегралов вида

$$\Phi_0(v; Z_4; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_4\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \quad (4.3.20)$$

$$\Phi_1(v; Z_4, \dots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) = C_1^2 = \text{const}; \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const};\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\};\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \\ \Psi_2(\beta_2) &= h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\};\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}.\tag{4.3.25}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}\tag{4.3.26}$$

и фазовых

$$\begin{aligned}w_4 &= Z_4, \quad w_3^* = \ln |w_3|, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, 2, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}\end{aligned}\tag{4.3.27}$$

— фазовый поток системы (4.3.4), (4.3.5) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_4(\alpha)}$$

на произведении $\mathbb{R}_+^1 \{v\} \times TM^4 \{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_4(\alpha)} dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

Доказательство. Докажем, для начала, вторую часть теоремы 4.3, а именно, сделаем замены (4.3.26) независимой переменной и (4.3.27) фазовых переменных. Тогда система (4.3.4), (4.3.5) при выполнении условий (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha),\tag{4.3.28}$$

$$\alpha' = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \Delta(\alpha),$$

$$w_4' = -\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) e^{2w_3^*} - w_4 \Psi_1(\alpha, w),\tag{4.3.29}$$

$$w_3'^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_4 - \Psi_1(\alpha, w),$$

$$w_2^* = \pm e^{w_3^*} \frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right],\tag{4.3.30}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{W_2(w_2^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1),$$

$$w_1^* = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \quad (4.3.31)$$

$$\dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)},$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (4.3.32)$$

где

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1, 2,$$

в силу замены (4.3.27), при этом в составной системе (4.3.28)–(4.3.32) штрихом обозначена также производная по новому независимому переменному τ .

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.3.28)–(4.3.32) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.3.29), по одному — для систем (4.3.30), (4.3.31) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (4.3.28) и (4.3.32) (т.е. всего *шесть*).

Как было указано выше, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; \alpha, \beta; w)$ дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (4.3.28)–(4.3.32) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; \alpha, \beta, w) W_0(v; \alpha, \beta; w)$ преобразованной системы (т.е. системы (4.3.28)–(4.3.32), умноженной на $\rho(v; \alpha, \beta; w)$) после замены $\rho(v; \alpha, \beta; w) d/dt_1 = d/dt_2$ старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (4.3.28)–(4.3.32).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (4.3.28)–(4.3.32) функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24), (2.6.1), (2.6.2) и других). Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [v^3 W_0(v; \alpha, \beta; w)] &= -4v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ &+ v^3 b(e^{2w_3^*} + 3w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_3^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании шести первых интегралов.

Действительно, дифференцирование функции (4.3.20) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) при выполнении условий (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) дает

$$2bv^2 f_4(\alpha) (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \equiv 0,$$

поскольку следующее тождество

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) \quad (4.3.33)$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (4.3.22).

Дифференцирование функции (4.3.21) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_1^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) Z_1^2 Z_3 \left\{ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\alpha)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) g(\beta_1) Z_1^2 Z_2 \left\{ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\alpha)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) \right\} - \\ & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_2^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) Z_2^2 Z_3 \left\{ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\alpha)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_2) \Gamma_{22}^1(\beta_1) \right\} - \\ & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_3^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование функции Φ_2 из (4.3.22) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_4(\alpha) \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} Z_4 \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\}.$$

Но, благодаря второму уравнению из (4.3.22), функция $\Delta(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4.3.33), что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.22).

Дифференцирование функции (4.3.23) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} Z_4 \Psi_1(\beta_1) - \\ & -v^2 f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} Z_3 \Delta(\alpha). \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (4.3.33) и

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1), \quad (4.3.34)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.23).

И, наконец, дифференцирование функции (4.3.24) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} Z_1 Z_4 \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) - \\ & -v^2 f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} Z_1 Z_3 \Delta(\alpha) \Psi_2(\beta_2) - \\ & -v^2 f(\alpha) g(\beta_1) \left\{ \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2) - \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} \right\} Z_1 Z_2 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1). \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (4.3.33), (4.3.34) и

$$\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} = \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2), \quad (4.3.35)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.24).

Далее, рассмотрим два уровня C_3 и C_4 первых интегралов (4.3.23) и (4.3.24) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \quad (4.3.36)$$

Но угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (4.3.5):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{Z_1}{Z_2} h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (4.3.36), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (4.3.25).

Теорема полностью доказана. $\square$

Заметим также, что равенства (4.3.11) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (4.3.21). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны. Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 4.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса (a)), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha, \\ \alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \sin \alpha, \\ Z_4' &= -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_3 \frac{1}{\sin \alpha}, \\ \beta_2' &= -Z_2 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ \beta_3' &= Z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Пример 4.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [47, 49], задача класса (a)), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \sin \alpha, \\
Z_4' &= -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
\beta_2' &= -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\
\beta_3' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}.
\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

Пример 4.3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского (с координатами $x = \beta_1$, $y = \beta_2$, $z = \beta_3$, $w = \alpha$, задача класса (с)) система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2 - \dot{\beta}_3^2) &= 0, \\
\ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 &= 0, \\
\ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 &= 0, \\
\ddot{\beta}_3 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v \Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{1}{\alpha^2}, \\
\alpha' &= Z_4 \alpha + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{1}{\alpha}, \\
Z_4' &= -Z_3^2 - Z_2^2 - Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= Z_3 Z_4 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= Z_2 Z_4 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= Z_1 Z_4 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3 \alpha, \\
\beta_2' &= Z_2 \alpha, \\
\beta_3' &= Z_1 \alpha.
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, шести) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно, не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

4.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (4.3.4), (4.3.5) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) (лишь в уравнение на Z'_4) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$), при этом пусть, в частности, $f_4(\alpha) \equiv -1$.

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных $\alpha, Z_4, \dots, Z_1$. Пять соответствующих уравнений на $\alpha', Z'_4, \dots, Z'_1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\ Z'_4 &= F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)(Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2) + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_3 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_3Z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)(Z_2^2 + Z_1^2) + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_2 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_2Z_4 + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_2Z_3 - f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1^2 + \\ &\quad + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_1 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_1Z_4 + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1Z_3 + f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1Z_2 + \\ &\quad + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha).\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность подтвердилась бы наличием в системе шести гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (4.4.1):

$$W(Z_4, \dots, Z_1; \alpha) = Z_1^2 + \dots + Z_4^2 + 2 \int_0^\alpha F(\xi) d\xi, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF(0)}{d\alpha} > 0,\tag{4.4.2}$$

которая в проколотой окрестности начала координат положительна и равна нулю только в самом начале координат.

Предложение 4.1. *Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ строго одного знака в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — либо притягивающая, либо отталкивающая точка.*

Доказательство. Полная производная функции (4.4.2) в силу уравнений (4.4.1) равна

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)^2\tilde{\delta}(\alpha) + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)F(\alpha)\delta(\alpha).\tag{4.4.3}$$

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно отрицательны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — притягивающая точка.

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно положительны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — отталкивающая точка.

Два последних утверждения следуют из теорем Ляпунова и Четаева. $\square$

Следствие 4.1. *В условиях предложения 4.1 рассматриваемая система, содержащая уравнения (4.4.1), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

Следствие 4.2. *В динамике пятимерного твердого тела (см. также раздел 4.2) в системах, где присутствуют уравнения вида (4.4.1), функции $\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)$ имеют следующий вид: $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$. Таким образом, величина (4.4.3) переписывается в виде*

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha [Z_1^2 + \dots + Z_4^2 + \sin^2 \alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — отталкивающая точка.

Таким образом, добавляя в систему (4.3.4), (4.3.5) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) (лишь в уравнение на Z'_4) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$) рассматриваемая система, вообще говоря, *перестает быть консервативной*.

4.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования. Модифицируем систему (4.3.4), (4.3.5) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_4(\alpha)$ в уравнение на Z'_4 системы (4.5.1), (4.5.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет (как показано в предыдущем разделе 4.4) при дополнительном условии: $b = 0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \\ Z'_4 &= F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_3 &= -[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_2 &= -[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] Z_2Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)f_4(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_1 &= -[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_1Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] Z_1Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\alpha)[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta'_1 &= Z_3\frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \\ \beta'_2 &= Z_2\frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1\frac{f_3(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (4.5.1), (4.5.2) фактически является образом следующей системы при замене $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)f_4(\alpha), \\
Z_4' &= F(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)]Z_4 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \\
&\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\
&\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)]Z_2Z_3 - \\
&\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)]Z_1Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)]Z_1Z_3 - \\
&\quad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3f_1(\alpha), \\
\beta_2' &= Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\
\beta_3' &= Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Также напомним, что выше (раздел 4.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_4' системы (4.4.1), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ приняла вид (4.5.1), (4.5.2).

Только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (4.5.3), (4.5.4) имеет более общий вид, чем система (4.2.40)–(4.2.48), взятая из динамики пятимерного твердого тела, и при $b = -b_1$, $\mu = 1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$,

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_4(\alpha) \equiv -1, \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \quad h(\beta_2) = -\frac{1}{\sin \beta_2}, \\
\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \quad \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2, \\
\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\
\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) = -\sin \beta_2 \cos \beta_2,
\end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию.

4.6. Системы со знакопеременной диссипацией.

4.6.1. *Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы.* Перейдем теперь к интегрированию системы девятого порядка (4.5.1), (4.5.2) при выполнении свойств (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4.5.1), (4.5.2) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.4 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Тогда после замены фазовых переменных (4.3.27) система (4.5.1), (4.5.2) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_0(\alpha, w), \quad \Psi_0(\alpha, w) = -b(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (4.6.1)$$

$$\alpha' = w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha),$$

$$w_4' = F(\alpha) - \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3^2 - w_4\Psi_0(\alpha, w), \quad (4.6.2)$$

$$w_3' = \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3w_4 - w_3\Psi_0(\alpha, w),$$

$$w_2' = \pm w_3\sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \quad (4.6.3)$$

$$\beta_2' = \pm \frac{w_2w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1),$$

$$w_1' = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \quad (4.6.4)$$

$$\beta_1' = \pm \frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha),$$

$$\beta_3' = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \quad (4.6.5)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.6.1)–(4.6.5) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.6.2), по одному — для систем (4.6.3), (4.6.4) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (4.6.1) и (4.6.5) (т.е. всего *шесть*).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (4.6.6)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (4.6.7)$$

Условие (4.6.6) назовем «геометрическим», а условие (4.6.7) — «энергетическим».

Условие (4.6.6) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения.

Условие (4.6.7) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию.

Теорема 4.4. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия (4.6.6) и (4.6.7). Тогда система (4.6.1)–(4.6.5) обладает полным набором — шестью (одним гладким и пятью, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает шестью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Доказательство. Для доказательства теоремы 4.4 для начала сопоставим системе третьего порядка (4.6.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3^2/f_4^2(\alpha) + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_4F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3w_4/f_4^2(\alpha) + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_3F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4.6.9)$$

приводим систему (4.6.8) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 &= \\ &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4^2(\alpha) + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_2F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 &= \\ &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4^2(\alpha) + bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_1F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha)u_2^2 - b_1\mu u_2F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)/f_4^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)/\Delta(\alpha)]\Delta^2(\alpha)u_1u_2 - b_1\mu u_1F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

здесь и далее напомним, что

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Теперь для интегрирования системы (4.6.11) нам потребуется выполнение геометрического и энергетического условий (4.6.6) и (4.6.7).

Действительно, после их выполнения из системы (4.6.11) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (4.6.13)$$

Уравнение (4.6.13) имеет вид уравнения Абеля [10, 82] и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$ данное уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.6.14)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_3 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (4.6.15)$$

Система (4.6.1)–(4.6.5) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (или в систему (4.3.4), (4.3.5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (4.3.26), или в систему (4.3.28)–(4.3.32), в которой уже введены фазовые переменные (4.3.27)). Так система (4.3.4), (4.3.5), в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (4.3.21), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$).

Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (4.6.1)–(4.6.5) при условии (4.6.7) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (4.6.16)$$

где

$$\Theta(B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + B \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha))$$

— семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.6.16), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) также является первым интегралом системы (4.6.1)–(4.6.5) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (4.6.17)$$

и (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) по отдельности не является первым интегралом системы (4.6.1)–(4.6.5). Однако отношение функций (4.6.17), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) является первым интегралом (4.6.15) системы (4.6.1)–(4.6.5) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.6.2) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.6.14) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_1 \lambda \mu}{2} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2}{4} + \lambda. \quad (4.6.18)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2 + 4\lambda \geq 0, \quad (4.6.19)$$

и фазовое пространство системы (4.6.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.6.18).

Таким образом, в силу соотношения (4.6.14) первое уравнение системы (4.6.11) при условиях (4.6.6) и (4.6.7) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (4.6.20)$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (4.6.2) при $\kappa = -1$ найдется из следующего уравнения Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \quad (4.6.21)$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2,$$

при этом постоянная C_1 выбирается из условия (4.6.19).

Замечание 4.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть выражения (4.6.14).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (4.6.22)$$

Выражение первого интеграла (4.6.22) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы девятого порядка (4.6.1)–(4.6.5) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (4.6.2). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти два первых интеграла — по одному для систем (4.6.3), (4.6.4) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимых переменных, а также еще два (дополнительных) первых интеграла, привязывающих уравнения (4.6.1) и (4.6.5).

Первые интегралы для систем (4.6.3), (4.6.4) выглядят следующим образом:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (4.6.23)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (4.3.23), (4.3.24).

Действительно, системам (4.6.3), (4.6.4) можно сопоставить, соответственно, следующие уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s} [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \quad s = 1, 2, \quad j = g, h,$$

интегрирование которых и дает искомые первые интегралы (4.6.23).

В переменных Z первые интегралы (4.6.23) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta'_3(Z_3, Z_2, Z_1; \beta_1) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \\ \Theta'_4(Z_2, Z_1; \beta_2) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

Для получения искомого первого интеграла, привязывающего уравнение (4.6.5), рассмотрим уровень C_4 первого интеграла (4.6.23). На этом уровне справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{1}{\sqrt{C_4^2 \Psi_2^2(\beta_2) - 1}}. \quad (4.6.25)$$

Но угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (4.5.2):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{Z_1}{Z_2} h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (4.6.25), и получаем требуемое утверждение о наличии следующего первого интеграла, привязывающего уравнение (4.6.5):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{h(b)}{\sqrt{C_4^2 \Psi_2^2(b) - 1}} db = C_5 = \text{const}. \quad (4.6.26)$$

И наконец, нетрудно проверить, что у системы (4.6.1)–(4.6.5) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.5.17), (2.6.27) и другими), который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(1 + 2bw_4\Delta(\alpha) - b^2\mu(w_3^2 + w_4^2)) = C_0 = \text{const} \quad (4.6.27)$$

и привязывает уравнение (4.6.1).

Продолжим доказательство теоремы 4.4.

I. Составная рассматриваемая система (4.6.1)–(4.6.5) при выполнении свойств (4.6.6), (4.6.7) имеет следующий вид ($w_3^* = \ln |w_3|$, $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$):

$$v' = X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1\lambda\Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (4.6.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \\ w_4' &= X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}e^{2w_3^*} - w_4\Psi_1(\alpha, w), \\ w_3^{*'} &= X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_4 - \Psi_1(\alpha, w), \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

$$w_2^{*'} = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \quad (4.6.30)$$

$$\begin{aligned} \beta_2' &= X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm \frac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1), \\ w_1^{*'} &= X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \beta_1' &= X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) = \pm \frac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.6.31)$$

$$\beta_3' = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2), \quad (4.6.32)$$

при этом в составной системе (4.6.28)–(4.6.32) величины $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, — функции в силу замен выше (или см. также (4.3.27)).

В принципе, замены $w_s \rightarrow w_s^*$, $s = 1, 2, 3$, носят технический характер, и при этом можно использовать как переменные w_s^* , так и переменные w_s .

Для составной системы (4.6.28)–(4.6.32) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\text{div} [\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)] = 0, \quad (4.6.33)$$

где

$$\begin{aligned} X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \\ &= \{X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ &X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\ &X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\} \end{aligned} \quad (4.6.34)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (4.6.28)–(4.6.32) в координатах

$$(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Уравнение (4.6.33) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
& X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha) \rho_v + X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_4} + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_3^*} + \\
& + X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{w_2^*} + X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) \rho_{\beta_2} + \\
& + X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) \rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) \rho_{\beta_1} + X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{\beta_3} = \\
& = -\rho \operatorname{div} X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3).
\end{aligned} \tag{4.6.35}$$

Как было указано выше для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (4.6.28)–(4.6.32) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

преобразованной системы (т.е. системы (4.6.28)–(4.6.32), умноженной на $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$) после замены $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) d/dt_1 = d/dt_2$ старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (4.6.28)–(4.6.32).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (4.6.28)–(4.6.32) функцию $\rho_2(v) = v^3$ из (1.3.18) (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24) и других систем). Имеем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} [v^3 X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)] &= -4v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
&+ v^3 b(e^{2w_3^*} + 3w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_3^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
&+ v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) (\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).
\end{aligned}$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v^3 X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), \\
\alpha' &= v^3 X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_4' &= v^3 X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_3'^* &= v^3 X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_2'^* &= v^3 X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \\
\beta_2' &= v^3 X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\
w_1'^* &= v^3 X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), \\
\beta_1' &= v^3 X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), \\
\beta_3' &= v^3 X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \\
\rho' &= -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho
\end{aligned} \tag{4.6.36}$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной).

У системы, состоящей из первых девяти уравнений системы (4.6.36), уже найдены шесть первых интегралов (4.6.27), (4.6.15), (4.6.22), (4.6.23) и (4.6.26) (полный набор). Найдем и дополнительный первый интеграл, привязывающий уравнение (последнее уравнение системы (4.6.36)) на функцию ρ .

Действительно, из системы уравнений (4.6.36) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2) \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))}, \tag{4.6.37}$$

тогда, вводя в рассмотрение однородные координаты (4.6.9), имеем:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))} \tag{4.6.38}$$

или

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \quad (4.6.39)$$

Теперь, из соотношения (4.6.39) и первого соотношения (4.6.12) вытекает следующее дифференциальное равенство (при $\kappa = -1$):

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 + u_1^2}, \quad (4.6.40)$$

а из него — следующая квадратура:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-[b_1\lambda\mu]du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2) \quad (4.6.41)$$

(о функциях $u(u_2)$ и $U(C_1, u_2)$ см. (4.6.21)).

Становится справедливым следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3, \quad u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

Ну а общее решение линейного дифференциального уравнения (4.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5], \quad (4.6.42)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5]$ — произвольная гладкая функция шести аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5$ — шесть независимых первых интегралов (4.6.27), (4.6.15), (4.6.22), (4.6.23) и (4.6.26) соответственно.

В частности, за шесть функционально независимых решений линейного уравнения (4.6.35) в частных производных можно взять следующие функции ($u_2 = w_4/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_3/\Delta(\alpha)$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$):

$$\rho_0(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.43)$$

$$\rho_1(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.44)$$

$$\rho_2(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.45)$$

$$\rho_3(v; w_4, w_2^*; \alpha, \beta_2) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_2^*; \beta_2), \quad (4.6.46)$$

$$\rho_4(v; w_4, w_1^*; \alpha, \beta_1) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_4(w_1^*; \beta_1), \quad (4.6.47)$$

$$\rho_5(v; w_4; \alpha, \beta_2, \beta_3) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3). \quad (4.6.48)$$

II. Рассмотрим далее системы (4.6.3) и (4.6.4). Поскольку они могут быть приведены к независимым подсистемам, проведем рассуждения об «автономном» поиске инвариантных дифференциальных форм, хотя общий подход для поиска таких форм уже освещен выше.

После некоторого их приведения — замен независимых переменных в них

$$\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d}{dt} = \pm w_3 \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \frac{d}{d\tau} \quad (4.6.49)$$

— системы (4.6.3) и (4.6.4) можно объединить следующим образом:

$$\begin{aligned} w'_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1 + w_s^2} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \beta'_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad s = 1, 2, \quad j = h, g, \end{aligned} \quad (4.6.50)$$

при этом в системе (4.6.50) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

Для каждого $s = 1, 2$ для системы (4.6.50) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_s; \beta_s)dw_s \wedge d\beta_s$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_s; \beta_s)X(w_s; \beta_s)] = 0, \quad (4.6.51)$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \{X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\} \quad (4.6.52)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (4.6.50) в координатах $(w_s; \beta_s)$.

Уравнение (4.6.51) переписется в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s)\rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s), \quad (4.6.53)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \quad (4.6.54)$$

Тогда система уравнений характеристик (для каждого $s = 1, 2$) линейного дифференциального уравнения (4.6.53) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\beta}_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\rho} &= -\rho \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+2}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \end{aligned} \quad (4.6.55)$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (4.6.55), уже найден первый интеграл (4.6.23) (для любого $s = 1, 2$). Найдем дополнительный независимый первый интеграл для системы (4.6.55) уравнений характеристик.

Сопоставим двум последним уравнениям системы (4.6.55) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad s = 1, 2. \quad (4.6.56)$$

Последнее уравнение дает следующее инвариантное соотношение:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s; \rho) = \rho \cdot \Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \operatorname{const}, \quad (4.6.57)$$

которое является вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (4.6.55) (для каждого $s = 1, 2$). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (4.3.23), (4.3.24).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.6.53) (для каждого $s = 1, 2$) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]}{\Psi_s(\beta_s)}, \quad (4.6.58)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента (для каждого $s = 1, 2$), при этом Θ_{s+2} , $s = 1, 2$, — первый интеграл (4.6.23).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_{s+2}] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad (4.6.59)$$

то за решение линейного уравнения (4.6.53) (для каждого $s = 1, 2$) в частных производных можно взять следующую функцию:

$$\rho_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}}. \quad (4.6.60)$$

Теорема 4.4 доказана. □

Заметим, что все найденные в разделе 4.6.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (4.5.1), (4.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (4.5.3), (4.5.4). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_4(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данном разделе 4 предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем девятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат исключительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.

18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.

44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.

65. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. Шамоллин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. Шамоллин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. Шамоллин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. Шамоллин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. Шамоллин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. Шамоллин М. В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. Шамоллин М. В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. Шамоллин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. Шамоллин М. В. Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. Шамоллин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.
81. Шамоллин М. В. Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. Shamolin M. V. Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (Vasilyev V., ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru

CONTENTS

Solution of a traveling-wave type to a mixed problem for a nonlinear system of first-order differential equations (<i>E. Yu. Grazhdantseva</i>)	3
The listing and counting combinatorial algorithm for compositions of a natural number with constraints (<i>O. V. Kuzmin, M. V. Strikhar</i>)	13
Necessary conditions for a minimum in variational problems with delay in the presence of degeneracies (<i>M. J. Mardanov, T. G. Melikov</i>)	25
Vortex models of shear laminar and turbulent flows (<i>V. L. Mironov, S. V. Mironov</i>)	32
Methods of boundary-value problems for improving control in systems with constraints (<i>D. O. Trunin</i>)	43
Initial-boundary-value problems for some nonlinear mixed heat conductivity operators (<i>V. N. Khankhasaev, S. M. Munyaev</i>)	53
Invariants of homogeneous dynamic systems of arbitrary odd order with dissipation. IV. Ninth-order systems (<i>M. V. Shamolin</i>)	62

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова,
Университет имени Бар-Илана)
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Виктор Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем
им. А. К. Айламазяна)
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор
(Иркутский государственный университет)
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным
центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Корпусов Максим Олегович
Лукьяненко Дмитрий Витальевич
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Сачков Юрий Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.