

ISSN 2782-4438



# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ  
МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические  
обзоры

Том 238



Москва 2025

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

## Современная математика и ее приложения

### Тематические обзоры

### Том 238 (№ 1, 2025)

Дата публикации 20 января 2025 г.

Издается с 1995 года  
Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Редакторы-составители выпуска	А. В. Аргучинцев, М. В. Шамолин
Научный редактор выпуска	Е. Е. Букжалёв
Компьютерная вёрстка	А. А. Широнин

Учредитель и издатель:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНТИ РАН)
Адрес редакции и издателя:	125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции	+7 (499) 155-42-29
Электронная почта	math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации	Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN (печатная версия)	0233-6723
ISSN (электронная версия)	2782-4438
Форма распространения:	периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

[http://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=9534](http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534)

<https://journals.rcsi.science/2782-4438/index>

© ВИНТИ РАН 2025

ISSN 2782-4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ  
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
(ВИНИТИ РАН)

**ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ**  
**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА**  
**И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**  
**ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ**

**Том 238**

**МАТЕРИАЛЫ**  
**6 МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**  
**«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**  
**И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ:**  
**ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»**  
**(DYSC 2024)**

**Иркутск, 16–20 сентября 2024 г.**

**Часть 1**



**Москва 2025**

## СОДЕРЖАНИЕ

Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина ( <i>Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин</i> ) . . . . .	3
Алгоритмы перечисления решеточных путей с ограничениями и корневых деревьев по различным параметрам ( <i>А. А. Балагура, О. В. Кузьмин</i> ) . . . . .	24
Методы оптимизации билинейных управляемых систем на основе задач о неподвижной точке ( <i>А. С. Булдаев, И. Д. Казьмин</i> ) . . . . .	36
Условие секулярности кинетической системы Бродуэлла ( <i>С. А. Духновский</i> ) . . . . .	49
Эффективный алгоритм поиска финальных вершин на обобщенном функциональном графе ( <i>О. В. Зубков</i> ) . . . . .	59
Инварианты однородных динамических систем произвольного нечетного порядка с диссипацией. III. Системы седьмого порядка ( <i>М. В. Шамолин</i> ) . . . . .	69
Письмо в редакцию ( <i>Г. Акишев</i> ) . . . . .	101



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 3–23  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-3-23

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА  
МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА  
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ»  
ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ  
Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2025 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2023 г.

**Ключевые слова:** качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP  
OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT  
OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,  
“URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS”  
NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2025 D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. Brief information on sessions of the workshop in 2023 is presented.

**Keywords and phrases:** qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

**AMS Subject Classification:** 58Cxx, 70Cxx

ЗАСЕДАНИЕ 490 (10 февраля 2023 г.)

*С. Е. Носов.*

**О сейсмических колебаниях полубесконечного подземного трубопровода.**

ЗАСЕДАНИЕ 491 (17 февраля 2023 г.)

*Д. В. Георгиевский.*

**Деформаторы высоких рангов и уравнения совместности их компонент.**

Вопросы совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных, различные формы записи уравнений совместности и их эквивалентность играют важную роль в постановках задач механики деформируемого твердого тела в напряжениях. В докладе для компонент

---

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-17).

деформаторов высоких рангов, связанных с обобщёнными перемещениями аналогами кинематических соотношений Коши в  $n$ -мерном пространстве (многомерной сплошной среде) выводятся уравнения совместности. Они записываются в виде равенства нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера с двумерным массивом индексов либо двойственного к нему обобщённого тензора Римана—Кристоффеля.

ЗАСЕДАНИЕ 492 (10 марта 2023 г.)

*М. В. Шамолин.*

### **О гладкости инвариантов динамических систем.**

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно, позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции.

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из  $n$  дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще  $n - 1$  независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее пятимерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются

достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

ЗАСЕДАНИЕ 493 (17 марта 2023 г.)

*Р. Р. Айдагулов.*

### Градуированные вычисления и быстрое умножение матриц.

При решении задач с большим параметром (размерности)  $n$  используется два метода уменьшения сложности. В качестве основного метода используется метод рекуррентного разделения задачи с параметром  $n$  на несколько подзадач с меньшей размерностью  $n/l$ , и формирование общего решения основывается на решении подзадач с уменьшенными размерностями. Автор называет этот метод методом фильтрации. В англоязычных источниках этот метод выделяют как принцип «разделяй и властвуй».

*Сортировка.* Продемонстрируем этот метод в задаче упорядочивания (сортировки)  $n$  чисел. Если решена задача для размерностей  $n_1, n_2, n_1 + n_2 = n$ , то остается только сливать два упорядоченных множества:

$$x[i[1]] < x[i[2]] < \dots < x[i[n_1]], \quad x[j[1]] < x[j[2]] < \dots < x[j[n_2 - 1]].$$

Для этого достаточно установить два указателя для двух массивов  $l_1 = 1, l_2 = 1, l = 1$ , и сдвигать указатели массива с меньшим знаменателем:

```
while (l < n){ if (x[i[l1]] < x[j[l2]]){ii[l++] = i[l1];
if (l1 < n1)l1++;
else {while (l2 <= n2)ii[l++] = j[l2++]} else ...
```

В случае невыполнения сравнения выполняется передвижение по второму счетчику. Обозначая количество операций (в нашем случае сравнений) через  $T(n)$ , приходим к неравенству следующего типа:

$$T(n) = Cn^\alpha + mT\left(\frac{n}{l}\right).$$

В нашем случае  $l = m = 2, \alpha = 1, (n - 1)/2 \leq Cn \leq n - 1$ . Решая рекуррентное соотношение, получаем  $T(n) = O(n \log n)$ . Отметим, что каждый член массива участвует в операции сравнения примерно  $O(\log n)$  раз. Для отделения члена  $x[i]$  с соседнем по порядку необходимо в среднем не меньше  $n_i \geq \log n$  битовых сравнений. Следовательно, по каждому элементу в среднем на сравнение требуется не менее  $\log^2 n/2$  битовых операций.

При использовании метода фильтрации промежуточные вычисления (сравнения в низших ветках) используются только выше в своей ветке. Поэтому этот метод менее эффективен по сравнению метода градуированного вычисления. В задаче сортировки градуировка по битам переменных отличается от всех элементов, которые относятся к другой градуировке. Таким образом, общее количество битовых операций равно  $\sum_{i=1}^{n-1} n_i = O(n \log n)$ . Это может быть меньше количества всех битов в записи чисел. За меньшее количество битовых сравнений нельзя упорядочить. Такие алгоритмы, не улучшаемые по эффективности, некоторые авторы называют «алгоритмом от бога».

*Умножение по методу фильтрации.* Большие числа на компьютере представляются в  $M$ -ичной системе исчисления как значения многочлена:

$$X = x_0 + x_1M + \dots + x_{k-1}M^{k-1};$$

$M$  есть степень двойки, обычно  $M = 2^d, d = 32$ . Считаем, что  $0 \leq x_i < M$ . Соответственно  $X < M^k = 2^n, n = kd$ . Допустим, что имеется другое большое число  $Y = y_0 + \dots + y_{l-1}M^{l-1}$

и требуется их умножить. Произведение не превышает  $M^m$ ,  $m = k + l$ , и оно представляется в виде:

$$Z = XY = \sum_{i=0}^{m-1} z_i M^i, \quad z_i = \sum_{j \leq i} x_j y_{i-j}.$$

Правда, здесь после вычисления надо осуществить переносы, когда цифры становятся не меньше  $M$ . Для этого складываем перенос из нижнего уровня и делим на  $M$ , остаток от деления будет настоящей цифрой этого уровня, а целая часть от деления пойдет в следующий уровень как перенос. На переносы потребуется  $O(n \log n)$  операций.

Более эффективный метод умножения больших чисел впервые использовал А. А. Карацуба в 1962 г. Он использовал метод фильтрации («разделяй и властвуй»), разделяя умножаемые числа на композицию двух поменьше:

$$X = X_0 + X_1 * N, \quad N = 2^R, \quad Y = Y_0 + Y_1 * N.$$

Здесь  $X_0, Y_0$  — числа, состоящие из младших разрядов,  $X_1, Y_1$  — из старших разрядов. Результат умножения представляется в следующем виде:

$$XY = X_0 Y_0 + N(X_0 Y_1 + X_1 Y_0) + X_1 Y_1 N^2.$$

Среднее число вычисляется одним дополнительным умножением, используя результаты умножений крайних:

$$X_0 Y_1 + X_1 Y_0 = (X_0 + X_1)(Y_0 + Y_1) - X_0 Y_0 - X_1 Y_1.$$

Таким образом, принцип «разделяй и властвуй» для умножения двух  $n$ -битных чисел, требующих  $T(n)$  операций, приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn.$$

Решая эту рекурсию, получаем:

$$T(n) = C(2^k + 3 * 2^{k-1} + \dots + 3^k) = C(3^{k+1} - 2^{k+1}) = O(n^{\log 3}). \quad (1)$$

В соответствии с приведенной мастер-теоремой принципа «разделяй и властвуй» число операций при умножении методом Карацуба оценивается величиной  $O(n^{\log 3})$ . Мы условимся, что логарифм без указания основания означает логарифм по основанию 2.

Впоследствии в 1969 г. Штрассеном найден аналог такого умножения и для матриц. Для этого разобьем матрицы  $X, Y$  размером  $n \times n$  на подматрицы половинной размерности:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \quad XY = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}.$$

Вводя семь произведений:

$$P_1 = A(F - H), \quad P_2 = (A + B)H, \quad P_3 = (C + D)E, \quad P_4 = D(G - E), \\ P_5 = (A + D)(E + H), \quad P_6 = (B - D)(G + H), \quad P_7 = (A - C)(E + F),$$

произведение матриц можно представить в виде:

$$XY = \begin{pmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к рекуррентному соотношению относительно необходимого количества операций для умножения матриц размера  $n \times n$ :

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2.$$

Решая рекуррентное соотношение, получаем

$$T(n) = O(n^{\log 7}), \quad \log 7 \approx 2,81.$$

Точнее, без учета операций с адресами элементов при  $n = 2^k$  имеем  $T(2^k) = 6(7^k - 4^k) + 7^k$ . Здесь  $7^k$  — количество умножений в формате чисел,  $6(7^k - 4^k)$  — количество сложений и вычитаний в формате чисел.

Через оценку ранга умножения матриц мы добились уменьшения показателя степени, называемого предельной экспонентой умножения, до величины  $O(n^\alpha)$ ,  $\alpha \approx 2,3728639$ .

*Умножение градуировкой.* В методе градуировки умножение переносится в умножение в градуированной алгебре. Например, для умножения двух многочленов от  $k$  переменных

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0 \leq i_j < m_j} a[i_1, \dots, i_k] x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}, \quad \phi(x) = \sum_i b[i_1, \dots, i_k] x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

градуируем по степеням многочлена, сопоставляя однородным элементам элементы группы  $G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \dots \oplus Z_{n_k}$ ,  $n_i = 2m_i - 1$ . Здесь учитывается, что произведение двух многочленов, имеющих степень  $m_i - 1$ , является многочленом степени  $2m_i - 2$  и, следовательно, имеет  $2m_i - 1$  коэффициентов для определения.

Пусть  $G' = \{\mu = \mu_1 \dots \mu_k\}$  — группа характеров. Каждый характер определяет значение многочлена — элемента групповой алгебры по следующей схеме:

$$f = \sum_{g \in G} a(g)g \rightarrow \mu(f) = \sum_{g \in G} a(g)\mu(g).$$

В силу соотношения  $\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\mu(g_2)$  каждое  $\mu$  значение произведения равно произведению  $\mu$  значений сомножителей. Набор  $\mu$  значений достаточно для определения многочлена (его коэффициентов перед степенями). Действительно,

$$\psi = \sum_{g_k} c(g_k)g_k = \left( \sum_{g_i} a(g_i)g_i \right) \left( \sum_{g_j} b(g_j)g_j \right), \quad c(g_k) = \sum_{g_i g_j = g_k} a(g_i)b(g_j),$$

$$nc_{g_k} * = \sum_{\mu} \mu(g_k^{-1})\mu(\psi) = \sum_i \sum_{\mu} c(g_i)\mu(g_k^{-1}g_i) = \sum_i \delta_k^i c(g_i)n.$$

Ясно, что меньшим количеством умножений нельзя вычислить произведение. Поэтому и здесь метод градуировки можно назвать «алгоритмом от бога». Вычисление произведения требует предварительного вычисления  $n$   $\mu$  значений каждого сомножителя. На это уходит  $O(n \log n)$  операций. Этот процесс называют преобразованием Фурье. После вычисления значений произведения требуется вычислить  $n$  коэффициентов по значениям. Этот процесс называют обратным преобразованием Фурье. На его вычисление также тратится  $O(n \log n)$  операций.

Отметим, что в каждом произведении  $\mu$  значений присутствует каждая пара произведений  $a(g_i)b(g_j)$  с одинаковым коэффициентом  $\mu(g_i g_j)$  для всех  $g_i g_j = g_k$ . Поэтому, этот метод соответствует принципу «объединяй и направляй». Гёте сказал: «Разделяй и властвуй» — мудрое правило, однако правило «объединяй и направляй» — ещё лучше». Первое соответствует методу фильтрации, второе — методу градуировки.

В случае некоммутативного умножения возникают следующие трудности. Произведения  $g_i g_j$  и  $g_j g_i$  отличаются, характеров (одномерных представлений) меньше, чем базисных элементов. Здесь групповая алгебра заменяется бигрупповой алгеброй  $K(G', G) = \left\{ \sum_{\mu, g} a(\mu, g)\mu g \right\}$ , порожденной характерами и элементами группы с соотношениями перестановочности  $\mu g = \mu(g)g\mu$ . Это соотношение по сути является соотношением неопределенности Гейзенберга об одновременной неизмеримости координат и импульса.

Удобнее работать с группой  $G = (Z_2)^k$ ,  $n = 2^k$ . Сопоставим элементу группы  $g = (i_1, \dots, i_k)$  число  $i = i_1 + i_2 * 2 + \dots + i_k * 2^{k-1}$  с двоичными цифрами  $(i_1, \dots, i_k)$  и матрицу  $n \times n$ , переставляющую строки правого множителя:

$$y^j = (y_{il}^j), \quad y_{i,l}^j = \delta_i^{j \oplus l}, \quad (y^j)^2 = 1 = E.$$

Здесь все операции сложения, умножения производятся покомпонентно (без переносов). В качестве характеров служат диагональные матрицы

$$x^i = (x_{lj}^i), \quad x_{lj}^i = \delta_l^j (-1)^{(i,j)}, \quad (i,j) = \sum_{m=1}^k i_m * j_m, \quad (x^i)^2 = 1 = E.$$

Легко проверяется, что  $x^i y^j$  образуют базис в алгебре матриц  $n \times n$  и соотношение коммутирования (неопределенности) имеет вид  $x^i y^j = (-1)^{(i,j)} y^j x^i$ .

Соответственно, задача умножения матриц сводится к умножению некоммутирующих многочленов от  $x^i, y^j$ . Каждому элементу  $x^{t_1} y^{t_2}$  соответствует характер

$$\mu_{t_1, t_2}(x^i y^j) = x^{t_1} y^{t_2} x^i y^j (x^{t_1} y^{t_2})^{-1} (x^i y^j)^{-1} = (-1)^{(t_1, j) - (t_2, i)}.$$

Этих характеров достаточно для выделения нужных коэффициентов многочлена. Однако, для выделения коэффициентов из произведений  $\mu$  значений

$$a(i_1, j_1) b(i_2, j_2) \mu(x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2}) = a(i_1, j_1) b(i_2, j_2) (-1)^{(j_1, i_2)} \mu(x^{i_1+i_2} y^{j_1+j_2})$$

необходимо разделить члены с разными знаками:  $(-1)^{(j_1, i_2)}$ . Для этого необходимо привлечь нечетные характеры:

$$\mu_{t_1, t_2}^*(x^i y^j) = (-1)^{(i, j)} \mu_{t_1, t_2}(x^i y^j).$$

Это соответствует значению транспонированной матрицы. У нечетных элементов значения характеров отличаются знаком. Этот набор характеров, совместно с предыдущим набором позволяет отличить порядок произведения в выражении  $x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2}$ . Произведения двух элементов  $x^{i_1} y^{j_1}, x^{i_2} y^{j_2}$  переставляются множителем  $(-1)^{(i_1, j_2) - (j_1, i_2)}$ . Он равен произведению нечетностей сомножителей и самого произведения:

$$(-1)^{(i_1, j_2) - (j_1, i_2)} = (-1)^{(i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (i_1 + i_2, j_1 + j_2)}.$$

Последнее позволяет получить коэффициенты разложения произведения через произведения значений из  $2n^2$  наборов. Учитывая наличие одной зависимости в наборе произведений, можно избежать использования одного произведения значений, т.е. достаточно вычислить  $2n^2 - 1$  произведений значений. Несложно показать, что ранг умножения матриц не меньше  $2n^2 - 1$ . В этом смысле опять получаем «алгоритм от бога». Предварительные вычисления  $2n^2$  значений сомножителей и  $n^2$  коэффициентов произведения из  $2n^2 - 1$  произведений производятся за  $O(n^2 \log n)$  операций.

ЗАСЕДАНИЕ 494: ВЫЕЗДНОЕ ЗАСЕДАНИЕ В МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА, ПОСВЯЩЁННОЕ 90-ЛЕТИЮ В. С. ЗАРУБИНА (24 марта 2023 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 495 (31 марта 2023 г.)

*И. Б. Петров, Н. И. Хохлов.*

**Моделирование распространения волновых возмущений в гетерогенных средах сеточно-характеристическим методом. Часть I.**

Основной задачей, стоящей перед сейсмической разведкой, является восстановление структуры и свойств подповерхностного пространства на основе регистрации колебаний земной поверхности. Для этого необходимо решить обратную задачу, что в свою очередь требует решения серии прямых задач с последовательно изменяющейся моделью геологического массива. При этом точность их решения является решающей для корректного восстановления структуры среды. В связи с этим за последнее время было разработано множество различных численных методов, позволяющих с высокой точностью рассчитывать волновое поле в заданной среде с распределёнными по пространству параметрами. Одним из ограничений данных методов является невозможность явного учёта неоднородных включений, характерных для нефтеносных пластов. Оно было преодолено, например, в [3, 4] с использованием сеточно-характеристического метода (см. [2]) на структурных и неструктурных расчётных сетках.

В данной работе рассматриваются особенности реализации алгоритма расчета геологических неоднородностей сеточно-характеристическим методом. Рассматриваются алгоритмы явного выделения неоднородностей на структурированных сетках. Предложено три подхода. Первый подход основан на расположении неоднородности в узлах сетки. Данный подход достаточно подробно описан в [5]. К преимуществам данного подхода можно отнести возможность задания практически произвольной конфигурации неоднородностей. Второй подход основан на искривлении сетки вблизи трещиноватой неоднородности. Узлы расчетной сетки располагаются таким образом, чтобы трещина была со направлена линиям сетки. Данный подход описан в [1]. К преимуществам

данного подхода можно отнести отсутствие ошибки, связанной с непопаданием неоднородности в узлы сетки. К недостаткам — дополнительное построение сеток и ограничение в возможностях задания сложных конфигураций трещиноватых неоднородностей. Третий подход основан на применении механизма наложенных или химерных сеток. В данном подходе на основную расчетную сетку накладывается сетка поменьше, которая со направлена с неоднородностью. Между сетками каждый расчетный шаг происходит интерполяция. К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость в переинтерполяции, что вносит дополнительную погрешность в расчет. К преимуществам — возможность точного задания положения неоднородностей и задание сложных конфигураций. Подробнее данный подход описан в [4].

В случае решения разномасштабных задач разработан и реализован алгоритм с использованием иерархических расчетных сеток. Для обеспечения приемлемого времени расчета были разработаны параллельные версии численных методов. Параллельные алгоритмы разработаны для всех основных архитектур современных высокопроизводительных супер ЭВМ (см. [6]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проекта № 21-11-00139).

### Библиография

1. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И., Шульц К. И. Численный расчет волновых процессов в трещиноватых средах на гексаэдральных сетках сеточно-характеристическим методом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 3. — Р. 512–522.
2. Favorskaya A. V., Zhdanov M. S., Khokhlov N. I., Petrov I. B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method// Geophys. Prospect. — 2018. — 66, № 8. — Р. 1485–1502.
3. Khokhlov N. I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures// Minerals. — 2022. — 12, № 12. — 1597.
4. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones// J. Comput. Phys. — 2021. — 446. — 110637.
5. Khokhlov N., Stognii P. Novel approach to modeling the seismic waves in the areas with complex fractured geological structures// Minerals. — 2020. — 10, № 2. — 122.
6. Khokhlov N., Yavich N., Malovichko M., Petrov I. Solution of large-scale seismic modeling problems// Proc. Comput. Sci. — 2015. — 66. — Р. 191–199.

ЗАСЕДАНИЕ 496 (7 апреля 2023 г.)

А. А. Бобылев.

### О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре—Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы.

Рассматривается оператор Пуанкаре—Стеклова для изотропной функционально-градиентной упругой полосы, отображающий на части  $\Gamma_q$  границы полосы нормальные напряжения  $q_n$  в нормальные перемещения  $u_n$ :

$$u_n(x) = \int_{\Gamma_q} g(x - \xi) q_n(\xi) d\xi,$$

где  $g(\cdot)$  — функция Грина. С помощью интегрального преобразования Фурье можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений  $\tilde{u}_n(\alpha)$  и нормальных напряжений  $\tilde{q}_n(\alpha)$ :

$$\tilde{u}_n(\alpha) = G(\alpha) \tilde{q}_n(\alpha),$$

где  $\alpha$  — параметр преобразования Фурье,  $G(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)$  — трансформанта функции Грина, называемая далее передаточной функцией (ПФ). В результате действие оператора Пуанкаре—Стеклова сводится к перемножению трансформант и выполнению прямого и обратного преобразований Фурье, для численной реализации которых применяют алгоритмы быстрого преобразования Фурье.

Для построения ПФ используется новый подход (см. [1]). Получена вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дано определение и доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. Построен итерационный метод решения вариационных уравнений и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений производится методом конечных элементов. В результате на каждом шаге итерационного метода требуется решить две независимые трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод прогонки. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Проведена верификация разработанного алгоритма и даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

При решении задач одностороннего дискретного контакта упругой полосы с жестким штампом требуется вычислять значения ПФ для достаточно больших значений параметра  $\alpha$  (см. [2]). Для сокращения вычислительных затрат целесообразно прибегнуть к асимптотическому разложению ПФ при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант перемещений с малым параметром  $\varepsilon = 1/\alpha$  при старших производных. С помощью системы компьютерной алгебры SageMath построены внешнее и внутреннее асимптотические разложения решения этой краевой задачи. В результате получено трехчленное асимптотическое разложение ПФ. Для полученного отрезка асимптотического ряда построены две аппроксимации Паде. Предложен алгоритм вычисления ПФ с использованием асимптотического ряда и аппроксимаций Паде. Численные эксперименты подтвердили существенное сокращение вычислительных затрат.

### Библиография

1. *Бобылев А. А.* Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре—Стеклова для упругой полосы // Диффер. уравн. — 2023. — 59, № 1. — Р. 115–129.
2. *Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы* Бобылев А. А. // Прикл. мат. мех. — 2022. — 86, № 3. — Р. 404–423.

ЗАСЕДАНИЕ 497 (21 апреля 2023 г.)

*Петров И. Б., Васюков А. В.*

**Моделирование распространения волновых возмущений в гетерогенных средах сеточно-характеристическим методом. Часть II. Численное моделирование распространения волновых возмущений в твёрдых гетерогенных средах сложной геометрии сеточно-характеристическим методом.**

В работе рассматривается построение сеточно-характеристического численного метода на неструктурированной расчётной сетке для решения динамических задач механики твёрдого тела в приближении малых деформаций. Метод ориентирован на выполнение расчётов распространения упругих волн в биологических и инженерных объектах сложной формы, для которых область интегрирования описывается с использованием неструктурированной расчётной сетки из тетраэдров. В работе представлена реализация метода для гетерогенных анизотропных сред с наличием внутренних контактных границ.

Определяющая система уравнений в частных производных, описывающая динамические процессы в деформируемом твёрдом теле в трёхмерном случае, имеет следующий характерный вид (см. [4]):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A_x \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + A_y \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + A_z \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} = 0.$$

В этой записи  $\vec{w}$  — вектор неизвестных,  $A_x, A_y, A_z$  — постоянные матрицы. Точный вид  $\vec{w}$ ,  $A_i$  зависит от используемых реологических моделей.

Построение сеточно-характеристического численного метода основано на том факте, что для многих практически значимых постановок существует (см. [6]) аналитическое разложение матриц в виде  $A_i = \Omega_i^{-1} \cdot \Lambda_i \cdot \Omega_i$ . При этом для решения многомерной системы уравнений можно использовать расщепление по направлениям (см. [4]). После введения обозначения  $\vec{u} = \Omega \cdot \vec{w}$ , исходная система распадается на независимые уравнения относительно инвариантов Римана  $u_i$ .

При этом при выполнении расчётов для инженерных или природных объектов сложной формы область интегрирования описывается, как правило, с использованием неструктурированной расчётной сетки, в двухмерном случае — из треугольников, в трёхмерном — из тетраэдров. Таким образом, требуется численно решать уравнения для инвариантов Римана на такой сетке с высоким порядком аппроксимации.

При практической реализации численных схем частым их желательным свойством является обеспечение разумно высокого порядка аппроксимации без необходимости использования сложно-сеточного шаблона. Одним из традиционных подходов к этой задаче является использованием компактных продолженных схем (см. [5]). Для сеточно-характеристического метода на структурированных расчётных сетках данный подход также применим (см. [2]). Однако для неструктурированной расчётной сетки такой подход на данный момент не реализован и в целом сталкивается со значительными трудностями.

Другим способом повышения порядка является введение дополнительных точек на рёбрах и гранях элементов сетки (см. [1, 3]). Этот подход хорошо показал себя в решении многих задач, однако он также содержит и некоторые недостатки, связанные с аппроксимацией перемещений для расчётной сетки со сложной топологией ячеек.

В данной работе предлагается подход к построению на неструктурированной расчётной сетке варианта сеточно-характеристического численного метода высокого порядка без усложнения её топологии. Используется построение интерполяционного полинома по ближайшим точкам соседних ячеек расчётной сетки с сохранением простой топологии каждой отдельной ячейки. Данный подход является некоторым аналогом классического расширения шаблона на структурированной сетке.

Полученная таким образом численная схема обеспечивает получение решения для непрерывно дифференцируемых, непрерывных, разрывных решений. При расчёте распространения волновых возмущений в твёрдых гетерогенных средах численное решение воспроизводит распространение продольных и поперечных волн, их взаимодействие с внешними границами образца и с внутренними контактными границами между областями с разными реологическими параметрами материалов.

В работе получены численные решения для задач о распространении короткого импульса нагрузки в слоистом композите и об УЗИ-контроле композита. Также показано применение сеточно-характеристического метода к некоторым биомедицинским задачам: численное моделирование ультразвукового исследования головы человека, импульсное нагружение торса человека.

### Библиография

1. Васюков А. В., Петров И. Б. Использование сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках из тетраэдров с большими топологическими неоднородностями // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — 58, № 8. — Р. 62–72.
2. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // Мат. модел. — 2016. — 28, № 2. — Р. 123–132.
3. Петров И. Б., Фаворская А. В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информ. технол. — 2011. — № 9. — Р. 30–32.
4. Петров И. Б., Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1984. — 24, № 5. — Р. 722–739.
5. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Мат. модел. — 2011. — 23, № 6. — Р. 98–110.
6. Челноков Ф. Б. Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Мат. модел. — 2006. — 18, № 6. — Р. 96–108.

ЗАСЕДАНИЕ 498 (28 апреля 2023 г.)

*А. В. Архангельский.*

**О топологических группах и их инвариантах.**

1. Топологические группы представляют собой один из основных объектов топологической алгебры. Они описываются как комбинация на одном и том же множестве топологии и групповой структуры, подчиненная некоторым естественным требованиям непрерывности возникающих отображений квадрата этого множества на себя. Замечательным фактом является теорема Л. С. Понтрягина (см. [2]) о том, что каждая топологическая группа, являющаяся  $T_1$ -пространством (т.е. в которой все конечные подмножества замкнуты) является тихоновским пространством (т.е. вполне регулярна). Отсюда вытекает, что все топологические группы являются подпространствами компактных хаусдорфовых пространств, т.е. имеют компактные хаусдорфовы расширения. Напомним, что компактное хаусдорфово пространство  $bX$  называется *компактным расширением* пространства  $X$ , если  $X$  можно представить как всюду плотное подпространство пространства  $bX$ ; при этом пространство  $Y = bX \setminus X$  называется *наростом* пространства  $X$  в его расширении  $bX$ . Следовательно, с каждой некомпактной топологической группой связано множество ее наростов во всевозможных компактных хаусдорфовых расширениях. Этих наростов (попарно негомеоморфных) обыкновенно много. Неожиданный, как мне кажется, факт, связанный с ними заключается в том, что все наросты произвольной топологической группы  $G$  обладают одной «степенью компактности», а именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 1** (о дихотомии; см. [5]). *Каждый нарост произвольной топологической группы в любом ее компактном хаусдорфовом расширении либо псевдокомпактен, либо линделёфов. Более того, у любой некомпактной группы либо все наросты линделёфовы, либо все они псевдокомпактны.*

При этом топологическое пространство *линделёфово*, если из каждого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие, и *псевдокомпактно*, если оно вполне регулярно (т.е. является подпространством компактного хаусдорфова пространства) и каждая непрерывная вещественная функция на нем ограничена. Псевдокомпактные линделёфовы пространства — это в точности компактные хаусдорфовы пространства.

Напомним также, что топологическое пространство *паракомпактно*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. *Паракомпактные перистые* (линделёфовы перистые) топологические группы можно охарактеризовать как топологические группы, которые допускают замкнутый гомоморфизм с компактным ядром на метризуемую (сепарабельную метризуемую) топологическую группу.

Теорема 1 имеет ряд следствий. Случай, когда все наросты линделёфовы, характеризуется так.

**Теорема 2.** *Все наросты не локально компактной топологической группы псевдокомпактны в том и только том случае, если эта топологическая группа является линделёфовым перистым пространством.*

Отсюда следует, например, такой удивительный факт.

**Теорема 3.** *Для наростов не локально компактной топологической группы паракомпактность, полнота по Дрёдонне и линделёфовость равносильны.*

Таким образом, линделёфовость нароста не локально компактной топологической группы равносильна тому, что эта топологическая группа является линделёфовым перистым пространством.

Сами наросты одной и той же топологической группы, конечно, могут быть негомеоморфными и даже иметь разную мощность (например, отрезок и окружность — компактные расширения прямой с двух- и одноточечными наростами соответственно).

2. В классе топологических групп многие топологические свойства ведут себя гораздо лучше, чем в классе топологических пространств. Возникают, в частности, некоторые теоремы об инвариантности этих свойств, которые не действуют в классе всех топологических пространств. Например, произведение псевдокомпактных топологических групп всегда является псевдокомпактной топологической группой — это теорема Комфорта и Росса (см. [6]), в то время как произведение

двух псевдокомпактных пространств не обязательно псевдокомпактно. Возникают также новые импликации. Например, замечательна теорема М. Г. Ткаченко, обобщенная В. В. Успенским, которая говорит, что если топологическая группа  $\sigma$ -компактна (т.е. является объединением не более чем счетного множества своих компактных подпространств), то число Суслина этой топологической группы счетно, т.е. каждое семейство попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счетно (см. [3, 4]). Заметим при этом, что число Суслина компактной топологической группы всегда не более чем счетно по той причине, что на компактной топологической группе всегда есть мера Хаара (т.е. ненулевая мера, определенная на все компактных подмножествах и инвариантная относительно сдвигов), в то время как на  $\sigma$ -компактной топологической группе может не быть ничего похожего на меру Хаара.

3. Одна из больших нерешенных общих проблем теории топологических групп состоит в следующем.

**Проблема.** Дано топологическое свойство  $\mathcal{P}$ . Когда каждое тихоновское пространство со свойством  $\mathcal{P}$  можно представить как замкнутое подпространство топологической группы со свойством  $\mathcal{P}$ ?

Заметим, что известна фундаментальная теорема выдающегося советского математика А. А. Маркова о том, что каждое тихоновское пространство является замкнутым подпространством некоторой топологической группы, а именно, своей свободной топологической группы (см. [1]). Это дает ответ на поставленный выше вопрос в некоторых ситуациях.

Теория топологических групп и их инвариантов свидетельствует, что топологическая алгебра имеет совершенно своеобразный вид в классе топологических групп и глубоко отличается от теории топологических инвариантов тихоновских топологических пространств вообще и имеет свои привлекательные задачи.

### Библиография

1. Марков А. А. О свободных топологических группах // Докл. АН СССР. — 1941. — 31, № 4. — Р. 299–302.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
3. Ткаченко М. Г. О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Мат. заметки. — 1983. — 34, № 4. — Р. 601–607.
4. Успенский В. В. О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // Докл. АН СССР. — 285, № 4. — Р. 824–827.
5. Arhangel'skii A. V. Two types of remainders of topological groups // Comment. Math. Univ. Carol. — 2008. — 49, № 1. — Р. 119–126.
6. Arhangel'skii A., Tkachenko M. Topological Groups and Related Structures. — Amsterdam–Paris: Atlantis Press / World Scientific, 2008.

ЗАСЕДАНИЕ 499 (12 мая 2023 г.)

В. А. Банько, Д. В. Георгиевский.

**Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести.**

Аналитически исследуется задача о разгоне из состояния покоя сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости при задании на границе касательного напряжения. Предполагается, что динамическая вязкость и плотность среды постоянны, а предел текучести может меняться непрерывным либо разрывным образом в зависимости от глубины. Вся полуплоскость в любой момент времени состоит из заранее неизвестных слоёв, где реализуется сдвиговое течение, и жёстких зон. Последние могут перемещаться как жёсткое целое, а могут быть неподвижны, как, например, полуплоскость, до которой возмущения, вызванные действием касательных усилий, ещё не дошли. Для нахождения полей напряжения и скорости развивается метод, основанный на квазиавтомодельных диффузионно-вихревых решениях параболических задач в областях с движущимися границами. Обсуждается вопрос о том, какие выводы о распределении предела текучести по глубине можно сделать по доступным измерениям скорости границы полуплоскости.

ЗАСЕДАНИЕ 500, ЮБИЛЕЙНОЕ (19 мая 2023 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 501: К 86-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Б. Е. ПОБЕДРИ (26 мая 2023 г.).

*В. И. Горбачев.*

**Применение фундаментальных функций при решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.**

ЗАСЕДАНИЕ 502 (23 июня 2023 г.)

*А. В. Аксенов.*

**Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без обрушения.**

В безразмерных переменных система уравнений одномерной газовой динамики для политропных движений газа (давление задается соотношением  $p = \gamma^{-1}\rho^\gamma$ ,  $\gamma = \text{const}$ ) может быть записана в виде

$$u_t + uu_x + \rho^{\gamma-2}\rho_x = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0. \quad (1)$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии для системы уравнений (1) при  $\gamma \neq 1$  запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u\rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{u^2\rho}{2} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \right) dx = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1) обладает на характеристиках  $C_+$  и  $C_-$  инвариантами Римана

$$r = u + \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_+ : dx = (u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt;$$

$$l = u - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_- : dx = (u - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt,$$

которые представляют собой инварианты характеристик нулевого порядка.

Запишем исходную систему уравнений (1) в терминах инвариантов Римана:

$$r_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x = 0, \quad l_t + \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x = 0. \quad (3)$$

Для определения инвариантов характеристик системы уравнений (1) удобно использовать операторы полных производных

$$D_x = \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots, \quad D_t = \partial_t + r_t \partial_r + l_t \partial_l + \dots$$

Введём в рассмотрение операторы полных производных в силу системы уравнений (1):

$$\bar{D}_x = \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots,$$

$$\bar{D}_t = \partial_t - \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x \partial_r - \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x \partial_l + \dots$$

Характеристика  $C_+$  может быть описана в терминах полных производных вдоль характеристического направления:

$$X_+ = \bar{D}_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} \bar{D}_x.$$

**Определение.** Назовём функцию  $f$  *инвариантом* характеристики  $C_+$ , если она удовлетворяет условию

$$X_+(f) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $f$  может зависеть от переменных  $t, x, r, l$  и производных по  $x$  вплоть до некоторого конечного порядка. Аналогично определяются инварианты характеристики  $C_-$ .

**Замечание 1.** Система уравнений (3) инвариантна относительно преобразования  $r \rightarrow l, l \rightarrow r$ . При этом  $C_+ \rightarrow C_-$  и  $C_- \rightarrow C_+$ . Поэтому достаточно знать инварианты одной из характеристик.

Будем искать инварианты второго порядка характеристики  $C_+$ , т.е. функции вида

$$f = f(t, x, r, l, r_x, l_x, r_{xx}, l_{xx}),$$

удовлетворяющие условию (4). Показано, что существует только пять случаев существования дополнительных инвариантов характеристик не выше второго порядка:

Случай 1.  $\gamma = -1$ :  $I_1 = \frac{2}{(l-r)r_x}$ ;

Случай 2.  $\gamma = 1/3$ :  $I_2 = \frac{r_{xx}(r-l) - 2r_x l_x}{(r-l)^3 r_x^3}$ ;

Случай 3.  $\gamma = 5/3$ :  $I_1 = x - rt + \frac{r-l}{2r_x}$ ;

Случай 4.  $\gamma = 7/5$ :  $I_2 = x - lt + (l-r) \frac{2l_x(4l_x - r_x) - (l-r)l_{xx}}{12l_x^3}$ ;

Случай 5.  $\gamma = 3$ :  $I_0 = x - rt$ .

Дополнительные инварианты характеристик позволяют свести решение задачи Коши к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого к системе уравнений (3) добавляется соотношение

$$I_- = h(l) \tag{5}$$

между инвариантом Римана  $l$  и её дополнительным инвариантом  $I_-$ . Соотношение (5) позволяет определить соответствующую функцию  $h(l)$ , используя начальные данные. Интегрирование характеристического поля  $X_+$ , рассматриваемого в силу переопределённой системы уравнений (3), (5), сводится к системе ОДУ.

В [3] приводится критерий невозможности наступления градиентной катастрофы в задаче Коши для системы уравнений (3):

$$r'_0(x) \geq 0, \quad l'_0(x) \geq 0.$$

Для случаев 1–5 были рассмотрены две задачи Коши на всей пространственной оси:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r_0(x) &= \exp x + \exp(-x^2), & l_0(x) &= \exp(x), \\ \text{(b)} \quad r_0(x) &= 2 \operatorname{arctg}(x) + \exp(-x^2), & l_0(x) &= 2 \operatorname{arctg}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

В соответствующих решениях невозможно наступление градиентной катастрофы.

**Замечание 2.** Для задач Коши (6) выполнены законы сохранения (2).

### Библиография

1. Аксенов А. В., Дружков К. П. Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без градиентной катастрофы // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 2023. — № 1. — Р. 135–143.
2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. — М.: Физматлит, 2009.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
4. Aksenov A. V., Druzhkov K. P., Kaptsov O. V. Application of invariants of characteristics to construction of solutions without gradient catastrophe // Int. J. Nonlin. Mech. — 2022. — 147. — 104249.
5. Darboux J. G. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre // C. R. hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. — 1870. — 70. — P. 675–678.
6. Darboux J. G. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // C. R. hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. — 1870. — 70. — P. 746–749.
7. Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second order a deux variables indépendantes. Tome II. — Paris, 1898.
8. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse. — 1860. — Band 8, № 43. — P. 43–66.

ЗАСЕДАНИЕ 503 (15 сентября 2023 г.)

*Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин.*

**О XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.).**

Для участия в работе XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике подано около 2000 заявок. Очное участие в работе съезда с докладами либо в качестве слушателей приняло 1492 человека. В работе съезда участвовало 7 ученых из ближнего и дальнего зарубежья.

География участников съезда охватывает более 70 российских городов. В составе участников съезда 18 академиков и 31 членов-корреспондентов РАН, около 600 профессоров и докторов наук и около 300 молодых ученых. По приглашению Оргкомитета в программу съезда были включены 12 пленарных, 40 секционных докладов, программным комитетом отобраны 1428 докладов подсекций и симпозиумов, в том числе 926 устных и 503 стендовых.

В окончательную программу съезда были включены 1480 докладов. В период проведения съезда участниками представлено 12 пленарных, 39 секционных, 886 устных и 503 стендовых докладов в подсекциях и симпозиумах. Общее количество представленных докладов — 1440. Представленные доклады охватили все направления современной механики. Съезд вошёл в список мероприятий, приуроченных к 300-летию Российской академии наук.

Приветствия участникам съезда прислали Помощник Президента РФ А. А. Фурсенко, Министр науки и высшего образования В. Н. Фальков, Президент РАН Г. Я. Красников, губернатор Санкт-Петербурга А. Д. Беглов, ректор МГУ им. М. В. Ломоносова В. А. Садовничий, руководитель Российского научного фонда А. В. Хлунов. С приветствиями к участникам обратились вице-президент РАН С. Л. Чернышев, председатель Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга А. С. Максимов, академик-секретарь Российского отделения машиностроения, механики и процессов управления В. Ю. Хомич.

На церемонии открытия съезда состоялось вручение медали им. Д. Е. Охоцимского. Лауреатом стал главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша профессор Ю. Ф. Голубев за полученные им результаты в области управления космическими аппаратами, спускающимися в атмосферу Земли и планет, за решение ряда прикладных задач управления механическими системами.

ЗАСЕДАНИЕ 504 (29 сентября 2023 г.)

*В. А. Кадымов.*

**Тензор Кельвина для однородной и неоднородной упругой анизотропной среды. Приближённые методы.**

Представлена разработанная А. А. Ильюшиным эффективная двумерная усредненная по толщине современная теория пластического течения в тонком слое, заключенном между двумя сближающимися поверхностями внешних тел инструмента. На основе общей модели «вязкой» жидкости в области с подвижной границей сформулирована краевая задача, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка.

Следует отметить, что до недавнего времени все исследования в этой области проводились на основе упрощенной постановки краевой задачи в модели «идеальной» жидкости, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, в которых тангенциальными напряжениями пренебрегают. Позже краевая задача пластического течения в тонком слое в упрощенной постановке была разработана на случай пластического течения по упруго деформируемым поверхностям (И. А. Кийко).

Исследована кинематика процесса растекания пластического слоя и выведено нелинейное эволюционное уравнение, определяющее свободную границу области течения. Приводятся другие формы представления эволюционного уравнения. Показано, что это уравнение сводится к частному случаю нелинейного уравнения теплопроводности. Выписаны новые точные частные решения эволюционного уравнения (И. А. Кийко, В. А. Кадымов), полученные с использованием методов разделения переменных и преобразований подобия.

В заключении приведены следующие практические приложения.

1. На основе упрощенной модели выписано точное решение асимметричной задачи свободного растекания пластического слоя, состоящего из двух клиньев с разными свойствами.

2. В упрощенной постановке исследуется задача пластического растяжения полосы силами, приложенными к ее «зажатым» концам. Получено условие, при котором одновременно с пластическим сжатием «зажатых» торцевых частей происходит пластическое растяжение центральной части полосы.

3. В задаче об осадке пластической полосы, занимающей область в форме прямоугольника (растекающейся в одном и неподвижной в другом направлении), получено приближенное аналитическое решение в общей модели «вязкой жидкости». Это решение подтверждается результатами проведенных экспериментов.

Заметим, что полученные закономерности не могут быть описаны с помощью упрощенной модели «идеальной жидкости».

ЗАСЕДАНИЕ 505 (6 октября 2023 г.)

*Д. В. Георгиевский.*

**Моделирование комбинированного ретчеттинга аппаратом изотропных функций двух тензорных аргументов.**

Некоторые эффекты напряжённо-деформированного состояния, такие как виброползучесть, ускорение ползучести и ретчеттинг, наблюдаемые и изучаемые в экспериментальной механике деформируемого твёрдого тела, предлагается моделировать на основе определяющих соотношений, реализуемых в тензорно нелинейных вязкоупругих моделях максвелловского типа. Привлекается аппарат изотропных тензор-функций, зависящих от двух симметричных тензорных аргументов. Приводятся примеры сложного напряжённого состояния в трубчатом образце, когда имеет место существенный непропорциональный рост во времени осевой компоненты деформации при совместном действии постоянной осевой и колебательной сдвиговой нагрузок по сравнению со случаем действия только осевой нагрузки. Вводятся понятия обобщённого и комбинированного ретчеттинга в условиях сложного напряжённого состояния.

ЗАСЕДАНИЕ 506 (20 октября 2023 г.)

*А. Я. Белов, Д. Д. Воробьев, Д. А. Завадский, Ф. К. Нилов, А. В. Сайгак, Д. И. Сорокина, А. А. Шамсутдинов.*

**Самозаклинивающиеся структуры.**

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур имеется хотя бы одна крайняя — такая, которую можно непрерывно передвинуть «на бесконечность» (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры), оставляя все остальные фигуры неподвижными и не пересекая их внутренности в процессе движения.

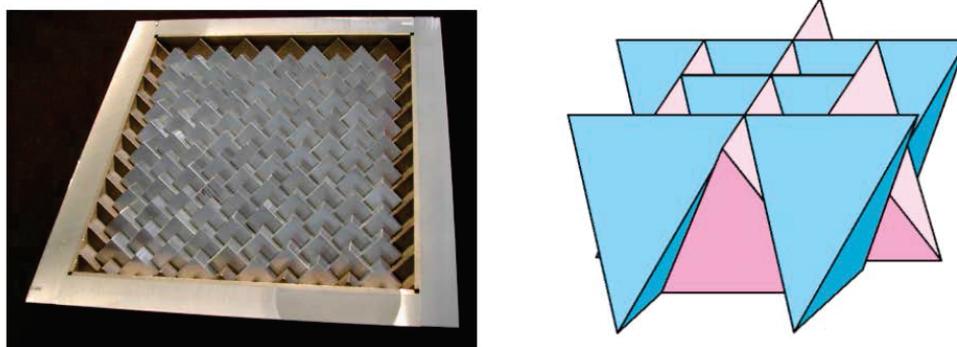


Рис. 1. Самозаклинивающиеся структуры из тетраэдров и кубов

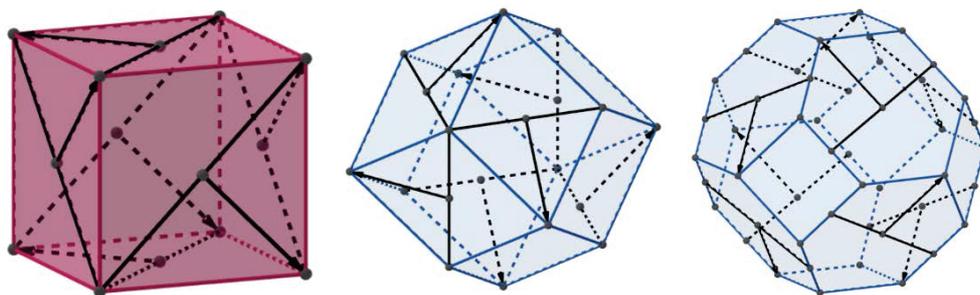


Рис. 2. Перекашивание граней



Ромбические додекаэдр

Кубы

Другой вариант  
усечённых додекаэдров

Усечённые октаэдр

Рис. 3. Новые многослойные самозаклинивающиеся структуры

Около пятнадцати лет назад было обнаружено, что в пространстве размерности три имеет место феномен самозаклинивающихся структур. Самозаклинивающаяся структура — это такой конечный (или бесконечный) набор выпуклых тел с непересекающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, оставшееся нельзя «унести на бесконечность».

Известные структуры базировались на рассмотрении слоя из кубов, тетраэдров и октаэдров. Они обладают высокой прочностью, остаются таковыми даже при разрушении части зерен, трещины останавливаются на границах между зернами, а зерна друг друга держат. По этой причине самозаклинивающиеся структуры могут быть использованы в инженерном деле. Уже создана специальная лаборатория под руководством Ю. Эстрина, выигран ряд грантов.

На научной смене в Сириусе в 2023 г. были разработаны несколько принципиально новых многослойных структур, обладающих дополнительными свойствами. По итогам семинара в Магнитогорске в 2024 г. были зарегистрированы два патента.

Рассмотрим одинаковые выпуклые многогранники, замощающие пространство. Это могут быть, например, кубы, ромбододекаэдр или усеченные октаэдр. Перекосим грань каждого многогранника так, как это показано на рисунке: каждая грань поворачивается относительно направленного отрезка, лежащего в этой грани. Из копий перекошенного таким образом многогранника собирается многослойная самозаклиненная структура.

Назовем слоем заклиненности подмножество блоков, образующих плоскую самозаклинивающуюся структуру. В предложенных нами структурах каждый многогранник содержится сразу в нескольких различных слоях заклиненности. Это позволяет использовать данные сборки в создании массивных материалов, способных противостоять росту трещин, демпфированию вибраций, превосходящие по показателю ковкости материалы, из которых состоят блоки. Для получения и исследования структур была написана компьютерная программа, содержащая в себе функцию оценки «заклиненности» блока и перекося граней.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393) и была поддержана грантом РФФИ № 22-1920073.

### Библиография

1. Белов А. Я. Самозаклинивающиеся структуры // Квант. — 2009. — № 1. — Р. 20–23.

ЗАСЕДАНИЕ 507 (27 октября 2023 г.)

*И. М. Цветков.*

**Исследование динамических режимов растяжения трансверсально-изотропного идеально-жесткопластического тонкого круглого слоя..**

ЗАСЕДАНИЕ 508 (10 ноября 2023 г.)

*П. В. Денисов.*

**О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени (по материалам кандидатской диссертации).**

Диссертация посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени  $t$ ) решения задачи Коши для параболических по Петровскому систем уравнений и поведения при больших  $t$  решения обобщенной задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Изучаются два случая указанных выше задач: система параболических по Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и без младших членов и систему параболических по Петровскому уравнений с коэффициентами, зависящими от  $t$  и содержащую младшие коэффициенты ненулевого порядка. Кроме того, изучается поведение при  $t \rightarrow +\infty$  интеграла Пуассона для итерированного уравнения теплопроводности, с начальными условиями при  $t = 0$ .

Результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем:

- (i) Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по времени от решения соответствующей задачи.
- (ii) Впервые получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по  $t$  Чезаро порядка  $\alpha \geq 0$  от решения соответствующей задачи.
- (iii) Получены критерии существования пределов в терминах существования средних по кубам, а также в терминах существования предела средних по шарам равномерно по  $x$  во всем пространстве.
- (iv) Если выполнены некоторые условия роста и  $\alpha(t) = t^{m+p-1}$  — порядок средних, установлено утверждение о равностабильности предела разности решения соответствующей задачи и функций  $v(x, t, \alpha(t))$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на каждом компакте  $K$  со скоростью не менее, чем  $t^{-m/2}$ .
- (v) Установлено, что если  $\beta \geq p-1$  и начальные функции  $\varphi_l(x)$ ,  $l = 1, \dots, p-1$ , в соответствующей задаче имеют пределы шаровых средних Рисса по  $t$  при  $\beta \geq p-1$ , и существует нужный предел, то существует соответствующий предел средних.

Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в области качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Соискатель выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору М. В. Шамолину за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЗАСЕДАНИЕ 509 (17 ноября 2023 г.)

*А. В. Романов.*

**Построение и анализ численного решения некоторых трёхмерных задач классической и микрополярной теорий упругости.**

ЗАСЕДАНИЕ 510 (24 ноября 2023 г.)

*Р. Р. Айдагулов.*

**Диссипация в механике.**

Для описания диссипации в гидромеханике вводят поверхностные силы вязкости, выражаемые вторыми производными от скорости. Имеется статистическое обоснование (вывод) этих сил на основе уравнений Больцмана. Сами уравнения Больцмана основаны на предположении, что траектории движения меняются только при соударениях частиц. Именно это предположение приводит к ошибкам при применении их в космологии. В галактиках расстояния между звездами оцениваются величиной несколько световых лет, что в миллионы раз больше размеров звезды. В то же время их движение (определение траектории) управляется дальнедействующими силами гравитации, столкновения практически отсутствуют.

Учет сил взаимодействия на расстоянии при осреднении уравнений движения каждой частицы приводит к нелокальным (псевдодифференциальным) уравнениям с интенсивностью обмена импульсами на расстоянии. Они не повышают порядок уравнений Эйлера, ввиду более низшего порядка дифференцирования дополнительных членов. Диссипация в этом случае происходит за счет обмена импульсом (энергией) с соседними областями и существенно отличается от введенных сил вязкости с повышением порядка дифференциальных уравнений. В особенности это различие проявляется в исследованиях на устойчивость движения, в проявлениях других малых сил типа сил Кориолиса. В докладе разбираются некоторые примеры такого типа.

ЗАСЕДАНИЕ 511 (15 декабря 2023 г.)

*И. Е. Васильев.*

**Комплексное определение деформированного, повреждённого и предельного состояний при механическом воздействии.**

ЗАСЕДАНИЕ 512 (22 декабря 2023 г.)

*М. В. Шамолин.*

**Инварианты однородных систем нечетного порядка.**

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно, облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками.

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  надо знать  $m - 1$  независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на

касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем фазовом многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.



под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 229. — С. 3–11.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-17).

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (Georgievskii Dmitrii Vladimirovich)  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва  
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)  
E-mail: cotedurhone@mail.ru, georgiev@mech.math.msu.su

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва  
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)  
E-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin.maxim@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 24–35  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-24-35

УДК 519.1

## АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЕЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ПО РАЗЛИЧНЫМ ПАРАМЕТРАМ

© 2025 г. А. А. БАЛАГУРА, О. В. КУЗЬМИН

**Аннотация.** Продемонстрированы подходы к перечислению различных типов объектов: с ограничениями, помеченных и непомеченных. Разработана алгоритмическая схема построения геометрических интерпретаций семейств комбинаторных чисел. Рассмотрены вопросы перечисления плоских и неплоских деревьев по различным параметрам.

**Ключевые слова:** дерево, плоское дерево, решеточный путь, алгоритм перечисления.

## ALGORITHMS FOR ENUMERATION OF LATTICE PATHS WITH CONSTRAINTS AND ROOT TREES BY VARIOUS PARAMETERS

© 2025 А. А. BALAGURA, O. V. KUZMIN

**ABSTRACT.** Approaches to enumerating various types of objects are demonstrated: with restrictions, marked, and unmarked. An algorithmic scheme for constructing geometric interpretations of families of combinatorial numbers has been developed. The issues of enumerating flat and non-flat trees according to various parameters are considered.

**Keywords and phrases:** tree, plane trees, lattice path, enumeration algorithm.

**AMS Subject Classification:** 06A06, 05C05, 05C31, 05E05

**1. Введение.** Существует множество подходов к перечислению, которые зависят от особенностей перечисляемых объектов (см. [3]). В работе рассматриваются вопросы перечисления решеточных путей и деревьев, представляющих собой объекты разных типов: с ограничениями, помеченных и непомеченных.

В п. 2 рассматривается перечисление объектов с ограничениями — подмножества решеточных путей. Вводятся основные определения изучаемых решеточных путей. Приводится алгоритмическая схема построения перечислительных интерпретаций решеточных путей, соответствующих семейству комбинаторных чисел.

В п. 3 рассматривается перечисление помеченных объектов — подмножества помеченных корневых деревьев. Вводятся основные понятия для рассматриваемого подмножества деревьев, доказывается теорема о перечислении с весами и приводятся следствия из нее: явный вид и свойства обобщенных расщепленных чисел Шредера, алгоритм построения полного разбиения множества.

В п. 4 построены алгоритмы кодирования и декодирования подмножества непомеченных плоских корневых деревьев. Кодирование осуществляется неубывающими кортежами с присвоением

меток внутренним вершинам дерева. Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев, который позволяет свести задачу о подсчете мощности множества деревьев к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей. Подсчитана мощность рассматриваемого множества деревьев.

**2. Решеточные пути.** Многие комбинаторные задачи могут быть выражены в терминах перечисления решеточных путей.

Конечным неотрицательным решеточным путем  $L$  в пространстве  $E^2$  называют последовательность  $L = (v_1, \dots, v_k)$ , где  $v_i(x_i, y_i) \in \mathbb{N}_0^2$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $v_{i+1} - v_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i) \in \{(1, 0), (0, -1)\}$ . Пусть  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$ ; тогда  $L$  называют решеточным путем типа  $[a, b]$ , если он проходит от  $a$  к  $b$ . Следуя [7], рассматриваем не все возможные пути на решетке, а только те, которые не проходят через определенное множество «запрещенных» точек плоскости. Пусть числа  $\varphi_n$  определяются рекуррентной формулой

$$\varphi_{n+2} = k_1 \varphi_{n+1} + k_2 \varphi_n,$$

где  $\varphi_0, \varphi_1, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ .

Определим операцию сдвига точки  $M(x, y)$  на вектор  $N(\alpha_x, \alpha_y)$ :  $M \otimes N = (x + \alpha_x, y + \alpha_y)$ . Сдвиг множества — сдвиг всех его точек.

Обозначим через  $[a_n, b_n]$  тип решеточных путей:

$$a_n = (0; Y_n), \quad b_n = (0; X_n), \quad X_n = X(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1), \quad Y_n = Y(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1);$$

$Z_n = Z(n, k_0, k_1, \varphi_0, \varphi_1)$  — множество запрещенных точек. Путь, проходящий хотя бы через одну точку из множества  $Z_n$ , назовем запрещенным; все остальные — допустимыми. Пусть  $\Lambda$  — множество всех допустимых решеточных путей типа  $[a_n, b_n]$  при заданном  $Z_n$ .

**Лемма 1** (о произведении). Пусть для всех  $k \in \mathbb{N}$ ,  $O(0, y)$ ,  $A(x_1, y_1)$  выполняются условия

- (i)  $A_1(x_1 + 1, y_1 - k + 1)$ ,  $Z = \{(x_1, y_1 + 1), (x_1 + 1, y_1 + 1), (x_1 + 1, y_1 - k), (x_1 - 1, y_1 - 1), \dots, (x_1 - 1, y_1 - k - 1)\}$  или
- (ii)  $A_1(x_1 + k - 1, y_1 - 1)$ ,  $Z = \{(x_1, y_1 + 1), \dots, (x_1 + k - 1, y_1 + 1), (x_1 + k, y_1), (x_1 - 1, y_1 - 2)\}$ .

Тогда

$$|\Lambda[O, A_1]| = k |\Lambda[O, A]|.$$

**Лемма 2** (о сумме). Пусть  $O(0, y)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_1 + 1, y_1 + 1)$ ,  $C(x_1 + 1, y_1)$ . Тогда

$$|L[O, C]| = |L[O, A]| + |L[O, B]|.$$

**Лемма 3** (о запрещении всех внутренних точек в прямоугольнике). Пусть для всех  $a, b, x, y \in \mathbb{N}$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_1 + a, y_1)$ ,  $D(x_1 + a, y_1 - b)$  выполнены условия

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y) : (x_1, y_1) \leq (x, y) \leq (x_1 + a, y_1), (x_1, y_1 - b) \leq (x_1, y) \leq (x_1, y_1)\}, \\ Z &= \{(x_1, y_1 + 1), \dots, (x_1 + k - 1, y_1 + 1), (x_1 + k, y_1), (x_1 - 1, y_1 - 2)\}, \\ |\Lambda[O, A_1]| &= k |\Lambda[O, A]|, \quad |\Lambda[O, (x, y_1)]| = |\Lambda[O, (x_1, y)]| = 0, \\ \tilde{P} &= \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_1 + a, y_1 - b \leq y \leq y_1\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|\Lambda[O, (x, y)]| = 0$$

для всех  $x, y \in \tilde{P}$ .

**Лемма 4** (о переносе множества решеточных путей). Пусть  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $|\Lambda[A, B]| = m$ . Тогда  $|\Lambda[A \otimes N, B \otimes N]| = m$  при  $Z \otimes N$ .

**Лемма 5** (о числе допустимых путей при ограничениях множеством  $C = C(k_1, k_2)$ ,  $k_1 \leq k_2$ ). Пусть для всех  $k_1, k_2, a, b, x_1, y_1$  выполнены условия

$$\begin{aligned} Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \leq k_2, \quad O(0, Y), \quad A(x_1, y_1), \quad D(x_1 + 1, y_1 - k - 1), \\ M(x_1 + 1, y_1 - k_2 + 1), \quad F(x_1 + k_1 + 2, 0), \\ |\Lambda[O, D]| = b, \quad |\Lambda[O, A]| = a, \\ Z = (x_1 + 2, Y - k_2 - 1), \quad \dots, \quad (x_1 + k_1 + 1, Y - k_2 - 1), \quad (x_1 + 2, Y - k_2 - 2), \quad \dots, \\ (x_1 + 2, Y - k_1 - 1), \quad (x_1 + k_1 + 1, Y - k_1 - 2), \quad (x_1 + 2, Y - 1), \quad \dots, \\ (x_1 + 2, Y - k_2 + 1), \quad (x_1 + 2, Y - k_1 - 1), \quad (x_1, Y), \quad (x_1 + 1, Y). \end{aligned}$$

Тогда

$$|\Lambda[O, F]| = k_2 |\Lambda[O, A]| + k_1 |\Lambda[O, D]| = k_2 a + k_1 b.$$

**Лемма 6** (о числе допустимых путей при ограничениях множеством  $C$ ,  $k_1 \geq k_2$ ). Пусть для всех  $k_1, k_2, a, b, x_1, y_1$  выполнены условия

$$\begin{aligned} Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geq k_2, \quad O(0, Y), \quad A(x_1, y_1), \quad D(x_1 + k_1 + 1, y_1 - 1), \\ M(x_1 + k_2 - 1, y_1 - 1), \quad F(x_1 + k_1 + 2, 0), \\ |\Lambda[O, D]| = b, \quad |\Lambda[O, A]| = a, \\ Z = (x_1, Y - 2), \quad \dots, (x_1 + k_2 - 2, Y - 2), \quad (x_1 + k_2, Y - 2), \quad \dots, (x_1 + k_1, Y - 2), \\ (x_1 + k_2, Y - 3), \quad \dots, \quad (x_1 + k_2, Y - k_1 - 1), \quad (x_1 + k_1 + 1, Y - k_1 - 1). \end{aligned}$$

Тогда

$$|\Lambda[O, F]| = k_2 |\Lambda[O, A]| + k_1 |\Lambda[O, D]| = k_2 a + k_1 b.$$

**Лемма 7** (о множестве начальных точек при  $k_1 \geq k_2$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi_1$ ). Пусть для всех  $k_1, k_2, \varphi_0, \varphi_1, x_1, y_1$  выполнены условия

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geq k_2, \quad \varphi_0 \leq \varphi_1, \quad O(0, k_1 + 2), \quad F(\varphi_1 + 3, 0), \quad Z = A_1.$$

Тогда

$$|\Lambda[O, F]| = \varphi_2.$$

**Лемма 8** (о множестве начальных точек при  $k_1 \geq k_2$ ,  $\varphi_0 > \varphi_1$ ). Пусть для всех  $k_1, k_2, \varphi_0, \varphi_1, x_1, y_1$  выполнены условия

$$Y \in \mathbb{N}, \quad k_1 \geq k_2, \quad \varphi_0 > \varphi_1, \quad O(0, 5), \quad F(\varphi_0 + k_1 + 1, 0), \quad Z = A.$$

Тогда

$$|\Lambda[O, F]| = \varphi_2.$$

Пусть  $A = A(n, \varphi_0, \varphi_1)$  — множество начальных точек;  $B = B(k_1, k_2)$ ,  $C = C(k_1, k_2)$ ,  $D = D(k_1, k_2)$ ,  $F = F(k_1, k_2)$  — множества основных точек;  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\sigma_i = (n, \varphi_0, \varphi_1)$ ,  $i = 1, 2$ , — вектор сдвига по начальным точкам;  $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ ,  $\delta_i = \delta_i(k_1, k_2)$ ,  $i = 1, 2$ , — вектор сдвига основных точек;  $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  — множество коэффициентов сдвига основных точек.

Построено правило 1 нахождения  $A, B, C, D, F, H, \delta, \sigma$ .

**Алгоритм 1.** Вход алгоритма:  $\varphi_0, \varphi_1, k_1, k_2$ .

- (i) Строим  $A, B, C, D, F, H, \delta, \sigma$  по правилу 1.
- (ii) Находим числа  $X_n, Y_n$  по правилу 1.
- (iii) Строим множество запрещенных точек:  $Z_n = \{A, B \otimes \sigma \otimes \delta, C \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, C \otimes \sigma \otimes \alpha_1 \delta, B \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, B \otimes \sigma \otimes \alpha_2 \delta, D \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, D \otimes \sigma \otimes \alpha_3 \delta, F \otimes \sigma \otimes \delta, \dots, F \otimes \sigma \otimes \alpha_4 \delta\}$ .

Выход алгоритма:  $a_n, b_n, Z_n$ .

Идея алгоритма 1 состоит в том, что множества по правилу 1 (см. [6]) строятся один раз, а далее сдвигаются на построенные векторы в зависимости от  $n$ . На основе лемм 1–8 доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $[a_n, b_n]$  и  $Z_n$  построены в соответствии с алгоритмом 1. Тогда

$$|\Lambda[a_n, b_n]| = \varphi_n.$$

**3. Перечисление помеченных корневых деревьев.** Нам понадобятся следующие определения. Корневое дерево можно определить рекурсивно. Корневое дерево  $d$  есть множество вершин, одна из которых называется корнем дерева  $d$ , а оставшиеся вершины разбиты на  $m \geq 0$  непересекающихся непустых множеств, каждое из которых является деревом. Вершины, не имеющие преемников, называются концевыми вершинами. Вершины, имеющие преемники, называют внутренними вершинами.

Присвоим каждой концевой вершине дерева метку, занумеровав вершины числами  $1, 2, \dots, n$ . Повторим следующую процедуру до тех пор, пока все вершины кроме корня не окажутся помеченными (см. [7]). Пометим числом  $n + 1$  такую вершину  $v$ , что

- (а) вершина  $v$  не помечена, а все ее преемники помечены и
- (б) среди всех не помеченных вершин, все преемники которых помечены,  $v$  является вершиной, имеющей преемника с наименьшей меткой.

Полученное дерево называется помеченным.

Пусть  $n \geq 2$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Обозначим через  $D(n)$  множество помеченных корневых деревьев, имеющих в точности  $n$  концевых вершин, у которых из каждой внутренней вершины (и корня) исходит не менее двух вершин; через  $D(n, k)$  — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности  $n$  концевых вершин и  $k$  преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин, через  $D(n, k)$  — множество корневых помеченных деревьев, имеющих в точности  $n$  концевых вершин и  $k$  преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин.

Стандартной формой корневого дерева назовем такое его изображение, при котором слева направо не убывают количество внутренних вершин от корня до каждой концевой вершины и количество концевых вершин каждой из внутренних вершин имеющих одного ближайшего предка. Далее будем предполагать, что рассматриваемые деревья записаны в стандартной форме.

Обозначим через  $\pi_n$  — множество всех  $n$ -перестановок и через  $\pi_n^k$  — множество перестановок  $\pi \in \pi_n$ , имеющих в точности  $k$  циклов. Сопоставим каждому дереву  $d \in D(n, k)$  перестановку  $\pi(d) \in \pi_n^k$  по следующему правилу.

**Правило 1.** Пусть  $(p_1^i, \dots, p_j^i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$ , — последовательность всех концевых вершин дерева  $d$  (записанных в порядке появления), у которых первым предком после корня является  $i$ -й преемник корня ( $2 \leq j \leq n - 1$ ) или эта вершина сама является  $i$ -м преемником корня ( $j = 1$ ). Тогда  $\pi(d) = (p_1^1, \dots, p_{i_1}^1) \dots (p_1^k, \dots, p_{i_k}^k)$ , где  $\sum_{m=1}^k i_m = n$ .

Для  $k \geq 2$  дерево  $d$  назовем  $k$ -перестановочным, если сопоставленная ему по правилу 1 перестановка  $\pi(d)$  имеет в точности  $k$  циклов.

Сопоставим каждому дереву  $D \in D(n)$  перестановку  $\pi(D) \in \pi_n$  по следующему правилу.

**Правило 2.** Пусть  $(p_1, \dots, p_n)$  — последовательность всех концевых вершин дерева  $D$ , записанных в порядке появления. Тогда  $\pi(D) = (p_1, \dots, p_n)$ .

Перестановку  $\pi(D) = (p_1, \dots, p_n)$  назовем перестановкой дерева  $D$ .

Пусть  $g_1 \neq 0$ ,  $x_1 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$ . На рассматриваемом множестве деревьев введем весовые функции по следующим правилам.

**Правило 3.** Положим  $g_i g_1^{-1}$ ,  $i \geq 2$ , — вес вершины дерева, имеющей  $i$  преемников;  $g_1^{-1}$  — вес вершины дерева, не имеющей преемников.

Для  $d \in D(n, k)$  считаем вес дерева  $d$  равным произведению весов всех его вершин кроме корня, для  $D \in D(n)$  — произведению весов всех его вершин. Вес множества деревьев положим равным сумме весов всех составляющих его элементов.

Введем следующие обозначения. Для  $D \in D(n)$  обозначим:  $v(n)$  — количество всех вершин в дереве  $D$ , не считая корня,  $w(n)$  — количество внутренних вершин в дереве  $D$ , не считая корня,

$D_i(n)$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , — множество всех деревьев  $D \in D(n)$  у которых в точности  $i$  внутренних вершин, не считая корня,  $\pi(D_i(n)) = \{\pi(D) : D \in D_i(n)\}$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ .

Введем для  $d \in D(n, k)$  следующие обозначения:  $v(n, k)$  — количество вершин в дереве  $d$ , не считая корня;  $w(n, k)$  — количество внутренних вершин в дереве  $d$ , не считая корня;  $D_i(n, k)$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ , — множество всех деревьев  $d \in D(n)$ , у которых в точности  $i$  внутренних вершин, не считая корня и  $k$  преемников корня;  $\pi(D_i(n, k)) = \{\pi(d) : d \in D_i(n, k)\}$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ .

Обозначим через  $g(A)$  вес множества  $A$ , через  $g(a)$  — вес  $a$ ,  $a \in A$ ,  $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Нам понадобятся следующие известные результаты (см., например, [2, 3, 7]). -полиномы имеют явный вид

$$B_{nk}(g) = (-1)^{n-k} [(k-1)! g_1^{2n-k}]^{-1} \sum_{2n-2k, n-k} (-1)^{r_1} r_1! (2n-k-r_1-1)! \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i! (i!)^{r_i}]^{-1},$$

$n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , а суммирование ведется по всем разбиениям  $n$  на  $k$  слагаемых и  $(2n-2k)$  на  $(n-k)$  слагаемых, соответственно. Дополнительно полагают  $B_{n,n}(g) = g_1^{-n}$ ,  $n \geq 1$ .

**Лемма 9.** Число всех разбиений  $\mathbf{n}$  на  $k$  непустых блоков равно

$$S(n, k) = n! \sum_{n, k} \prod_{i=1}^{n-k+1} [r_i! (i!)^{r_i}]^{-1},$$

где  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**Лемма 10.** Число всех перестановок  $\pi \in \pi_n$ , имеющих в точности  $k$  циклов, равно

$$|s(n, k)| = n! \sum_{n, k} \prod_{i=1}^{n-k+1} [r_i! (i!)^{r_i}]^{-1},$$

где  $n \geq 2$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Пусть весовая функция определяется правилом 3. В [1] найдена интерпретация -полиномов, которую дает следующая теорема.

**Теорема 2.** Для  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  суммарный вес всех различных  $k$ -перестановочных  $n$ -деревьев  $d$  равен  $(-1)^{n-k} B_{n,k}(g)$ . Суммарный вес всех  $n$ -деревьев  $D$ , имеющих различные перестановки, равен  $(-1)^{n-1} B_{n,1}(g)$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $|D(n)| = S_{n1}$ . Рассмотрим множество  $D(n)$ ; пусть  $D \in D(n)$ . По определению  $D(n)$ , каждое дерево  $D$  имеет в точности  $n$  концевых вершин и любая внутренняя вершина рассматриваемых деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда  $w(n) \in \{n-2, n-3, \dots, 0\}$ ,  $w(n) = v(n) - n$  и  $v(n) \in \{2n-2, 2n-3, \dots, n\}$ . Поскольку

$$D(n) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n), \quad D_i(n) \cap D_j(n) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

то

$$|D(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} |D_i(n)|.$$

Рассмотрим  $D \in D_{n-2-i}(n)$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ . Тогда  $v(n) = 2n-2-i$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ . Из определения  $D(n)$  следует что  $|D_{n-2-i}(n)|$  — число всех разбиений  $2\mathbf{n} - \mathbf{2} - \mathbf{i}$  на  $n-i-1$  блоков ( $w(n)$  и корень), у которых нет блоков длины один, т.е.  $r_1 = 0$ . Разбиение множества  $2\mathbf{n} - \mathbf{2}$  на  $n-1$  блоков получится из разбиения множества  $2\mathbf{n} - \mathbf{2} - \mathbf{i}$  на  $n-i-1$  блоков, у которых  $r_1 = 0$ , добавлением  $i$  блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n-2-m, \tag{1}$$

где  $m$  — число внутренних вершин дерева  $D$ . Тогда с учетом леммы 9 имеем

$$|D(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} |D_{n-2-i}(n)| = \sum_{i=0}^{n-2} \sum'_{\substack{2n-2 \\ n-1}} (2n-2-i)! \prod_{i=2}^n [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad (2)$$

где  $n \geq 2$ ,  $0 \leq i \leq n-2$ , а внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям  $2n-2$  на  $(n-1)$  слагаемых, у которых  $r_1 = i$ . Из неравенства  $0 \leq i \leq n-2$  следует, что  $0 \leq r_1 \leq n-2$ ; тогда (2) равно

$$\sum_{\substack{2n-2 \\ n-1}} (2n-2-r_1)! \prod_{i=2}^n [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = S_{n1}, \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Докажем, что  $|D(n, k)| = S_{nk}$ . Рассмотрим множество  $D(n, k)$ ; пусть  $d \in D(n, k)$ . По определению  $D(n, k)$ , каждое дерево  $d$  имеет в точности  $n$  концевых вершин,  $k$  преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$w(n, k) \in \{n-k, n-k-1, \dots, 0\}, \quad w(n, k) = v(n, k) - n, \quad v(n, k) \in \{2n-k, 2n-k-1, \dots, n\}.$$

Поскольку

$$D(n, k) = \bigcup_{i=0}^{n-2} D_i(n, k), \quad D_i(n, k) \cap D_j(n, k) = \emptyset, \quad i \neq j,$$

то

$$|D(n, k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_i(n, k)|.$$

Рассмотрим  $d \in D_{n-k-i}(n, k)$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ . Тогда  $v(n, k) = 2n-k-i$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ . Из определения  $D(n, k)$  следует, что  $|D_{n-k-i}(n, k)|$  — число всех разбиений  $2n-k-i$  на  $n-k-i+1$  блоков ( $w(n)$  и корень), у которых нет блоков длины 1, т.е.  $r_1 = 0$  и блок разбиения, содержащий элемент с максимальной меткой, имеет длину  $k$ . Поскольку элемент с максимальной меткой фиксирован, исключим его из рассмотрения. Рассмотрим число всех разбиений  $2n-k-1-i$  на  $n-k-i$  блоков, у которых  $r_1 = 0$  и хотя бы один блок разбиения имеет длину  $k-1$ . Для блока длины  $k-1$  существует в точности  $(k-1)!$  способов записи. Согласно лемме 10, для каждого разбиения остального множества  $2n-2k-i$  на  $n-k-i$  блоков, у которого  $r_1 = 0$ , существует в точности  $\prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}$  способов записи, где  $(0, r_2, \dots, r_{n-k+1})$  — тип разбиения. Разбиение множества  $2n-2k$  на  $n-k$  блоков получится из разбиения множества  $2n-2k-i$  на  $n-k-i$  блоков, у которых  $r_1 = 0$ , добавлением  $i$  блоков длины 1. Заметим, что в этом случае для каждого разбиения

$$r_1 = n-k-m, \quad (4)$$

где  $m$  — число внутренних вершин дерева  $d$ . Тогда имеем

$$|D(n, k)| = \sum_{i=0}^{n-k} |D_{n-k-i}(n, k)| = \sum_{i=0}^{n-k} \sum''_{\substack{2n-2k \\ n-k}} \frac{(2n-k-i-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad (5)$$

где  $2 \leq k \leq n$ ,  $i \leq n-k$ , а внутреннее суммирование ведется по всем таким разбиениям  $2n-2k$  на  $n-k$  слагаемых, у которых  $r_1 = i$ . Из неравенства  $0 \leq i \leq n-k$  следует, что  $0 \leq r_1 \leq n-k$ ; тогда (5) равно

$$\sum_{\substack{2n-2k \\ n-k}} \frac{(2n-k-r_1-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = S_{nk}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (6)$$

Зададим вес на множестве  $D(n)$  по правилу 3. Каждый тип разбиения  $(r_1, r_2, \dots, r_{n-k+1})$  числа  $2n - 2$  на  $n - 1$  слагаемых задает подмножество множества  $D_{n-2-r_1}(n)$ ; следовательно, для всех  $D \in D_i(n)$

$$g(D) = [g_1^{2n-1-r_1}]^{-1} \prod_{i=2}^n g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому  $D \in D(n)$  перестановку  $\pi \in \pi_n$  по правилу 2.

Зададим вес на множестве  $D(n, k)$  по правилу 3. Каждый тип разбиения  $(r_1, r_2, \dots, r_{n-k+1})$  числа  $2n - 2k$  на  $n - k$  слагаемых задает подмножество множества  $D_{n-k-r_1}(n, k)$ ; следовательно, для всех  $d \in D_i(n, k)$

$$g(d) = [g_1^{2n-k-r_1}]^{-1} \prod_{i=2}^{n-k+1} g_i^{r_i}.$$

Сопоставим каждому  $d \in D(n, k)$  перестановку  $\pi \in \pi_n^k$  по правилу 1. Заметим, что число всех различных  $n$ -перестановок, имеющих в точности  $k$  циклов, равно  $|s(n, k)|$ .

По построению множеств  $D(n)$  и  $D(n, k)$

$$\begin{aligned} \pi_n &\supseteq \pi(D_{n-2}(n)) \supseteq \pi(D_{n-1}(n)) \supseteq \dots \supseteq \pi(D_0(n)), \\ \pi_n^k &\supseteq \pi(D_{n-k}(n, k)) \supseteq \pi(D_{n-k-1}(n, k)) \supseteq \dots \supseteq \pi(D_0(n, k)), \end{aligned}$$

если  $d_1$  ( $D_1$ ) возможно получить из  $d_2$  ( $D_2$ ) соединением двух соседних внутренних вершин (или для  $D_1, D_2 \in D(n)$  соседних внутренней вершины и корня) в каждом из рассматриваемых деревьев или только в одном, то  $\pi(d_1) = \pi(d_2)$  ( $\pi(D_1) = \pi(D_2)$ ).

Применяя метод включения исключения получим, что вес всех  $n$ -деревьев, имеющих различные перестановки, равен

$$\sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} g(D_m(n)).$$

С учетом правила 3 и формул (1), (3) последнее выражение равно

$$[g_1^{2n-1}]^{-1} \sum_{\substack{2n-2 \\ n-1}} (-1)^{r_1} r_1! (2n - 2 - r_1)! \prod_{i=1}^n g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = (-1)^{n-1} B_{n1}(g).$$

Вес всех различных  $k$ -перестановочных  $n$ -деревьев равен

$$\sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} g(D_m(n, k)).$$

С учетом правила 3 и формул (4), (6) последнее выражение равно

$$[(k-1)!g_1^{2n-k}]^{-1} \sum_{\substack{2n-2k, \\ n-k}} (-1)^{r_1} r_1! \frac{(2n - k - r_1 - 1)!}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{n-k+1} g_i^{r_i} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1} = (-1)^{n-k} B_{nk}(g).$$

Теорема доказана.  $\square$

В [2] введены расщепленные числа Шредера второго рода  $K_{nm}$ , которые определяют число корневых деревьев с  $n$  концевыми вершинами по параметру  $m$  — количеству внутренних вершин.

Введем обобщения этих чисел — расщепленные обобщенные числа Шредера  $K_{nmk}$ , которые определяют число корневых деревьев с  $n$  концевыми вершинами по количеству  $m$  внутренних вершин и количеству  $k$  преемников корня.

Применим формулу (2) теоремы 2.

**Следствие 1.** Для чисел  $K_{nm}$  справедливо соотношение

$$K_{nm} = \sum'_{\substack{2n-2 \\ n-1}} (n+m)! \prod_{i=2}^n [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq m \leq n-2,$$

где суммирование ведется по всем таким разбиениям  $(2n - 2)$  на  $n - 1$  слагаемых, у которых  $r_1 = n - 2 - m$ .

Применим формулу (5) теоремы 2.

**Следствие 2.** Для чисел  $K_{nm}$  справедливо соотношение

$$K_{nmk} = \sum'_{\substack{2n-2k \\ n-k}} \frac{(n+m-1)!}{(k-1)!} \prod_{i=2}^{n-k+1} [r_i!(i!)^{r_i}]^{-1}, \quad 2 \leq k \leq n, \quad m \leq n-k,$$

где суммирование ведется по всем таким разбиениям  $2n - 2k$  на  $n - k$  слагаемых, у которых  $r_1 = n - k - m$ .

Применим формулы (3), (6) теоремы 2.

**Следствие 3.** Для чисел  $S_{nk}$  справедливо соотношение

$$S_{nk} = \sum_{m=0}^{n-k} K_{nmk}, \quad k \geq 2.$$

Положим в теореме 2  $g_i = 1, i = 1, 2, \dots$

**Следствие 4.** Для чисел  $s(n, k)$  справедливы соотношения

$$|s(n, 1)| = \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{(n-2-m)} K_{nm},$$

$$|s(n, k)| = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{(n-k-m)} K_{nmk}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

Получен следующий алгоритм, который позволяет строить по разбиению  $\beta$  множества  $2\mathbf{m}$  на  $m, m = n - 1$  блоков, полное разбиение  $\alpha$  множества  $\mathbf{n}$ .

**Алгоритм 2.** Вход алгоритма: разбиение  $\beta$ .

- (i) Из разбиения  $\beta$  уберем все  $r_1$  блоков длины 1;
- (ii) отмечаем корень дерева;
- (iii) элементы блока, содержащего максимальную метку, делаем преемниками корня; длину этого блока обозначим  $k$ ;
- (iv) элементы блока  $i$  делаем преемниками концевой вершины с меткой  $j$  (каждому элементу блока соответствует отдельная вершина с меткой этого элемента), если и только если:
  - (a)  $j$  — максимальная метка из всех меток концевых вершин изображенного дерева;
  - (b) блок  $i$  содержит максимальную метку из всех меток в блоках.

Повторяем третий шаг для всех оставшихся блоков.

Выход алгоритма:  $k$ , разбиение  $\alpha$ .

**4. Перечисление плоских корневых непомеченных деревьев.** Остановимся на перечислении множества плоских деревьев. В рамках рассматриваемого подхода приводятся результаты перечисления подмножества непомеченных корневых плоских деревьев (см. [4]). Предложен алгоритм построения и кодирования всего множества рассматриваемых деревьев. Предложенные алгоритмы позволили доказать существование взаимно однозначного соответствия между изучаемым множеством деревьев и множеством неубывающих кортежей.

Кортежем длины  $n$  называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел  $(i_1, \dots, i_n)$  (см. [2]).

Пусть  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}, a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Положим

$$I(a_1, \dots, a_n) = \left\{ (i_1, \dots, i_n) \mid i_j \leq a_j, i_j \leq i_{j+1}, 1 \leq j \leq n \right\};$$

множество  $I$  назовем множеством неубывающих кортежей,  $X(a_1, \dots, a_n) = |I(a_1, \dots, a_n)|$ .

Обозначим через  $\bar{D}(n, k)$  множество непомеченных плоских корневых деревьев, имеющих в точности  $n$  концевых вершин и  $k$  преемников корня, у которых из каждой внутренней вершины исходит не менее двух вершин, через  $\bar{D}(n, k, r_1, \dots, r_n)$  — множество деревьев  $d \in \bar{D}(n, k)$ , имеющих в точности  $r_i$  вершин степени  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Поскольку в рассматриваемых деревьях важен порядок внутренних вершин, чтобы его зафиксировать, будем придерживаться известного способа обхода дерева по следующему правилу (см. [7]).

**Правило 4.** Будем обходить дерево в соответствии с df-порядком, т.е. в глубину, начиная от корня, совершая обход слева направо.

Назовем типом дерева  $d \in \bar{D}(n, k)$  последовательность  $(n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$  степеней внутренних вершин дерева, без учета корня при обходе дерева по правилу 4. Обозначим через  $\tilde{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$  множество деревьев  $d \in \bar{D}(n, k)$  типа  $(n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$ .

Опишем способ кодирования деревьев неубывающими кортежами.

**Алгоритм 3.** Вход алгоритма: диаграмма дерева  $d \in \bar{D}(n, k)$ .

- (i) Обходим дерево по правилу 4. Пусть  $v_1, \dots, v_{w(n,k)}$  — последовательность обхода его внутренних вершин (за исключением корня).
- (ii) Для всех внутренних вершин  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq w(n, k)$ , считаем число  $c(v_i)$  концевых вершин пройденных до внутренней вершины  $v_i$ ;
- (iii) кодируем вершину  $v_i$ :  $a_i := c(v_i) + 1$ .

Выход алгоритма: код дерева  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$ .

Отметим, что из алгоритма 3 следует, что код дерева является неубывающим кортежем длины  $w(n, k)$ .

Для описания алгоритма декодирования зададим дерево в виде графа  $T = \langle V, R \rangle$ , где  $V$  — множество вершин,  $R$  — множество ребер. Множество  $V$  считаем упорядоченным в соответствии с порядком обхода вершин дерева по правилу 1.

**Алгоритм 4.** Вход алгоритма: код дерева  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$ , тип дерева  $(n_1, \dots, n_{w(n,k)})$ . Пусть  $V = \{v_0\}$ ,  $R$  — пустое множество.

- (i) Строим все  $k$  преемников корня: добавляем вершины  $v_1, \dots, v_k$  в  $V$ , ребра  $(v_0, v_1), \dots, (v_0, v_k)$  — в  $R$ .
- (ii) Для  $1 \leq i \leq w(n, k)$ , обходя по правилу 1 построенное дерево, отсчитываем  $a_i$  концевых вершин;
- (iii) строим  $n_i$  преемников у  $a_i$ -й вершины: добавляем элементы  $v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}, \dots, v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1}$  после  $a_i$ -й вершины в  $V$ ,
- (iv) переобозначаем  $a_i$ -ю вершину через  $w_{a_i}$ ,
- (v) добавляем элементы  $(w_{a_i}, v_{k+(n_1+\dots+n_{i-1})+1}), \dots, (w_{a_i}, v_{k+(n_1+\dots+n_i)+1})$  в  $R$ .

Выход алгоритма: дерево  $T \in \tilde{D}(n, k)$ ,  $T = \langle V, R \rangle$ .

Введем обозначение для множества всех возможных значений  $i$ -й метки деревьев из рассматриваемого множества:

$$A_i = \left\{ a_i : d \in \tilde{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)}) \right\}, \quad 1 \leq i \leq w(n, k).$$

Далее для идентификации принадлежности типов деревьев (и соответственно композиций), к которым относятся множества меток внутренних вершин, будут введены дополнительные индексы.

Пусть  $1 \leq i \leq n - k - 1$ ,  $1 \leq j \leq n - k - i$ . Введем следующие обозначения: если  ${}^i n^j = ({}^i n_1^j, {}^i n_2^j, \dots, {}^i n_{n-k}^j)$  — некоторая композиция; тогда  ${}^i A_1^j, \dots, {}^i A_{n-k}^j$  — множества меток деревьев типа  $({}^i n_1^j, {}^i n_2^j, \dots, {}^i n_{n-k}^j)$ , где  ${}^i A_t^j$  — множество возможных меток  $t$ -й вершины дерева  $1 \leq t \leq n - k$ .

Опишем алгоритм построения кодов деревьев всего множества  $\tilde{D}(n, k)$ , который позволяет построить все множество деревьев (по кодам по алгоритму 4) и свести задачу о подсчете мощности множества  $\tilde{D}(n, k)$  к задаче о подсчете мощности множества неубывающих кортежей.

**Алгоритм 5.** Вход алгоритма:  $n, k$ .

(i) Пусть  ${}^0n_1^0 = \dots = {}^0n_{n-k}^0 = 2$ ,  ${}^0A_p^0 = \{1, \dots, k+p-1\}$ ,  $1 \leq p \leq n-k$ .

(ii) Для  $i$  от 1 до  $(n-k-1)$

$${}^i n_1^0 = \dots = {}^i n_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^i n_{n-k-i}^0 = i+2, \quad {}^i n_{n-k-i+1}^0 = \dots = {}^i n_{n-k}^0 = 1,$$

$${}^i A_1^0 = \{1, 2, \dots, k\}, \quad {}^i A_2^0 = \{1, 2, \dots, k+1\}, \quad \dots, \quad {}^i A_{n-k-i}^0 = \{1, 2, \dots, n-i-1\}.$$

(iii) Пока  $n_1 \neq i+2$ , выполняем для  $j$  от 1 до  $(n-k-i)$ :

$${}^i n_1^j := {}^i n_1^{j-1}, \quad \dots, \quad {}^i n_{n-k-i-j-1}^j := {}^i n_{n-k-i-j-1}^{j-1}, \quad {}^i n_{n-k-i-j}^j := {}^i n_{n-k-i-j}^{j-1} + 1,$$

$${}^i n_{n-k-i-j+1}^j := {}^i n_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1, \quad {}^i n_{n-k-i-j+2}^j := \dots := {}^i n_{n-k}^j := 1.$$

Для  $m$  от 1 до  $(n-k-i)$  и  $m \neq n-k-i-j+1$

$${}^i A_m^j := {}^i A_m^{j-1}, \quad {}^i A_{n-k-i-j+1}^j := {}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1} \cup \left\{ |{}^i A_{n-k-i-j+1}^{j-1}| + 1 \right\}.$$

Выход алгоритма: все типы  ${}^i n^j$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ ,  $0 \leq j \leq n-k-i$ , деревьев из множества  $\bar{D}(n, k)$ , множества меток  ${}^i A_1^j, {}^i A_2^j, \dots, {}^i A_{n-k-i}^j$ .

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq k \leq n$ ,  $d \in \bar{D}(n, k, n_1, \dots, n_t)$ ,  $2 \leq t \leq n-k$ , а дереву  $d$  типа  $(n_1, \dots, n_t)$  соответствует композиция  $({}^i n_1^j, \dots, {}^i n_t^j)$  и множества меток  ${}^i A_1^j, {}^i A_2^j, \dots, {}^i A_t^j$ , которые получены по алгоритму 3. Введем обозначение  $a_s = |{}^i A_s^j|$ ,  $1 \leq s \leq t$ .

**Теорема 3.**  $|\bar{D}(n, k, n_1, n_2, n_t)| = X(a_1, \dots, a_t)$ .

*Доказательство.* Докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множествами  $\bar{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_t)$  и  $I(a_1, \dots, a_t)$ , где построение по дереву его кода осуществляется по алгоритму 3, построение по коду дерева — по алгоритму 4, параметры  $a_1, \dots, a_t$  определяются по алгоритму 5.

Пусть  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$  — код некоторого дерева из множества  $\bar{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$ , построенный по алгоритму 3. Построим по этому коду дерево  $d = \langle V, R \rangle$  согласно алгоритму 4. Докажем, что код дерева  $d$ , построенный по алгоритму 3, есть  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$ . Выберем в множестве  $V$  внутренние вершины  $w_{a_1}, w_{a_2}, \dots, w_{a_{w(n,k)}}$ . Согласно алгоритму 4 у вершины  $w_{a_i}$  число концевых вершин до нее при обходе по правилу 4 равно  $a_i - 1$ ; тогда значение метки вершины  $w_{a_i}$  равно  $a_i$ , а код дерева  $d$  имеет вид  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$ . Таким образом, коды совпадают. Аналогично, если  $a_1, \dots, a_{w(n,k)}$  — код некоторого дерева  $d_1 \in \bar{D}(n, k, n_1, n_2, \dots, n_{w(n,k)})$ , построенный по алгоритму 3, то построенное по коду дерево  $d_2$  совпадает с  $d_1$ .

Прежде чем перейти к алгоритму 3, докажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех различных типов деревьев из  $\bar{D}(n, k)$  и множеством всех композиций  $2n-2k$  на  $n-k$  слагаемых.

Согласно определениям  $d \in D(n, k)$  и  $d \in \bar{D}(n, k)$  число внутренних и концевых вершин у соответствующих деревьев совпадают. По определению  $\bar{D}(n, k)$ , каждое дерево  $d$  имеет в точности  $n$  концевых вершин,  $k$  преемников корня и любая внутренняя вершина рассматриваемых нами деревьев имеет не менее двух преемников. Тогда

$$w(n, k) \in \{n-k, n-k-1, \dots, 0\}, \quad w(n, k) = v(n, k) - n, \quad v(n, k) \in \{2n-k, 2n-k-1, \dots, n\}.$$

Рассмотрим  $d \in \bar{D}_{n-k-i}(n, k)$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ . Тогда  $v(n, k) = 2n-k-i$ ,  $0 \leq i \leq n-k$ . Из определения  $\bar{D}(n, k)$  следует, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех различных типов деревьев из  $\bar{D}(n, k)$  и множеством всех композиций  $2n-k-i$  на  $n-k-i$  слагаемых, у которых нет слагаемых, равных 1. Очевидно, что композиция  $2n-2k$  на  $n-k$  слагаемых получится из композиции  $2n-2-i$  на  $n-k-i$  слагаемых, у которых нет единичных слагаемых, добавлением  $i$  слагаемых, равных 1.

Докажем, что построение всех типов деревьев из множества  $\bar{D}(n, k)$  и множества меток их внутренних вершин может быть выполнено по алгоритму 5.

Рассмотрим композицию  $(2, 2, \dots, 2)$ . Согласно [1] деревья этого типа имеют максимальное число внутренних вершин, т.е.  $w(n, k) = n - k$ , число концевых вершин равно  $n$ . Построим множества  ${}^0A_1^0, \dots, {}^0A_{n-k}^0$ . Поскольку у  $d$  имеется  $k$  преемников корня, первая внутренняя вершина при обходе может встретиться в качестве любого из  $k$  преемников корня и  ${}^0A_1^0 = \{1, \dots, k\}$ , причем  $a_1 = 1$  соответствует дереву  $(((((\dots (u_1, u_2)u_3)u_4) \dots)u_n)$ , а  $a_1 = k$  — дереву  $(u_1(u_2(\dots (u_{n-1}, u_n)) \dots))$ .

Построим множество  ${}^0A_i$ ,  $2 \leq i \leq n - k$ . Если  $i$ -я вершина встречается в качестве первого преемника первого преемника корня, тогда ее метка 1, максимальное значение равно  $k + i - 1$  и соответствует способу расстановки скобок  $(u_1, u_2, \dots, (u_i(u_{i-1}), \dots))$ . Значит,

$${}^0A_i^0 = \{1, \dots, k + i - 1\}.$$

Рассмотрим теперь композиции  $(2, \dots, 2, 3, 1)$ ,  $(2, \dots, 2, 4, 1, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(2, n - k, 1, \dots, 1)$ ,  $(n - k + 1, 1, \dots, 1)$ . В (6) все композиции  $({}^i n_1^0, {}^i n_2^0, \dots, {}^i n_{n-k}^0)$ ,  $1 \leq i \leq n - k - 1$ , получаются по формулам

$${}^i n_1^0 = \dots = {}^i n_{n-k-i-1}^0 = 2, \quad {}^i n_{n-k-i}^0 = i + 2, \quad {}^i n_{n-k-i+1}^0 = \dots = {}^i n_{n-k}^0 = 1.$$

Согласно [1] число внутренних вершин в дереве типа  $(2, \dots, 2, i + 2, 1, \dots, 1)$  равно  $n - k - i$ . Опишем способ построения множеств меток для деревьев типа  $(2, 2, \dots, 2, 3, 1)$  из  $(2, 2, \dots, 2)$ . Число внутренних вершин равно  $n - k - 1$ . Построим множества  ${}^0A_i^1$ ,  $1 \leq i \leq n - k - 1$ . Степени первых  $n - k - 2$  вершин в этих типах совпадают; значит, согласно алгоритму 1 множества меток  ${}^0A_i^1 = {}^0A_i^0$ ,  $1 \leq i \leq n - k - 2$ . Последняя  $(n - k - 1)$ -я вершина имеет степень 3, но поскольку она последняя, согласно правилу 2, ее степень не влияет на ее значение и значения других меток и  ${}^1A_{n-k-1}^1 = {}^0A_{n-k-1}^0$ .

Пусть  ${}^{i-3}A_j^0$ ,  $1 \leq j \leq n - k - i + 3$  — множества меток деревьев типа  $(2, \dots, 2, i - 1, 1, \dots, 1)$ . Построим множества меток для деревьев типа  $(2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$ . Степени первых  $n - k - i + 1$  вершин совпадают; значит, согласно правилу кодирования множества меток заключаем, что  ${}^{i-2}A_j^1 = {}^{i-3}A_j^0$ ,  $1 \leq j \leq n - k - i + 1$ , также совпадают. Последняя  $(n - k - i + 2)$ -я вершина имеет степень  $i$ , но поскольку она последняя, согласно правилу кодирования ее степень не влияет на ее значение метки и значение  ${}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 = {}^{i-3}A_{n-k-i+2}^0$ . Таким образом, доказано, что множества меток задаются следующими формулами:

$${}^i A_1^0 = \{1, 2, \dots, k\}, \quad {}^i A_2^0 = \{1, 2, \dots, k + 1\}, \quad \dots, \quad {}^i A_{n-k-i}^0 = \{1, 2, \dots, n - i - 1\}, \quad 0 \leq i \leq n - k - 1.$$

Пусть теперь дерево имеет  $i$  внутренних вершин. Начальными композициями считаем композиции вида  $(2, 2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$ . Построим из них все остальные композиции. Будем прибавлять по 1 слева направо к следующему слагаемому, пока не получим композицию  $(i, 2, 2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ . Это построение соответствует следующим рекуррентным формулам ( $1 \leq j \leq n - k - i$ ):

$$\begin{aligned} {}^i n_1^j &:= {}^i n_1^{j-1}, \quad \dots, \quad {}^i n_{n-k-i-j-1}^j := {}^i n_{n-k-i-j-1}^{j-1}, \quad {}^i n_{n-k-i-j}^j := {}^i n_{n-k-i-j}^{j-1} + 1, \\ {}^i n_{n-k-i-j+1}^j &:= {}^i n_{n-k-i-j+1}^{j-1} - 1, \quad {}^i n_{n-k-i-j+2}^j := \dots := {}^i n_{n-k}^j := 1. \end{aligned}$$

Опишем способ построения множества меток из начальной композиции для всех последующих. Для  $(2, 2, \dots, 2, i, 1, \dots, 1)$  множества  ${}^{i-2}A_j^0$ ,  $1 \leq j \leq n - k - i + 2$ , уже построены и  ${}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 = \{1, 2, \dots, n - i + 1\}$ . Увеличим на единицу  $(n - k - i + 1)$ -е слагаемое и уменьшим на единицу  $(n - k - i + 2)$ -е слагаемое; получим новую композицию  $(2, 2, \dots, 2, 3, i - 1, 1, \dots, 1)$ , множества меток которой останется прежним, кроме  ${}^i A_{n-k-i+2}^1$ , в которое добавится элемент  $(n - k - i + 1)$ . Согласно правилу кодирования описанное изменение увеличит на 1 максимальную степень предпоследней вершины (при обходе по правилу 1), а все остальные степени вершин и соответственно их множества меток останутся без изменения. Тогда

$${}^{i-2}A_j^1 = {}^{i-2}A_j^0, \quad {}^{i-2}A_{n-k-i+2}^1 = {}^{i-2}A_{n-k-i+2}^0 \cup \left\{ |{}^i A_{n-k-i+2}^0| + 1 \right\}.$$

Предположим, что для композиции  $({}^i n_1^j, {}^i n_2^j, \dots, {}^i n_{n-k}^j)$  множества меток  ${}^0A_1^j, {}^0A_2^j, \dots, {}^0A_{n-k}^j$  построены. Увеличим  $(n - k - i - j)$ -е слагаемое на 1 и уменьшим  $(n - k - i - j + 1)$ -е слагаемое

на 1; получим новую композицию  $({}^0n_1^{j+1}, {}^0n_2^{j+1}, \dots, {}^0n_{n-k}^{j+1})$ , множества меток которой останутся прежними, кроме  ${}^iA_{n-k-i+2}^j$ , куда добавится еще элемент  $(n - k - i + 1)$ . Тогда

$${}^iA_m^j = {}^iA_m^{j-1}, \quad {}^iA_{n-k-i-j+1}^j = {}^iA_{n-k-i-j+1}^{j-1} \cup \left\{ |{}^iA_{n-k-i-j+1}^{j-1}| + 1 \right\}.$$

Таким образом, обоснован способ построения множества меток для  $\bar{D}(n, k)$ , который соответствует алгоритму 5. Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Взаимно однозначное соответствие между множествами  $\bar{D}$  и  $I$  имеет место только при заданных параметрах  $(n, k, n_1, \dots, n_{n-k})$ . Так, даже в рамках одного разбиения, но разных композициях, существуют различные деревья, имеющие один и тот же код.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балагура А. А., Кузьмин О. В. Перечислительные свойства комбинаторных полиномов // Дискр. анал. исслед. опер. — 2011. — 18, № 1. — С. 3–14.
2. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука, 2000.
3. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. — М.: Наука, 1979.
4. Balagura A. A., Kuzmin O. V. Encoding and decoding algorithms for unlabeled trees // J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1847, № 1. — 012027.
5. Balagura A. A., Kuzmin O. V. Generalised Pascal pyramids and their reciprocals // Discr. Math. Appl. — 2007. — 17, № 6. — P. 619–628.
6. Kuzmin O. V., Balagura A. A., Kuzmina V. V., Khudonogov I. A. Partially ordered sets and combinatorial objects of the pyramidal structure // Adv. Appl. Discr. Math. — 2019. — 20, № 2. — P. 229–236.
7. Stanley R. Enumerated Combinatorics. Vol. 2. — Cambridge Univ. Press, 2005.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Балагура Анна Александровна (Balagura Anna Aleksandrovna)  
Иркутский государственный университет, Иркутск  
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)  
E-mail: irk25@rambler.ru

Кузьмин Олег Викторович  
Иркутский государственный университет, Иркутск  
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)  
E-mail: quzminov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 36–48  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-36-48

УДК 517.977

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2025 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

**Аннотация.** В классе билинейных задач оптимального управления рассматриваются условия оптимальности и улучшения управления в форме специальных задач о неподвижной точке на множестве допустимых управлений. Полученные условия оптимальности и улучшения управления в виде задач о неподвижной точке дают возможность применить и модифицировать известный в вычислительной математике аппарат теории и методов неподвижных точек для поиска экстремальных и улучшающих управлений. Конструируются и анализируются итерационные методы поиска экстремальных и улучшающих управлений. Приводятся результаты сравнительного анализа эффективности предлагаемых методов оптимизации с известными методами на примерах.

**Ключевые слова:** билинейная управляемая система, условия оптимальности, улучшение управления, задача о неподвижной точке, итерационные методы.

## OPTIMIZATION METHODS FOR BILINEAR CONTROL SYSTEMS BASED ON FIXED POINT PROBLEMS

© 2025 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

**ABSTRACT.** In the class of bilinear optimal control problems, conditions of optimality and control improvement in the form of special fixed-point problems on a set of admissible controls are considered. The obtained conditions of optimality and control improvement in the form of fixed-point problems make it possible to apply and modify the technique of the fixed-point theory and methods known in computational mathematics to search for extremal and improving controls. Iterative methods for the search for extremal and improving controls are constructed and analyzed. The efficiency of the proposed optimization methods are compared with the known methods.

**Keywords and phrases:** bilinear control system, optimality conditions, control improvement, fixed point problem, iterative methods.

**AMS Subject Classification:** 49M20

**1. Введение.** Рассматривается класс билинейных управляемых систем, который описывается линейными по состоянию и управлению обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такими системами моделируются многие управляемые динамические процессы в области биологии, экономики, медицины, энергетики (см. [6, 11]). Теория и методы решения билинейных задач оптимального управления рассматривались во многих исследованиях (см. [8–10]).

В [8] на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений, разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления в билинейных управляемых системах с квадратичными функционалами

качества управления. Улучшение управления достигается решением специальных задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний.

В данной статье рассматриваются новые нелокальные методы оптимизации билинейных управляемых систем на основе представления условий оптимальности и улучшения управления в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Предлагаемый подход неподвижных точек позволяет получить новые свойства конструируемых методов оптимизации по сравнению с известными методами, которые являются важными для повышения эффективности решения задач рассматриваемого класса.

**2. Условия оптимальности и улучшения управления.** Класс билинейных задач оптимального управления рассматривается в следующей форме:

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_T \left( \langle a(u(t), t), x(t) \rangle + d(u(t), t) \right) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(u(t), t)x(t) + b(u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в которой функции  $a(u, t)$ ,  $d(u, t)$ ,  $A(u, t)$ ,  $b(u, t)$  линейны по переменной  $u$  и непрерывны по переменной  $t$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  является заданным вектором. Вектор  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  характеризует состояние системы, в качестве допустимых управлений  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  рассматривается множество  $V$  кусочно непрерывных функций на интервале  $T$  со значениями в компактном и выпуклом множестве  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и интервал  $T$  заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi \in \mathbb{R}^n$  в задаче (1), (2) является линейной по переменной  $x$  и линейной по переменной  $u$ ; ее можно представить в следующем виде:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, u, t) + \langle H_1(\psi, u, t), x \rangle, \\ H_0(\psi, u, t) = \langle \psi, b(u, t) \rangle - d(u, t), \quad H_1(\psi, u, t) = A^T(u, t)\psi - a(u, t).$$

Стандартная сопряженная система не зависит от переменной  $x$  и принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u(t), t)\psi(t) + a(u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -c. \quad (3)$$

Для допустимого управления  $v \in V$  обозначим через  $x(t, v)$ ,  $t \in T$ , решение системы (2) при  $u(t) = v(t)$ ;  $\psi(t, v)$ ,  $t \in T$ , — решение стандартной сопряженной системы (3) при  $x(t) = x(t, v)$ ,  $u(t) = v(t)$ . Будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции  $g(y_1, \dots, y_l)$  по переменным  $y_{s_1}, y_{s_2}$ :

$$\Delta_{z_{s_1}, z_{s_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, z_{s_1}, \dots, z_{s_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_{s_1}, \dots, y_{s_2}, \dots, y_l).$$

Обозначим через  $P_Y$  оператор проектирования на множество  $Y \subset \mathbb{R}^k$  в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in \mathbb{R}^k.$$

Важным свойством оператора проектирования является выполнение неравенства

$$\langle y - P_Y(z), z - P_Y(z) \rangle \leq 0, \quad y \in Y.$$

Определим функцию переключения в задаче (1), (2) соотношением

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t).$$

С помощью отображения  $u^*$ , определяемого соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle g(\psi, x, t), w \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

Известное необходимое условие оптимальности (принцип максимума; см. [4, 8]) для управления  $u \in V$  в классе билинейных задач (1), (2) можно представить в форме

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Условие принципа максимума (4) можно также представить в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T,$$

где пара  $(x(t), \psi(t))$ ,  $t \in T$ , является решением краевой задачи принципа максимума:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u^*(\psi(t), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t), x(t), t), t), & x(t_0) &= x^0, \\ \dot{\psi}(t) &= -A^T(u^*(\psi(t), x(t), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t), t), t), & \psi(t_1) &= -c.\end{aligned}$$

Введем отображение  $u^\alpha$  с параметром  $\alpha > 0$  с помощью соотношения

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha g(\psi, x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения  $u^\alpha$  принцип максимума (4) можно записать в проекционной форме:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Отметим, что для выполнения принципа максимума (4) достаточно проверить условие (5) хотя бы для одного  $\alpha > 0$ . Обратно, из условия (4) следует выполнение условия (5) для всех  $\alpha > 0$ .

Условия оптимальности (4) и (5) можно рассматривать как задачи о неподвижной точке в поточечной форме. В [2,3] в классе нелинейных задач оптимального управления разработаны новые эквивалентные формы условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке с различными операторами управления. В соответствии с указанными работами в рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) новые формы условий принципа максимума в виде поточечных задач о неподвижной точке принимают следующий вид.

1. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T, \quad (6)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (7)$$

2. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T, \quad (8)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (9)$$

3. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad (10)$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t)x(t) + b(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (11)$$

4. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T, \quad (12)$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t)\psi(t) + a(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (13)$$

Представленные формы принципа максимума в рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) могут использоваться для разработки и обоснования эффективных итерационных методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений. Предлагаемые методы приобретают важное для повышения эффективности свойство улучшения управления на каждой итерации. Выполнение указанного свойства улучшения управления можно обосновать с помощью известных нестандартных формул приращения функционала, не содержащих остаточных членов разложений, которые были разработаны в [8] в классе линейных по состоянию

задач оптимального управления. В рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) нестандартные формулы приращения функционала для управлений  $v \in V$  и  $u \in V$  можно представить в следующем виде:

$$\Delta_v \Phi(u) = \int_T \langle g(\psi(t, u), x(t, v), t), v(t) - u(t) \rangle dt, \quad (14)$$

$$\Delta_v \Phi(u) = \int_T \langle g(\psi(t, v), x(t, u), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу улучшения управления  $u \in V$ : найти управление  $v \in V$  с условием  $\Phi(v) \leq \Phi(u)$ .

Для управления  $u \in V$  рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, v), t), \quad t \in T. \quad (16)$$

Для этого управления на основе формулы (14) получаем неравенство  $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$ .

Рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (17)$$

Для этого управления на основе формулы (15) получаем неравенство  $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$ .

Далее рассмотрим допустимые управления с параметром  $\alpha > 0$ , соответственно определяющиеся условиями:

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t), \quad t \in T, \quad (18)$$

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (19)$$

Тогда соответственно для этих управлений на основе формул (14), (15) и свойства операции проектирования получаем неравенство

$$\Delta_v \Phi(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u(t)\|^2 dt. \quad (20)$$

Таким образом, на основе нестандартных формул приращения (14) и (15) получаем четыре условия нелокального улучшения управления (16)–(19). Форма полученных условий улучшения управления (16)–(19) позволяет рассматривать эти условия как задачи о неподвижной точке относительно управления  $v \in V$ .

Покажем, что решение уравнения (16) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной задачи Коши (7) и наоборот.

Действительно, пусть  $v \in V$  — решение уравнения (16). Тогда функция  $x(t, v)$ ,  $t \in T$ , очевидно, является решением специальной задачи Коши (7).

Обратно, пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$ , — решение задачи Коши (7). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T.$$

Предположим, что  $v \in V$ . Тогда  $x(t) = x(t, v)$ ,  $t \in T$ . Следовательно,  $v \in V$  является решением уравнения (16).

Аналогично показывается, что решение уравнения (17) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной сопряженной задачи Коши (9) и наоборот.

Далее покажем, что решение уравнения (18) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной задачи Коши (11) и наоборот.

Действительно, пусть  $v^\alpha \in V$  — решение уравнения (18). Тогда очевидно, что функция  $x(t, v^\alpha)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной задачи Коши (11).

Обратно, пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$ , — решение задачи Коши (11). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T.$$

Имеем, что  $v^\alpha \in V$  и  $x(t) = x(t, v^\alpha)$ ,  $t \in T$ . Таким образом,  $v^\alpha \in V$  является решением уравнения (18).

Аналогично показывается, что решение уравнения (19) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной сопряженной задачи Коши (13) и наоборот.

Отметим, что в силу свойств оператора проектирования (однозначность, условие Липшица) задачи Коши (11) и (13) имеют единственное решение и однозначно определяют соответствующие выходные управления  $v^\alpha \in V$ .

В результате получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Уравнения (18) и (19) имеют единственное решение.*

Отметим, что метод поиска улучшающего управления для решения уравнения (16) по правилу

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , — решение специальной задачи Коши (7), совпадает с известным  $x$ -методом нелокального улучшения управления (см. [8]), рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Метод поиска улучшающего управления для решения уравнения (17) по правилу

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решение задачи Коши (9), совпадает с другим известным  $\psi$ -методом нелокального улучшения управления (см. [8]), рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Аналогично отметим, что метод решения уравнения (18) по правилу

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , — решение специальной задачи Коши (11), совпадает с известным (см. [8]) проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Далее отметим, что метод решения уравнения (19) по правилу

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решение задачи Коши (13), совпадает с другим известным (см. [8]) проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Полученные условия нелокального улучшения управления (16)–(19) в форме задач о неподвижной точке могут служить основой для конструирования новых методов нелокального улучшения управления.

При этом отметим важное отличие конструируемых методов неподвижных точек от указанных выше известных методов нелокального улучшения управления (см. [8]) в классе билинейных задач оптимального управления. Методы работы [8] заключаются в решении соответствующих специальных задач Коши (7), (9), (11) и (13) в пространстве состояний и могут рассматриваться в качестве одного из способов решения соответствующих уравнений (16)–(19). Для решения указанных уравнений могут применяться другие подходы, в частности, итерационные методы неподвижных точек, из которых наиболее известными являются методы простых итераций (см. [5, 7]).

**3. Методы оптимизации.** Методы простых итераций для решения указанных выше задач о неподвижной точке принципа максимума образуют соответствующие итерационные процессы при  $k \geq 0$  с начальным управлением  $v^0 \in V$  при  $k = 0$ .

1. В задаче о неподвижной точке (6),(7) рассматривается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Для решения  $x(t)$ ,  $t \in T$ , имеет место очевидное соотношение

$$x(t) = x(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, итерационный процесс может быть записан в неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), \quad t \in T. \quad (21)$$

2. В задаче о неподвижной точке (8), (9) предлагается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

Для решения  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , имеет место очевидное соотношение

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, итерационный процесс может быть записан в следующей неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), \quad t \in T. \quad (22)$$

3. В задаче о неподвижной точке (10),(11) рассматривается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где  $x(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t)x(t) + b(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Итерационный процесс может быть представлен в неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (23)$$

4. В задаче о неподвижной точке (12),(13) строится итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t)\psi(t) + a(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

Итерационный процесс может быть записан в неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (24)$$

В построенных проекционных методах (23) и (24), в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования  $\alpha > 0$  фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления.

Анализ сходимости построенных итерационных процессов к решениям соответствующих задач о неподвижной точке можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений. В частности, можно показать (ср. [2]), что при определенных условиях и достаточно малых параметрах проектирования  $\alpha > 0$  процессы (23) и (24) могут сходиться в норме пространства непрерывных функций  $\|v\|_C = \max_{t \in T} \|v(t)\|$  к решениям соответствующих задач о неподвижной точке (10), (11) и (12), (13).

В соответствии с условиями улучшения управления (16)–(19) неявная форма итерационных процессов (21)–(24) позволяет рассматривать эти уравнения на каждой итерации как условия нелокального улучшения управления  $v^k \in V$ . Таким образом, процессы (21)–(24) на каждой итерации приобретают свойство нелокального улучшения управления  $v^k \in V$ .

При этом для процессов (21) и (22) на основе формул приращения (14) и (15) получаем соответствующие оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0,$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0.$$

Для процессов (23) и (24) с параметром проектирования  $\alpha > 0$  на основе формул приращения (14) и (15) и оценки (20) получаем соответствующие усиленные оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt, \quad (25)$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt. \quad (26)$$

Используя свойство релаксации по целевому функционалу и оценки (25), (26), сходимость итерационных процессов (23) и (24) можно исследовать по специальной величине невязки принципа максимума на итерационных приближениях управления.

Для каждого  $k \geq 0$  рассмотрим величину

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \geq 0.$$

Если  $\delta(v^k) = 0$ , то в силу оценок (25) и (26) получаем, что  $v^k = v^{k+1}$ , т.е. управление  $v^k$  удовлетворяет условию принципа максимума. Таким образом, величина  $\delta(v^k)$  характеризует невязку (меру) выполнения принципа максимума на управлении  $v^k$ .

**Теорема 2.** *Релаксационные процессы (23) и (24) для любого параметра проектирования  $\alpha > 0$  сходятся по невязке принципа максимума:*

$$\delta(v^k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* В билинейной задаче семейство фазовых траекторий системы в совокупности ограничено:

$$x(t, u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V,$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  — выпуклое компактное множество. В силу ограниченности семейства фазовых траекторий последовательности  $\Phi(v^k)$ ,  $k \geq 1$ , ограничены снизу. Следовательно, с учетом релаксации, эти последовательности являются сходящимися, т.е.

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \square$$

Практическим критерием окончания расчета итерационных приближений управления является выполнение условия

$$\delta(v^k) = |\Phi(v^{k+1}) - \Phi(v^k)| \leq \varepsilon |\Phi(v^k)|,$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная относительная точность расчета целевого функционала.

Для вычисления приближения  $v^{k+1}$  на  $k$ -й итерации рассматриваемых процессов (21)–(24) достаточно решить соответствующую специальную задачу Коши. При таком способе вычисления приближения  $v^{k+1}$  трудоемкость  $k$ -й итерации процессов оценивается расчетом двух задач Коши. При этом выделим следующие характерные свойства процессов (21)–(24).

1. Итерационные процессы (21) и (22) получают возможность строго улучшать управление  $v^k$ , удовлетворяющее принципу максимума, в силу возможной неединственности решения соответствующей специальной задачи Коши.

2. Итерационные процессы (23) и (24) не могут строго улучшить управление  $v^k$ , удовлетворяющее принципу максимума, в силу единственности решения уравнений (23) и (24) в соответствии

с теоремой 1. При этом отметим, что методы (23) и (24) строго улучшают любые управления  $v^k$ , не удовлетворяющие принципу максимума, согласно соответствующим оценкам (25) и (26).

Другой способ вычисления приближения  $v^{k+1}$  основан на представлении уравнений (21)–(24) в виде задач о неподвижной точке относительно управления  $v^{k+1}$ . Для решения этих задач можно применить известные методы простых итераций.

Преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность решения на каждой итерации соответствующих итерационных процессов обычных задач Коши с предварительно вычисленным управлением, в отличие от достаточно трудоемкого решения специальных задач Коши с операторами максимизации функции Понтрягина или операторами проектирования в правой части систем дифференциальных уравнений.

Другим преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность строгого улучшения экстремального управления  $v^k$ , достигаемого с помощью выбора начального приближения методов простой итерации.

Для иллюстрации такой возможности рассмотрим следующие модификации проекционных методов (23) и (24).

На  $k$ -й итерации процессов (23) или (24) соответственно строятся итерационные процессы метода простой итерации с индексом  $s \geq 0$  и начальным приближением  $w^0 \in V$  при  $s = 0$ , которое не является экстремальным управлением, т.е. не удовлетворяющим принципу максимума:

$$w^{s+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, w^s), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (27)$$

$$w^{s+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, w^s), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (28)$$

Итерации по индексу  $s \geq 0$  проводятся до первого строгого улучшения управления  $v^k \in V$  по целевому функционалу:  $\Phi(w^s) < \Phi(v^k)$ . Далее осуществляется переход на новую  $(k + 1)$ -ю итерацию процессов (23) или (24) с полученным управлением  $v^{k+1} = w^s$  и итерационные процессы метода простой итерации повторяются.

Если строгое улучшение управления  $v^k \in V$  не происходит по индексу  $s \geq 0$ , т.е.  $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^k)$ , то, в предположении сходимости процессов (27) и (28), получаем условие

$$\Phi(w^\alpha) = \Phi(v^k),$$

где  $w^\alpha$  — решение соответствующей задачи о неподвижной точке:

$$w(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, w), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$w(t) = u^\alpha(\psi(t, w), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

При этом в силу оценки (20) получаем, что  $v^k = w^\alpha$ , т.е. управление  $v^k$  удовлетворяет принципу максимума.

В результате возникают релаксационные последовательности управлений  $v^l$ ,  $l \geq 0$  со свойством  $\Phi(v^{l+1}) < \Phi(v^l)$ , образуемые в результате рассматриваемой модификации расчета последовательных приближений управления для процессов (23) и (24) соответственно.

В случае конечной релаксационной последовательности  $v^l$ ,  $l \geq 0$ , когда строгое улучшение конечного управления  $v^l$  не происходит по индексу  $s \geq 0$ , т.е.  $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^l)$ , для конечного управления  $v^l$  имеем выполнение условия принципа максимума.

Для случая бесконечной релаксационной последовательности  $v^l$ ,  $l \geq 0$ , когда  $\Phi(v^{l+1}) < \Phi(v^l)$ , получаем следующее.

В задаче (1), (2) семейство фазовых траекторий системы (2) в совокупности ограничено:

$$x(t, u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V,$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  — выпуклое компактное множество. В силу ограниченности семейства фазовых траекторий последовательности  $\Phi(v^l)$ ,  $l \geq 1$ , ограничены снизу. Следовательно, с учетом релаксации, эти последовательности являются сходящимися, т.е.

$$\Phi(v^{l+1}) - \Phi(v^l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Отсюда возникают следующие критерии окончания расчета задачи (1), (2) предлагаемыми модификациями методов.

Если выполнилось первое строгое улучшение управления  $v^l \in V$  по индексу  $s \geq 0$ :  $\Phi(w^s) < \Phi(v^l)$ , то  $v^{l+1} = w^s$  и проверяется условие остановки расчета по функционалу:

$$|\Phi(v^{l+1}) - \Phi(v^l)| \leq \varepsilon_1 |\Phi(v^l)|,$$

где  $\varepsilon_1 > 0$  — заданная относительная точность расчета целевого функционала.

Если указанный критерий остановки выполнен, то на этом расчет предлагаемыми модификациями методов заканчивается. Иначе осуществляется переход на новую  $(l + 1)$ -ю итерацию процессов (23) или (24) с полученным управлением  $v^{l+1} = w^s$ , и итерационный процесс повторяется.

Если строгое улучшение управления  $v^l \in V$  по индексу  $s \geq 0$  не происходит, т.е.  $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^l)$ , то итерационный процесс метода простой итерации проводится до выполнения условия

$$\|w^{s+1} - w^s\|_C \leq \varepsilon_2 \|w^s\|_C,$$

где  $\varepsilon_2 > 0$  — заданная относительная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом расчет предлагаемыми модификациями методов заканчивается.

Предлагаемые модификации проекционных методов, в отличие от градиентных методов и известных методов нелокального улучшения управления (см. [8]), не гарантируют релаксацию по целевому функционалу на каждой итерации последовательных приближений управления. Свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления и отсутствием на каждой итерации достаточно трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления в окрестности текущего приближения управления.

В рассматриваемых модификациях проекционных методов на каждой итерации решается обычная задача Коши с предварительно вычисленным управлением, в отличие от достаточно трудоемкого решения специальных задач Коши с проекционным оператором в правой части систем дифференциальных уравнений для известных проекционных методов нелокального улучшения управления (см. [8]).

Известные проекционные методы нелокального улучшения управления (см. [8]) в силу единственности решения специальных задач Коши не могут строго улучшать экстремальные управления, т.е. удовлетворяющие принципу максимума. Предлагаемые модификации проекционных методов имеют такую возможность за счет конструирования последовательных приближений управления, отличающихся от экстремального управления.

Данные особенности рассматриваемых модификаций проекционных методов на основе задач о неподвижной точке дают возможность повысить эффективность решения билинейных задач оптимального управления по сравнению с известными градиентными и проекционными методами нелокального улучшения управления (см. [8]).

**4. Примеры.** Рассмотрим примеры, иллюстрирующие характерные особенности и вычислительную эффективность предлагаемых модификаций проекционных методов оптимизации по сравнению с известными методами.

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши производилось методом Рунге—Кутты—Вернера переменного (5-6) порядка точности с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0 (см. [1]). Значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах фиксированной равномерной сетки  $T_h$  с шагом дискретизации  $h = 10^{-3}$  на интервале  $T$ . В промежутках между соседними узлами сетки  $T_h$  значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле. Критерии остановки расчета определялись значениями  $\varepsilon_1 = \varepsilon = 10^{-6}$  и  $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ .

**Пример 1** (строгое улучшение экстремального управления). Рассматривается известная билинейная задача (см. [8]):

$$\Phi(u) = -x(2) + 2 \int_0^2 x(t)(2 - 3u(t))dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = 2(u(t) - 1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = 2\psi(u - 1)t - 2x(2 - 3u),$$

$$\dot{\psi}(t) = 2(2 - 3u(t)), \quad \psi(2) = 1.$$

Отображение  $u^*$  можно представить в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} 0, & g(\psi, x, t) < 0, \\ 1, & g(\psi, x, t) > 0, \\ w \in U, & g(\psi, x, t) = 0, \end{cases} \quad g(\psi, x, t) = 2\psi t + 6x.$$

Экстремальные управления определяются на основе решения краевой задачи принципа максимума:

$$\dot{x}(t) = 2(u^*(\psi(t), x(t), t) - 1)t, \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = 2(2 - 3u^*(\psi(t), x(t), t)), \quad \psi(2) = 1.$$

Анализ краевой задачи показывает существование трех экстремальных режимов:

I:  $x(t) = 1$ ,  $\psi(t) = -2t + 5$ ,  $t \in T$ , с соответствующим управлением  $u(t) = 1$ ,  $t \in T$ , и значением функционала  $\Phi(u) = -5$ ;

II:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t^2 + 2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} -2t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t - 7, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

соответствующее значение функционала  $\Phi(u) = -4/3$ ;

III:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ -t^2 + \frac{25}{16}, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} -2t - \frac{5}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ 4t - 7, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2, \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2; \end{cases}$$

соответствующее значение функционала  $\Phi(u) = -65/48$ .

Таким образом, оптимальным решением задачи оптимального управления является первое экстремальное управление.

Рассмотрим задачу улучшения второго экстремального управления:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

с помощью модификации проекционного метода оптимизации на основе метода улучшения (23).

Отображение  $u^\alpha$  с параметром  $\alpha > 0$  можно записать в форме

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha g(\psi, x, t)), \quad g(\psi, x, t) = 2\psi t + 6x.$$

Поэтому задача о неподвижной точке (23) для улучшения экстремального управления при  $k = 0$ ,  $v^0 = u$ ,  $v^1 = v$  принимает следующий вид:

$$v(t) = \begin{cases} P_U(1 + \alpha(2t(-2t - 1) + 6x(t, v))), & 0 \leq t < 1, \\ P_U(\alpha(2t(4t - 7) + 6x(t, v))), & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

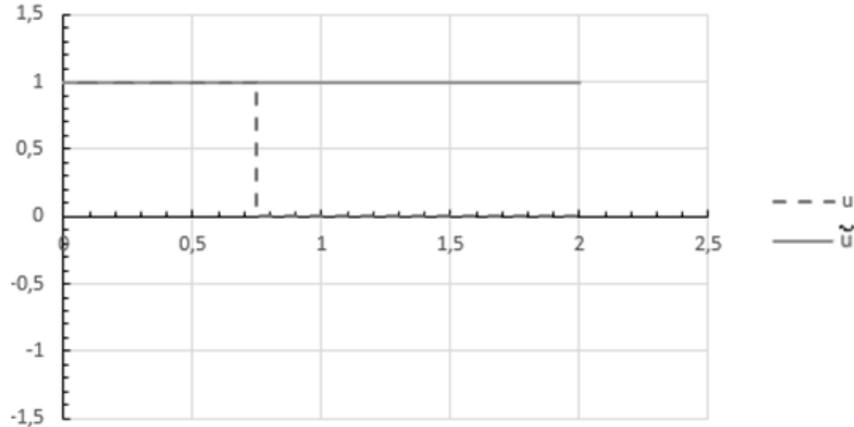


Рис. 1. Расчетные управления  $u$  и  $\tilde{u}$  при  $v^0 = 0$ .

Метод простой итерации для  $s \geq 0$  соответственно имеет вид

$$w^{s+1}(t) = \begin{cases} P_U(1 + \alpha(2t(-2t - 1) + 6x(t, w^s))), & 0 \leq t < 1, \\ P_U(\alpha(2t(4t - 7) + 6x(t, w^s))), & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

В качестве начальных приближений для метода простой итерации при  $s = 0$  рассматривались управления, которые не являются экстремальными управлениями, в частности  $w^0(t) = 0$  и  $w^0(t) = 0,5$ ,  $t \in T$ . При  $\alpha = 10^2$  для обоих начальных приближений получалось расчетное управление  $\tilde{u}(t) = 1$ ,  $t \in T$ , с трудоемкостью, которая оценивается суммарным количеством 26 и 14 задач Коши соответственно. При достаточно больших  $\alpha$  итерационный процесс не сходится, при достаточно малых  $\alpha$  сходимость существенно замедляется с соответствующим увеличением суммарного количества расчетных задач Коши.

Пример иллюстрирует возможность строгого улучшения экстремального управления рассматриваемой модификацией проекционного метода. Градиентные методы и немодифицированный метод (23) с решением специальной задачи Коши такой возможностью не обладают.

**Пример 2** (сравнительная эффективность). Проводится сравнение результатов расчета задачи примера 1 предлагаемой модификацией метода (23) с фиксированным  $\alpha = 10^3$  и немодифицированным проекционным методом (23) с решением специальной задачи Коши при  $\alpha = 10^3$  для различных стартовых управлений  $v^0$  при  $k = 0$ . Модификация метода (23) рассматривалась с различными начальными приближениями  $w^0 \in V$  для метода простой итерации при  $s = 0$ , не являющимися экстремальными управлениями.

В таблицах 1 и 2 приводятся результаты расчета по итерациям улучшения с индексом  $l \geq 0$  до выполнения критериев останова. Здесь  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}$  — расчетные значения целевого функционала соответственно немодифицированным проекционным методом (23) и предлагаемой модификацией метода (23). Соответствующие суммарные количества расчетных задач Коши  $N$  и  $\tilde{N}$  приводятся с учетом останова по указанным выше критериям.

При  $v^0 = 0$  получаем результаты, приведенные в таблице 1. Немодифицированным методом (23) получено расчетное управление с  $N = 5$ , совпадающее на сетке  $T_h$  с третьим экстремальным управлением. Модификацией метода (23) получено расчетное управление с  $\tilde{N} = 29$ , совпадающее с оптимальным управлением. При этом начальное приближение для метода простой итерации выбиралось  $w^0 = 0$ . При начальном приближении для метода простой итерации  $w^0 = 0,5$  количество расчетных задач Коши сократилось до  $\tilde{N} = 18$  с тем же количеством итераций улучшения и расчетным оптимальным управлением. На рис. 1 демонстрируются конечные расчетные управления  $u$  и  $\tilde{u}$ , полученные соответствующими методами.

Результаты расчета для  $v^0 = 0,5$  приведены в таблице 2.

Таблица 1. Результаты расчета при  $v^0 = 0$ .

$l$	$\Phi$	$\tilde{\Phi}$
1	-1,3541666666666666	-1,202510431999998
2	-1,3541666666666666	-1,341536106085704
3		-1,709556895999993
4		-4,3872926666666666
5		-5,000000000000000
6		-5,000000000000000

Таблица 2. Результаты расчета при  $v^0 = 0,5$ .

$l$	$\Phi$	$\tilde{\Phi}$
1	-5,000000000000000	0,333333333333333
2	-5,000000000000000	-1,202510431999998
3		-1,341536106085704
4		-1,709556895999993
5		-4,387292666666666
6		-5,000000000000000
7		-5,000000000000000

Немодифицированным методом (23) получено расчетное управление с  $N = 5$ , совпадающее с оптимальным управлением.

Модификацией метода (23) получено расчетное управление с  $\tilde{N} = 32$ , совпадающее с оптимальным управлением, при начальном приближении  $w^0 = 0$  для метода простой итерации. При начальном приближении для метода простой итерации  $w^0 = 0,5$  количество расчетных задач Коши уменьшилось до  $\tilde{N} = 18$ .

Результаты проведенных расчетов показывают, что модификация проекционного метода (23) позволяет получить оптимальное решение  $u(t) = 1$ ,  $t \in T$ , с различных стартовых управлений, в том числе с неоптимального экстремального стартового управления. Немодифицированный проекционный метод (23) позволяет получать экстремальные управления, но не может строго улучшить неоптимальное экстремальное управление.

**5. Заключение.** В рассматриваемом классе билинейных управляемых систем получены следующие новые результаты.

1. Представлены новые формы принципа максимума на основе конструируемых задач о неподвижной точке.
2. Построены новые условия нелокального улучшения управлений в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений.
3. Разработаны новые итерационные методы оптимизации на основе задач о неподвижной точке.

Выделим следующие вычислительные особенности предлагаемых методов оптимизации в классе билинейных задач оптимального управления.

1. Нелокальность улучшения управления и отсутствие трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации, характерной для градиентных методов.
2. Возможность строгого улучшения экстремальных управлений в отличие от градиентных и других известных нелокальных методов улучшения управления.
3. Повышение точности расчета итерационных приближений управления, вычисляемых одновременно с расчетом фазовых и сопряженных задач Коши.

Указанные свойства предлагаемых методов являются важными факторами для повышения эффективности решения билинейных задач оптимального управления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартенев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. *Булдаев А. С.* Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2020. — 1. — С. 35–53.
3. *Булдаев А. С., Казьмин И. Д.* Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 19–27.
4. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.

5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
6. *Рудик А. П.* Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. — М.: Атомиздат, 1970.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
8. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
9. *Срочко В. А., Аксентюшкина Е. В.* Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — 15. — С. 78–91.
10. *Хайлов Е. Н.* Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном органте// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1998. — 220. — С. 217–235.
11. *Mohler R. R.* Bilinear Control Processes with Applications to Engineering, Ecology and Medicine. — New York–London: Academic Press, 1973.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Булдаев Александр Сергеевич (Buldaev Aleksandr Sergeevich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич (Kaz'min Ivan Dmitrievich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: kazminvanya@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 49–58  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-49-58

УДК 517.958:531.332

## УСЛОВИЕ СЕКУЛЯРНОСТИ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БРОДУЭЛЛА

© 2025 г. С. А. ДУХНОВСКИЙ

**Аннотация.** В работе исследуется кинетическая система уравнений Бродуэлла четырех групп частиц с периодическими начальными данными в весовом пространстве. Решение ищется в окрестности состояния равновесия. Возмущение разложено в ряд Фурье. Найдены условия локального равновесия для решений задачи Коши.

**Ключевые слова:** кинетическая система Бродуэлла, ряд Фурье, весовое пространство, задача Коши.

## SECULARITY CONDITION FOR THE BROADWELL KINETIC SYSTEM

© 2025 S. A. DUKHNOVSKY

**ABSTRACT.** In this paper, we study the Broadwell kinetic system for four groups of particles with periodic initial data in a weight space. The solution is sought in a neighborhood of the equilibrium state. The perturbation is expanded in a Fourier series. Conditions for local equilibria for solutions of the Cauchy problem are found.

**Keywords and phrases:** Broadwell kinetic system, Fourier series, weighted space, Cauchy problem.

**AMS Subject Classification:** 35L45, 35L60, 35Q20

**1. Введение.** В этой статье мы продолжим исследование стабилизации (асимптотической устойчивости) решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на примере так называемых дискретных моделей кинетического уравнения Больцмана, а именно, исследованием стабилизации решений задачи Коши для двумерного системы Бродуэлла (см. [4, 7]):

$$\begin{cases} \partial_t n_1 + \partial_x n_1 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_2 - \partial_x n_2 = \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_3 + \partial_y n_3 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \\ \partial_t n_4 - \partial_y n_4 = \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \end{cases} \quad (1)$$

$$n_1|_{t=0} = n_1^0, \quad n_2|_{t=0} = n_2^0, \quad n_3|_{t=0} = n_3^0, \quad n_4|_{t=0} = n_4^0. \quad (2)$$

Система (1)–(2) является кинетическим уравнением Больцмана модельного двумерного газа частиц движущихся на двумерной плоскости, скорости которых  $((1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1))$  будем предполагать направленными вдоль координатных осей. Здесь  $u = n_1(x, y, t)$ ,  $v = n_2(x, y, t)$ ,

$w = n_3(x, y, t)$ ,  $z = n_4(x, y, t)$  — плотность частиц (число частиц на единицу площади) соответствующих четырех групп. Все частицы распределены по четырем группам со скоростями  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ . Первая группа частиц, взаимодействуя со второй, переходит в третью и четвертую соответственно. Аналогично, третья группа, взаимодействуя со четвертой, переходит в первую и вторую. Предполагаем, что периодические начальные данные являются периодическими.

Исследованию кинетических уравнений посвящено множество работ. В недавних работах с помощью разложения Пенлеве были найдены решения кинетических систем (см. [5, 7, 9, 12]), разработаны различные аналитические методы (см. [6, 10]). Библиографические ссылки на работы по изучению стабилизации решения приведены в [1, 2, 8]. В данной работе будут найдены условия секулярности для системы (1) на основе техники, представленной в [11].

**2. Малые возмущения.** Рассмотрим задачу Коши (1) для малых возмущений состояния равновесия  $w_e z_e = u_e v_e$ . Положим

$$n_1 = u_e + \varepsilon^2 u_e^{1/2} \hat{u}, \quad n_2 = v_e + \varepsilon^2 v_e^{1/2} \hat{v}, \quad n_3 = w_e + \varepsilon^2 w_e^{1/2} \hat{w}, \quad n_4 = z_e + \varepsilon^2 z_e^{1/2} \hat{z}.$$

Рассмотрим периодические возмущения равновесного состояния с ограниченной энергией

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} u_{k,l} e^{ikx} e^{ily}, & \hat{v} &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} v_{k,l} e^{ikx} e^{ily}, \\ \hat{w} &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} w_{k,l} e^{ikx} e^{ily}, & \hat{z} &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} z_{k,l} e^{ikx} e^{ily}. \end{aligned}$$

Введем весовые пространства  $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$ ,  $\mathcal{H}_\sigma$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)}^2 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \int_0^\infty e^{2\gamma t} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt, \\ \|\hat{u}|_{t=0}\|_{\mathcal{H}_\sigma}^2 &= |u_0^0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |u_k^0|^2, \end{aligned}$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\sigma = \text{const}$ . Система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - \frac{1}{\varepsilon} v_e^{1/2} \left( w_e^{1/2} \hat{z} + z_e^{1/2} \hat{w} - u_e^{1/2} \hat{v} - v_e^{1/2} \hat{u} \right) = v_e^{1/2} \varepsilon \left( \hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v} \right), \\ \partial_t \hat{v} - \partial_x \hat{v} - \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \left( w_e^{1/2} \hat{z} + z_e^{1/2} \hat{w} - u_e^{1/2} \hat{v} - v_e^{1/2} \hat{u} \right) = u_e^{1/2} \varepsilon \left( \hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v} \right), \\ \partial_t \hat{w} + \partial_y \hat{w} + \frac{1}{\varepsilon} z_e^{1/2} \left( w_e^{1/2} \hat{z} + z_e^{1/2} \hat{w} - u_e^{1/2} \hat{v} - v_e^{1/2} \hat{u} \right) = -z_e^{1/2} \varepsilon \left( \hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v} \right), \\ \partial_t \hat{z} - \partial_y \hat{z} + \frac{1}{\varepsilon} w_e^{1/2} \left( w_e^{1/2} \hat{z} + z_e^{1/2} \hat{w} - u_e^{1/2} \hat{v} - v_e^{1/2} \hat{u} \right) = -w_e^{1/2} \varepsilon \left( \hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v} \right), \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{u}^0, \quad \hat{v}|_{t=0} = \hat{v}^0, \quad \hat{w}|_{t=0} = \hat{w}^0, \quad \hat{z}|_{t=0} = \hat{z}^0. \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда вытекают законы сохранения

$$u_e^{1/2} (\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u}) = v_e^{1/2} (\partial_t \hat{v} - \partial_x \hat{v}), \quad w_e^{1/2} (\partial_t \hat{w} + \partial_y \hat{w}) = z_e^{1/2} (\partial_t \hat{z} - \partial_y \hat{z}).$$

В образах Фурье

$$\begin{aligned} u_{k,l} &= \left( u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ikt} + \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} - 2ik \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds, \\ w_{k,l} &= \left( w_{k,l}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} z_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} + \frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} z_{k,l} - 2il \frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} z_{k,l} ds. \end{aligned}$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v_{k,l} - ikv_{k,l} - \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\left(w_e^{1/2}z_{k,l} + z_e^{1/2}w_{k,l} - u_e^{1/2}v_{k,l} - v_e^{1/2}u_{k,l}\right) &= u_e^{1/2}\varepsilon\left(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\right)_{k,l}, \\ \frac{d}{dt}z_{k,l} - ilz_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\left(w_e^{1/2}z_{k,l} + z_e^{1/2}w_{k,l} - u_e^{1/2}v_{k,l} - v_e^{1/2}u_{k,l}\right) &= -w_e^{1/2}\varepsilon\left(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\right)_{k,l}\end{aligned}$$

получим еще один закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}z_{k,l} - ilz_{k,l} = -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}v_{k,l} - ikv_{k,l}\right),$$

или

$$\begin{aligned}z_{k,l} &= z_{k,l}^0 e^{ilt} - e^{ilt} \int_0^t e^{-ils} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \left( \frac{d}{ds} v_{k,l} - ikv_{k,l} \right) ds = \\ &= \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{ilt} - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + i(k-l) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}w_{k,l} &= -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} + i(k-l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds + \\ &+ 2il \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds - 2ili(k-l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} \int_0^s e^{-il(p-s)} v_{k,l}(p) dp ds = \\ &= -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} + i(k+l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds.\end{aligned}$$

**3. Сведение к одному уравнению.** Имеем следующую замену перехода к одному уравнению:

$$\begin{aligned}u_{k,l} &= \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ikt} - 2ik \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds, \\ w_{k,l} &= -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} + i(k+l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds, \\ z_{k,l} &= -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{ilt} + i(k-l) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds.\end{aligned}\tag{5}$$

Для  $k = 0, l = 0$  имеем

$$\begin{aligned}u_{0,0} &= \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} + \left( u_{0,0}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}^0 \right), \\ w_{0,0} &= -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} + \left( w_{0,0}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}^0 \right), \\ z_{0,0} &= -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} + \left( z_{0,0}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}^0 \right).\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$u_{0,0}^0 = w_{0,0}^0 = z_{0,0}^0 = 0.$$

Тогда

$$u_{0,0} = \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}, \quad w_{0,0} = -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}, \quad z_{0,0} = -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}.$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} & u_e^{1/2} \left( w_e^{1/2} z_{k,l} + z_e^{1/2} w_{k,l} - u_e^{1/2} v_{k,l} - v_e^{1/2} u_{k,l} \right) = \\ & = - \left( u_e + v_e + u_e^{1/2} z_e^{1/2} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} + u_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \right) v_{k,l} + u_e^{1/2} w_e^{1/2} \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{ilt} + \\ & \quad + u_e^{1/2} z_e^{1/2} \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} - v_e^{1/2} \left( u_e^{1/2} u_{k,l}^0 - v_e^{1/2} v_{k,l}^0 \right) e^{-ikt} + \\ & \quad + i(k+l) u_e^{1/2} z_e^{1/2} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + \\ & \quad + i(k-l) u_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds. \end{aligned}$$

Положим  $L_e = u_e + v_e + w_e + z_e > 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left( i(k+l) z_e \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds \right) = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left( u_e^{1/2} w_e^{1/2} \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} \left( u_e^{1/2} z_e^{1/2} \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{-ilt} + \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \left( -v_e^{1/2} \left( u_e^{1/2} u_{k,l}^0 - v_e^{1/2} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{-ikt} + u_e^{1/2} \varepsilon \left( \widehat{w} \widehat{z} - \widehat{u} \widehat{v} \right)_{k,l}. \quad (6) \end{aligned}$$

**4. Комплексификация.** Перепишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left( i(k+l) z_e \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds \right) = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left( u_e^{1/2} w_e^{1/2} \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} \left( u_e^{1/2} z_e^{1/2} \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{-ilt} + \\ & \quad + \frac{1}{\varepsilon} \left( -v_e^{1/2} \left( u_e^{1/2} u_{k,l}^0 - v_e^{1/2} v_{k,l}^0 \right) \right) e^{-ikt} + u_e^{1/2} \varepsilon \frac{1}{2} \left( \widehat{w} \widehat{z} + \widehat{z} \widehat{w} - \widehat{u} \widehat{v} - \widehat{v} \widehat{u} \right)_{k,l}. \quad (7) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \left( i(k+l) z_e \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_l^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_l^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_k^- e^{-ikt} + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} T_{k,l}^{\text{add}}(v) + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} (L_{k,l}(v) + B_{k,l}(v, v)), \quad (8)$$

$$v_k|_{t=0} = v_k^0, \quad (9)$$

где

$$D_l^+ = w_e^{1/2} \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k,l}^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2, l_1, l_2 \neq 0}} \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right) \left( \overline{w_{k_1, l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_1, l_1}^0} \right),$$

$$D_l^- = z_e^{1/2} \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k,l}^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2, l_1, l_2 \neq 0}} \left( w_{k_1, l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1}^0 \right) \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right),$$

$$D_k^- = -v_e^{1/2} \left( u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e} v_{k,l}^0 \right),$$

$$L_{k,l}(v) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2 \neq 0}} \left[ -\frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1} \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right) e^{-il_2 t} - \left( w_{k_1, l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1}^0 \right) e^{-il_1 t} \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_2, l_2}^0} - \left( w_{k_1, l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1}^0 \right) e^{-il_1 t} i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{il_2(s-t)} \overline{v_{k_2, l_2}^0} ds - i(k_1 + l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{il_1(s-t)} v_{k_1, l_1} ds \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right) e^{-il_2 t} - \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2} \left( \overline{w_{k_1, l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_1, l_1}^0} \right) e^{il_1 t} - \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right) e^{il_2 t} \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_1, l_1}^0} - \left( z_{k_2, l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e} v_{k_2, l_2}^0 \right) e^{il_2 t} i(k_1 + l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{-il_1(s-t)} \overline{v_{k_1, l_1}^0} ds + i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2, l_2} ds \left( \overline{w_{k_1, l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_1, l_1}^0} \right) e^{il_1 t} - \left( u_{k_1, l_1}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1}^0 \right) e^{-ik_1 t} \overline{v_{k_2, l_2}^0} - v_{k_2, l_2} \left( \overline{u_{k_1, l_1}^0} - \frac{v_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_1, l_1}^0} \right) e^{ik_1 t} \right],$$

$$B_{k,l}(v, v) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2 \neq 0}} \left[ \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1} \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_2, l_2}^0} - \frac{z_e^{1/2}}{u_e} v_{k_1, l_1} i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2, l_2} ds - i(k_1 - l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e} \int_0^t e^{-il_1(s+t)} v_{k_1, l_1} ds \frac{w_e^{1/2}}{u_e} \overline{v_{k_2, l_2}^0} - \right]$$

$$\begin{aligned}
& + i(k_1 - l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_1(s+t)} v_{k_1, l_1} ds \overline{i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2, l_2} ds} + \\
& + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2, l_2} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1, l_1}} - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2, l_2} i(k_1 - l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_1(s+t)} v_{k_1, l_1} ds - \\
& - i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2, l_2} ds \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1, l_1}} - \\
& + i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2, l_2} ds i(k_1 - l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_1(s+t)} v_{k_1, l_1} ds - \\
& - \left( \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1, l_1} - 2ik_1 \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} v_{k_1, l_1} ds \right) \overline{v_{k_2, l_2}} - \\
& - v_{k_2, l_2} \left( \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1, l_1} - 2ik_1 \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{ik_1(s-t)} v_{k_1, l_1} ds \right) \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{k,l}^{\text{add}}(v) = & - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} \left( - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}} + \left( \overline{z_{k,l}^0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}^0} \right) e^{-ilt} - i(k-l) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} \overline{v_{k,l}} ds \right) + \\
& + \left( - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ilt} + i(k+l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds \right) \left( - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{0,0}} \right) - \\
& - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} \left( - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}} + \left( \overline{w_{k,l}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}^0} \right) e^{ilt} - i(k+l) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} \overline{v_{k,l}} ds \right) + \\
& + \left( - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{ilt} + i(k-l) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds \right) \left( - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{0,0}} \right) - \\
& - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0} \overline{v_{k,l}} - \left( \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l} + \left( u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) e^{-ikct} - 2ik \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{ikc(s-t)} v_{k,l} ds \right) \overline{v_{0,0}} - \\
& - v_{0,0} \left( \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}} + \left( \overline{u_{k,l}^0} - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k,l}^0} \right) e^{ikt} + 2ik \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-ik(s-t)} \overline{v_{k,l}} ds \right) - v_{k,l} \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{0,0}}.
\end{aligned}$$

5. Сведение к однородным данным задачи Коши. Выполним замену

$$v_{k,l} = v_{k,l}^0 \exp \left( t \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e \right) \right) + y_{k,l}(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} y_{k,l} - ik y_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e y_{k,l} - \\
& - \frac{1}{\varepsilon} \left( i(k+l) z_e \int_0^t e^{il(s-t)} y_{k,l} ds + 2ik v_e \int_0^t e^{ik(s-t)} y_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} y_{k,l} ds \right) = \\
& = \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_l^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_l^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_e t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} (f_{k,l}^L(t) + f_{k,l}^B(t)) + f_{k,l}^{\text{int}} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} T_{k,l}^{\text{add}}(y) + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} (\mathcal{L}_{k,l}(y) + B_{k,l}(y, y)), \quad (10)
\end{aligned}$$

$$y_{k,l}|_{t=0} = 0.$$

Здесь

$$\mathcal{L}_{k,l}(y) = L_{k,l}(y) + B_{k,l} \left( v^0 \exp \left( t \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e \right) \right), y \right) + B_{k,l} \left( y, v^0 \exp \left( t \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e \right) \right) \right),$$

$$f_{k,l}^{\text{int}} = \frac{1}{\varepsilon} \left( v_{k,l}^0 z_e \frac{i(k+l)}{i(k+l) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} + v_{k,l}^0 v_e \frac{2ik}{2ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e} + v_{k,l}^0 w_e \frac{i(k-l)}{i(k-l) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right) e^{ikt},$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_l^- &= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} z_e^{1/2} \left( w_{k,l}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k,l}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k+l) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2, l_1, l_2 \neq 0}} \left( z_{k_2, l_2}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_2, l_2}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k_2 - l_2) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right) \left( w_{k_1, l_1}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_1, l_1}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k_1 + l_1) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_l^+ &= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} w_e^{1/2} \left( z_{k,l}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k,l}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k-l) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ k_1, k_2, l_1, l_2 \neq 0}} \left( z_{k_2, l_2}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_2, l_2}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k_2 - l_2) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right) \left( w_{k_1, l_1}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_1, l_1}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{i(k_1 + l_1) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right),
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_k^- = -\frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} v_e^{1/2} \left( u_{k,l}^0 + \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k,l}^0 \frac{1}{\varepsilon} L_e}{2ik - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \right).$$

Фурье-решением задачи Коши для системы (1) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье  $U_k = (u_k, v_k, w_k, z_k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяющих (5), (6) для почти всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**6. Ликвидация секулярных членов.** Перейдем к конечномерной аппроксимации:

$$\begin{aligned}
T_{k,l}(y^{(m)}) &= \frac{d}{dt} y_{k,l}^{(m)} - ik y_{k,l}^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon} L_e y_{k,l}^{(m)} - \\
&- \frac{1}{\varepsilon} \left( i(k+l) z_e \int_0^t e^{il(s-t)} y_{k,l}^{(m)} ds + 2ik v_e \int_0^t e^{ik(s-t)} y_{k,l}^{(m)} ds + i(k-l) w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} y_{k,l}^{(m)} ds \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt} +
\end{aligned}$$

$$+ e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \left( f_{k,l,L}^{(m)}(t) + f_{k,l,B}^{(m)}(t) \right) + f_{k,l,\text{int}}^{(m)} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} T_{k,l}^{\text{add}}(y^{(m)}) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \left( \mathcal{L}_{k,l}^{(m)}(y^{(m)}) + B_{k,l}^{(m)}(y^{(m)}, y^{(m)}) \right), \quad (11)$$

$$y_{k,l}^{(m)} \Big|_{t=0} = 0. \quad (12)$$

Положим

$$y_{k,l}(t) = Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}) + T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}), \quad k, l \in \mathbb{Z}_0.$$

Если подставить это выражение в  $\mathcal{L}_{k,l}(y)$ ,  $B_{k,l}(y, y)$  и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти секулярное уравнение. Выделим в данных интегралах неинтегрируемые в  $\mathbb{R}_+$  члены, используя наш оператор:

$$i(k+l) \int_0^t e^{il(s-t)} Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ils}) ds = \\ = -\frac{\varepsilon}{z_e} Q_{k,-l} e^{-ilt} + \frac{\varepsilon}{z_e} \left( \frac{d}{dt} Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) - ik Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + \frac{1}{\varepsilon} L_e Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) \right) - \\ - \frac{1}{z_e} \left( 2ikv_e \int_0^t e^{ik(s-t)} Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ils}) ds + i(k-l)w_e \int_0^t e^{-il(s-t)} Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ils}) ds \right).$$

Аналогично получается для остальных интегралов. Суммируя, получим редукцию задачи Коши (11)–(12) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве  $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ :

$$z_{k,l}^{(m)} + Q_{k,l} e^{ilt} + Q_{k,-l} e^{-ilt} + Q_{-k,l} e^{-ikt} = \\ = \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \left( S_{k,-l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{-ilt} + S_{k,l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{ilt} \right) + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^- e^{-ilt} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} (F_{k,l,L}^{(m)}(t) + F_{k,l,B}^{(m)}(t)) + f_{k,l,\text{int}}^{(m)} \right) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \left( H_{k,l,L}^{(m)}(t) + H_{k,l,B}^{(m)}(t) + \mathcal{U}_{k,l}^{(m)} \left( T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}) \right) + B_{k,l}^{(m)} \left( T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}), T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}) \right) + \right. \\ \left. + B_{k,l} \left( Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}), T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)}) \right) + \right. \\ \left. + B_{k,l} \left( T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)}), Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}) \right) \right), \quad (13)$$

где

$$F_{k,l,L}^{(m)}(t) + F_{k,l,B}^{(m)}(t) = F_{k,l,L,2}^{(m)}(t) + F_{k,l,B,2}^{(m)}(t) + F_{k,l,L,1}^{(m)}(t) + F_{k,l,B,1}^{(m)}(t),$$

$$\mathcal{U}_{k,l}^{(m)}(T_{k,l}^{-1}(z^{(m)})) = \\ = \mathcal{L}_{k,l}^{(m)}(T_{k,l}^{-1}(z^{(m)})) + B_{k,l}^{(m)} \left( v^0 e^{t(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e)}, T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}) \right) + B_{k,l}^{(m)} \left( T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}), v^0 e^{t(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e)} \right).$$

Чтобы свести задачу Коши (11) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве  $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ , мы должны аннулировать секулярные члены, потребовав, чтобы

$$Q_{k,l} e^{ilt} + Q_{k,-l} e^{-ilt} + Q_{-k,l} e^{-ikt} = \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \left( S_{k,-l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{-ilt} + \right. \\ \left. + S_{k,l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{ilt} \right) + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt}. \quad (14)$$

Тогда окончательно получим

$$\begin{aligned}
z_{k,l}^{(m)} = & e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t} \left( \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2} \left( F_{k,l,L}^{(m)}(t) + F_{k,l,B}^{(m)}(t) \right) + f_{k,l,\text{int}}^{(m)} \right) + \\
& + \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2} \left( H_{k,l,L}^{(m)}(t) + H_{k,l,B}^{(m)}(t) + \mathcal{U}_{k,l}^{(m)} \left( T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}) \right) + B_{k,l}^{(m)} \left( T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}), T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}) \right) + \right. \\
& + B_{k,l} \left( Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}), T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)}) \right) + \\
& \left. + B_{k,l} \left( T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)}), Q_{k,-l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l} T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}) \right) \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

Условие на секулярные члены можно переписать как алгебраическую систему для  $Q_{k,l}$ ,  $Q_{k,-l}$ ,  $Q_{-k,l}$ :

$$\begin{aligned}
Q_{k,l} &= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} S_{k,l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}), \\
Q_{k,-l} &= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{l,m}^- + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} S_{k,-l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}), \\
Q_{-k,l} &= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} \mathcal{D}_{k,m}^-, \quad |k| = 1, \dots, m,
\end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
& S_{k,-l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{-ilt} + S_{k,l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}) e^{ilt} = \\
& = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, \\ l_1+l_2=l, \\ |k_1|, |k_2|, |l_1|, |l_2|=1, \dots, m}} \left\{ \frac{\varepsilon}{z_e} \frac{\varepsilon}{w_e} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \left( Q_{k_1,-l_1} \overline{Q_{k_2,l_2}} e^{-ilt} + Q_{k_2,l_2} \overline{Q_{k_1,-l_1}} e^{ilt} \right) + \right. \\
& + \left( \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_1,l_1}^0 i(k_1+l_1)}{i(k_1+l_1) - \frac{1}{\varepsilon} L_e} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_2,l_2}} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_2,l_2}^0 i(k_2-l_2)}{i(k_2-l_2) + \frac{1}{\varepsilon} L_e} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{z_e} Q_{k_1,-l_1} \right) e^{-ilt} + \\
& + \left( \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\overline{v_{k_1,l_1}^0} i(k_1+l_1)}{i(k_1+l_1) + \frac{1}{\varepsilon} L_e} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q_{k_2,l_2} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{v_{k_2,l_2}^0 i(k_2-l_2)}{i(k_2-l_2) + \frac{1}{\varepsilon} L_e} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_1,-l_1}} \right) e^{ilt} - \\
& - \left( \left( w_{k_1,l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} \overline{Q_{k_2,l_2}} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \left( \overline{z_{k_2,l_2}^0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2}^0 \right) \frac{\varepsilon}{z_e} Q_{k_1,-l_1} \right) e^{-ilt} - \\
& \left. - \left( \left( z_{k_2,l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2}^0 \right) \frac{\varepsilon}{z_e} \overline{Q_{k_1,-l_1}} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} + \left( w_{k_1,l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \frac{\varepsilon}{w_e} Q_{k_2,l_2} \right) e^{ilt} \right\}.
\end{aligned}$$

**7. Заключение.** Рассмотрена двумерная дискретная кинетическая система Бродуэлла. Данная система сводится к нелинейному уравнению в весовом пространстве, при условии что выполнены условия секулярности. Данные условия позволяют исследовать нелинейное уравнение и доказать в дальнейшем экспоненциальную устойчивость к состоянию равновесия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева О. А., Духновский С. А., Раджевич Е. В. О локальном равновесии уравнения Карлемана// в кн.: Межвуз. сб. Пробл. мат. анализ., 2015. — 78. — С. 165–190.
2. Васильева О. А., Духновский С. А., Раджевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова—Султангаззина// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — 60. — С. 23–81.
3. Веденяпин В. В., Мингалев И. В., Мингалев О. В. О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана// Мат. сб. — 1993. — 184, № 11. — С. 21–38.
4. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 3. — С. 3–51.
5. Духновский С. А. Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 176. — С. 91–94.

6. Ильин О. В. Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — 170, № 3. — С. 481–488.
7. Линдблом О., Эйлер Н. Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати// Теор. мат. физ. — 2002. — 131, № 2. — С. 179–193.
8. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях// Докл. Росс. Акад. наук. — 2012. — 447, № 4. — С. 369–373.
9. Dukhnovsky S. A. On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Rep. Mold. Mat. — 2020. — 94, № 3. — P. 3–11.
10. Dukhnovsky S. A. The tanh-function method and the  $(G'/G)$ -expansion method for the kinetic McKean system// Differ. Equations Control Processes. — 2021. — № 2. — P. 87–100.
11. Dukhnovsky S. A. Secular terms for the kinetic McKean model// Differ. Equations Control Processes. — 2023. — № 1. — P. 125–136.
12. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — 42. — С. 1–10.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Духновский Сергей Анатольевич (Dukhnovsky Sergey Anatol'evich)

Национальный исследовательский

Московский государственный строительный университет, Москва

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 59–68  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-59-68

УДК 519.17

## ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ФИНАЛЬНЫХ ВЕРШИН НА ОБОБЩЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ГРАФЕ

© 2025 г. О. В. ЗУБКОВ

**Аннотация.** В работе введены в рассмотрение 2-исходящие графы, обобщающие функциональные графы и моделирующие дискретные динамические системы специального вида. Классифицированы вершины и дуги 2-исходящего графа, определены пути на этих графах и доказаны некоторые свойства этих путей. В итоге построен эффективный алгоритм, который с линейной сложностью строит финальные вершины для путей, начинающихся в каждой из вершин 2-исходящего графа и доказана его корректность.

**Ключевые слова:** дискретная динамическая система, функциональный граф, сложность алгоритма.

## AN EFFICIENT ALGORITHM FOR FINDING FINAL VERTICES IN A GENERALIZED FUNCTIONAL GRAPH

© 2025 O. V. ZUBKOV

**ABSTRACT.** In the paper, 2-outgoing graphs are introduced into consideration, generalizing functional graphs and modeling discrete dynamic systems of a special type. The vertices and arcs of a 2-outgoing graph are classified, paths on these graphs are defined, and some properties of these paths are proved. As a result, an efficient algorithm is constructed that, with linear complexity, constructs final vertices for paths starting at each of the vertices of a 2-outgoing graph, and its correctness is proven.

**Keywords and phrases:** discrete dynamic system, functional graph, algorithm complexity.

**AMS Subject Classification:** 68W40

**1. Введение.** Рассмотрим конечное множество  $X$ , состоящее из  $n$  элементов и всюду определённую на нём функцию  $f : X \rightarrow X$ . Пара  $(X, f)$  определяет дискретную динамическую систему (сокращенно ДДС). Функцию  $f$  будем называть определяющей для ДДС.

Функциональным графом, или диаграммой состояний дискретной динамической системы называется ориентированный граф  $G_f$ , вершины которого соответствуют элементам множества  $X$ , а дуги — всем упорядоченным парам  $x \rightarrow f(x)$  по всем  $x \in X$ . Далее будем отождествлять элементы множества  $X$  и вершины её функционального графа.

Функционирование дискретной динамической системы из начального состояния  $\omega \in X$ , называется бесконечная последовательность  $\omega, f(\omega), f(f(\omega)) \dots$ . Очевидно, что функционирование ДДС из начального состояния  $\omega$  может быть интерпретировано как некоторый путь на её функциональном графе, начинающийся (стартующий) в вершине  $\omega$ .

Дискретные динамические системы имеют множество практических приложений и интерпретаций. В [3] рассмотрены линейные ДДС, определяющая функция для которых является линейным отображением на конечномерном векторном пространстве, в [1] — функционирование ДДС циркулянтного типа, в [2] — ДДС циркулянтного типа с дополнительными свойствами на вершинах.

В основополагающей работе [4] показано, что любая компонента слабой связности функционального графа состоит из единственного цикла (возможно петли), такого, что некоторые его вершины являются корнями деревьев, все дуги которых ориентированы к корню. Очевидно, что любой, достаточно длинный путь на функциональном конечном графе в итоге зацикливается в одном из его циклов.

В данной работе нас не будет интересовать характер и внутренние свойства множества  $X$ , будем рассматривать непосредственно сам функциональный граф  $G_f$  и некоторые алгоритмы эффективного построения путей на нём. Классической задачей алгоритмического программирования, связанной с функциональным графом, является следующая: для функционального графа с достаточно большим числом вершин  $n$ , для каждой его вершины  $v_i$  и заданного, так же достаточно большого числа  $k$ , эффективно определить в какой вершине закончится путь длины  $k$ , начинающийся в  $v_i$ . Под эффективным здесь понимаем алгоритм, имеющий асимптотику лучшую, нежели  $O(nk)$ , каковая достигается простым моделированием путей длины  $k$  из каждой вершины  $v_i$ . Эффективно данная задача решается путем построения двоичных подъемов из каждой вершины функционального графа  $G_f$  с общей совокупной сложностью алгоритма  $O(n \log_2 k)$  для всех вершин.

Далее нас будут интересовать пути на функциональных графах и некоторых их обобщениях, обладающие свойством эйлеровости, т.е. содержащие в своем составе дуги не более чем по одному разу. Сразу оговорим, что в интересующей нас постановке мы не требуем, чтобы эти пути проходили по каждой дуге графа  $G_f$  или его некоторой компоненты. Единственное, что будет запрещено — проходить по уже пройденной дуге вторично при старте из любой вершины  $v_i$ . При этом (в изначальной постановке задачи), при переходе к старту из другой вершины  $v_j$ , все старые метки посещенности дуг стираются и необходимые дуги снова доступны для единоразового прохождения. Очевидно, что при старте из любой вершины  $v_i$ , на каком-либо шаге произойдет зацикливание пути, и этот процесс остановится в той вершине графа, которая является корнем дерева, содержащего вершину  $v_i$ . Эту вершину остановки  $v_{\text{fin}}$  будем называть финальной для пути из вершины  $v_i$  или просто финальной для  $v_i$ .

В качестве иллюстрирующего примера для этой задачи рассмотрим следующий. Пусть дана система, состоящая из идентичных простейших устройств с одним входом и одним выходом. Устройства работают с сигналом одного вида следующим образом: получив сигнал на свой вход, устройство передает его на свой выход и перестает функционировать. Ко входу любого такого устройства можно присоединить любое количество выходов других устройств. Для любого устройства  $A_i$  этой системы его выход подключен ко входу некоторого устройства  $A_j$  из этой же системы; возможна ситуация, когда  $A_i = A_j$ . Выбирается любое произвольное стартовое устройство и на его вход подается иницирующий сигнал. Далее этот сигнал передается по цепочке и в некоторый момент достигает финального устройства, после чего процесс заканчивается. По исходному устройству  $A_{\text{start}}$  требуется эффективно определить финальный для цепочки устройств  $A_{\text{fin}}$ , сигнал на вход которого ещё пришёл, но выходного сигнала уже не генерирует. Задача ставится в массовом варианте, т.е. в качестве стартового перебираются все устройства системы и ответ выводится в формате  $A_1 \rightarrow A_{\text{fin}_1}, A_2 \rightarrow A_{\text{fin}_2} \dots A_n \rightarrow A_{\text{fin}_n}$ .

Переходя к описанию алгоритма решения этой задачи в общем виде, заметим, что наивный алгоритм, моделирующий все пути из всех вершин графа снова будет иметь квадратичную сложность  $O(n^2)$  и не будет считаться эффективным. Достаточно очевидно следующее эффективное решение методом динамического программирования: стартуем из произвольной вершины  $v_i$ , для которой ещё не известна её финальная. Проходим по пути из неё до тех пор, пока либо не зациклимся, либо не попадём в вершину, для которой уже известна финальная. Далее возвращаемся по только что пройденному пути и выставляем для каждой посещённой в этом пути вершины метку финальной для неё вершины. Если произошло зацикливание в вершине  $v_j$ , то возвращаемся по циклу и для каждой его вершины ставим финальной для неё саму эту вершину, а для только что пройденных вершин, не принадлежащих циклу — вершину  $v_j$ . Если же мы попали в вершину, для которой уже известна финальная и она равна  $v_{\text{fin}}$ , то возвратимся по пройденному из  $v_i$  пути и поставим для всех вершин этого пути в качестве финальной  $v_{\text{fin}}$ . Понятно, что при

этом мы пройдем по всем дугам два раза: первый — при прохождении в прямом направлении дуги при построении недостающей части пути, а второй — в обратном направлении при выставлении меток финальных вершин. Общая сложность такого алгоритма, очевидно, равна  $O(n)$  для всех вершин совокупно.

**2. 2-Исходящий граф. Постановка задачи.** Усложним иллюстрирующий пример следующим достаточно естественным образом. Пусть каждое из устройств в системе имеет один вход и два пронумерованных числами 1 и 2 выхода. Ко входу любого такого устройства можно присоединить любое количество любых выходов других устройств. У любого устройства  $A_i$  системы, выход, помеченный 1, подключен ко входу некоторого устройства  $A_{j_1}$  этой системы, а выход, помеченный 2, подключен ко входу некоторого устройства  $A_{j_2}$  этой системы. Возможны ситуации, когда  $A_{j_1} = A_{j_2}$ ,  $A_{j_1} = A_i$ ,  $A_{j_2} = A_i$  или  $A_{j_1} = A_{j_2} = A_i$ . Любое устройство работает следующим образом: при получении сигнала на свой вход первый раз, оно передает его на свой выход, помеченный 1, и меняет состояние с 0 на 1. При получении на вход сигнала вторично, устройство передает его на свой выход, помеченный 2, и меняет состояние с 1 на 2, после чего перестает срабатывать. По исходному устройству  $A_{\text{start}}$  требуется эффективно определить финальный для цепочки устройств  $A_{\text{fin}}$ , сигнал на вход которого ещё пришёл, но выходного сигнала уже не генерирует. Задача ставится в массовом варианте, т.е. в качестве стартового перебираются все устройства системы и ответ выводится в формате  $A_1 \rightarrow A_{\text{fin}_1}, A_2 \rightarrow A_{\text{fin}_2} \dots A_n \rightarrow A_{\text{fin}_n}$ .

Заметим, что можно очевидным образом обобщить данный пример на систему устройств с любым другим количеством пронумерованных выходов  $1, 2, \dots, k$ . Данная постановка с двумя выходами в самом простом виде отображает возникающие идеи и задачи, но их легко перенести и на случай с  $k$  выходами.

Переходя к терминологии теории графов, будем рассматривать ориентированный граф  $G(V, E)$ , у каждой вершины которого степень полуисхода равна 2. Эти две исходящих дуги помечены числами 1 и 2. В дальнейшем будем называть граф такого вида 2-исходящим. Пусть число вершин графа  $G$  равно  $n$ ; тогда число его дуг равно  $2n$ . В графе  $G$  допускаются петли и кратные дуги.

Выберем в качестве стартовой вершины некоторую произвольную вершину  $v_{\text{start}}$  графа  $G$ . Определим путь из этой вершины следующим образом: пусть мы в данный момент находимся в некоторой текущей вершине  $v_i$ . Если мы ещё не проходили при построении текущего пути дугу, выходящую из  $v_i$  и помеченную 1, то мы переходим из  $v_i$  по этой дуге в следующую вершину пути  $v_{j_1}$ . Если при построении текущего пути по дуге из  $v_i$ , помеченной 1, мы уже проходили, то переходим по дуге, помеченной 2, в следующую вершину пути  $v_{j_2}$ . Если же мы проходили в текущем пути и по дуге 2, то считаем, что текущий путь закончен в данной вершине  $v_i$ . Эту вершину будем называть финальной для пути, начинающегося из  $v_{\text{start}}$  или просто финальной для  $v_{\text{start}}$ .

Если  $v_{\text{start}}$  совпадает с  $v_{\text{fin}}$ , путь называется циклом, а вершина — финальной для самой себя. В общем случае циклом на 2-исходящем графе будем называть часть пути, начинающуюся и заканчивающуюся в вершине  $v_{\text{start}}$ , независимо от финальной вершины этого пути.

Задача заключается в построении эффективного алгоритма, находящего для каждой вершины  $v_i$  графа  $G$  финальную вершину для пути, начинающегося в  $v_i$ . Очевидно, что самым простым методом решения этой задачи является последовательный выбор каждой вершины графа как стартовой и дальнейшее моделирование прохождения пути с нахождением финальной вершины. После прохождения очередного пути и нахождения финальной вершины, все пометки сбрасываются и для следующей вершины мы ищем финальную независимо от предыдущих попыток. Так как в процессе прохождения одного пути каждая дуга будет пройдена не более одного раза, то сложность данного алгоритма для всех вершин можно оценить как  $|V| \cdot |E| = 2n^2 = O(n^2)$ . Это дает квадратичное решение задачи, что не может считаться эффективным решением.

### 3. Максимальная циклическая компонента 2-исходящего графа.

**Определение 1.** Циклической (эйлеровой) компонентой ориентированного 2-исходящего графа  $G$  будем называть любой его подграф, для которого выполняется следующее свойство: для

любой вершины циклической компоненты верно, что она входит в него либо с одной входящей дугой исходного графа  $G$  и одной исходящей дугой, помеченной 1, либо эта вершина входит в него с двумя входящими дугами исходного графа  $G$  и двумя исходящими дугами, помеченными 1 и 2. Данное свойство циклической компоненты будем называть балансом входящих и исходящих дуг в каждой её вершине. Если дуга входит в циклическую компоненту, то в неё входят обе вершины, которые она соединяет.

**Предложение 1.** *Если мы стартуем из вершины  $v_{\text{start}}$ , находящейся в некоторой циклической компоненте 2-исходящего графа  $G$ , то при прохождении пути из неё мы пройдем по некоторым дугам этой компоненты и обязательно вернемся в вершину  $v_{\text{start}}$ . Если  $v_{\text{start}}$  входит в циклическую компоненту с одной входящей и одной исходящей дугой, то дальнейший путь из неё будет проходить по дуге, помеченной 2; если же  $v_{\text{start}}$  входит в циклическую компоненту с двумя входящими и исходящими дугами, то в процессе построения пути мы пройдем по обеим исходящим дугам и дважды вернемся в  $v_{\text{start}}$ , т.е. в этом случае вершина  $v_{\text{start}}$  будет финальной для самой себя.*

*Доказательство.* При прохождении пути из указанной вершины  $v_{\text{start}}$  мы для каждой промежуточной вершины, кроме стартовой, будем входить в неё по некоторой дуге из циклической компоненты и обязательно выходить по соответственно помеченной дуге в следующую вершину этой же компоненты. Таким образом, выйти из этой циклической компоненты мы сможем только вернувшись в стартовую вершину  $v_{\text{start}}$ .  $\square$

Далее разобьём все вершины графа  $G$  на следующие непересекающиеся подмножества:

- (i) вершины без возврата — это такие вершины, в которые нельзя вернуться ни одного раза при старте из них;
- (ii) вершины с одним возвратом — при старте из этих вершин по дуге, помеченной 1, путь возвращается в них один раз и затем, после повторного выхода из них по дуге, помеченной 2, путь повторно в них уже не возвращается;
- (iii) вершины с двумя возвратами, путь из которых возвращается в них дважды, т.е. они являются финальными для самих себя.

Для каждой из вершин второго и третьего типов зафиксируем все дуги и вершины, находящиеся на циклах, пройденных при старте из этих вершин. Для вершин с одним возвратом цикл содержит одну входящую дугу и одну исходящую дугу, помеченную 1. Для вершин с двумя возвратами, цикл содержит две входящих и две исходящих дуги, помеченных 1 и 2.

**Определение 2.** Максимальную циклическую компоненту 2-исходящего графа  $G$  определим как объединение всех циклов для всех вершин второго и третьего типов.

**Предложение 2.** *Максимальная циклическая компонента 2-исходящего графа  $G$  удовлетворяет определению 1, т.е. в каждой её вершине соблюдается баланс входящих и исходящих дуг.*

*Доказательство.* Рассмотрим процесс построения максимальной циклической компоненты. Будем по очереди независимо стартовать из каждой вершины второго или третьего типа и добавлять новые посещенные дуги в некоторую общую компоненту. Первый добавленный в неё цикл, стартующий из некоторой вершины второго или третьего типа, очевидно соблюдает баланс входящих и исходящих дуг в каждой своей вершине. Далее берем любую другую вершину второго или третьего типа и независимо стартуем из неё. Каждый раз, когда текущий путь попадает в уже принадлежащую текущей общей циклической компоненте вершину  $v_i$ , он некоторое время проходит по её дугам, и, за счет предложения 1, если и покидает эту компоненту, то исключительно в вершине  $v_i$ . Таким образом, во всех пройденных в текущем добавленном цикле вершинах соблюдается баланс входящих и исходящих дуг.  $\square$

Очевидно, что по построению максимальная циклическая компонента является единственной для графа  $G$  и не зависит от порядка добавления в неё новых циклов. Она состоит из всех вершин второго типа с исходящими из них дугами, помеченными 1, и вершин третьего типа с двумя исходящими из них дугами, помеченными 1 и 2. Сложность её построения описанным выше способом

квадратичная. Эта компонента нужна для доказательства корректности всех последующих рассуждений. Далее при построении эффективного алгоритма, данная компонента будет построена с линейной сложностью.

#### 4. Классификация дуг 2-исходящего графа, прямой путь из вершины.

**Определение 3.** Для вершин первых двух типов определим прямую дугу как дугу, по которой путь из вершины выходит и уже не возвращается в неё. Для вершин первого типа (без возврата) прямой дугой является исходящая дуга, помеченная 1, для вершин второго типа (с одним возвратом) прямой дугой является исходящая дуга, помеченная 2. Дуги, по которым не проходит ни один из путей, стартующих в любой вершине будем называть несущественными.

После построения максимальной циклической компоненты в 2-исходящем графе  $G$ , все его дуги можно разбить на три непересекающихся подмножества:

- (a) дуги, принадлежащие циклической компоненте;
- (b) дуги, по которым путь, стартующий в некоторой вершине, выходит и уже не возвращается в неё (прямые дуги);
- (c) остальные дуги, по которым не проходит ни один из путей, стартующих в любой вершине (несущественные дуги).

Теперь можно более детально описать путь из произвольной вершины  $v_{\text{start}}$ . Пройдя по некоторому набору (возможно пустому) дуг из максимальной циклической компоненты, путь либо закончится в вершине  $v_{\text{start}}$ , если она является финальной для самой себя, либо вернётся в неё согласно предложению 1 и выйдет из неё без возврата по дуге не из циклической компоненты (прямой дуге) в следующую вершину  $v_{\text{next}_1}$ . В вершине  $v_{\text{next}_1}$  повторится та же ситуация, с возможным переходом по прямой дуге в вершину  $v_{\text{next}_2}$ , и т. д. Рассмотрим цепочку вершин  $v_{\text{start}}, v_{\text{next}_1}, v_{\text{next}_2} \dots v_{\text{fin}}$ , состоящую из пройденных на основном пути дуг не из циклической компоненты (далее покажем, что это именно прямые дуги). Эту цепочку назовём прямым путём из вершины  $v_{\text{start}}$ . Прямой путь не может заиклиться (неважно, в вершине  $v_{\text{start}}$  или любой другой вершине  $v_{\text{next}_i}$ ), так как в таком случае все дуги этого нового цикла должны попадать в циклическую компоненту, в силу того, что они сохраняют баланс в своих вершинах. Помимо этого, заикливание прямого пути приводит к возможности возврата в вершины этого цикла после выхода из них по прямым дугам. Единственным вариантом завершения этой цепочки является её попадание в вершину с двумя возвратами  $v_{\text{fin}}$ , являющуюся финальной для самой себя.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Предложение 3.** *Множество прямых дуг 2-исходящего графа образует ориентированный лес, корнями компонент которого являются вершины с двумя возвратами, финальные сами для себя. Эти вершины будут финальными и для всех вершин ориентированного дерева, корнем которого они являются.*

Очевидно, что среди дуг прямого пути будут только прямые дуги. Если вершина прямого пути является невозвратной вершиной первого типа, то путь из неё сразу уходит по прямой дуге, помеченной 1, и более никогда в неё не возвращается, согласно предложению 3, т.е. дуга из этой вершины, помеченная 2, никогда не проходит (она является несущественной). Если вершина прямого пути является вершиной с одним возвратом (вершиной второго типа), то исходящая из неё дуга, помеченная 1, принадлежит максимальной циклической компоненте, а исходящая дуга, помеченная 2, является прямой дугой, по которой и проходит дальнейший прямой путь.

Полученное в предложении 3 описание прямых дуг 2-исходящего графа  $G$  позволяет построить и обосновать корректность эффективного алгоритма поиска финальных вершин сразу для всех вершин этого графа.

**5. Эффективный алгоритм поиска финальных вершин на 2-исходящем графе.** Выберем произвольную вершину  $v_{\text{start}}$ , для которой ещё не найдена финальная вершина. Пойдем из неё по определённому выше пути, отмечая все посещённые на данный момент вершины как актуальные для текущего пути. Если в какой-то момент мы придем в актуальную вершину  $v_i$  (т.е.

обнаружим промежуточный цикл), то все вершины этого цикла, кроме самой  $v_i$  (той, из которой мы в этот цикл вошли), удаляем из списка актуальных, все дуги, по которым проходит этот цикл, объявляем принадлежащими циклической компоненте, после чего выходим из  $v_i$  по дуге, помеченной 2. Вершина  $v_i$  считается принадлежащей и циклической компоненте (по исходящей дуге 1) и множеству актуальных вершин по исходящей дуге 2.

Следует отметить, что здесь промежуточно возникающий цикл не удовлетворяет основному определению цикла, требующему, чтобы он заикливался в стартовой вершине (что необходимо для гарантии поддержания баланса в вершинах циклической компоненты). Однако жёсткое требование переноса любого первого встретившегося такого промежуточного цикла в циклическую компоненту будет гарантировать, что у любой её вершины будет добавляться сначала исходящая дуга, помеченная 1, а уже затем дуга, помеченная 2, но никак не наоборот, так как мы каждый раз выходим из любой вершины по наименьшей по номеру не пройденной ещё дуге, что гарантирует поддержание баланса. Из этого очевидно, что все вершины, оказавшиеся на таком промежуточном цикле и дуги, по которым проходит этот цикл, принадлежат максимальной циклической компоненте. Эта посещенная часть максимальной циклической компоненты может дополняться новыми вершинами и дугами после прохождения и заикливания в других актуальных вершинах или в этой же вершине  $v_i$  при вторичном заикливании.

Уже при первом запуске, при вторичном прохождении уже посещенной вершины  $v_i$ , содержащейся в текущей циклической компоненте, используем ключевое соображение, которое подробнее будет раскрыто чуть позже. Его суть в том, что мы не проходим по уже пройденным дугам ключевой компоненты, а уходим из этой вершины по наименьшей ещё непройденной дуге.

Очевидно, что в любой момент цепочка актуальных на данный момент вершин образует простую цепь. В какой-то момент из текущей актуальной вершины  $v_{\text{fin}}$  обе исходящих дуги будут уже пройдены и путь в ней закончится; в этот момент все дуги текущего пути, не попавшие в циклическую компоненту, будут прямыми дугами, образующими прямой путь из  $v_{\text{start}}$  в  $v_{\text{fin}}$ . Вершина  $v_{\text{fin}}$  является финальной для  $v_{\text{start}}$ . Помимо этого, она является финальной для всех актуальных на данный момент вершин (в том числе и для себя) согласно предложению 3. Для завершения данной попытки, вернёмся по текущему прямому пути от финальной вершины до стартовой и для всех вершин прямого пути снимем метку актуальности и поставим финальной для них  $v_{\text{fin}}$ . Метки принадлежности циклической компоненте на дугах, принадлежащих текущей циклической компоненте, не снимаем.

Далее до тех пор, пока для каких-то вершин графа  $G$  не найдена финальная вершина, выбираем произвольную такую вершину, объявляем её актуальной вершиной  $v_{\text{start}}$  и стартуем из неё в поисках финальной согласно предыдущему описанию. Ключевым моментом является то, что мы не проходим по уже пройденным ранее в других попытках (или в текущей попытке) дугам текущей циклической компоненты. Это значит, что придя в текущую актуальную вершину, мы выходим из неё по ещё не пройденной из неё ни в какой более ранней попытке дуге с самой маленькой пометкой. Корректность этого можно обосновать при помощи предложения 1. Действительно, если текущая актуальная вершина  $v_i$  уже проходила в более ранних попытках и теперь находится в циклической компоненте, то это значит, что реальный путь будет некоторое время идти по дугам этой компоненты и выйдет из неё только в вершине  $v_i$ . Повторно проходить эту циклическую часть пути нет необходимости. При этом из вершины, не являющейся для себя финальной, мы будем в итоге уходить (уже не возвращаясь) по её прямой дуге. Если же вершина является финальной для самой себя, то в этом случае мы снова вернёмся в неё, завершим путь и поместим новый полученный цикл в циклическую компоненту.

Помимо этого, мы не проходим вторично и по прямым дугам при попадании в вершину, у которой уже известна финальная для неё, а сразу выставляем метку финальной вершины для всех актуальных на данный момент вершин прямого пути, согласно предложению 3.

Далее опишем возникающие при работе алгоритма случаи более подробно.

1. Если мы пришли в ещё не актуальную вершину  $v_i$  и из  $v_i$  мы ещё не проходили по дуге 1, значит, эта вершина ещё не была ни разу посещена ни в одной попытке, объявляем её актуальной и выходим из неё по дуге 1.

2. Если мы пришли в ещё не актуальную вершину  $v_i$ , для которой ещё не известна её финальная вершина и из  $v_i$  мы уже проходили по дуге 1, но не проходили из неё по дуге 2, то просто объявляем её актуальной и выходим из неё по дуге 2. Корректность этого следует из предложения 1.
3. Если мы пришли в ещё не актуальную вершину  $v_i$ , для которой уже известна финальная для неё  $v_{\text{fin}}$ , то эта  $v_{\text{fin}}$  будет финальной и для всех актуальных на данный момент вершин. Пройдем по ним, снимем метки актуальности и поставим для них финальной  $v_{\text{fin}}$ , закончим текущую попытку.
4. Если мы пришли в актуальную вершину  $v_i$ , то мы обнаружили очередной промежуточный цикл, все вершины этого цикла (кроме  $v_i$ ) удаляем из списка актуальных и добавляем дуги и вершины этого цикла к циклической компоненте. Так как вершина  $v_i$  актуальная, значит мы уже выходили из неё. Если пройдена только выходящая из неё дуга 1, а в данный момент мы пришли в  $v_i$  мы по некоторой дуге  $e_{k2}$ , то вершина  $v_i$  попадает в циклическую компоненту с входящей дугой  $e_{k2}$  и выходящей из неё дугой 1, а так же  $v_i$  входит в текущий прямой путь с входящей дугой  $e_{k1}$ , по которой мы первый раз пришли в  $v_i$  и выходящей из неё дугой 2. Если же из  $v_i$  мы проходили по обоим выходящим дугам, то  $v_i$  является финальной для себя и множества всех актуальных на данный момент вершин. Возвращаемся по прямому пути, выставляем актуальным вершинам финальную вершину  $v_i$ , снимаем метки актуальности, заканчиваем текущую попытку.

При выполнении данного алгоритма мы пройдем по каждой дуге не более двух раз. Один раз в прямом направлении при построении пути. Второй раз в обратном направлении: для дуг из циклической компоненты — при удалении меток актуальности у вершин и переносе дуг из текущего прямого пути в циклическую компоненту во время обработки очередного промежуточного цикла; для прямых дуг — при установке метки финиша для текущих актуальных вершин во время обработки прямого пути. Общая сложность этого алгоритма равна  $O(n)$  суммарно для всех вершин.

**6. Пример.** Проиллюстрируем все сказанное выше следующим примером. На рис. 1 представлен 2-исходящий граф  $G$ , состоящий из 16 вершин. Для каждой вершины укажем путь, получающийся при старте из неё и классифицируем все вершины по типам (без возврата, с одним возвратом, с двумя возвратами).

Вершина 1 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7.$$

Вершина 2 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7.$$

Вершина 3 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7.$$

Вершина 4 — это вершина третьего типа с двумя возвратами, финальная сама для себя:

$$4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4.$$

Вершина 5 — это вершина первого типа без возврата и финальной вершиной 6:

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6.$$

Вершина 6 — это вершина третьего типа с двумя возвратами, финальная сама для себя:

$$6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6.$$

Вершина 7 — это вершина третьего типа с двумя возвратами, финальная сама для себя:

$$7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

Вершина 8 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

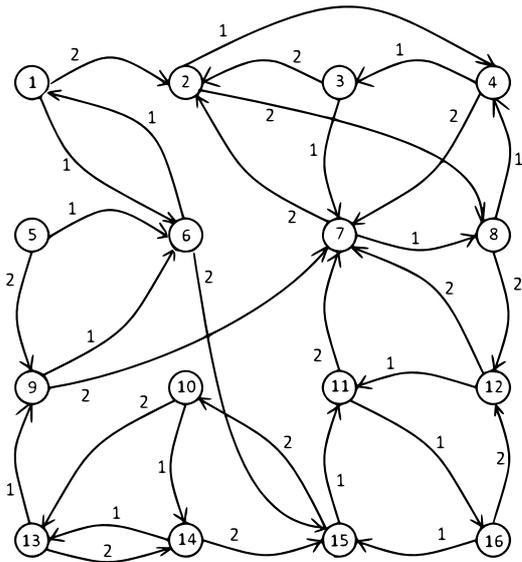


Рис. 1

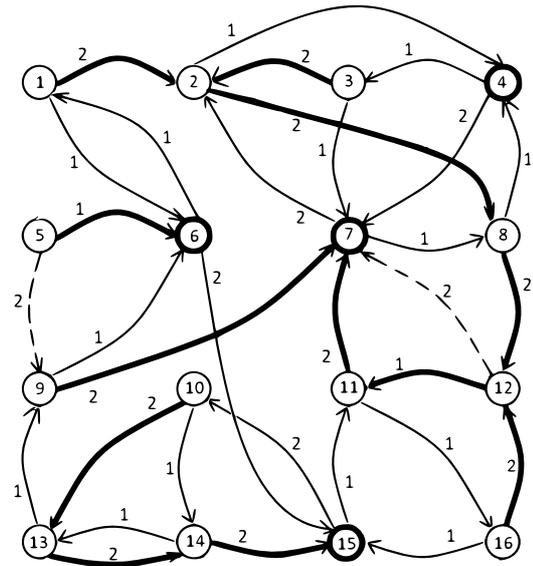


Рис. 2

Вершина 9 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$9 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

Вершина 10 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 15:

$$10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 15.$$

Вершина 11 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

Вершина 12 — это вершина первого типа без возврата и финальной вершиной 7:

$$12 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

Вершина 13 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 15:

$$13 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 15.$$

Вершина 14 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 15:

$$14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 15.$$

Вершина 15 — это вершина третьего типа с двумя возвратами, финальная сама для себя:

$$15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 15.$$

Вершина 16 — это вершина второго типа с одним возвратом и финальной вершиной 7:

$$16 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7.$$

Данные пути позволяют построить максимальную циклическую компоненту и разбить множество дуг графа  $G$  на три класса (дуги, принадлежащие циклической компоненте, прямые дуги и несущественные дуги). На рис. 2 все эти дуги отмечены следующим образом: прямые дуги — жирным, дуги из циклической компоненты — обычным, несущественные дуги — пунктиром. Видно, что прямые дуги образуют деревья с корнями — вершинами третьего типа, финальными для самих себя. Все вершины внутри одного такого дерева имеют одну и ту же финальную вершину, являющуюся корнем этого дерева. Сами эти корни так же выделены жирным.

В заключение опишем порядок работы эффективного алгоритма для этого примера. Порядок выбора стартовых вершин не существен, будем их перебирать по возрастанию номеров.

Выбираем стартовой вершину 1, далее путь выглядит следующим образом:

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Встретили промежуточный цикл в вершине 1, поместили дуги  $1 \rightarrow 6 \rightarrow 1$  в циклическую компоненту, прямой путь состоит из вершины 1:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4.$$

Встретили промежуточный цикл в вершине 4, поместили дуги

$$4 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 4$$

в циклическую компоненту; прямой путь состоит из вершин и дуг  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ .

Из вершины 4 по дуге, помеченной 2, переходим в вершину 7. Она уже содержится в циклической компоненте, поэтому уходим из неё по дуге 2 в вершину 2, и снова получаем промежуточный цикл в этой вершине. Помещаем вершины и дуги  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2$  в циклическую компоненту; прямой путь имеет вид  $1 \rightarrow 2$ .

Из вершины 2 уходим по дуге, помеченной 2, в вершину 8; далее текущий путь имеет вид

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 7.$$

Из вершины 7 обе исходящие дуги уже были пройдены, т.е. мы пришли в финальную вершину. Прямой путь на данный момент имеет вид

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 7.$$

Возвращаемся по нему и для всех его вершин выставляем финальную вершину 7. Первая попытка закончена.

Вершина 2 уже получила свою финальную, переходим к вершине 3. Она находится на циклической компоненте, поэтому выходим из неё по дуге, помеченной 2. Попадаем в вершину 2, для которой уже известна финальная вершина 7, поэтому возвращаемся в вершину 3 и выставляем и ей вершину 7 финальной. Вторая попытка закончилась.

Вершина 4 находится на циклической компоненте, и из неё уже обе исходящие дуги пройдены. Это означает, что она является финальной для самой себя. Третья попытка закончилась.

Выбираем стартовой вершину 5. Из неё попадаем в вершину 6, которая уже находится в циклической компоненте, выходим из вершины 6 по дуге, помеченной 2. В итоге путь следующий:

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15.$$

Получили промежуточный цикл в вершине 15; помещаем дуги  $15 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 15$  в циклическую компоненту; прямой путь имеет вид  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 15$ .

Далее движемся из вершины 15 по дуге, помеченной 2:

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6.$$

Получили промежуточный цикл в вершине 6; помещаем дуги  $6 \rightarrow 15 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 6$  в циклическую компоненту; прямой путь имеет вид  $5 \rightarrow 6$ . Из вершины 6 все дуги уже пройдены, поэтому она является финальной для себя и вершины 5. Четвёртая попытка закончена.

Вершины 6, 7 и 8 уже имеют свои финальные, их пропускаем.

Вершина 9 уже находится на циклической компоненте, выходим из неё по дуге, помеченной 2, в вершину 7. Вершина 7 имеет финальной саму себя, поэтому и у вершины 9 финальной будет вершина 7. Пятая попытка закончена.

Выбираем стартовой вершину 10. Она уже находится на циклической компоненте, выходим из неё по дуге, помеченной 2, в вершину 13. Та снова находится в циклической компоненте, выходим из 13 по дуге, помеченной 2, в вершину 14. Эта вершина также в циклической компоненте, выходим из неё по дуге, помеченной 2, в вершину 15. Из вершины 15 все исходящие дуги уже пройдены, она финальная для себя и текущих актуальных вершин 14, 13 и 10. Шестая попытка закончена.

Для вершин 11, 12, 13, 14 и 15 уже известны их финальные.

Стартуем из вершины 16. Она находится в циклической компоненте, поэтому выходим из неё по дуге, помеченной 2, в вершину 12. У этой вершины уже есть финальная, и это вершина 7. Выставляем вершине 16 в качестве финальной вершину 7, седьмая попытка закончена.

Для каждой вершины получена финальная для неё, работа алгоритма закончена со следующим результатом: вершина 7 является финальной для вершин 1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 16; вершина 15 является финальной для вершин 10, 13, 14, 15; вершина 6 является финальной для вершин 5 и 6; вершина 4 является финальной для самой себя.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быков И. С.* Функционирование дискретной динамической системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах// Прикл. дискр. мат. — 2014. — 26, № 4. — С. 84–95.
2. *Евдокимов А. А., Пережогин А. Л.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети// Дискр. анализ. исслед. опер. — 2011. — 18, № 3. — С. 39–48.
3. *Парфиненко А. С., Пережогин А. Л.* Функциональный граф линейной дискретной динамической системы с двумя доминирующими вершинами// Дискр. анализ. исслед. опер. — 2018. — 25, № 4. — С. 81–96.
4. *Harary F.* The number of functional digraphs// Math. Ann. — 1959. — 139. — P. 203–210.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Зубков Олег Владимирович (Zubkov Oleg Vladimirovich)

Иркутский государственный университет, Иркутск  
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)

E-mail: oleg.zubkov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 238 (2025). С. 69–100  
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-69-100

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ.  
III. СИСТЕМЫ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. М. В. ШАМОЛИН

**Аннотация.** Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к многообразию меньшей размерности. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 236. — С. 72–88. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 237. — С. 49–75.

**Ключевые слова:** динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS  
OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION.  
III. SEVENTH-ORDER SYSTEMS

© 2025 M. V. SHAMOLIN

**ABSTRACT.** In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the seventh order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of lower-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented. The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **236** (2024), pp. 72–88. The second part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **237** (2024), pp. 49–75.

**Keywords and phrases:** dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

**AMS Subject Classification:** 34Cxx, 70Cxx

## СОДЕРЖАНИЕ

3. Инварианты однородных систем седьмого порядка . . . . .	70
3.1. Введение . . . . .	70
3.2. Некоторые примеры из динамики четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил . . . . .	71
3.3. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля . . . . .	77
3.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов . . . . .	86
3.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования . . . . .	87
3.6. Системы со знакопеременной диссипацией . . . . .	88
Список литературы . . . . .	96

## 3. ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА

**3.1. Введение.** Как известно (см. [14, 15, 83]), нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [25]).

Как и в разделах 1, 2, наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка  $m$  надо знать  $m - 1$  независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с тремя степенями свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора (см. [31–34]). Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. В указанных работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не существовать, зато может быть обеспечено достаточное количество инвариантных форм.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на трехмерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые подставляются в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять, учитывая, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» —

это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии, — разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-либо знака. Как следствие этого — наличие у системы хотя бы одного первого интеграла (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы; внешнее поле может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела (см. [8, 19]).

В данном разделе 3 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых может быть выделена система с тремя степенями свободы на своем шестимерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

**3.2. Некоторые примеры из динамики четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил.** Рассмотрим движение однородного осесимметричного четырехмерного твердого тела с передним плоским торцом (трехмерным диском) в неконсервативном поле сил в условиях квазистационарности. Пусть  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр трехмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела,  $Dx_1x_2x_3x_4$  — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии  $CD$  совпадает с осью  $Dx_1$  ( $C$  — центр масс), а оси  $Dx_2$ ,  $Dx_3$ ,  $Dx_4$  лежат в гиперплоскости диска,  $I_1, I_2, I_3 = I_2, I_4 = I_2$ ,  $m$  — инерционно-массовые характеристики. Часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [8, 19]), соответствующих пространству  $\mathbb{R}^4$  и описывающих движение центра масс, при котором касательные силы воздействия среды на трехмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2) = \frac{F_x}{m}, \end{aligned} \quad (3.2.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ + \omega_6 v \cos \alpha - \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ - \sigma(\omega_4 \omega_5 + \omega_2 \omega_3) - \sigma \dot{\omega}_6 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 v \cos \alpha + \omega_4 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \\ - \sigma(-\omega_1 \omega_2 + \omega_4 \omega_6) + \sigma \dot{\omega}_5 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_3 v \cos \alpha - \omega_2 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \\ + \sigma(\omega_2 \omega_6 + \omega_1 \omega_5) - \sigma \dot{\omega}_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1d)$$

где  $F_x = -S$ ,  $S = s(\alpha)v^2$ ,  $\sigma = CD$ ,  $v > 0$ . Вспомогательная матрица для вычисления момента неконсервативной силы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} \\ -S & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.2.2)$$

тогда часть динамических уравнений движения тела, описывающих движение тела вокруг центра масс и соответствующих алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ , может быть представлена в виде

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \quad (3.2.3a)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (3.2.3b)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (3.2.3c)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (3.2.3d)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \quad (3.2.3e)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \quad (3.2.3f)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (3.2.1), (3.2.3) десятого порядка является прямое произведение четырехмерного многообразия на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathfrak{so}(4)$ .

Сразу же заметим, что система (3.2.1), (3.2.3), в силу имеющейся динамической симметрии  $I_2 = I_3 = I_4$ , обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \text{const}, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0 = \text{const}, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}. \quad (3.2.4)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (3.2.5)$$

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , лежащей на прямой  $CD = Dx_1$  и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ( $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, см. также [48, 53])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (3.2.6)$$

то в системе (3.2.1), (3.2.3) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:  $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$ . Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (3.2.7)$$

Случай (3.2.7) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы шестого порядка после некоторого преобразования системы десятого порядка (3.2.1), (3.2.3). Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^4 \tau_{i,j} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega_i \Omega_j = T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \Omega_0 = v. \quad (3.2.8)$$

Для этого преобразуем величины  $\omega_3$ ,  $\omega_5$ ,  $\omega_6$  посредством композиции двух поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1(-\beta_1) \circ \mathbf{T}_3(-\beta_2) \begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix}, \quad (3.2.9)$$

где

$$\mathbf{T}_1(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3(\beta_2) = \begin{pmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, \\ z_2 &= -\omega_3 \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \omega_5 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_5 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Систему (3.2.1), (3.2.3) в случаях (3.2.4), (3.2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ &= \frac{T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_3 v - \sigma(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{2I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ &= \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (3.2.14)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{2I_2} s(\alpha) \cdot \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{v^2}{2I_2} x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (3.2.16)$$

$$\dot{\omega}_5 = -\frac{v^2}{2I_2} x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (3.2.17)$$

$$\dot{\omega}_6 = \frac{v^2}{2I_2} x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (3.2.18)$$

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle ' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const},$$

приведем систему (3.2.12)–(3.2.18) к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ &\quad - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_2 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ &\quad - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= -\frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &\quad + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_3 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} Z_1 \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$$Z'_1 = \frac{s(\alpha)}{2I_2 n_1^2} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \\ - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) \times \\ \times [Z_3 \sin \beta_1 - Z_2 \cos \beta_1] - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (3.2.23)$$

$$\beta'_1 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (3.2.24)$$

$$\beta'_2 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \cdot \Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z), \quad (3.2.25)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{2I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) + \\ + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \quad (3.2.26)$$

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \\ + x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1 \cos \beta_2 + x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1,$$

$$\Delta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \\ + x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_1 \cos \beta_2 - x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_1,$$

$$\Theta_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \cos \beta_2 - x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) \sin \beta_2.$$

Видно, что в системе седьмого порядка (3.2.19)–(3.2.25) может быть выделена независимая подсистема шестого порядка (3.2.20)–(3.2.25), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем шестимерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (3.2.7) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы шестого порядка также возможен.

Система (3.2.19)–(3.2.25) содержит динамические уравнения движения четырехмерного твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при  $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, n_1 Z) \equiv 0$ ) она примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2, Z_3), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2, Z_3) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \quad (3.2.27)$$

$$\alpha' = -Z_3 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha, \quad (3.2.28)$$

$$Z'_3 = -(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \quad (3.2.29)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \quad (3.2.30)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \quad (3.2.31)$$

$$\beta'_1 = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3.2.32)$$

$$\beta'_2 = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (3.2.33)$$

3.2.1. *Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [8, 19]) динамические функции  $s$ ,  $x_{2N}$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, & x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{2N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \\ x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{3N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ). При этом функции  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ , входящие в систему (3.2.19)–(3.2.25), примут следующий вид:

$$\Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = A \sin \alpha, \quad \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \equiv \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) \equiv 0.$$

Тогда благодаря условиям (3.2.6), (3.2.34) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.2.19)–(3.2.25)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (3.2.35)$$

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (3.2.36)$$

$$Z_3' = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (3.2.37)$$

$$Z_2' = Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (3.2.38)$$

$$Z_1' = Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (3.2.39)$$

$$\beta_1' = Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3.2.40)$$

$$\beta_2' = -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (3.2.41)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Как и выше, безразмерный параметр  $b$  и постоянную  $n_1$  выберем следующим образом:  $b = \sigma n_0$ ,  $n_0^2 = AB/2I_2$ ,  $n_1 = n_0$ .

Итак, система (3.2.35)–(3.2.41) может быть рассмотрена на своем семимерном фазовом многообразии  $W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T\mathbb{S}^3 \{Z_1, Z_2, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}$ , т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3 \{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}$ .

**Теорема 3.1.** *Система (3.2.35)–(3.2.41) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. Эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Здесь (как и в разделах 1, 2) необходимо сделать важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

3.2.2. *Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.* Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для тел произвольной размерности.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на трехмерный диск,  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  — компоненты силы  $\mathbf{S}$  воздействия среды, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно. Итак, примем зависимость  $x = Q + R$ , где  $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$  — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции  $R$  от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \quad (3.2.42)$$

Здесь  $(h_1, h_2, h_3, h_4)$  — некоторые положительные параметры.

Применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} \equiv 0$ , имеем  $x_{2N} = Q_2 - h_1\omega_6/v$ ,  $x_{3N} = Q_3 + h_1\omega_5/v$ ,  $x_{4N} = Q_4 - h_1\omega_3/v$ .

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19] допустим равенства

$$Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad Q_4 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad A > 0,$$

а динамические функции  $s$ ,  $x_{2N}$ ,  $x_{3N}$  и  $x_{4N}$  примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ x_{2N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_6}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{3N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_5}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{4N} \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - h \frac{\omega_3}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). При этом  $h_2 = h_3 = h_4$  в силу динамической симметрии тела. Функции  $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Delta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ ,  $\Theta_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \Omega/v)$ , входящие в систему (3.2.20)–(3.2.25), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha - \frac{h}{v} z_3, \\ \Delta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) &= \frac{h}{v} z_2, \quad \Theta_v \left( \alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v} \right) = -\frac{h}{v} z_1. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Благодаря условиям (3.2.6), (3.2.43) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (3.2.19)–(3.2.25)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z), \quad (3.2.45)$$

$$\alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_3 \cos^2 \alpha, \quad (3.2.46)$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1) (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + bZ_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \\ &\quad - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_3^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

$$Z_2' = (1 + bH_1) Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1) Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \\ - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_2 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha, \quad (3.2.48)$$

$$Z_1' = (1 + bH_1) Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1) Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha - \\ - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + bH_1 Z_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha, \quad (3.2.49)$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1) Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (3.2.50)$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1) Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (3.2.51)$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_3 \sin \alpha \cos \alpha;$$

при этом безразмерные параметры  $b$ ,  $H_1$  и постоянную  $n_1$  выберем следующим образом:  $b = \sigma n_0$ ,  $n_0^2 = AB/2I_2$ ,  $H_1 = Bh/2I_2 n_0$ ,  $n_1 = n_0$ .

Итак, система (3.2.45)–(3.2.51) может быть рассмотрена на своем семимерном фазовом многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T\mathbb{S}^3 \left\{ Z_1, Z_2, Z_3, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi \right\},$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3 \{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 \leq \beta_2 < 2\pi\}$ .

**Теорема 3.2.** Система (3.2.45)–(3.2.51) обладает пятью независимыми первыми интегралами (полным набором), четыре из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. Эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1, 2) необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

**3.3. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля.** Пусть  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ ,  $z = (z_1, z_2, z_3)$  — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным  $v$ ,  $z$  с коэффициентами, зависящими от  $\alpha$ ,  $\beta$  следующим образом:

$$\left( \dot{v}, \dot{z}_3, \dot{z}_2, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, v\dot{\beta}_2 \right)^T = A(\alpha, \beta) \left( v^2, vz_3, vz_2, vz_1, z_3^2, z_3z_2, z_3z_1, z_2^2, z_2z_1, z_1^2 \right)^T, \quad (3.3.1)$$

где  $A(\alpha, \beta)$  — матрица размером  $7 \times 10$  (система, аналогичная (1.3.1), (2.3.1)). Выбирая новую независимую переменную  $q$  ( $dq = vdt$ ,  $d/dq = \langle \cdot \rangle$ ,  $v \neq 0$ ), а также новые фазовые переменные  $Z_k$ ,  $z_k = Z_k v$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$ , систему (3.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta) \left( 1, Z_3, Z_2, Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2 \right)^T, \quad (3.3.2)$$

$$\begin{pmatrix} Z'_3 \\ Z'_2 \\ Z'_1 \\ \alpha' \\ \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \hat{A}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \\ Z_3^2 \\ Z_3 Z_2 \\ Z_3 Z_1 \\ Z_2^2 \\ Z_2 Z_1 \\ Z_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_3 \Psi(\alpha, Z) \\ Z_2 \Psi(\alpha, Z) \\ Z_1 \Psi(\alpha, Z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

где  $A_v(\alpha, \beta)$  — первая строка матрицы  $A(\alpha, \beta)$ , а  $\hat{A}(\alpha, \beta)$  — матрица  $A(\alpha, \beta)$  без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (3.3.2) на  $v$  отделяется, что дает возможность рассматривать шесть оставшихся уравнений в качестве системы (3.3.3) на шестимерном фазовом многообразии  $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ .

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (3.3.2), (3.3.3) седьмого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad (3.3.4)$$

где  $\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_3(\alpha)$ ,  $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$ ,  $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_3(\alpha)$ ,

$$\alpha' = f_3(\alpha)Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \quad (3.3.5a)$$

$$\begin{aligned} Z'_3 = & -f_3(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ & - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \quad (3.3.5b)$$

$$Z'_2 = -f_3(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_2 Z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \quad (3.3.5c)$$

$$\begin{aligned} Z'_1 = & -f_3(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_1 Z_3 - \\ & - f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg(\beta_1)] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \quad (3.3.5d)$$

$$\beta'_1 = Z_2 f_1(\alpha), \quad (3.3.5e)$$

$$\beta'_2 = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.3.5f)$$

где  $DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)|/d\xi$ ,  $b \geq 0$ ,  $\delta(\alpha)$ ,  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$ ,  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ ,  $i, j, k = \alpha, \beta$  — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (3.3.4), (3.3.5) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*.

Уравнение (3.3.4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (3.3.5) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии  $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} / \text{касательном расслоении гладкого трехмерного многообразия } M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ ; см. также [32–34]).

Система (3.3.4), (3.3.5) имеет более общий вид, чем система (3.2.27)–(3.2.33), взятая из динамики четырехмерного твердого тела; в частности, они совпадают при  $b = \sigma n_1$ ,  $\delta(\alpha) = \sin \alpha$  и

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, & f_2(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, & f_3(\alpha) &\equiv -1, & g(\beta_1) &= -\frac{1}{\sin \beta_1}, & \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, & \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \\ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1, & \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, & \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &= \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим структуру системы (3.3.5). Она соответствует следующим уравнениям геодезических линий с семью ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении  $TM^3\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  многообразия  $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$  (в частности, на расслоении (трехмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 &= 0.\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

Действительно, выбрав новые координаты  $z_1, z_2, z_3$  в касательном пространстве в виде

$$\dot{\alpha} = z_3 f_3(\alpha), \quad \dot{\beta}_1 = z_2 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (3.3.7)$$

получаем следующие соотношения (ср. с (3.3.5)):

$$\begin{aligned}Z'_1 &= -f_3(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_1 Z_3 - f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg(\beta_1)] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_2 &= -f_3(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_2 Z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_3 &= -f_3(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} - \\ &\quad - \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) Z_2^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z),\end{aligned}\quad (3.3.8)$$

при этом уравнения (3.3.6) почти всюду эквивалентны совокупности (3.3.7), (3.3.8), которая, прежде всего, присутствует в системе (3.3.5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (3.3.7) выбрать равенства

$$\alpha' = Z_3 f_3(\alpha), \quad \beta'_1 = Z_2 f_1(\alpha), \quad \beta'_2 = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1).$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (3.3.6).

(а) Системы на касательном расслоении к трехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного четырехмерного твердого тела (см. также [32–34]).

(б) Системы на касательном расслоении более общей трехмерной поверхности вращения.

(с) Системы на касательном расслоении трехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (3.3.4), (3.3.5) также присутствуют коэффициенты при параметре  $b \geq 0$ . Но, как и в системах (1.3.5), (1.3.6) и (2.3.4), (2.3.5), они не нарушают консервативности, поскольку система (3.3.4), (3.3.5) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

*3.3.1. О количествах неизвестных функций и условий, на них накладываемых.* Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении трехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет  $n^2(n+1)/2$  функций при  $n = 3$ , т.е. 18 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае  $f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), g(\beta_1)$  из (3.3.7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся семью ( $n(n-1) + 1$  функциями при  $n = 3$ ) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (3.3.6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число равно 4 (т.е.  $n(n-1)/2 + 1$  функций при  $n = 3$ ). Таким образом, имеем 11 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ( $B(3)$ ) на имеющиеся  $A(3) = 11$  функций ( $A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$  функции при  $n = 3$ )? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 11, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число  $B(3)$ , тем больше разность  $A(3) - B(3)$ , и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать  $B(3) = 8$  условий на имеющиеся  $A(3) = 11$  функций. Число  $B(3)$  складывается из трех слагаемых:  $B(3) = B_1(3) + B_2(3) + B_3(3)$ .

Число  $B_1(3)$  равно количеству условий, накладываемых на функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$ , а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) =: f(\alpha), \quad (3.3.9)$$

т.е.  $B_1(3) = 1$  (в общем случае  $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$ ).

Число  $B_2(3)$  равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \quad (3.3.10)$$

т.е.  $B_2(3) = 3$  (в общем случае  $B_2(n) = n(n-1)/2$ ).

Число  $B_3(3)$  равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$ , и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

т.е.  $B_3(3) = 4$  (в общем случае  $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$ ).

Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1, \end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества произвольных функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на  $n$  ( $n$  — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае  $A(3) - B(3) = 3$ .

**Замечание 3.1.** Пусть выполнены условия (3.3.9), (3.3.10), при этом реализуется система дифференциальных равенств (3.3.11). Тогда справедливы следующие четыре ( $n(n-1)/2 + 1$  при  $n = 3$ ) тождества:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \\ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{22}^1(\beta_1), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

а также одно  $((n-1)(n-2)/2$  при  $n = 3$ ) тождество

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) =: \Gamma_3(\alpha). \quad (3.3.13)$$

*Доказательство.* В условиях замечания первая группа из первых двух равенств из (3.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Из (3.3.14) следует первая строка тождеств из (3.3.12) и тождество из (3.3.13). Далее, в условиях замечания вторая группа из одного равенства из (3.3.11) переписывается в виде

$$\left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (3.3.15)$$

Из (3.3.15) следуют вторая строка тождеств из (3.3.12). Наконец, из последней строки (3.3.11) также следует последняя строка тождеств из (3.3.12).  $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 3.1.

**Замечание 3.2.** Пусть выполнены условия (3.3.9), (3.3.10), при этом реализуются пять тождеств (3.3.12) и (3.3.13). Тогда система дифференциальных равенств (3.3.11) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) g^2(\beta_1) =: \Gamma_3(\alpha), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} &\equiv 0, \\ f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) &\equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Таким образом, при выполнении четырех условий (3.3.9), (3.3.10) четыре условия (3.3.11) и четыре условия (3.3.16) в упомянутом смысле эквивалентны.

*3.3.2. Достаточные условия интегрируемости.* Для полного интегрирования системы седьмого порядка достаточно знать, вообще говоря, шесть независимых инвариантов. Как будет показано, для полного интегрирования системы (3.3.4), (3.3.5) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из шести, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (3.3.6), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3.17)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^3 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (3.3.18)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) на одиннадцать функций: на четыре функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  из (3.3.7) и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$  из (3.3.6).

**Теорема 3.3.** *Если выполнены условия (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16), то система (3.3.4), (3.3.5), рассмотренная на произведении  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ , обладает полным набором, состоящим из пяти гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v; Z_3; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_3\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \quad (3.3.19)$$

$$\Phi_1(v; Z_3, Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1^2 = \text{const}; \quad (3.3.20)$$

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.3.21)$$

$$\Delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const};$$

$$\Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (3.3.22)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\};$$

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{C_3 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Psi_1^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}. \quad (3.3.23)$$

Более того, после некоторого ее приведения – замены независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_3(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (3.3.24)$$

и замены фазовых переменных

$$\begin{aligned} w_3 &= Z_3, & w_2^* &= \ln |w_2|, & w_2 &= \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \\ w_1^* &= \ln \left| w_1 + \sqrt{1 + w_1^2} \right|, & w_1 &= \frac{Z_2}{Z_1} \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

– фазовый поток системы (3.3.4), (3.3.5) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_3(\alpha)}$$

на произведении  $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^3\{w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ , т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_3(\alpha)} dv \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2.$$

*Доказательство.* Докажем сначала вторую часть теоремы 3.3, а именно, сделаем замены (3.3.24) независимой переменной и (3.3.25) фазовых переменных. Тогда система (3.3.4), (3.3.5) при выполнении условий (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_2^*} + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (3.3.26)$$

$$\begin{cases} \alpha' = w_3 + b(e^{2w_2^*} + w_3^2)\Delta(\alpha), \\ w_3' = -\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)e^{2w_2^*} - w_3\Psi_1(\alpha, w), \\ w_2^{*'} = \frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha)w_3 - \Psi_1(\alpha, w), \end{cases} \quad (3.3.27)$$

$$\begin{cases} w_1^* = \pm e^{w_2^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \beta_1' = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.3.28)$$

$$\beta_2' = \pm \frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1), \quad (3.3.29)$$

$$(3.3.30)$$

где  $w_1 = W_1(w_1^*)$  в силу замены (3.3.25); при этом в составной системе (3.3.26)–(3.3.29) штрихом обозначена также производная по новому независимому переменному  $\tau$ .

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.3.26)–(3.3.29) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (3.3.27), один — для системы (3.3.28) (после соответствующей замены независимого переменного в ней) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (3.3.26) и (3.3.29) (т.е. всего *пять*).

Как было указано выше, вычисление с некоторым множителем  $\rho(v; \alpha, \beta; w)$  дивергенции векторного поля  $W_0(v; \alpha, \beta; w)$  системы (3.3.26)–(3.3.29) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля  $\rho(v; \alpha, \beta, w)W_0(v; \alpha, \beta; w)$  преобразованной системы (т.е. системы (3.3.26)–(3.3.29), умноженной на  $\rho(v; \alpha, \beta; w)$ ) после замены  $\rho(v; \alpha, \beta; w)d/dt_1 = d/dt_2$  старой независимой переменной  $t_1$  при переходе к новой независимой переменной  $t_2$  в системе (3.3.26)–(3.3.29).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля  $W_0(v; \alpha, \beta; w)$  системы (3.3.26)–(3.3.29) функцию  $\rho_2(v) = v^3$  (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24) и (2.6.1), (2.6.2)). Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [v^3 W_0(v; \alpha, \beta; w)] &= -4v^3 b(e^{2w_2^*} + w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_2^*} + w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ &+ v^3 b(e^{2w_2^*} + 3w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_2^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании пяти первых интегралов. Дифференцирование функции (3.3.19) в силу системы (3.3.4), (3.3.5) при выполнении условий (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) дает

$$2bv^2 f_3(\alpha)(Z_1^2 + Z_2^2) \left\{ \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \equiv 0,$$

поскольку тождество

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) \quad (3.3.31)$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (3.3.21). Дифференцирование функции (3.3.20) в силу системы (3.3.4), (3.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & - \frac{2v^2}{f_3(\alpha)} Z_1^2 Z_3 \left\{ f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) Z_1^2 Z_2 \left\{ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\alpha)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) \right\} - \\ & - \frac{2v^2}{f_3(\alpha)} Z_2^2 Z_3 \left\{ f_3^2(\alpha) \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование функции  $\Phi_2$  из (3.3.21) в силу системы (3.3.4), (3.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_3(\alpha) \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} Z_3 \left\{ \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\}.$$

Благодаря второму уравнению из (3.3.21) функция  $\Delta(\alpha)$  удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (3.3.31), что и доказывает наличие первого интеграла (3.3.21).

Наконец, дифференцирование функции (3.3.22) в силу системы (3.3.4), (3.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_3(\alpha) \left\{ \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} Z_1 Z_3 \Psi_1(\beta_1) - \\ - v^2 f(\alpha) \left\{ \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} Z_1 Z_2 \Delta(\alpha).$$

Но функции  $\Delta(\alpha)$  и  $\Psi_1(\beta_1)$  удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям (3.3.31) и

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1), \quad (3.3.32)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.3.22).

Далее, рассмотрим два уровня  $C_2$  и  $C_3$  первых интегралов (3.3.21) и (3.3.22) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{C_3}{\sqrt{C_2^2 \Psi_1^2(\beta_1) - C_3^2}}. \quad (3.3.33)$$

Будем искать угол  $\beta_2$  из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{Z_1}{Z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (3.3.33), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (3.3.23). Теорема полностью доказана.  $\square$

Заметим также, что равенства (3.3.11) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (3.3.20). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [20, 21]). Поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

**Пример 3.1.** В случае обобщенных сферических координат  $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ , когда метрика на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$  индуцирована евклидовой метрикой объемлющего четырехмерного пространства (задача класса (а)), система седьмого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \left[ \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} = 0$$
(3.3.34)

и имеющая первые интегралы (3.3.19)–(3.3.23), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \\ \alpha' = -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha, \\ Z_3' = -(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' = Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' = Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' = Z_2 \frac{1}{\sin \alpha}, \\ \beta_2' = -Z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1}.$$

**Пример 3.2.** В случае обобщенных сферических координат  $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ , но когда метрика на трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$  индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [23, 39, 56], задача класса (а)), система седьмого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left[ \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

и имеющая первые интегралы (3.3.19)–(3.3.23), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha, \\ \alpha' &= -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \sin \alpha, \\ Z_3' &= -(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + Z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ \beta_2' &= -Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \end{aligned}$$

**Пример 3.3.** В случае трехмерного пространства Лобачевского (с координатами  $x = \beta_1$ ,  $y = \beta_2$ ,  $z = \alpha$ , задача класса (с)) система седьмого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2) = 0, \quad \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 = 0, \quad \ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 = 0 \quad (3.3.36)$$

и имеющая первые интегралы (3.3.19)–(3.3.23), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{1}{\alpha^2}, \\ \alpha' &= Z_3 \alpha + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{1}{\alpha}, \\ Z_3' &= -Z_2^2 - Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= Z_2 Z_3 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_3 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_2 \alpha, \\ \beta_2' &= Z_1 \alpha. \end{aligned}$$

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, пяти) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно, не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

**3.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов.** Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (3.3.4), (3.3.5) при условиях (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) (лишь в уравнение на  $Z'_3$ ) внешнее гладкое силовое поле  $-F(\alpha)f_3(\alpha)$ ,  $F(0) = 0$ ,  $dF(0)/d\alpha > 0$ , при наличии внутреннего ( $b > 0$ ), при этом пусть, в частности,  $f_3(\alpha) \equiv -1$ .

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных  $\alpha, Z_3, Z_2, Z_1$ . Четыре соответствующих уравнения на  $\alpha', Z'_3, Z'_2, Z'_1$  примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z'_3 &= F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)(Z_2^2 + Z_1^2) + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_2 &= -f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)Z_2Z_3 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1^2 + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_1 &= -f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)Z_1Z_3 + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1Z_2 + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\delta}(\alpha).\end{aligned}\quad (3.4.1)$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что в действительности имеет место при  $b = 0$ , т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность подтвердилась бы наличием в системе пяти гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (3.4.1):

$$W(Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2 \int_0^\alpha F(\xi)d\xi, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF(0)}{d\alpha} > 0, \quad (3.4.2)$$

которая в проколотой окрестности начала координат положительна и равна нулю только в самом начале координат.

**Предложение 3.1.** *Если функции  $\tilde{\delta}(\alpha)$  и  $F(\alpha)\delta(\alpha)$  строго одного знака в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (3.4.1), — либо притягивающая, либо отталкивающая точка.*

*Доказательство.* Полная производная функции (3.4.2) в силу уравнений (3.4.1) равна

$$b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)^2\tilde{\delta}(\alpha) + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)F(\alpha)\delta(\alpha). \quad (3.4.3)$$

Если функции  $\tilde{\delta}(\alpha)$  и  $F(\alpha)\delta(\alpha)$  одновременно отрицательны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (3.4.1), — притягивающая точка. Если функции  $\tilde{\delta}(\alpha)$  и  $F(\alpha)\delta(\alpha)$  одновременно положительны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (3.4.1), — отталкивающая точка. Два последних утверждения следуют из теорем Ляпунова и Четаева.  $\square$

**Следствие 3.1.** *В условиях предложения 3.1 рассматриваемая система, содержащая уравнения (3.4.1), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

**Следствие 3.2.** *В динамике четырехмерного твердого тела (см. также раздел 3.2) в системах, где присутствуют уравнения вида (3.4.1), функции  $\delta(\alpha)$  и  $F(\alpha)$  имеют следующий вид:*

$$\delta(\alpha) = \sin \alpha, \quad F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha.$$

Таким образом, величина (3.4.3) переписывается в виде

$$b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \cos \alpha [Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \sin^2 \alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (3.4.1), — отталкивающая точка.

Таким образом, добавляя в систему (3.3.4), (3.3.5) при условиях (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) (лишь в уравнение на  $Z'_3$ ) внешнее гладкое силовое поле  $-F(\alpha)f_3(\alpha)$ ,  $F(0) = 0$ ,  $dF(0)/d\alpha > 0$ , при наличии внутреннего ( $b > 0$ ) рассматриваемая система, вообще говоря, перестает быть консервативной.

**3.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования.** Модифицируем систему (3.3.4), (3.3.5) при наличии двух ключевых параметров  $b \geq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ , введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент  $F(\alpha)f_3(\alpha)$  в уравнение на  $Z'_3$  системы (3.5.1), (3.5.2) и даже положив при этом  $b_1 = 0$ , полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет (как показано в предыдущем разделе 3.4) при дополнительном условии  $b = 0$ .

Мы расширим введение силового поля, положив  $b > 0$ ,  $b_1 \neq 0$ . Как и выше, сделаем вспомогательную замену независимого переменного  $t$  на  $\tau$  по формуле  $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$  и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по  $\tau$ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения  $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (3.5.1)$$

$$\alpha' = Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \quad (3.5.2a)$$

$$Z'_3 = F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)]Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.2b)$$

$$Z'_2 = -[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_2Z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.2c)$$

$$Z'_1 = -[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_1Z_3 - \\ - \frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)}[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg(\beta_1)]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.2d)$$

$$\beta'_1 = Z_2\frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (3.5.2e)$$

$$\beta'_2 = Z_1\frac{f_2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1), \quad (3.5.2f)$$

$$(3.5.2g)$$

здесь  $\mu > 0$  — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр  $b$ , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр  $b_1$ .

Напомним, что система (3.5.1), (3.5.2) фактически является образом следующей системы при замене  $d/dt = f_3(\alpha)d/d\tau$  независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_3(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (3.5.3)$$

$$\alpha' = f_3(\alpha)Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)f_3(\alpha), \quad (3.5.4a)$$

$$Z'_3 = F(\alpha)f_3(\alpha) - f_3(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)]Z_3^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_3(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.4b)$$

$$Z'_2 = -f_3(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_2Z_3 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.4c)$$

$$Z'_1 = -f_3(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_1Z_3 - \\ - f_1(\alpha)[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg(\beta_1)]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \quad (3.5.4d)$$

$$\beta'_1 = Z_2f_1(\alpha), \quad (3.5.4e)$$

$$\beta'_2 = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1). \quad (3.5.4f)$$

Также напомним, что выше (раздел 3.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент  $F(\alpha)$  в уравнение на  $Z'_3$  системы (3.4.1), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии:  $b = 0$  (отсутствие внутреннего силового поля).

Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив  $b > 0$ ,  $b_1 \neq 0$ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча  $\mathbb{R}_+^1\{v\}$  и касательного расслоения  $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$  приняла вид (3.5.1), (3.5.2).

Только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (3.5.3), (3.5.4) имеет более общий вид, чем система (3.2.35)–(3.2.41), взятая из динамики четырехмерного твердого тела; в частности, они совпадают при  $b = -b_1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\delta(\alpha) = \sin \alpha$ ,  $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$ ,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, & f_3(\alpha) &\equiv -1, & g(\beta_1) &= -\frac{1}{\sin \beta_1}, & \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, & \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \\ \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1, & \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) &= \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, & \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &= \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}. \end{aligned}$$

Силовое поле в уравнениях на  $v'$ ,  $Z'$  определяется функцией  $\Psi(\alpha, Z)$ . Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на  $\alpha'$ , а во второй строке — коэффициенты из функции  $\Psi(\alpha, Z)$ . Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра  $b \geq 0$ ,  $b_1 \neq 0$ ,  $\mu > 0$ ) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где  $U$  — преобразование с определителем, равным  $\mu$ , и являющееся унимодулярным преобразованием при  $\mu = 1$ . В частности, если  $\mu = 1$ , а  $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$  или  $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то данное преобразование задает поворот на угол  $\alpha$ . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого).

### 3.6. Системы со знакопеременной диссипацией.

*3.6.1. Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы.* Перейдем теперь к интегрированию системы седьмого порядка (3.5.1), (3.5.2) при выполнении свойств (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (3.5.1), (3.5.2) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-либо комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.4 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются восемь алгебраических и дифференциальных соотношений (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) на одиннадцать функций: на четыре функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ ,  $g(\beta_1)$  и на семь, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности  $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ .

Тогда после замены фазовых переменных (3.3.25) система (3.5.1), (3.5.2) при условиях (3.3.9), (3.3.10), (3.3.16) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_0(\alpha, w), \quad \Psi_0(\alpha, w) = -b(w_2^2 + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (3.6.1)$$

$$\begin{cases} \alpha' = w_3 + b(w_2^2 + w_3^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ w_3' = F(\alpha) - \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2^2 - w_3\Psi_0(\alpha, w), \\ w_2' = \Gamma_3(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}w_2w_3 - w_2\Psi_0(\alpha, w), \end{cases} \quad (3.6.2)$$

$$\begin{cases} w_1' = \pm w_2\sqrt{1 + w_1^2}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)], \\ \beta_1' = \pm \frac{w_1w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.6.3)$$

$$\beta_2' = \pm \frac{w_2}{\sqrt{1 + w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}g(\beta_1). \quad (3.6.4)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.6.1)–(3.6.4) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (3.6.2), один — для системы (3.6.3) (после соответствующей замены независимого переменного в ней) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (3.6.1) и (3.6.4) (т.е. всего *пять*).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого  $\kappa \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_3^2(\alpha)}\Gamma_3(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (3.6.5)$$

а для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$  — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (3.6.6)$$

Условие (3.6.5) назовем «геометрическим», а условие (3.6.6) — «энергетическим». Условие (3.6.5) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности  $\Gamma_3(\alpha)$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции  $\Delta(\alpha)$  при участии функций  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$ , входящих в кинематические соотношения. Условие (3.6.6) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции  $\Delta^2(\alpha)/2$ , приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции  $\Delta(\alpha)$ ). При этом сама функция  $\Delta(\alpha)$ , в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию.

**Теорема 3.4.** *Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$  выполняются условия (3.6.5) и (3.6.6). Тогда система (3.6.1)–(3.6.4) обладает полным набором — пятью (одним гладким и четырьмя, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает пятью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

*Доказательство.* Для доказательства теоремы 3.4 для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (3.6.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2^2/f_3^2(\alpha) + bw_3(w_2^2 + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_3F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_3 + b(w_2^2 + w_3^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_2}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_3(\alpha)w_2w_3/f_3^2(\alpha) + bw_2(w_2^2 + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_2F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_3 + b(w_2^2 + w_3^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_2 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \quad (3.6.8)$$

приводим систему (3.6.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha) u_2 &= \\ &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) \Delta^2(\alpha) u_1^2 / f_3^2(\alpha) + b u_2 (u_1^2 + u_2^2) \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta^3(\alpha) - b_1 u_2 F(\alpha) \Delta^2(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha) u_1 &= \\ &= \frac{f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) \Delta^2(\alpha) u_1 u_2 / f_3^2(\alpha) + b u_1 (u_1^2 + u_2^2) \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta^3(\alpha) - b_1 u_1 F(\alpha) \Delta^2(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) \Delta^2(\alpha) u_1^2 / f_3^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha) u_2^2 - b_1 \mu u_2 F(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[f^2(\alpha) \Gamma_3(\alpha) / f_3^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha) / \Delta(\alpha)] \Delta^2(\alpha) u_1 u_2 - b_1 \mu u_1 F(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 F(\alpha) \tilde{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

Напомним, что  $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$ .

Теперь для интегрирования системы (3.6.10) нам потребуется выполнение геометрического и энергетического условий (3.6.5) и (3.6.6). Действительно, после их выполнения из системы (3.6.10) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}{u_2 + b (u_1^2 + u_2^2) \Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{(\kappa - 1) u_1 u_2 - b_1 \lambda \mu u_1}. \quad (3.6.12)$$

Уравнение (3.6.12) имеет вид уравнения Абеля (см. [10, 82]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при  $\kappa = -1$  данное уравнение обладает первым интегралом

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (3.6.13)$$

который в прежних переменных имеет следующий вид:

$$\Theta_1(w_3, w_2; \alpha) = G_1 \left( \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{w_3^2 + w_2^2 + b_1 \lambda \mu w_3 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_2 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (3.6.14)$$

Система (3.6.1)–(3.6.4) является динамической системой с переменной диссипацией. При  $F(\alpha) \equiv 0$  она превращается в систему консервативную (или в систему (3.3.4), (3.3.5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (3.3.24), или в систему (3.3.26)–(3.3.29), в которой уже введены фазовые переменные (3.3.25)). Так, система (3.3.4), (3.3.5), в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (3.3.20), (3.3.21) ( $Z \rightarrow w$ ).

Более того, если функция  $F(\alpha)$  не равна тождественно нулю, но  $b_1 = 0$ , то система (3.6.1)–(3.6.4) при условии (3.6.6) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; w_3, w_2; \alpha) = v^2 (w_2^2 + w_3^2 - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (3.6.15)$$

где

$$\Theta(B; v; w_3, w_2; \alpha) = v^2 (w_2^2 + w_3^2 + B \lambda \mu w_3 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha))$$

— семейство функций, зависящих от параметра  $B \geq 0$ .

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.6.15), (3.3.21) ( $Z \rightarrow w$ ) также является первым интегралом системы (3.6.1)–(3.6.4), если  $F(\alpha) \neq 0$ , но  $b_1 = 0$ . При  $b_1 > 0$  каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; w_3, w_2; \alpha) = v^2(w_2^2 + w_3^2 + b_1 \lambda \mu w_3 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (3.6.16)$$

и (3.3.21) ( $Z \rightarrow w$ ) по отдельности не является первым интегралом системы (3.6.1)–(3.6.4). Однако отношение функций (3.6.16), (3.3.21) ( $Z \rightarrow w$ ) является первым интегралом (3.6.14) системы (3.6.1)–(3.6.4) (для простоты, при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b_1 > 0$ .

Вообще, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.6.2) при  $\kappa = -1$ . Для этого преобразуем инвариантное соотношение (3.6.13) при  $u_1 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_1 \lambda \mu}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2}{4} + \lambda. \quad (3.6.17)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2 + 4\lambda \geq 0, \quad (3.6.18)$$

и фазовое пространство системы (3.6.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.6.17).

Таким образом, в силу соотношения (3.6.13) первое уравнение системы (3.6.10) при условиях (3.6.5) и (3.6.6) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (3.6.19)$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (3.6.2) при  $\kappa = -1$  найдется из следующего уравнения Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \quad (3.6.20)$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2;$$

при этом постоянная  $C_1$  выбирается из условия (3.6.18).

**Замечание 3.3.** В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо  $C_1$  подставить левую часть выражения (3.6.13). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_3, w_2; \alpha) = G_2 \left( \Delta(\alpha), \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_2}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (3.6.21)$$

Выражение первого интеграла (3.6.21) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции  $\Delta(\alpha)$  (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы седьмого порядка (3.6.1)–(3.6.4) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.6.2). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти один первый интеграл — для системы (3.6.3) (меняя в ней независимую переменную), становящейся независимой подсистемой после соответствующей замены независимой переменной, а также еще два (дополнительных) первых интеграла, привязывающих уравнения (3.6.1) и (3.6.4).

Первый интеграл для системы (3.6.3) будет иметь следующий вид:

$$\Theta_3(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi_1(\beta_1)} = C_3 = \text{const} \quad (3.6.22)$$

(о функции  $\Psi_1(\beta_1)$  см. (3.3.22)). Действительно, системе (3.6.3) можно поставить в соответствие уравнение первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\beta_1} = \frac{1 + w_1^2}{w_1} [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)],$$

интегрирование которого и дает искомый интеграл (3.6.22). В переменных  $Z$  первый интеграл (3.6.22) будет выглядеть так:

$$\Theta'_3(Z_2, Z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}. \quad (3.6.23)$$

Для получения искомого первого интеграла, привязывающего уравнение (3.6.4), рассмотрим уровень  $C_3$  первого интеграла (3.6.22). На этом уровне справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{1}{\sqrt{C_3^2 \Psi_1^2(\beta_1) - 1}}. \quad (3.6.24)$$

Но угол  $\beta_2$  будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \frac{Z_1}{Z_2} g(\beta_1).$$

Используя в этом уравнении равенство (3.6.24), получаем требуемое утверждение о наличии следующего первого интеграла, привязывающего уравнение (3.6.4):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_1^2(b) - 1}} db = C_4 = \text{const}. \quad (3.6.25)$$

Наконец, нетрудно проверить, что у системы (3.6.1)–(3.6.4) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.5.17), (2.6.27)), который, например, при  $b = -b_1$  примет вид

$$\Theta_0(v; w_3, w_2; \alpha) = v^2(1 + 2bw_3\Delta(\alpha) - b^2\mu(w_2^2 + w_3^2)) = C_0 = \text{const} \quad (3.6.26)$$

и привязывает уравнение (3.6.1).

Продолжим доказательство теоремы 3.4.

**I.** Составная рассматриваемая система (3.6.1)–(3.6.4) при выполнении свойств (3.6.5), (3.6.6) имеет следующий вид ( $w_2^* = \ln |w_2|$ ,  $w_1^* = \ln |w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}|$ ):

$$v' = X_v(v; w_3, w_2^*; \alpha) = v\Psi_1(\alpha, w), \quad (3.6.27)$$

$$\Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_2^*} + w_3^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1\lambda\Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha),$$

$$\begin{cases} \alpha' = X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha) = w_3 + b(e^{2w_2^*} + w_3^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \\ w_3' = X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}e^{2w_2^*} - w_3\Psi_1(\alpha, w), \\ w_2'^* = X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_3 - \Psi_1(\alpha, w), \end{cases} \quad (3.6.28)$$

$$\begin{cases} w_1'^* = X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_2^*} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \beta_1' = X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha) = \pm \frac{W_1(w_1^*)e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.6.29)$$

$$\beta_2' = X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm \frac{e^{w_2^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} g(\beta_1); \quad (3.6.30)$$

при этом в составной системе (3.6.27)–(3.6.30) величина  $w_1 = W_1(w_1^*)$  — функция в силу замен выше (см. также (3.3.25)).

В принципе, замены  $w_s \rightarrow w_s^*$ ,  $s = 1, 2$ , носят технический характер; при этом можно использовать как переменные  $w_s^*$ , так и переменные  $w_s$ .

Для составной системы (3.6.27)–(3.6.30) будем искать интегральные инварианты с плотностью  $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$ , соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) dv \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\operatorname{div} [\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)] = 0, \quad (3.6.31)$$

где

$$X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \{X_v(v; w_3, w_2^*; \alpha), X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), \\ X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\} \quad (3.6.32)$$

— векторное поле составной системы (3.6.27)–(3.6.30) в координатах  $(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$ . Уравнение (3.6.31) переписется в виде

$$X_v(v; w_3, w_2^*; \alpha)\rho_v + X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_3} + X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha)\rho_{w_2^*} + \\ + X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1)\rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha)\rho_{\beta_1} + X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1)\rho_{\beta_2} = \\ = -\rho \operatorname{div} X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2). \quad (3.6.33)$$

Как было указано выше для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем  $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$  дивергенции векторного поля  $X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$  системы (3.6.27)–(3.6.30) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля

$$\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$$

преобразованной системы (т.е. системы (3.6.27)–(3.6.30), умноженной на  $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$ ) после замены  $\rho(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) d/dt_1 = d/dt_2$  старой независимой переменной  $t_1$  при переходе к новой независимой переменной  $t_2$  в системе (3.6.27)–(3.6.30).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля  $X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)$  системы (3.6.27)–(3.6.30) функцию  $\rho_2(v) = v^3$  из (1.3.18) (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24) и других систем). Имеем:

$$\operatorname{div} [v^3 X(v; w_3, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)] = -4v^3 b(e^{2w_2^*} + w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_2^*} + w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ + v^3 b(e^{2w_2^*} + 3w_3^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_2^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ + v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) (\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 + 0 + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.6.33) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} v' = v^3 X_v(v; w_3, w_2^*; \alpha), & \alpha' = v^3 X_\alpha(w_3, w_2^*; \alpha), \\ w_3' = v^3 X_{w_3}(w_3, w_2^*; \alpha), & w_2'^* = v^3 X_{w_2^*}(w_3, w_2^*; \alpha), \\ w_1'^* = v^3 X_{w_1^*}(w_2^*; \alpha, \beta_1), & \beta_1' = v^3 X_{\beta_1}(w_2^*, w_1^*; \alpha), \\ \beta_2' = v^3 X_{\beta_2}(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), & \rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho \end{cases} \quad (3.6.34)$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной). У системы, состоящей из первых семи уравнений системы (3.6.34), уже найдены пять первых интегралов (3.6.26), (3.6.14), (3.6.21), (3.6.22) и (3.6.25) (полный набор). Найдем и дополнительный первый интеграл, привязывающий уравнение (последнее уравнение системы (3.6.34)) на функцию  $\rho$ .

Действительно, из системы уравнений (3.6.34) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho [b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha)]}{w_3 + b(w_2^2 + w_3^2) \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))}. \quad (3.6.35)$$

Вводя в рассмотрение однородные координаты (3.6.8), имеем:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]\tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha))} \quad (3.6.36)$$

или

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \quad (3.6.37)$$

Теперь из соотношения (3.6.37) и первого соотношения (3.6.11) вытекает следующее дифференциальное равенство (при  $\kappa = -1$ ):

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 + u_1^2}, \quad (3.6.38)$$

а из него — следующая квадратура:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-[b_1\lambda\mu]du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2) \quad (3.6.39)$$

(о функциях  $u(u_2)$  и  $U(C_1, u_2)$  см. (3.6.20)). Справедливо инвариантное соотношение

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2, \quad u_2 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (3.6.33) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_4], \quad (3.6.40)$$

где  $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_4]$  — произвольная гладкая функция пяти аргументов; при этом  $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_4$  — пять независимых первых интегралов (3.6.26), (3.6.14), (3.6.21), (3.6.22) и (3.6.25) соответственно.

В частности, за пять функционально независимых решений линейного уравнения (3.6.33) в частных производных можно взять следующие функции ( $u_2 = w_3/\Delta(\alpha)$ ,  $u_1 = w_2/\Delta(\alpha)$ ,  $w_2^* = \ln|w_2|$ ,  $w_1^* = \ln|w_1 + \sqrt{1 + w_1^2}|$ ):

$$\rho_0(v; w_3, w_2^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; w_3, w_2^*; \alpha), \quad (3.6.41)$$

$$\rho_1(v; w_3, w_2^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_3, w_2^*; \alpha), \quad (3.6.42)$$

$$\rho_2(v; w_3, w_2^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_3, w_2^*; \alpha), \quad (3.6.43)$$

$$\rho_3(v; w_3, w_1^*; \alpha, \beta_1) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_1^*; \beta_1), \quad (3.6.44)$$

$$\rho_4(v; w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_4(\beta_1, \beta_2). \quad (3.6.45)$$

**II.** Рассмотрим далее систему (3.6.3). Поскольку она может быть приведена к независимой подсистеме, проведем рассуждения об «автономном» поиске инвариантных дифференциальных форм, хотя общий подход для поиска таких форм уже освещен выше. После замены независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = \pm w_2 \frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)} \frac{d}{d\tau} \quad (3.6.46)$$

система (3.6.3) примет вид

$$\begin{cases} w_1' = X_{w_1}(w_1; \beta_1) = \sqrt{1 + w_1^2} \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \beta_1' = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}}; \end{cases} \quad (3.6.47)$$

при этом в системе (3.6.47) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной  $\tau$ .

Для системы (3.6.47) будем искать интегральный инвариант с плотностью  $\rho(w_1; \beta_1)$ , соответствующей дифференциальной форме площади  $\rho(w_1; \beta_1)dw_1 \wedge d\beta_1$ , из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_1; \beta_1)X(w_1; \beta_1)] = 0, \quad (3.6.48)$$

где

$$X(w_1; \beta_1) = \{X_{w_1}(w_1; \beta_1), X_{\beta_1}(w_1; \beta_1)\} \quad (3.6.49)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (3.6.47) в координатах  $(w_1; \beta_1)$ . Уравнение (3.6.48) перепишется в виде

$$X_{w_1}(w_1; \beta_1)\rho_{w_1} + X_{\beta_1}(w_1; \beta_1)\rho_{\beta_1} = -\rho \operatorname{div} X(w_1; \beta_1); \quad (3.6.50)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_1; \beta_1) = \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}} \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \quad (3.6.51)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.6.50) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = X_{w_1}(w_1; \beta_1), \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_1; \beta_1), \\ \dot{\rho} = -\rho \frac{w_1}{\sqrt{1 + w_1^2}} \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \end{cases} \quad (3.6.52)$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (3.6.52), уже найден первый интеграл (3.6.22). Найдем дополнительный независимый первый интеграл для системы (3.6.52) уравнений характеристик.

Сопоставим двум последним уравнениям системы (3.6.52) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_1} = -\rho \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right]. \quad (3.6.53)$$

Последнее уравнение дает следующее инвариантное соотношение:

$$\Theta_{\rho_3}(\beta_1; \rho) = \rho \cdot \Psi_1(\beta_1) = C_{\rho_3} = \operatorname{const}, \quad (3.6.54)$$

которое является вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (3.6.52). О функции  $\Psi_1(\beta_1)$  см. (3.3.22).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (3.6.50) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_3]}{\Psi_1(\beta_1)}, \quad (3.6.55)$$

где  $\mathcal{G}[\Theta_3]$  — произвольная гладкая функция одного аргумента; при этом  $\Theta_3$  — первый интеграл (3.6.22). В частности, если в качестве функции  $\mathcal{G}[\Theta_3]$  выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_3] = \frac{1}{\Theta_3} = \frac{\Psi_1(\beta_1)}{\sqrt{1 + w_1^2}}, \quad (3.6.56)$$

то за решение линейного уравнения (3.6.50) в частных производных можно взять следующую функцию:

$$\rho_3(w_1; \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_1^2}}. \quad (3.6.57)$$

Теорема 3.4 доказана.  $\square$

Заметим, что все найденные в разделе 3.6.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (3.5.1), (3.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (3.5.3), (3.5.4). Для этого все найденные формы надо поделить на  $f_3(\alpha)$  (т.е. вернуться к старой независимой переменной  $t$ ).

В заключение сделаем некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразно. В данном разделе 3 предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем седьмого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат исключительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы. Перечисленные выше примеры из приложений также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Извю РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.

18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В. В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на  $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.

44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого  $n$ -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к  $n$ -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к  $n$ -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.

65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких  $n$ -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. *Шамолин М. В.* Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. *Шамолин М. В.* Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.
81. *Шамолин М. В.* Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. *Shamolín M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. *Shamolín M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (*Vasilyev V.*, ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

**ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА**

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)  
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва  
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)  
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru



## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

© 2025 г. Г. АКИШЕВ

АННОТАЦИЯ. Исправление к ранее опубликованной статье автора «Неравенства для наилучшего приближения «углом» и модуля гладкости функции в пространстве Лоренца»// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 230. — С. 8–24.

**Ключевые слова:** пространство Лоренца, тригонометрический полином, наилучшее приближение «углом», модуль гладкости.

## LETTER TO THE EDITOR

© 2025 G. AKISHEV

ABSTRACT. Corrections to the author's paper "Inequalities for the best "angular" approximation and the smoothness modulus of a function in the Lorentz space"// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory. — 2023. — 230. — P. 8–24.

**Keywords and phrases:** Lorentz space, trigonometric polynomial, best "angular" approximation, smoothness modulus.

**AMS Subject Classification:** 41A10, MSC 41A25, 42A05

В статье [1] автором допущены некоторые опечатки. Ниже предлагаются исправления этих опечаток.

1. Страница 8, ключевые слова: вместо «модуля гладкости» должно быть «модуль гладкости».
2. Страница 11, формула (2.1) и теорема 2.1: вместо « $2^{(s,\alpha)}$ » должно быть « $2^{(s,\alpha)^2}$ ».
3. Страница 15, строки 5–6 снизу: вместо

$$\begin{aligned} U_{[2^{\mu_1-1}], [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) &= S_{[2^{\mu_1-1}], \infty}(f, 2\pi\mathbf{x}) + S_{\infty, [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) - S_{[2^{\mu_1-1}], [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) \\ &= \sum_{n_1=[2^{\mu_1-1}]}^{\infty} \sum_{n_2=[2^{\mu_2-1}]}^{\infty} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\langle \mathbf{n}, 2\pi\mathbf{x} \rangle}, \end{aligned}$$

должно быть

$$\begin{aligned} f(2\pi\mathbf{x}) - U_{[2^{\mu_1-1}], [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) &= \\ &= f(2\pi\mathbf{x}) - \left[ S_{[2^{\mu_1-1}], \infty}(f, 2\pi\mathbf{x}) + S_{\infty, [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) - S_{[2^{\mu_1-1}], [2^{\mu_2-1}]}(f, 2\pi\mathbf{x}) \right] = \\ &= \sum_{n_1=[2^{\mu_1-1}]+1}^{\infty} \sum_{n_2=[2^{\mu_2-1}]+1}^{\infty} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\langle \mathbf{n}, 2\pi\mathbf{x} \rangle}, \end{aligned}$$

4. Страница 15, строка 4 снизу: вместо «теореме 2.1» должно быть «теореме 2.2».
5. Страница 16, строка 4 снизу: вместо «теореме 2.1» должно быть «теореме 2.2».
6. Страница 22, строка 11 снизу: вместо «**Заключение** Задачу...» должно быть «**Заключение.** Задачу...».

7. Страница 22, строка 10 снизу: вместо «В. И. Иванов [13]» должно быть «В. И. Иванов [12]».
8. Страница 22, строка 9 снизу: вместо «в [11, 12]» должно быть «в [11, 13]».
9. Страница 22, строка 6 снизу: вместо «[47]» должно быть «[3]».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акишев Г. А.* Неравенства для наилучшего приближения «углом» и модуля гладкости функции в пространстве Лоренца // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 230. — С. 8–24.

#### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Акишев Габдолла (Akishev Gabdolla)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Казахстанский филиал, Астана, Казахстан

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana, Kazakhstan)

E-mail: akishev\_g@mail.ru

## CONTENTS

Sessions of the Workshop of the Mathematics and Mechanics Department of the Lomonosov Moscow State University, “Urgent Problems of Geometry and Mechanics” Named after V. V. Trofimov ( <i>D. V. Georgievsky, M. V. Shamolin</i> ) . . . . .	3
Algorithms for enumeration of lattice paths with constraints and root trees by various parameters ( <i>A. A. Balagura, O. V. Kuzmin</i> ) . . . . .	24
Optimization methods for bilinear control systems based on fixed point problems ( <i>A. S. Buldaev, I. D. Kazmin</i> ) . . . . .	36
Secularity condition for the Broadwell kinetic system ( <i>S. A. Dukhnovsky</i> ) . . . . .	49
An efficient algorithm for finding final vertices in a generalized functional graph ( <i>O. V. Zubkov</i> ) . . . . .	59
Invariants of homogeneous dynamic systems of arbitrary odd order with dissipation. III. Seventh-order systems ( <i>M. V. Shamolin</i> ) . . . . .	69
Letter to the editor ( <i>G. Akishev</i> ) . . . . .	101

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**  
информационных изданий ВИНТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,  
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)  
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,  
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНТИ РАН)  
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,  
канд. физ.-мат. наук (ВИНТИ РАН)

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

Аграчёв Андрей Александрович, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)  
Архипова Наталия Александровна, к.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)  
Асеев Сергей Миронович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова)  
Букжалёв Евгений Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Бухштабер Виктор Матвеевич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Воблый Виталий Антониевич, д.ф.-м.н. (ВИНТИ РАН)  
Гусева Надежда Ивановна, к.ф.-м.н., профессор (Московский педагогический  
государственный университет, ВИНТИ РАН)  
Зеликин Михаил Ильич, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Канель-Белов Алексей Яковлевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова,  
Университет имени Бар-Илана)  
Корпусов Максим Олегович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Лукьяненко Дмитрий Витальевич, д.ф.-м.н. (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Пентус Мати Рейнович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Попов Виктор Юрьевич д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Попов Владимир Леонидович, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор (МИРАН им. В. А. Стеклова,  
НИУ «Высшая школа экономики»)  
Сарычев Андрей Васильевич, д.ф.-м.н., профессор (Университет Флоренции)  
Сачков Юрий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор (Институт программных систем  
им. А. К. Айламазяна)  
Степанов Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет  
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)  
Туганбаев Аскар Аканович, д.ф.-м.н., профессор (НИУ «Московский энергетический институт»,  
МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Фалалеев Михаил Валентинович, д.ф.-м.н., профессор  
(Иркутский государственный университет)  
Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор (Институт математики с вычислительным  
центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН)  
Чирский Владимир Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)  
Шамолин Максим Владимирович, д.ф.-м.н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович  
Канель-Белов Алексей Яковлевич  
Корпусов Максим Олегович  
Лукьяненко Дмитрий Витальевич  
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович  
Сачков Юрий Леонидович  
Степанов Сергей Евгеньевич  
Туганбаев Аскар Аканович  
Шамолин Максим Владимирович

## ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте [math@viniti.ru](mailto:math@viniti.ru)

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (\*.tex и \*.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.