ISSN 2782-4438

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические обзоры

Том 211 (2022)

Москва 2022

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения
Тематические обзоры
Том 211 (2022)

Дата публикации 6 июня 2022 г.

Издается в электронной форме с 2016 года Выходит 15 раз в год

Редакторы-составители выпуска М. В. Шамолин, Т. К. Юлдашев
Научный редактор выпуска А. А. Архипова
Компьютерная вёрстка А. А. Широнин

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук (ФГБУН ВИНИТИ РАН)
Адрес редакции и издателя: 125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223
Телефон редакции +7 (499) 155-44-19, +7 (499) 155-42-30
Электронная почта math@viniti.ru
Свидетельство о регистрации Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.
ISSN 2782-4438
Форма распространения: периодическое электронное сетевое издание

URL:
http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues
http://www.mathnet.ru/into
http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

DOI статей, опубликованных в выпуске

http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-3-13
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-14-28
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-29-40
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-41-74
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-75-82
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-83-95
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-96-113
http://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-211-114-130

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 211

ГЕОМЕТРИЯ, МЕХАНИКА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Москва 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-3-13

УДК 517.968.74

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© 2022 г. **А. Т. АСАНОВА, Э. А. БАКИРОВА, А. Е. ИМАНЧИЕВ**

Аннотация. Для двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа получены условия однозначной разрешимости в терминах разрешимости задачи Коши и гибридной системы.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение смешанного типа, вырожденное ядро, метод параметризации, разрешимость.

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF MIXED TYPE

© 2022 **A. T. ASSANOVA, E. A. BAKIROVA, A. E. IMANCHIEV**

Abstract. For a two-point boundary-value problem for a system of integro-differential equations of mixed type, we obtain conditions for unique solvability in terms of the solvability of the Cauchy problem and a hybrid system.

Keywords and phrases: two-point boundary-value problem, integro-differential equation of mixed type, degenerate kernel, parametrization method, solvability.

AMS Subject Classification: 34K10, 34K40, 45B05, 45D05, 45J05

1. Постановка задачи. Интегро-дифференциальные уравнения часто возникают в приложениях, являясь математической моделью различных процессов механики, физики, химии, биологии, медицины, экологии, экономики и др. Особое место среди интегро-дифференциальных уравнений занимают интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа (см. [8,11–14,19–27,30]). Интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа, которые содержат интегральные члены Вольтерра и Фредгольма, также называются интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра—Фредгольма (см. [8,11,12,20,21,23,24,26,30]). Если ядра интегральных членов принадлежат классу непрерывных функций, то становится невозможным рассматривать интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа как интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма после продолжения ядра интегрального слагаемого Вольтерра на весь отрезок. Это в свою очередь приводит к трудностям при исследовании краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа. Методы, разработанные для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма, не всегда можно применить к интегро-дифференциальным уравнениям смешанного типа. Особый класс интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа составляют интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра—Фредгольма второго порядка в связи с многочисленными приложениями. Несмотря на большое количество работ по интегро-дифференциальным уравнениям Вольтерра—Фредгольма второго порядка, остается очень много вопросов, касающихся эффективных методов решения краевых задач для них.

В [4] Д. С. Джумабаевым был предложен метод параметризации решения краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод параметризации Джумабаева оказался конструктивным методом исследования различных краевых задач для дифференциальных, нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Наряду с установлением критериев однозначной и корректной разрешимости исследуемых задач были построены алгоритмы нахождения приближенных решений и условия их сходимости к точным решениям рассматриваемых задач (см. [1–3, 9, 10, 15, 17]). На базе метода параметризации также был разработан новый подход к общему решению линейного обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма (см. [16]). Интервал, где рассматривается уравнение, разбивается на части, и значения решения в начальных точках подынтервалов принимаются за дополнительные параметры. С помощью введения новых неизвестных функций на подынтервалах, получена специальная задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений с параметрами. На основе решения специальной задачи Коши построено новое общее решение линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Это общее решение, в отличие от классического общего решения, существует для всех линейных интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Новое общее решение позволило предложить численные и приближенные методы решения линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Эти методы базируются на составлении и решении системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов нового общего решения. Коэффициенты и правые части этой системы определяются с помощью решений задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на подынтервалах и решений линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода. С помощью нового общего решения установлены критерии разрешимости линейных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма. Новый подход к общему решению дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений стал основой методов исследования и решения нелинейных краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений (см. [5, 18]). Методы базируются на построении и решении систем нелинейных алгебраических уравнений относительно произвольных векторов новых общих решений.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости двухточечной краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа с вырожденными ядрами. Исходная задача сначала сведена к двухточечной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с неизвестной функцией, связанной с искомой функцией интегральным соотношением. Данную задачу также можно трактовать как обратную задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром (см. [6, 7, 28, 29]). Затем, с помощью введения дополнительного параметра как значения решения в начале интервала, задача сведена к эквивалентной задаче, содержащей задачу Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметром и неизвестной функцией и гибридную систему алгебраических и интегральных уравнений относительно параметра и неизвестной функции. Получены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах разрешимости задачи Коши и гибридной системы.

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ следующую двухточечную краевую задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi_1(t)\int_0^T \psi_1(s)x(s)ds + \varphi_2(t)\int_0^t \psi_2(s)x(s)ds + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $(n \times n)$-матрицы $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$ непрерывны на $[0, T]$, n-вектор-функция $f(t)$ непрерывна на $[0, T]$, B, C — постоянные $(n\times n)$-матрицы,

$$\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \quad \|A(t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|.$$

Решением задачи (1), (2) называется вектор-функция $x(t)$, непрерывная на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$, удовлетворяющая системе (1) и краевому условию (2).

Пусть $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x\colon [0,T]\to R^n$ с нормой
$$\|x\|_1=\max_{t\in[0,T]}\|x(t)\|.$$

2. Сведение к эквивалентной задаче с неизвестной функцией и параметром. Положим для всех $t\in[0,T]$
$$\int\limits_0^t \psi_2(s)x(s)ds=\mu(t).$$
Тогда задачу (1), (2) можем записать в виде
$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\varphi_1(t)\int\limits_0^T \psi_1(s)x(s)ds+\varphi_2(t)\mu(t)+f(t),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$
$$Bx(0)+Cx(T)=d,\quad d\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$
$$\mu(t)=\int\limits_0^t \psi_2(s)x(s)ds,\quad t\in[0,T]. \tag{5}$$
Решением задачи (3)–(5) является пара функций $(x(t),\mu(t))$, где вектор-функция $x(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируема на $(0,T)$, а вектор-функция $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (3), краевому условию (4) и интегральному соотношению (5).

Задачу (3)–(5) можно трактовать как обратную задачу для системы интегро-дифференциальных уравнений (см. [6,7,28,29]) с неизвестной функцией $\mu(t)$, связанной с искомой функцией $x(t)$ интегральным соотношением (5).

Далее применим метод параметризации (см. [4]). Введем параметр $\lambda=x(0)$ и в задаче (3)–(5), произведя замену функции $u(t)=x(t)-\lambda$, где $u(t)$ — новая неизвестная функция, получаем краевую задачу с неизвестной функцией и параметром:
$$\frac{du}{dt}=A(t)(u+\lambda)+\varphi_1(t)\int\limits_0^T \psi_1(s)[u(s)+\lambda]ds+\varphi_2(t)\mu(t)+f(t), \tag{6}$$
$$u(0)=0, \tag{7}$$
$$B\lambda+C\lambda+Cu(T)=d, \tag{8}$$
$$\mu(t)=\int\limits_0^t \psi_2(s)[u(s)+\lambda]ds,\quad t\in[0,T]. \tag{9}$$
Решением задачи (6)–(9) называется тройка $(u(t),\mu(t),\lambda)$, где $u(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — непрерывно дифференцируема на $(0,T)$ вектор-функция, $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ — вектор-функция, $\lambda\in\mathbb{R}^n$ — параметр, удовлетворяющая системе интегро-дифференциальных уравнений (6), начальному условию (7), краевому условию (8) и интегральному соотношению (9).

Если тройка $(\widetilde{u}(t),\widetilde{\mu}(t),\widetilde{\lambda})$, где $\widetilde{u}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\mu}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}^n$ — решение задачи (6)–(9), то пара $(\widetilde{x}(t),\widetilde{\mu}(t))$ с компонентами, определяемыми равенствами
$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}+\widetilde{u}(t),\quad \widetilde{\mu}(t)=\int\limits_0^t \psi_2(s)[\widetilde{u}(s)+\widetilde{\lambda}]ds,\quad t\in[0,T],$$
будет решением задачи (3)–(5). Наоборот, если пара $(x^*(t),\mu^*(t))$ является решением задачи (3)–(5), то тройка $(u^*(t),\mu^*(t),\lambda^*)$ с элементами $u^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\mu^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\lambda^*\in\mathbb{R}^n$,

где $\lambda^* = x^*(0)$, $u^*(t) = x^*(t) - x^*(0)$,

$$\mu^*(t) = \int_0^t \psi_2(s)x^*(s)ds, \quad t \in [0,T],$$

будет решением задачи (6)–(9).

Введение дополнительного параметра позволило получить начальное условие (7) для неизвестной функции $u(t)$. При фиксированных значениях $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\mu^*(t) \in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ функция $u(t)$ определяется из задачи Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма.

Таким образом, получили задачу Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметром λ и неизвестной функцией $\mu(t)$. Дополнительные соотношения (8) и (9) позволяют определить параметр λ и функцию $\mu(t)$ для всех $t \in [0,T]$.

С помощью фундаментальной матрицы $X(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

на $[0,T]$ задача Коши (6), (7) для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau \int_0^T \psi_1(s)u(s)ds + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda + \\ + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau \int_0^T \psi_1(s)ds\lambda + \\ + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\varphi_2(\tau)\mu(\tau)d\tau + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть

$$\theta = \int_0^T \psi_1(s)u(s)ds,$$

$P(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ квадратная матрица или вектор размерности n. Введем обозначение

$$E(P(\cdot),t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

и перепишем систему интегральных уравнений (10) в следующей форме:

$$u(t) = E(\varphi_1(\cdot),t)\theta + \big[E(A(\cdot),t) + E(\varphi_1(\cdot),t)\big]\lambda + E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot),t) + E(f(\cdot),t), \quad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Умножив обе части (12) на $\psi_1(t)$ и проинтегрировав на интервале $[0,T]$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\theta = G_1(\varphi_1,T)\theta + V_1(A,\varphi_1,T)\lambda + v_1(\varphi_2\mu,T) + g_1(f,T) \tag{13}$$

относительно $\theta \in \mathbb{R}^n$ с $(n\times n)$-матрицами

$$G_1(\varphi_1,T) = \int_0^T \psi_1(s)E(\varphi_1(\cdot),s)ds, \quad V_1(A,\varphi_1,T) = \int_0^T \psi_1(s)[E(A(\cdot),s) + E(\varphi_1(\cdot),s)]ds,$$

и n-мерными векторами

$$v_1(\varphi_2\mu, T) = \int_0^T \psi_1(s)E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), s)ds, \quad g_1(f, T) = \int_0^T \psi_1(s)E(f(\cdot), s)ds.$$

Перепишем систему (13) в виде

$$[I - G_1(\varphi_1, T)]\theta = v_1(\varphi_2\mu, T) + V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + g_1(f, T), \tag{14}$$

где I — единичная матрица размерности n.

Определение. Задача Коши (6), (7) называется однозначно разрешимой, если для произвольных $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $f(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ она имеет единственное решение.

Учитывая, что задача Коши эквивалентна системе интегральных уравнений (10) и эта система с вырожденными ядрами эквивалентна системе алгебраических уравнений (13) относительно $\theta \in \mathbb{R}^n$, приходим к выводу, что задача Коши однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима.

Пусть матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима. Представим матрицу $[I - G_1(\varphi_1, T)]^{-1}$ в виде $[I - G_1(\varphi_1, T)]^{-1} = M(T)$, где $M(T)$ — квадратная матрица размерности n. Тогда вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$ в соответствии с (14) может быть определен равенством

$$\theta = M(T)V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + M(T)g_1(f, T). \tag{15}$$

В (12) подставляя правую часть (15) вместо θ, получим представление функции $u(t)$ через λ и $\mu(t)$:

$$u(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)\Big\{M(T)V_1(A, \varphi_1, T)\lambda + M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + M(T)g_1(f, T)\Big\} + \\ + \Big[E(A(\cdot), t) + E(\varphi_1(\cdot), t)\Big]\lambda + E\big(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), t\big) + E(f(\cdot), t), \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

Введем следующие обозначения:

$$D_1(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)V_1(A, \varphi_1, T) + E(A(\cdot), t) + E(\varphi_1(\cdot), t), \tag{17}$$

$$\Phi_1(t, \mu) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)v_1(\varphi_2\mu, T) + E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot), t), \tag{18}$$

$$F_1(t) = E(\varphi_1(\cdot), t)M(T)g_1(f, T) + E(f(\cdot), t). \tag{19}$$

Тогда из (16) имеем

$$u(t) = D_1(t)\lambda + \Phi_1(t, \mu) + F_1(t). \tag{20}$$

Находя из (20) значения функции $u(t)$ при $t = T$ и $t = s$, подставляя найденные выражения в краевое условие (8) и интегральные соотношения (9), получим гибридную систему уравнений, состоящую из системы алгебраических уравнений относительно параметра λ

$$\big[B + C + CD_1(T)\big]\lambda = -C\Phi_1(T, \mu) + d - CF_1(T), \tag{21}$$

и интегрального уравнения Вольтерра относительно функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \int_0^t \psi_2(s)\Phi_1(s, \mu)ds + \int_0^t \psi_2(s)[D_1(s) + I]ds\lambda + \int_0^t \psi_2(s)F_1(s)ds, \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Обозначим через $Q_*(T)$ матрицу, соответствующую левой части системы уравнений (21) и запишем ее в виде

$$Q_*(T)\lambda = -C\Phi_1(T, \mu) + d - CF_1(T), \quad \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{23}$$

Лемма. *Пусть матрица $I - G_1(\varphi_1, T)$ обратима. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *пара* $(\mu^*(t),\lambda^*)$, *где функция* $\mu^*(t)$ *определяется из равенства*

$$\mu^*(t)=\int\limits_0^t \psi_2(s)x^*(s)ds,$$

а вектор $\lambda^*\in\mathbb{R}^n$ *является значением решения* $x^*(t)$ *задачи* (1), (2) *при* $t=0$ (*т.е.* $\lambda^*=x^*(0)$), *удовлетворяет гибридной системе* (22), (23), *состоящей из системы интегральных уравнений* (22) *и системы алгебраических уравнений* (23);

(ii) *если пара* $(\widetilde{\mu}(t),\widetilde{\lambda})$ *является решением гибридной системы* (22), (23), *а функция* $\widetilde{u}(t)$ — *решением задачи Коши* (6), (7) *для* $\lambda=\widetilde{\lambda}$, $\mu(t)=\widetilde{\mu}(t)$, *то функция* $\widetilde{x}(t)$, *определяемая равенством* $\widetilde{x}(t)=\widetilde{\lambda}+\widetilde{u}(t)$, $t\in[0,T]$, *при выполнении условия*

$$\int\limits_0^t \psi_2(s)\widetilde{x}(s)ds=\widetilde{\mu}(t),\quad t\in[0,T],$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство с небольшими изменениями аналогично доказательству [15, лемма 1, с. 1455].

3. Однозначная разрешимость задачи (1), (2). Введем обозначения

$$\alpha=\max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|,\quad \overline{\varphi}_i(T)=\int\limits_0^T\|\varphi_i(t)\|dt,\quad \overline{\psi}_i(T)=\int\limits_0^T\|\psi_i(t)\|dt,\quad i=1,2,$$

$$a_1(T)=e^{\alpha T}\overline{\varphi}_1(T)\Big\|\big[I-G_1(\varphi_1,T)\big]^{-1}\Big\|\overline{\psi}_1(T)+1,$$

$$a_2(T)=e^{\alpha T}\Big\|\big[I-G_1(\varphi_1,T)\big]^{-1}\Big\|\cdot\overline{\psi}_1(T)e^{\alpha T}T.$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) *матрица* $[I-G_1(\varphi_1,T)]\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *обратима*;

(ii) *матрица* $Q_*(T)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *обратима и имеет место неравенство*

$$\|[Q_*(T)]^{-1}\|\leqslant\gamma_*(T),$$

где $\gamma_*(T)$ — *положительная постоянная*;

(iii) *справедливо неравенство*

$$q(T)=\max\Big(\gamma_*(T)\|C\|a_1(T)e^{\alpha T}\overline{\varphi}_2(T),\ \overline{\psi}_2(T)a_1(T)e^{\alpha T}\big[\overline{\varphi}_2(T)+\overline{\varphi}_1(T)\big]+$$
$$+\overline{\psi}_2(T)\big[a_1(T)\{e^{\alpha T}-1\}+1\big]\Big)<1.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение* $x^*(t)$ *для произвольных* $f(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $d\in\mathbb{R}^n$ *и справедлива оценка*

$$\|x^*\|_1\leqslant\mathcal{N}(T)\max(\|d\|,\|f\|_1),\tag{24}$$

где

$$\mathcal{N}(T)=\bigg(\Big\{a_1(T)\Big[e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\big(\overline{\varphi}_1(T)+\overline{\varphi}_2(T)\big)\Big]+1\Big\}\times$$
$$\times\frac{1}{1-q(T)}\max\Big[\gamma_*(T)\{1+\|C\|a_2(T)\},\ \overline{\psi}_2(T)a_2(T)+e^{\alpha T}T\Big]+a_1(T)e^{\alpha T}T\bigg).\tag{25}$$

Доказательство. Пусть матрица $[I-G_1(\varphi_1,T)]\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ обратима и $f(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, $d\in\mathbb{R}^n$. Используя обратимость матрицы $Q_*(T)$, находим единственное решение гибридной системы (22), (23):

$$\lambda^*=-\big[Q_*(T)\big]^{-1}\big\{C\Phi_1(T,\mu^*)-d+CF_1(T)\big\},$$

$$\mu^*(t) = \int\limits_0^t \psi_2(s)\Phi_1(s,\mu^*)ds + \int\limits_0^t \psi_2(s)\big[D_1(s)+I\big]ds\lambda^* + \int\limits_0^t \psi_2(s)F_1(s)ds, \quad t\in[0,T].$$

где $\lambda^*\in\mathbb{R}^n$, $\mu^*(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Решая задачу Коши (6), (7) для $\lambda=\lambda^*$, $\mu(t)=\mu^*(t)$, определим функцию $u^*(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

Из обратимости матрицы $[I-G_1(\varphi_1,T)]$ следует существование единственной функции $u^*(t)$, определяемой правой частью (16) при $\lambda=\lambda^*$, $\mu(t)=\mu^*(t)$. Тогда согласно лемме функция $x^*(t)$, определяемая равенством $x^*(t)=\lambda^*+u^*(t)$ при

$$\int\limits_0^t \psi_2(s)x^*(s)ds = \mu^*(t), \quad t\in[0,T],$$

является решением задачи (1), (2). Единственность решения доказывается противного.

Докажем оценку (24). Из (11) и равенства

$$X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau = \int\limits_0^t P(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_0^t A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} P(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \\ + \int\limits_0^t A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} A(\tau_2)\int\limits_0^{\tau_2} P(\tau_3)d\tau_3d\tau_2d\tau_1 + \ldots, \quad t\in[0,T],$$

получим оценки

$$\|E(A(\cdot),T)\| = \left\|X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\right\| \leqslant e^{\alpha T}-1, \tag{26}$$

$$\|E(\varphi_1(\cdot),T)\| = \left\|X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right\| \leqslant e^{\alpha T}\int\limits_0^T \|\varphi_1(\tau)\|d\tau, \tag{27}$$

Используя (26), (27) и (14), получим следующие неравенства:

$$\|V_1(A,\varphi_1,T)\| \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(s)\|\left\{\left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\right\| + \left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)\varphi_1(\tau)d\tau\right\|\right\}ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(s)\|ds\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int\limits_0^T \|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\}, \tag{28}$$

$$\|v_1(\varphi_2\mu,T)\| \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(s)\|\cdot\left\|X(s)\int\limits_0^s X^{-1}(\tau)\varphi_2(\tau)\mu(\tau)d\tau\right\|ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\int\limits_0^T \|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau, \tag{29}$$

$$\|g_1(f,T)\| \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(\tau)\|\cdot\left\|X(\tau)\int\limits_0^\tau X^{-1}(s)f(s)ds\right\|d\tau \leqslant \int\limits_0^T \|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}\cdot T\cdot\|f\|_1. \tag{30}$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\max_{t\in[0,T]}\|D_1(t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|V_1(A,\varphi_1,T)\|+\|E(A(\cdot),T)\|+\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant \left[e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\left\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\right\}, \quad (31)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\Phi_1(t,\mu)\|\leqslant\|E(\varphi_1(\cdot),T)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|v_1(\varphi_2\mu,T)\|+\|E(\varphi_2(\cdot)\mu(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\left[e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\cdot e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau, \quad (32)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|F_1(t)\|\leqslant\|E(\varphi_1(\cdot),t)\|\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|g_1(f,T)\|+\|E(f(\cdot),T)\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\|g_1(f,T)\|+e^{\alpha T}T\|f\|_1\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1. \quad (33)$$

Используя (33), получим

$$\|d-CF_1(T)\|\leqslant\|d\|+\|C\|\cdot\|F_1(T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|d\|+\|C\|e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1\leqslant$$
$$\leqslant\left\{1+\|C\|\cdot e^{\alpha T}\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\right\}\max(\|d\|,\|f\|_1). \quad (34)$$

Для решения гибридной системы (22), (23) с помощью неравенств (31)–(34) и обратимости матрицы $Q_*(T)$ получим

$$\|\lambda^*\|\leqslant\|[Q_*(T)]^{-1}\|\cdot\|C\|\cdot\|\Phi_1(T,\mu^*)\|+\|[Q_*(T)]^{-1}\|\cdot\|d-CF_1(T)\|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_*(T)\|C\|\cdot\left[e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]\cdot e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu^*(\tau)\|d\tau+$$
$$+\gamma_*(T)\left\{1+\|C\|\cdot e^{\alpha T}\cdot\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int\limits_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\right\}\max(\|d\|,\|f\|_1), \quad (35)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|\Phi_1(s,\mu^*)\|ds+\int\limits_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|[D_1(s)+I]\|ds\|\lambda^*\|+\int\limits_0^T\|\psi_2(s)\|\cdot\|F_1(s)\|ds\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^T\|\psi_2(s)\|ds\cdot\left[e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int\limits_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\right]e^{\alpha T}\int\limits_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu^*(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_0^T \|\psi_2(s)\|ds\cdot\Bigg(\Bigg[e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds+1\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\Bigg\}+1\Bigg)\|\lambda^*\|+$$
$$+\int_0^T\|\psi_2(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\cdot\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}T\|f\|_1+e^{\alpha T}T\|f\|_1. \quad (36)$$

Тогда из (35), (36) с учетом обозначений получим

$$\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)\leqslant q(T)\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)+$$
$$+\max\Bigg[\gamma_*(T)\{1+\|C\|a_2(T)\},\int_0^T\|\psi_2(s)\|ds a_2(T)+e^{\alpha T}T\Bigg]\max(\|d\|,\|f\|_1). \quad (37)$$

Из условия $q(T)<1$ следует

$$\max\Big(\|\lambda^*\|,\max_{t\in[0,T]}\|\mu^*(t)\|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{1-q(T)}\max\Bigg[\gamma_*(T)\{1+\|C\|a_2(T)\},\int_0^T\|\psi_2(s)\|ds a_2(T)+e^{\alpha T}T\Bigg]\max(\|d\|,\|f\|_1). \quad (38)$$

Представление (16) и неравенства (28)–(30) позволяют нам получить следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]}\|u^*(t)\|\leqslant$$
$$\leqslant e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(t)\|dt\|[I-G_1(\varphi_1,T)]^{-1}\|\Bigg[\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds\Bigg\{e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(\tau)\|d\tau\Bigg\}\|\lambda\|+$$
$$+\int_0^T\|\psi_1(s)\|ds\cdot e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(\tau)\|\cdot\|\mu(\tau)\|d\tau+\int_0^T\|\psi_1(\tau)\|d\tau\cdot e^{\alpha T}\cdot T\cdot\|f\|_1\Bigg]+$$
$$+\Bigg(e^{\alpha T}-1+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_1(t)\|dt\Bigg)\|\lambda\|+e^{\alpha T}\int_0^T\|\varphi_2(t)\|\cdot\|\mu(t)\|dt+e^{\alpha T}T\cdot\|f\|_1. \quad (39)$$

Используя (38), (39) и соотношение $\|x^*\|_1\leqslant\|\lambda^*\|+\|u^*\|_1$, установим оценку (24) с константой (25). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асанова А. Т., Бакирова Э. А., Кадирбаева Ж. М.* Численное решение задачи управления для интегродифференциальных уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 2. — С. 197—215.
2. *Асанова А. Т., Иманчиев А. Е., Кадирбаева Ж. М.* О численном решении систем обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — *58*, № 4. — С. 520–529.
3. *Бакирова Э. А., Искакова Н. Б., Асанова А. Т.* Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений на основе сплайн-аппроксимации// Укр. мат. ж. — 2019. — *71*, № 9. — С. 1176–1191.
4. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 1. — С. 50–66.

5. *Джумабаев Д. С.* Новые общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений и методы решения краевых задач// Укр. мат. ж. — 2019. — *71*, № 7. — С. 884–905.
6. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
7. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
8. *Arqub O. A., Al-Smadi M.* Numerical algorithm for solving two-point, second-order periodic boundary-value problems for mixed integro-differential equations// Appl. Math. Comp — 2014. — *243*, № 4. — P. 911–922.
9. *Assanova A. T., Bakirova E. A., Kadirbayeva Zh. M., Uteshova R. E.* A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations// Comp. Appl. Math. — 2020. — *39*, № 3. — 248.
10. *Assanova A. T., Kadirbayeva Zh. M.* On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations// Comp. Appl. Math. — 2018. — *37*, № 4. — P. 4966–4976.
11. *Balci M. A., Sezer M.* Hybrid Euler–Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations// Appl. Math. Comp. — 2016. — *273*, № 1. — P. 33–41.
12. *Berenguer M. J., Gamez D., Lopez Linares A. J.* Solution of systems of integro-differential equations using numerical treatment of fixed point// J. Comp. Appl. Math. — 2017. — *315*, № 2. — P. 343–353.
13. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. — Berlin: De Gruyter, 2016.
14. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
15. *Dzhumabaev D. S.* Computational methods of solving the boundary-value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations// Math. Meth. Appl. Sci. — 2018. — *41*, № 7. — P. 1439–1462.
16. *Dzhumabaev D. S.* New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary-value problems// J. Comp. Appl. Math. — 2018. — *327*, № 1. — P. 79–108.
17. *Dzhumabaev D. S., Bakirova E. A., Mynbayeva S. T.* A method of solving a nonlinear boundary-value problem with a parameter for a loaded differential equation// Math. Meth. Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 8. — P. 1788–1802.
18. *Dzhumabaev D. S., Mynbayeva S. T.* New general solution to a nonlinear Fredholm integro-differential equation// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 4. — P. 24–33.
19. *Hale J., Lune S. M. V.* Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1993.
20. *Hesameddini E., Shahbazi M.* Solving multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type using Bernstein polynomials method// Appl. Numer. Math. — 2019. — *136*, № 1. — P. 122–138.
21. *Kheybary S., Darvishi M. T., Wazwaz A. M.* A semi-analytical approach to solve integro-differential equations// J. Comp. Appl. Math. — 2017. — *317*, № 1. — P. 17–30.
22. *Lakshmikantham V., Rao M. R. M.* Theory of Integro-Differential Equations. — London: Gordon & Breach, 1995.
23. *Parasidis I. N.* Extension and decomposition methods for differential and integro-differential equations// Eurasian Math. J. — 2019. — *10*, № 3. — P. 48–67.
24. *Parasidis I. N., Providas E., Dafopoulos V.* Loaded differential and Fredholm integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions// Прикл. мат. вопр. управл. — 2018. — № 3. — С. 31–50.
25. *Pruss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1993.
26. *Reutskiy S. Yu.* The backward substitution method for multipoint problems with linear Volterra–Fredholm integro-differential equations of the neutral type// J. Comp. Appl. Math. — 2016. — *296*, № 3. — P. 724–738.
27. *Wazwaz A. M.* Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
28. *Yuldashev T. K.* On inverse boundary-value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 1. — P. 230—239.

29. *Yuldashev T. K.* Spectral features of the solving of a Fredholm homogeneous integro-differential equation with integral conditions and reflecting deviation// Lobachevskii J. Math. — 2019. — *40*, № 12. — P. 2116—2123.
30. *Yuzbasi S.* Numerical solutions of system of linear Fredholm–Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation// Appl. Math. Comp. — 2015. — *250*, № 2. — P. 320–338.

Асанова Анар Турмаганбеткызы
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: anartasan@gmail.com

Бакирова Эльмира Айнабековна
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: bakirova1974@mail.ru

Иманчиев Аскарбек Ермекович
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан;
Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
Актюбинск, Казахстан
E-mail: imanchiev76@mail.ru

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 14–28
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-14-28

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНОГО АНАЛОГА НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2022 г. **Б. Х. ТУРМЕТОВ, Б. Ж. КАДИРКУЛОВ**

Аннотация. Работа посвящена методам решения краевой задачи Дирихле и периодической краевой задачи для одного класса нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с инволютивными отображениями аргументов. Введено понятие нелокального аналога уравнения Лапласа, обобщающее классическое уравнение Лапласа. Предложен метод построения собственных функций и собственных значений спектральной задачи с помощью разделения переменных. Исследованы вопросы полноты полученной системы собственных функций. Введено понятие дробного аналога нелокального уравнения Лапласа. Для рассматриваемого уравнения рассматриваются краевые задачи с условием Дирихле и с периодическими условиями. Обоснована корректность поставленных в данной работе задач, а также приведено доказательство существования и единственность решения краевых задач.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова—Капуто, нелокальное дифференциальное уравнение, инволюция, задача Дирихле, периодическая краевая задача, собственные функции, функция Миттаг-Леффлера, ряд Фурье.

ON THE SOLVABILITY OF SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE FRACTIONAL ANALOG OF THE NONLOCAL LAPLACE EQUATION

© 2022 **B. Kh. TURMETOV, B. Zh. KADIRKULOV**

Abstract. In this paper, we examine methods for solving the Dirichlet boundary-value problem and the periodic boundary-value problem for one class of nonlocal second-order partial differential equations with involutive argument mappings. The concept of a nonlocal analog of the Laplace equation is introduced. A method for constructing eigenfunctions and eigenvalues of the spectral problem based on separation of variables is proposed. The completeness of the system of eigenfunctions is examined. The concept of a fractional analog of the nonlocal Laplace equation is introduced. For this equation, boundary-value problems with the Dirichlet and periodic conditions are considered. The well-posedness of these problems is verified and the existence and uniqueness of the solution of boundary-value problems are proved.

Keywords and phrases: Gerasimov–Caputo fractional derivative, nonlocal differential equation, involution, Dirichlet problem, periodic boundary-value problem, eigenfunction, Mittag-Leffler function, Fourier series.

AMS Subject Classification: 34K37,35A09, 35J25

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № AP08855810).

1. Введение и постановка задачи. Понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. По классификации, приведенной в книге [10] А. М. Нахушева, к таким уравнениям относятся: нагруженные уравнения; уравнения, содержащие дробные производные искомой функции; уравнения с отклоняющимися аргументами. В состав таких уравнений входят неизвестная функция и ее производные при различных значениях аргументов. Среди нелокальных дифференциальных уравнений особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов имеет инволютивный характер. В настоящей работ вводится понятие нелокального оператора Лапласа и исследуются спектральные вопросы некоторых краевых задач. Итак, в трехмерном параллелепипеде рассматриваются вопросы однозначной разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога нелокального уравнения Лапласа.

Дифференциальные уравнения с инволюцией исследовались в работах многочисленных авторов (см., например, [1, 2, 11–14, 19, 21, 22, 24, 26]). В работе А. В. Линькова [4] для аналогов параболического, гиперболического и эллиптического уравнений с инволюцией

$$u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) - \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t>0, \quad -\pi<x<\pi,$$
$$u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t>0, \quad -\pi<x<\pi,$$
$$u_{tt}(t,x) + u_{xx}(t,x) + \varepsilon u_{xx}(t,-x) = 0, \quad t>0, \quad -\pi<x<\pi$$

исследованы краевые и начально-краевые задачи. Применение метода Фурье разделения переменных к этим задачам приводит к одномерной спектральной задаче

$$y''(x) + \varepsilon y''(x) = -\lambda y(x), \quad -\pi<x<\pi,$$

с соответствующими краевыми условиями. Собственные функции этой задачи имеют вид

$$y_{k,1}(t) = \sin kt, \quad y_{k,1}(t) = \cos(k+0{,}5)t,$$

а собственные значения —

$$\lambda_k^{(1)} = (1-\varepsilon)k, \quad \lambda_k^{(2)} = (1+\varepsilon)(k+0{,}5).$$

Нужно отметить, что собственные функции уравнения с инволюцией совпадают с собственными функциями классического уравнения Лапласа при $\varepsilon=0$, и отличие в этих задачах будет только в собственных значениях.

В настоящей работе мы рассматриваем двумерное обобщение дробного аналога эллиптического уравнения с инволюцией. В работе исследуются вопросы разрешимости краевых задач с условием Дирихле и периодическими условиями.

Переходим к постановке задачи. Пусть $0<p,\, q,\, T$ — действительные числа, $\Pi = \{x=(x_1,x_2)\in \mathbb{R}^2 : 0<x_1<p,\ 0<x_2<q\}$ — прямоугольник, $Q=(0,T)\times\Pi$. Для любой точки $x=(x_1,x_2)\in\Pi$ рассмотрим отображения

$$I_0x=(x_1,x_2), \quad I_1x=(p-x_1,x_2), \quad I_2x=(x_1,q-x_2), \quad I_3x=(p-x_1,q-x_2).$$

Очевидно, что для любого $j=\overline{0,3}$ выполняются равенства $I_j^2x=x$, т.е. отображения I_j являются инволюциями. Кроме того, справедливы также следующие равенства

$$I_1\cdot I_2 = I_2\cdot I_1 = I_3, \quad I_1\cdot I_3 = I_3\cdot I_1 = I_2, \quad I_2\cdot I_3 = I_3\cdot I_2 = I_1.$$

Пусть a_j — действительные числа, $j=\overline{0,3}$, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным x_1 и x_2. Для функции $v(x_1,x_2)\in C^2(\Pi)$ введем оператор

$$Lv(x) \equiv a_0\Delta v(I_0x) + a_1\Delta v(I_1x) + a_1\Delta v(I_2x) + a_1\Delta v(I_3x).$$

Назовем оператор L нелокальным оператором Лапласа. Если $a_0=1$, $a_j=0$, $j=1,2,3$, то L совпадает с обычным двумерным оператором Лапласа.

Рассмотрим в области Q следующее уравнение:

$$D_t^{2\alpha}u(t,x) + a_0\Delta u(t,I_0x) + a_1\Delta u(t,I_1x) + a_1\Delta u(t,I_2x) + a_1\Delta u(t,I_3x) = 0, \quad (t,x)\in Q. \tag{1}$$

Здесь $D^{2\alpha} = {}_CD^{\alpha}_{0+}\cdot{}_CD^{\alpha}_{0+}$, ${}_CD^{\alpha}_{0+}$ — производная порядка $\alpha\in(0,1]$ в смысле Герасимова—Капуто [18], a_j — действительные числа, $\Delta u(t,I_jx)$ означает $\Delta u(t,I_jx) = \Delta u(t,z)|_{z=I_jx}$, $j=\overline{0,3}$.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области Q назовём функцию $u(t,x)$ из класса $u(t,x)\in C(\overline{Q})$, $D_t^{2\alpha}u, u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}\in C(Q)$ и удовлетворяющую уравнению (1) в классическом смысле.

Если $\alpha=1$, $a_0=1$, $a_j=0$, $j=1,2,3$, то уравнение (1) совпадает с классическим уравнением Лапласа. А в случае $\alpha=1$, $a_j\neq 0$, $j=\overline{0,3}$, получаем нелокальный аналог уравнения Лапласа. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) представляет собой дробный аналог нелокального уравнения Лапласа с тремя независимыми переменными.

Рассмотрим в области Q следующие задачи.

Задача D. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее условиям

$$u(0,x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2),\quad u(T,x_1,x_2)=\psi(x_1,x_2),\quad x=(x_1,x_2)\in\overline{\Pi}, \tag{2}$$

$$u(t,0,x_2)=u(t,q,x_2)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant x_2\leqslant q, \tag{3}$$

$$u(t,x_1,0)=u(t,x_1,p)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant x_1\leqslant p. \tag{4}$$

Задача P. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее краевому условию (2) и условиям

$$u(t,0,x_2)=u(t,0,x_2),\quad u_{x_2}(t,0,x_2)=u_{x_2}(t,0,x_2),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant x_2\leqslant q,$$

$$u(t,x_1,0)=u(t,x_1,p),\quad u_{x_1}(t,x_1,0)=u_{x_1}(t,x_1,p),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant x_1\leqslant p,$$

где $\varphi(x_1,x_2)$, $\psi(x_1,x_2)$ — заданные функции.

Отметим, что свойства секвенциальных производных Герасимова—Капуто исследованы в работе [15]. В двухмерном случае аналогичные задачи со секвенциальными производными Герасимова—Капуто изучены в работах [27–29]. Кроме того, задача Дирихле и Неймана с обычными производными Герасимова—Капуто исследованы в работах [5–7]. Прямые и обратные задачи для уравнения дробного порядка в трехмерном случае изучены также в работах [16, 20, 23, 25].

2. Решение одномерной задачи дробного порядка. Пусть μ — положительное действительное число. Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения дробного порядка

$$D^{2\alpha}y(t)-\mu^2y(t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{5}$$

$$y(0)=a,\quad y(T)=b, \tag{6}$$

где a, b — действительные числа. Решением задачи (5), (6) назовём функцию $y(t)$ из класса

$$y(t)\in C[0,T],\quad D^\alpha y(t)\in C[0,T],\quad D^{2\alpha}y(t)\in C(0,T).$$

Лемма 1 (см. [27]). *Общее решение уравнения* (5) *имеет вид*

$$y(t)=C_1E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)+C_2E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha), \tag{7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

— функция Миттаг-Леффлера.

Из этой леммы легко получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение задачи* (5), (6) *существует, единственно и имеет вид*

$$y(t)=aC(\mu,t)+bS(\mu,t),$$

где

$$C(\mu,t)=\frac{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)-E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})}, \tag{8}$$

$$S(\mu,t)=\frac{t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2t^{2\alpha})}{T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})}. \tag{9}$$

Доказательство. Используя представление (7), получаем систему

$$a = y(0) = C_1E_{\alpha,1}(0) + C_2E_{\alpha,1}(0) = C_1 + C_2,$$
$$b = y(T) = C_1E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) + C_2E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha).$$

Из первого уравнения системы следует $C_2 = a - C_1$. Отсюда

$$C_1 = \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)},$$
$$C_2 = a - \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)} = \frac{aE_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - b}{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}.$$

Далее,

$$E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^k\frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}[\mu^k - (-\mu)^k]\frac{T^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\mu^{2m+1}\frac{T^{\alpha(2m+1)}}{\Gamma(\alpha(2m+1)+1)} =$$
$$= 2\mu T^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\mu^{2m}\frac{T^{2\alpha m}}{\Gamma(2\alpha m+\alpha+1)} = 2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha}).$$

Тогда решение задачи (5), (6) представляется в виде

$$y(t) = \frac{b - aE_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})}E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) + \frac{aE_{\alpha,1}(\mu T^\alpha) - b}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})}E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) =$$
$$= b\frac{E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})} + a\frac{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})} =$$
$$= a\frac{E_{\alpha,1}(\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha,1}(-\mu T^\alpha)E_{\alpha,1}(\mu t^\alpha)}{2\mu T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})} + b\frac{t^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2t^{2\alpha})}{T^\alpha E_{2\alpha,\alpha+1}(\mu^2T^{2\alpha})} =$$
$$= aC(\mu,t) + bS(\mu,t). \quad \square$$

Лемма 3 (см. [27]). *Для любого $t \in [0,T]$ имеет место оценка*

$$0 \leqslant C(\mu,t), S(\mu,t) \leqslant 1.$$

Лемма 4 (см. [17]). *Для функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $|z| \to \infty$ имеют место следующие асимптотические оценки*:

(i) если $|\arg z| \leqslant \rho\pi$, $\rho \in (\alpha/2, \min\{1,\alpha\})$, $\alpha \in (0,2)$, то

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}z^{\frac{1-\beta}{\alpha}}e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right);$$

(ii) если $\arg z = \pi$, то

$$E_{\alpha,\beta}(z) \leqslant \frac{1}{1+|z|}.$$

3. О собственных функциях и собственных значениях классических задач с условием Дирихле и периодическими условиями. В данном пункте мы приведем известные утверждения относительно собственных функций и собственных значений следующих спектральных задач.

Задача 1 (собственные функции и собственные значения задачи Дирихле). Найти функцию $v(x) \neq 0$, $x = (x_1, x_2)$ и число $\lambda \in C$, удовлетворяющие условиям

$$-\Delta v(x_1,x_2) = \mu v(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Pi, \tag{10}$$
$$v(x_1,0) = v(x_1,q) = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p, \quad v(0,x_2) = v(p,x_2) = 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q. \tag{11}$$

Задача 2 (собственные функции и собственные значения периодической краевой задачи)**.** Найти функцию $v(x,y) \neq 0$ и число $\lambda \in C$, удовлетворяющие условиям

$$
\begin{gathered}
-\Delta v(x_1,x_2) = \mu v(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in \Pi, \\
v(x_1,0) = v(x_1,q), \quad v_{x_1}(x_1,0) = v_{x_1}(x_1,q), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p, \\
v(0,x_2) = v(p,x_2), \quad v_{x_2}(0,x_2) = v_{x_2}(p,x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q.
\end{gathered}
$$

Известны следующие утверждения (см., например, [9]).

Лемма 5. *Собственные функции и собственные значения задачи 1 имеют вид*

$$
\begin{gathered}
v_{k,m}(x_1,x_2) = X_k(x_1)Y_m(x_2) \equiv \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{k\pi}{p}x_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{m\pi}{q}x_2, \quad k,m = 1,2,\ldots, \\
\mu_{k,m} = \nu_k + \sigma_m \equiv \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{q}\right)^2, \quad k,m = 1,2,\ldots
\end{gathered}
$$

Система функций $\{v_{k,m}(x_1,x_2)\}_{k,m=1}^{\infty}$ *образует полную ортонормированную систему в пространстве* $L_2(\Pi)$.

Лемма 6. *Собственные функции и собственные значения задачи 2 имеют вид*

$$
\begin{gathered}
v_{k,m,i,j}(x_1,x_2) = X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2), \quad k,m = 0,1,2,\ldots, \quad i,j = 1,2, \\
\mu_{k,m} = \nu_m + \sigma_m \equiv \left(\frac{2k\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{2m\pi}{q}\right)^2, \quad k,m = 0,1,2,\ldots,
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
X_0(x_1) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad X_{k,1}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{p}}\cos\frac{2k\pi}{p}x_1, \quad X_{k,2}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{2k\pi}{p}x_1, \quad k = 1,2,\ldots, \\
Y_0(x_2) = \frac{1}{\sqrt{q}}, \quad Y_{m,1}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\frac{2m\pi}{q}x_2, \quad Y_{m,2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{2m\pi}{q}x_2, \quad m = 1,2,\ldots
\end{gathered}
$$

Система функций $\{v_{k,m,i,j}(x_1,x_2)\}_{k,m=1}^{\infty}$, $i,j = 1,2$, *образуют полную ортонормированную систему в пространстве* $L_2(\Pi)$.

4. О собственных функциях и собственных значениях задач D и P. Рассмотрим в Π следующие спектральные задачи.

Задача 3 (собственные функции и собственные значения задачи D)**.** Найти число $\lambda \in C$ и функцию $v(x) \neq 0$, удовлетворяющие условиям

$$
-Lv(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Pi, \tag{12}
$$

$$
v(x_1,0) = v(x_1,q) = 0, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant p, \quad v(0,x_2) = v(p,x_2) = 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant q. \tag{13}
$$

Пусть $w(x)$ — собственная функция задачи (10), (11). Введем функции

$$
w_1^{\pm}(x) = \frac{w(x) \pm w(I_1x)}{2}; \quad w_2^{\pm}(x) = \frac{w(I_2x) \pm w(I_3x)}{2}
$$

и составим из них следующие комбинации:

$$
\begin{aligned}
v_1(x) &= \frac{w_1^+(x) + w_2^+(x)}{2} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{w(x) + w(I_1x)}{2} + \frac{w(I_2x) + w(I_3x)}{2}\right], \\
v_2(x) &= \frac{w_1^+(x) - w_2^+(x)}{2} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{w(x) + w(I_1x)}{2} - \frac{w(I_2x) + w(I_3x)}{2}\right], \\
v_3(x) &= \frac{w_1^-(x) + w_2^-(x)}{2} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{w(x) - w(I_1x)}{2} + \frac{w(I_2x) - w(I_3x)}{2}\right], \\
v_4(x) &= \frac{w_1^-(x) - w_2^-(x)}{2} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{w(x) - w(I_1x)}{2} - \frac{w(I_2x) - w(I_3x)}{2}\right].
\end{aligned} \tag{14}
$$

Заметим, что из условий $w(x)|_{\partial\Pi} = 0 \Rightarrow w(I_j x)|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1,2,3$, следует, что $v(I_j x)|_{\partial\Pi} = 0$, $j = 1,2,3,4$, где $\partial\Pi$ — граница области Π.

Введем следующие числа:

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \quad \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3, \quad \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \quad \varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3.$$

Легко показать, что если $w_{k,m}(x) = X_k(x_1) \cdot Y_m(x_2)$ — собственные функции задачи 1, то из (14) получаем следующую систему:

(a) $v^{(1)}_{k,m}(x) = X_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2)$, $k,m = 1,2,\ldots$;
(b) $v^{(2)}_{k,m}(x) = X_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m}(x_2)$, $k,m = 1,2,\ldots$;
(c) $v^{(3)}_{k,m}(x) = X_{2k}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2)$, $k,m = 1,2,\ldots$;
(d) $v^{(4)}_{k,m}(x) = X_{2k}(x_1) \cdot Y_{2m}(x_2)$, $k,m = 1,2,\ldots$

Теорема 1. *Пусть $a_j \in \mathbb{R}$ таковы, что $\varepsilon_j \neq 0$, $j = \overline{1,4}$, и пусть $w_{k,m}(x) = X_k(x_1) \cdot Y_m(x_2)$ — собственные функции задачи 1, а $\mu_{k,m}$ соответствующие собственные значения. Тогда функции $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $k,m = 1,2,\ldots$, $j = \overline{1,4}$, являются собственными функциями, а $\lambda^{(j)}_{k,m} = \varepsilon_j \cdot \mu_{k,m}$, $k,m = 1,2,\ldots$, соответствующими собственными значениями задачи* (12), (13).

Доказательство. Доказательство теоремы проводится непосредственным применением оператора L к функциям $v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)$, $j = \overline{1,4}$. Напомним, что

$$v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2) = X_k(x_1) \cdot Y_m(x_2), \quad X_k(x_1) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{k\pi}{p} x_1, \quad Y_m(x_2) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin \frac{m\pi}{q} x_2,$$
$$\nu_k = \left(\frac{k\pi}{p}\right)^2, \quad \sigma_m = \left(\frac{m\pi}{q}\right)^2, \quad \mu_{k,m} = \nu_k + \sigma_m,$$

а также заметим, что

$$\sin \frac{k\pi}{p}(p - x_1) = (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi}{p} x_1, \quad \sin \frac{m\pi}{q}(q - x_2) = (-1)^{m+1} \sin \frac{m\pi}{q} x_2.$$

Пусть $j = 1$. Тогда

$$v^{(1)}_{k,m}(p - x_1, x_2) = \sin \frac{(2k-1)\pi}{p}(p - x_1) \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi}{q} x_2 = X_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2),$$
$$v^{(1)}_{k,m}(x_1, q - x_2) = \sin \frac{(2k-1)\pi}{p} x_1 \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi}{q}(q - x_2) = X_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2),$$
$$v^{(1)}_{k,m}(p - x_1, q - x_2) = \sin \frac{(2k-1)\pi}{p}(p - x_1) \sin \frac{(2m-1)\pi}{q}(q - x_2) = X_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2).$$

Так как для любого постоянного λ имеет место равенство $(\sin \lambda t)'' = -\lambda^2 \sin \lambda t$, то, применяя к функции $u^{(1)}_{k,m}(x)$ оператор $-L$, имеем

$$\begin{aligned}
Lv^{(1)}_{k,m}(x) &= a_0 X''_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2) + a_0 X_{2k-1}(x_1) \cdot Y''_{2m-1}(x_2) + \\
&+ a_1 X''_{2k-1}(p - x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2) + a_1 X_{2k-1}(p - x_1) \cdot Y''_{2m-1}(x_2) + a_2 X''_{2k-1}(x_1) \cdot Y_{2m-1}(q - x_2) + \\
&+ a_2 X_{2k-1}(x_1) \cdot Y''_{2m-1}(q - x_2) + a_3 X''_{2k-1}(p - x_1) \cdot Y_{2m-1}(q - x_2) + a_3 X_{2k-1}(p - x_1) \cdot Y''_{2m-1}(q - x_2) = \\
&= X_{2k-1}(x_1)(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2)(-a_0\nu_k - a_0\sigma_m - a_1\nu_k + a_1\sigma_m - a_2\nu_k + a_2\sigma_m + a_3\nu_k + a_3\sigma_m) = \\
&= X_{2k-1}(x_1)(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2)[-a_0(\nu_k + \sigma_m) - a_1(\nu_k + \sigma_m) - a_2(\nu_k + \sigma_m) - a_3(\nu_k + \sigma_m)] = \\
&= -(\nu_k + \sigma_m)(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) X_{2k-1}(x_1)(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2) = \\
&= -\mu_{k,m} \cdot \varepsilon_1 X_{2k-1}(x_1)(x_1) \cdot Y_{2m-1}(x_2) = -\lambda^{(1)}_{k,m} v^{(1)}_{k,m}(x).
\end{aligned}$$

Таким образом, для функции $v^{(1)}_{k,m}(x)$ верно равенство

$$Lv^{(1)}_{k,m}(x) = -\lambda^{(1)}_{k,m} v^{(1)}_{k,m}(x),$$

т.е. $v_{k,m}^{(1)}(x)$ являются собственными функциями оператора $-L$, а $\lambda_{k,m}^{(1)}$ — соответствующими собственными значениями. Для остальных функций $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, $j=\overline{2,4}$, доказательство теоремы проводится аналогично. □

Следствие 1. *Система функций $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$.*

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4 (собственные функции и собственные значения периодической краевой задачи)**.** Найти функцию $v(x)\neq 0$ и число $\lambda\in C$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}-Lv(x)=\lambda v(x), \quad x\in\Pi,\\ v(x_1,0)=v(x_1,q), \quad v_{x_1}(x_1,0)=v_{x_1}(x_1,q), \quad 0\leqslant x_1\leqslant p,\\ v(0,x_2)=v(p,x_2), \quad v_{x_2}(0,x_2)=v_{x_2}(p,x_2), \quad 0\leqslant x_2\leqslant q.\end{gathered}$$

Как и в случае задачи 3, если $w_{k,m,i,j}(x)=X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2)$ $(k,m=0,1,2,\ i,j=1,2)$ — собственные функции задачи 2, то из (14) получаем следующие системы:

$$\begin{cases} v_{0,0}^{(1)}(x)=X_0(x_1)Y_0(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{pq}}, \quad u_{k,0}^{(1)}(x)=Y_0(x_2)X_{k,2}(x_1)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1;\\ v_{0,m,2}^{(1)}(x)=X_0(x_1)Y_{m,2}(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2,\\ v_{k,m}^{(1)}(x)=X_{k,2}(x_1)Y_{m,2}(x_2)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \quad k,m=1,2,\ldots,\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} v_{0,m}^{(2)}(x)=X_0(x_1)Y_{m,1}(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{p}}\sqrt{\dfrac{2}{q}}\sin\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad m=1,2,\ldots,\\ v_{k,m,2,2}^{(2)}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\cos\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\sin\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad k,m=1,2,\ldots,\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} v_{k,0}^{(3)}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_0(x_2)\equiv\dfrac{1}{\sqrt{q}}\sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin\dfrac{2k\pi}{p}x_1, \qquad k=1,2,\ldots,\\ v_{k,m}^{(3)}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_{m,2}(x_2)\equiv\sqrt{\dfrac{2}{p}}\sin\dfrac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\dfrac{2}{q}}\cos\dfrac{2m\pi}{q}x_2, \qquad k,m=1,2,\ldots,\end{cases} \tag{17}$$

$$v_{k,m}^{(4)}(x)=X_{k,1}(x_1)\cdot Y_{m,1}(x_2)\equiv\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{2k\pi}{p}x_1\cdot\sqrt{\frac{2}{q}}\sin\frac{2m\pi}{q}x_2, \quad k,m=1,2,\ldots. \tag{18}$$

Как и в случае задачи D можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $a_j\in\mathbb{R}$ таковы, что $\varepsilon_j\neq 0$, $j=\overline{1,4}$, и пусть $w_{k,m,i,j}(x)=X_{k,i}(x_1)Y_{m,j}(x_2)$ $(k,m=0,1,2,\ i,j=1,2)$ — собственные функции задачи 2, а $\mu_{k,m}$ — соответствующие собственные значения. Тогда функции $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, $k,m=1,2,\ldots$, $j=\overline{1,4}$, в (15)–(18) являются собственными функциями, а $\lambda_{k,m}^{(j)}=\varepsilon_j\cdot\mu_{k,m}$ $(k,m=1,2,\ldots)$ — соответствующими собственными значениями задачи 4.*

Следствие 2. *Система $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$.*

5. Существование и единственность решения задачи D**.** В этом разделе приведем основные утверждения относительно задачи D. Согласно теореме 2 система функций $\{v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\}_{k,m=1}^{\infty}$, $j=\overline{1,4}$, образует ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Pi)$. Тогда решение задачи D можно искать в виде разложения по системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, т.е.

$$u(t,x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}T_{k,m}^{(j)}(t)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2), \tag{19}$$

где $T_{k,m}^{(j)}$ — неизвестные функции, $k,m=1,2,\ldots,\ j=\overline{1,4}$.

Далее, функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ также разложим в ряд по системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$:

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{k,m,j}(t)\cdot v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$
$$\psi(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\psi_{k,m,j}(t)\cdot v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$

где

$$\varphi_{k,m,j}(t)=\big(\varphi(x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big),\quad \psi_{k,m,j}(t)=\big(\psi(x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big).$$

Учитывая ортогональность системы $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, из (19) получим

$$u_{k,m,j}(t)=\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)\equiv\int\limits_0^q\int\limits_0^p u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2. \tag{20}$$

Применяя к равенству (20) с двух сторон оператор $D^{2\alpha}$, с учетом уравнения (1) получаем

$$D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)=\int\limits_0^q\int\limits_0^p D^{2\alpha}u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=-\int\limits_0^q\int\limits_0^p L_xu(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$$

Далее, интегрируя по частям дважды и учитывая краевые условия (3), (13) и уравнение (12), имеем

$$D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)=-\int\limits_0^q\int\limits_0^p u(t,x_1,x_2)Lv_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_1=$$
$$=\lambda_{k,m,j}\int\limits_0^q\int\limits_0^p u(t,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\lambda_{k,m}^{(j)}u_{k,m,j}(t).$$

Кроме того, из краевых условий (2) для функций $u_{k,m,j}(t)$ получим

$$u_{k,m,j}(0)=\int\limits_0^q\int\limits_0^p u(0,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\varphi_{k,m,j},$$
$$u_{k,m,j}(T)=\int\limits_0^q\int\limits_0^p u(T,x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int\limits_0^q\int\limits_0^p \psi(x_1,x_2)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\psi_{k,m,j}.$$

Таким образом, для нахождения неизвестных функций $u_{k,m,j}(t)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases}D^{2\alpha}u_{k,m,j}(t)-\lambda_{k,m}^{(j)}u_{k,m,j}(t)=0, & t\in(0,T),\\ u_{k,m,j}(0)=\varphi_{k,m,j}, \quad u_{k,m,j}(T)=\psi_{k,m,j}.\end{cases} \tag{21}$$

Согласно лемме 2 решение этой задачи существует, единственно и имеет вид

$$u_{k,m,j}(t)=\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right), \tag{22}$$

где функции $C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)$ определяются соответственно по формулам (8), (9).

Подставляя найденные функции (22) в (20), получаем, что решение задачи (1)–(4) может быть представлено в виде

$$u(t,x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)u_{k,m,j}(x_1,x_2). \tag{23}$$

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon_j>0$, $j=\overline{1,4}$, и функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\varphi(x_1,x_2)\in C^2(\bar{\Pi}),\quad \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2),\varphi_{x_1x_2x_2}(x_1,x_2)\in C(\bar{\Pi}),$$
$$\psi(x_1,x_2)\in C^1(\bar{\Pi}),\quad \psi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\in C(\bar{\Pi}),$$
$$\varphi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0,\quad \psi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) *существует, единственно и может быть представлено в виде суммы ряда* (23).

Доказательство. Единственность. Пусть функции $u_1(t,x_1,x_2)$ и $u_2(t,x_1,x_2)$ являются решениями задачи (1)–(4). Тогда функция $u(t,x_1,x_2)=u_1(t,x_1,x_2)-u_2(t,x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (2)–(4). По условию $u(t,x_1,x_2)\in C(\bar{Q})$. Пусть $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$ — произвольные собственные функции спектральной задачи (12), (13), а $\lambda_{k,m}^{(j)}$ — соответствующие собственные значения. Рассмотрим функцию (20), т.е. $u_{k,m,j}(t)=\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)$. В этом случае для функции $u_{k,m,j}(t)$ получаем задачу (21) с однородными краевыми условиями. Тогда

$$u_{k,m,j}(t)=0\Leftrightarrow\big(u(t,x_1,x_2),v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)\big)=0.$$

Таким образом, функция $u(t,x_1,x_2)$ ортогональна системе $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$, которая является полной и образует базис в пространстве $L_2(\Pi)$. Значит, $u(t,x_1,x_2)=0$ для всех $(x_1,x_2)\in\overline{\Pi}$ и $t\in(0,T)$. Так как $u\in C(\overline{Q})$, то получим, что $u(t,x_1,x_2)\equiv 0$, $(t,x_1,x_2)\in\overline{Q}$, т.е. $u_1(t,x_1,x_2)\equiv u_2(t,x_1,x_2)$, $(t,x_1,x_2)\in\overline{Q}$.

Существование. По построению функция $u(t,x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению (1), условиям (2)–(4). Остаётся доказать правомерность этих действий. Сначала покажем, что $u(t,x_1,x_2)\in C(\overline{Q})$. В дальнейшем C будет означать произвольную постоянную, значение которой нас не интересует.

Очевидно, $|v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)|\leqslant C$, $(x_1,x_2)\in\overline{\Pi}$. Из леммы 3 также следует, что

$$0\leqslant C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right),S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\leqslant 1,\quad t\in[0,T].$$

Тогда для функции $u(t,x_1,x_2)$ из (23) получаем оценку

$$|u(t,x_1,x_2)|\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}(|\varphi_{k,m,j}|+|\psi_{k,m,j}|).$$

Исследуем сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}|\varphi_{k,m,j}|,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}|\psi_{k,m,j}|.$$

Сначала оценим коэффициенты $\varphi_{k,m,j}$. По условию теоремы $\varphi(x_1,x_2)|_{x\in\partial\Pi}=0$, т.е. выполняются условия

$$\varphi(0,x_2)=\varphi(q,x_2)=0,\quad 0\leqslant x_2\leqslant q;\quad \varphi(x_1,0)=\varphi(x_1,p)=0,\quad 0\leqslant x_1\leqslant p$$

Рассмотрим случай $j=1$. Для коэффициентов $\varphi_{k,m,1}$ имеем

$$\varphi_{k,m,1} = \int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2) v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{pq}} \int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2) \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2 =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi} \int\limits_0^q \left(\int\limits_0^p \varphi(x_1,x_2) d\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\right)\right) \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_2 =$$

$$= -\frac{p}{(2k-1)\pi}\frac{2}{\sqrt{pq}} \int\limits_0^q \left(\varphi(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\Big|_{x=0}^{x=p} - \int\limits_0^p \varphi_{x_1}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1dx_1\right)\times$$

$$\times \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_2 = \frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi}\int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi_x(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_1dx_1dx_2.$$

Далее, из условия $\varphi(0,x_2) = \varphi(p,x_2) = 0$, $0 \leqslant x_2 \leqslant q$ следует $\varphi_{x_1}(0,x_2) = \varphi_{x_1}(q,x_2) = 0$ для всех $x_2 \in [0,q]$. Тогда

$$\frac{2}{\sqrt{pq}}\frac{p}{(2k-1)\pi}\int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi_{x_1}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{pq}}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_1dx_2.$$

Таким образом, для коэффициентов $\varphi_{k,m,1}$ справедливо равенство

$$\varphi_{k,m,1} = \frac{2\sqrt{pq}}{\pi^2}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{C}{(2k-1)(2m-1)}\varphi_{k,m,1}^{1,1},$$

где использовано обозначение

$$\varphi_{k,m,1}^{1,1} = \int\limits_0^q \int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2dx_1dx_2.$$

Далее, применяя неравенство Коши—Шварца, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}| \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}|\varphi_{k,m,1}^{1,1}| =$$

$$= C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}^{1,1}|^2}.$$

Так как $\varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2) \in L_2(\Pi)$, а система функций

$$w_{k,m}(x_1,x_2) = \cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2, \quad k,m = 1,2,\ldots$$

является ортогональной в пространстве $L_2(\Pi)$, то для коэффициентов $\varphi^{1,1}_{k,m,1}$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi^{1,1}_{k,m,1}|^2 \leqslant \|\varphi_{x_1x_2}\|^2.$$

Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} < \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,1}| < \infty.$$

Аналогично оцениваем ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_{k,m,j}|, \quad j=2,3,4, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,j}|, \quad j=\overline{1,4}.$$

Например, для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}|$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2m-1)}|\psi^{1,1}_{k,m,1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(2m-1)^2}}\cdot\sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}|\psi^{1,1}_{k,m,1}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}}\cdot\|\psi_{x_1x_2}\|_{L_2(\Pi)} < \infty.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(|\varphi_{k,m,1}| + |\psi_{k,m,1}|),$$

мажорирующий функциональный ряд (23), сходится. Согласно теореме Вейерштрасса (см. [3, с. 20]) ряд (23) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{Q}$, а его сумма является непрерывной функцией в этой замкнутой области.

Далее покажем, что $u_{x_1x_1}(t,x_1,x_2) \in C(Q)$. Для этого продифференцируем дважды по x_1 функцию $u(t,x_1,x_2)$ из (23):

$$u_{x_1x_1}(t,x_1,x_2) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda^{(j)}_{k,m}},t\right) + \psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda^{(j)}_{k,m}},t\right)\right)\frac{\partial^2 v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}.$$

Введем обозначение

$$S_{k,m,j} = \left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda^{(j)}_{k,m}},t\right) + \psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda^{(j)}_{k,m}},t\right)\right)\frac{\partial^2 v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}$$

и пусть $j=1$. Так как

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}_{k,m}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = -\frac{2}{\sqrt{pq}}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\sin\frac{(2k-1)\pi}{q}x_2,$$

то для случая $j=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varphi_{k,m,1} C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right) + \psi_{k,m,1} S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right)\frac{\partial^2 v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{pq}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\left(\varphi_{k,m,1} C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right) + \psi_{k,m,1} S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right)\times$$

$$\times \sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1 \sin\frac{(2k-1)\pi}{q}x_2.$$

Если $t \geqslant \delta > 0$, то из леммы 4 следует

$$\left|C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right| \leqslant C\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}}, \quad \left|S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}, t\right)\right| \leqslant C\cdot\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right),$$

где

$$\lambda_{k,m}^{(1)} = \varepsilon_1\left[\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2\right].$$

Тогда для суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}$$

получаем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}} + \left(\frac{(2k+1)\pi}{p}\right)^2\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}|\right).$$

Таким образом, необходимо исследовать сходимость рядов

$$R_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}},$$

$$R_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\exp\left(\left(\lambda_{k,m}^{(1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}|.$$

Используя условие $\varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2) \in L_2(\Pi)$, для $|\varphi_{k,m,1}|$ имеем

$$\varphi_{k,m,1} = \frac{C\varphi_{k,m,1}^{1,1}}{(2k-1)(2m-1)} =$$

$$= \frac{C}{(2k-1)(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_2}(x_1,x_2)\cos\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{C}{(2k-1)^2(2m-1)}\int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2)\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{C\cdot\varphi_{k,m,1}^{2,1}}{(2k-1)^2(2m-1)},$$

где введено обозначение

$$\varphi_{k,m,1}^{2,1} = \int\limits_0^q\int\limits_0^p \varphi_{x_1x_1x_2}(x_1,x_2)\sin\frac{(2k-1)\pi}{p}x_1\cos\frac{(2m-1)\pi}{q}x_2 dx_1dx_2.$$

Отсюда

$$R_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 \frac{|\varphi_{k,m,1}|}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k,m}^{(1)}}(2m-1)}\left|\varphi_{k,m,1}^{2,1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\cdot(2m-1)^2}}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\varphi_{k,m,1}^{2,1}\right|^2} < \infty. \quad (24)$$

Здесь мы использовали неравенства Коши—Шварца и Бесселя, а также неравенство

$$\frac{1}{\lambda_{k,m}^{(1)}} = \frac{C}{\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2} \leqslant \frac{C}{(2k-1)^2+(2m-1)^2} \leqslant \frac{C}{(2k-1)^2}.$$

Рассмотрим второй ряд. Учитывая неравенство

$$\exp\left(a(\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{\alpha}}\right) \geqslant \exp\bigl(a\lambda_{k,m}^{(1)}\bigr) = \exp\left(a\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2\right)\cdot\exp\left(a\left(\frac{(2m-1)\pi}{q}\right)^2\right), \quad a>0$$

и далее применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, получим

$$R_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^2 \exp\left((\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{2\alpha}}(t-T)\right)|\psi_{k,m,1}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)\pi}{p}\right)^4 \exp\left((\lambda_{k,m}^{(1)})^{\frac{1}{\alpha}}(t-T)\right)}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\psi_{k,m,1}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{(2k-1)^4}{\exp\left((2k-1)^{\frac{2}{\alpha}}(T-t)\right)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\exp\left((2m-1)^{\frac{2}{\alpha}}(T-t)\right)}}\cdot\|\psi(x_1,x_2)\|_{L_2(\Pi)} < \infty. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,1}(x_1,x_2)$$

сходится абсолютно и равномерно в любой замкнутой подобласти $\overline{Q}_\delta \subset Q$, и, следовательно, его сумма принадлежит классу $C(Q)$. Аналогично доказывается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m,j}(x_1,x_2), \quad j=2,3,4.$$

Следовательно, $u_{x_1x_1}(t,x,y)\in C(Q)$. Таким же образом доказывается, что функция $u_{x_1x_2}(t,x_1,x_2)$ принадлежить классу $C(Q)$. Далее, так как $u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2} \in C(Q)$, то $\Delta u \in C(Q)$. Отсюда $L_x u(t,x_1,x_2)\in C(Q)$ и в силу равенства $D_t^{2\alpha}u(t,x_1,x_2) = -L_x u(t,x_1,x_2)$ получаем, что функция $D_t^{2\alpha}u(t,x,y)$ также принадлежит классу $C(Q)$. □

6. Существование и единственность решения задачи P. В этом разделе приведем основное утверждение относительно задачи P.

Теорема 4. *Пусть функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\varphi(x,y)\in C^2\left(\overline{\Pi}\right), \quad \varphi_{xxy}(x,y),\varphi_{xyy}(x,y)\in C(\bar{\Pi}), \quad \psi\in C^1(\overline{\Omega}_{x_1,x_2}), \psi_{x_1x_2}\in C(\overline{\Omega}_{x_1,x_2}),$$
$$\varphi(0,y)=\varphi(p,y), \quad \varphi'(0,y)=\varphi'(p,y), \quad \psi(x,0)=\psi(x,q),$$
$$\psi'(x,0)=\psi'(x,q), \quad 0\leqslant x\leqslant p, \quad 0\leqslant y\leqslant q.$$

Тогда решение задачи P существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}\left(\varphi_{k,m,j}C\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)+\psi_{k,m,j}S\left(\sqrt{\lambda_{k,m}^{(j)}},t\right)\right)v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2),$$

где $\varphi_{k,m,j}$, $\psi_{k,m,j}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ соответственно, $v_{k,m}^{(j)}(x_1,x_2)$ определяются из (15)–(18)*, а $\lambda_{k,m}^{(j)}$ имеют вид*

$$\lambda_{k,m}^{(j)}=\varepsilon_j\cdot\mu_{k,m}\equiv\varepsilon_j\cdot\left[\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{2m\pi}{q}\right)^2\right],\quad k,m=0,1,2,\ldots,\quad j=\overline{1,4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 8. — С. 1126–1128.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 12. — С. 2233–2246.
3. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. — М.: Физматлит, 2009.
4. *Линьков А. В.* Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением// Вестн. Самар. ун-та. — 1999. — *12*, № 2. — С. 60–66.
5. *Масаева О. Х.* Единственность решения задачи Дирихле для многомерного уравнения в частных производных дробного порядка// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 4 (24). — С. 50–53.
6. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщённого уравнения Лапласа с дробной производной// Челяб. физ.-мат. ж. — 2017. — *2*, № 3. — С. 312–322.
7. *Масаева О. Х.* Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа// Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — № 3 (23). — С. 83–90.
8. *Масаева О. Х.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто// Диффер. уравн. — 2012. — *48*, № 3. — С. 442–446.
9. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
10. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
11. *Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M.* Initial-boundary-value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation// Math. Model. Nat. Phenom. — 2019. — *14*, № 3. — P. 1–15.
12. *Ashyralyev A., Sarsenbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution// Num. Funct. Anal. Optim. — 2017. — *38*, № 10. — P. 1295–1304.
13. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equation with involution// Electron. J. Differ. Equations. — 2015. — 284.
14. *Cabada A., Tojo F. A. F.* On linear differential equations and systems with reflection// Appl. Math. Comput. — 2017. — *305*. — P. 84–102.
15. *Cascaval R. C., Eckstein E. C., Frota C. L., Goldstein J. A.* Fractional telegraph equations// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *276*, № 1. — P. 145–159.
16. *Dulce M., Getmanenko A.* On the relationship between the inhomogeneous wave and Helmholtz equations in a fractional setting// Abstr. Appl. Anal. — 2019. — 1483764.
17. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics, and Applications. — New York–Dordrecht–London: Springer-Verlag, 2014.
18. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
19. *Kirane M., Al-Salti N.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation// J. Nonlin. Sci. Appl. — 2016. — *9*. — P. 1243–1251.
20. *Kirane M., Malik S. A., Al-Gwaiz M.* An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Math. Meth. Appl. Sci. — 2012. — *36*, № 9. — P. 1056–1069.

21. *Kirane M., Samet B., Torebek B. T.* Determination of an unknown source term temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data// Electron. J. Differ. Equations. — 2017. — 257.
22. *Kopzhassarova A., Sarsenbi A.* Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — 576843.
23. *Malik S. A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Comput. Math. Appl. — 2017. — *73*, № 12. — P. 2548–2560.
24. *Przeworska-Rolewicz D.* Some boundary-value problems with transformed argument// Comment. Math. Helvet. — 1974. — *17*. — P. 451–457.
25. *Tokmagambetov N., Torebek B. T.* Well-posed problems for the fractional Laplace equation with integral boundary conditions// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — 90.
26. *Torebek B. T., Tapdigoglu R.* Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — *40*. — P. 6468–6479.
27. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation// New York J. Math. — 2014. — *20*. — P. 1237–1251.
28. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*. — 020070.
29. *Turmetov B. Kh., Torebek B. T., Ontuganova Sh.* Some problems for fractional analogue of Laplace equation// Int. J. Pure Appl. Math. — 2014. — *94*, № 4. — P. 525–532.

Турметов Батир Худайбергенович
Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан
E-mail: `turmetovbh@mail.ru`

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `kadirkulovbj@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 29–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-29-40

УДК 517, 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. II. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются четырехмерные многообразия. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к соответствующим многообразиям. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем с переменной диссипацией на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям. Первая часть работы: Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — Т. 210. — С. 77–95.

Ключевые слова: динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS. II. POTENTIAL FORCE FIELDS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds. The first part of the paper is: Integrable homogeneous dynamical systems with dissipation on the tangent bundles of four-dimensional manifolds. I. Equations of geodesic lines// Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory. — 2022. — V. 210. — P. 77–95.

Keywords and phrases: dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00016).

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [70]. Ссылки вида (1.m.n) и «предложение 1.n» относятся к первой части работы.

2. Уравнения движения на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле

2.1. Приведенная система. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в виде (1.4.1) (случай I). Уравнения (1.3.4) примут вид (1.4.3), а уравнения геодезических (1.2.1) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.4.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.4.1), (1.4.3) на многообразии $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (более общие утверждения см. в [2, 7, 16, 19]).

В общем случае кинематические соотношения (1.4.1) (с шестью «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 40 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Теперь несколько модифицируем систему (1.4.4), (1.4.5). При этом получим систему *консервативную.* А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (2.1.1) (в отличие от системы (1.4.4)). В данном случае вводится (внешнее) силовое поле в проекциях на оси $\dot z_1, \ldots, \dot z_4$ соответственно:

$$\tilde F(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha) = \big(0, 0, 0, F(\alpha)\big)^T.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_4, \\ \dot z_4 = F(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_3 = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_3 z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_2 = \left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \\ \qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - \\ \qquad - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \qquad \dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Система (2.1.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

2.2. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай I.

Предложение 2.1. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.4.7), *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида:*

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad V(\alpha) = 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(a)da. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.2.1) в силу системы (2.1.1) дает

$$\begin{gathered}
2F(\alpha)z_4 + 2\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha} + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right] z_3^2 z_4 + \\
+ 2\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right] z_2^2 z_4 + \\
+ 2\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha} + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right] z_1^2 z_4 - \\
- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
- 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
- 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} - \\
- 2F(\alpha)z_4 \equiv 0,
\end{gathered}$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.4.7). □

Предложение 2.2. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.14).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.14) в силу системы (2.1.1) при условиях предложения 1.3 дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha).$$ □

Предложение 2.3. *Если выполнены условия предложения* 1.4, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.17).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.17) в силу системы (2.1.1) при условиях предложения 1.4 дает

$$\begin{gathered}
\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\} z_4\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Psi_1(\beta_1) - \\
- \left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\} z_3 f(\alpha)\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\Phi_0(\alpha).
\end{gathered}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1).$$ □

Предложение 2.4. *Если выполнены условия предложения* 1.5, *то система* (2.1.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.4.19).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.4.19) в силу системы (2.1.1) при рассматриваемых условиях дает

$$
\begin{aligned}
z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\
+z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\\
+z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].
\end{aligned}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),
$$

$$
\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2). \qquad \square
$$

Замечание 2.1. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.4.7), а также условия (1.4.13), (1.4.16), (1.4.18), то выполнены равенства

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)=\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha), && \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta)=\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1),\\
&\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta_1), && \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta)=\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\\
&\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta_1,\beta_2), && \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)=\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta_1,\beta_2),
\end{aligned}
$$

а значит, в системе (2.1.1) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$
\begin{cases}
\dot\alpha=-z_4,\\
\dot z_4=F(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha)z_3^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\\
\qquad +f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta_1)z_2^2-\\
\qquad -\frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{1}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3-\\
\qquad -\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3-\\
\qquad -f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1=z_3f_1(\alpha),\qquad \dot\beta_2=z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases}
\tag{2.2.2}
$$

$$
\dot\beta_3=z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{2.2.3}
$$

Предложение 2.5. *Если выполнены условия предложений* 2.2—2.4, *то система* (2.2.2), (2.2.3) *имеет первый интеграл вида* (1.4.22), *где, после взятия интеграла* (1.4.22), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.4.17), (1.4.19) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.2—2.4, то система (2.2.2), (2.2.3) обладает тремя первыми интегралами (1.4.14), (1.4.17) и (1.4.19). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.4.17) и (1.4.19) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{2.2.4}$$

Угол β_3 будем искать из уравнения

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2}h(\beta_2),$$

полученного из системы (2.2.2), (2.2.3). Используя в этом уравнении равенство (2.2.4), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.1—2.5 является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия предложений* 2.1—2.4, *то система* (2.2.2), (2.2.3) *обладает полным набором* (*пятью*) *независимых первых интегралов вида* (2.2.1), (1.4.14), (1.4.17), (1.4.19), (1.4.22).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не семи первых интегралов, будет доказан ниже.

2.3. Приведенная система. Случай II. Рассмотрим кинематические соотношения в виде (1.5.1) (случай II). Уравнения (1.3.4) примут вид (1.5.3), а уравнения геодезических (1.2.1) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.5.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.5.1), (1.5.3) на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

В общем случае кинематические соотношения (1.5.1) (с семью «произвольными» функциями $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$) не могут, вообще говоря, обеспечить существование необходимого количества первых интегралов, поскольку в уравнениях геодезических содержатся, вообще говоря, до 40 коэффициентов аффинной связности Γ^i_{jk}.

Модифицируя систему (1.5.4), (1.5.5), получим систему *консервативную*. Именно, введем гладкое (внешнее) силовое поле, имеющее следующие проекции на оси $\dot z_1, \ldots, \dot z_4$:

$$\tilde F(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha)f_4(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет следующий вид:

$$\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha), \tag{2.3.1a}$$

$$\dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{2.3.1b}$$

$$\dot z_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3 z_4 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{2.3.1c}$$

$$\dot z_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2 z_4 - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) z_1^2, \tag{2.3.1d}$$

$$\dot z_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_4 - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] z_1 z_3 - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] z_1 z_2, \tag{2.3.1e}$$

$$\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha), \tag{2.3.1f}$$

$$\dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{2.3.1g}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2). \tag{2.3.1h}$$

Система (2.3.1) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot\beta_1^2 + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_1 - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot\beta_2^2 + \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_2 - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot\beta_3^2 = 0, \\ \ddot\beta_3 - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot\beta_1\dot\beta_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot\beta_2\dot\beta_3 = 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

2.4. Первые интегралы для уравнений в потенциальном поле. Случай II.

Предложение 2.6. *Если всюду на своей области определения справедлива система дифференциальных равенств* (1.5.6), *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = z_1^2 + \ldots + z_4^2 + V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{2.4.1}$$

$$V(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^{3} V_{4-k}(\beta_k) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a)da - 2\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b)db.$$

Доказательство. Дифференцирование функции (2.4.1) в силу системы (2.3.1) дает

$$2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) + 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) + 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) + 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) + \\ - 2f_4(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_4(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_4^3 - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_3^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_4^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\ - 2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\ - 2\left[f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\left[2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)g_1(\beta_1)} - \\ - 2z_4F_4(\alpha)f_4(\alpha) - 2z_3F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - 2z_2F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - 2z_1F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \equiv 0,$$

поскольку выполнена система дифференциальных равенств (1.5.6). □

Предложение 2.7. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$. *Если выполнены условия предложения* 1.8, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.13).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.13) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha).$$ □

Предложение 2.8. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 2, 3$. *Если выполнены условия предложения* 1.9, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.16).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.16) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$\begin{gathered}-f_4(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_4\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Psi_1(\beta_1)-\\ -\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_3f(\alpha)\sqrt{z_1^2+z_2^2}\Phi_0(\alpha).\end{gathered}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1).$$ □

Предложение 2.9. *Пусть* $F_1(\beta_3) \equiv 0$. *Если выполнены условия предложения* 1.10, *то система* (2.3.1) *имеет гладкий первый интеграл вида* (1.5.18).

Доказательство. Дифференцирование функции (1.5.18) в силу системы (2.3.1) при рассматриваемых условиях дает

$$\begin{gathered}-f_4(\alpha)z_1z_4\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\ +z_1z_3f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\\ +z_1z_2f(\alpha)g(\beta_1)\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\left[-\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2)+\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}\right].\end{gathered}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\\ \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\quad \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2}=\left[2\Gamma_3(\beta_2)+\frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]\Psi_2(\beta_2).\end{gathered}$$ □

Замечание 2.2. Пусть $F_1(\beta_3) \equiv F_1^0 = \text{const}$. Если выполнена группа дифференциальных равенств (1.5.6), а также условия (1.5.12), (1.5.15), (1.5.17), то выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), && \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1),\\
&\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1), && \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2),\\
&\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^1(\alpha,\beta_1,\beta_2), && \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta) = \Gamma_{33}^2(\alpha,\beta_1,\beta_2),
\end{aligned}$$

а значит, в системе (2.3.1) появляется независимая подсистема седьмого порядка, состоящая из первых семи уравнений (уравнение на $\dot\beta_3$ отделяется):

$$\begin{cases}
\dot\alpha = z_4 f_4(\alpha),\\
\dot z_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha)z_3^2 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha,\beta_1)z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_3z_4 - \dfrac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha,\beta_1)z_2^2 -\\
\qquad - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2z_4 -\\
\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g_1(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_2z_3 - \dfrac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\dfrac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha,\beta_1,\beta_2)z_1^2,\\
\dot z_1 = F_1^0 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_3(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1z_4 -\\
\qquad - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \dfrac{d\ln|g_2(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]z_1z_3 - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \dfrac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right]z_1z_2,\\
\dot\beta_1 = z_3 f_1(\alpha),\\
\dot\beta_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1),
\end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$\dot\beta_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2). \tag{2.4.3}$$

Предложение 2.10. *Пусть* $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1,2,3$. *Если выполнены условия предложений* 2.7–2.9, *то система* (2.4.2), (2.4.3) *имеет первый интеграл вида* (1.5.21), *где, после взятия интеграла* (1.5.21), *вместо постоянных* C_3, C_4 *можно формально подставить левые части равенств* (1.5.16), (1.5.18) *соответственно.*

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 2.7—2.9, то система (2.4.2), (2.4.3) обладает тремя первыми интегралами (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.18). Нам понадобятся лишь два последних из них. На уровнях C_3 и C_4 первых интегралов (1.5.16) и (1.5.18) соответственно справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_4}{\sqrt{C_3^2\Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \tag{2.4.4}$$

Угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (2.4.2), (2.4.3):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2}h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (2.4.4), и получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 2.6–2.10 является следующая теорема.

Теорема 2.2. *Если выполнены условия предложений* 2.6—2.9, *то система* (2.4.2), (2.4.3) *обладает полным набором, состоящим из пяти независимых первых интегралов вида* (2.4.1), (1.5.13), (1.5.16), (1.5.18), (1.5.21).

Тот факт, что полный набор состоит из *пяти*, а не из семи первых интегралов, будет доказан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендиксон И.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями// Усп. мат. наук. — 1941. — *9*. — С. 119–211.
2. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
3. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
12. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
13. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
14. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.

23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.

49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
54. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
58. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
60. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
61. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
65. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
70. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2022. — *210*. — С. 77–95.
71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
72. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.

73. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 41–74
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-41-74

УДК 517.9; 531.01

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ С ДИССИПАЦИЕЙ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ. I. ПОРОЖДАЮЩАЯ ЗАДАЧА ИЗ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОМЕЩЕННОГО В НЕКОНСЕРВАТИВНОЕ ПОЛЕ СИЛ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Работа является первой частью обзора по вопросам интегрируемости систем с любым числом n степеней свободы. Обзор состоит из трех частей. В данной первой части подробно изложена порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил. Во второй и третьей частях, которые будут опубликованы в следующих выпусках, рассмотрены более общие динамические системы на касательных расслоениях к n-мерной сфере и к достаточно обширному классу других гладких многообразий. Доказаны теоремы о достаточных условиях интегрируемости рассматриваемых динамических систем в классе трансцендентных функций.

Ключевые слова: динамическая система с большим числом степеней свободы, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

SYSTEMS WITH DISSIPATION WITH A FINITE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM: ANALYSIS AND INTEGRABILITY. I. PRIMORDIAL PROBLEM FROM DYNAMICS OF A MULTIDIMENSIONAL RIGID BODY IN A NONCONSERVATIVE FIELD OF FORCES

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. This paper is the first part of a survey on the integrability of systems with a large number n of degrees of freedom. The review consists of three parts. In this first part, the primordial problem from the dynamics of a multidimensional rigid body placed in a nonconservative force field is described in detail. In the second and third parts, which will be published in the next issues, we consider more general dynamical systems on the tangent bundles to the n-dimensional sphere and other smooth manifolds of a sufficiently wide class. Theorems on sufficient conditions for the integrability of the considered dynamical systems in the class of transcendental functions are proved.

Keywords and phrases: dynamical system with a large number of degrees of freedom, integrability, transcendental first integral.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Введение. Данная работа является обзорной по проблеме интегрируемости неконсервативных систем с n степенями свободы (ранее были опубликованы аналогичные работы по системам с четырьмя и пятью степенями свободы). Если конфигурационное многообразие системы — гладкое n-мерное многообразие, то его касательное (кокасательное) расслоение имеет естественную структуру фазового пространства системы, увеличивая вдвое количество фазовых переменных.

Поскольку мы имеем дело с неконсервативными системами, а именно с системами, в которых в определенном роде присутствует так называемая диссипация переменного знака (в одних областях фазового пространства присутствует «собственно» диссипация — некое рассеяние полной энергии, которая не сохраняется, а в других — подкачка энергии, т.е. формально — «рассеяние» с противоположным знаком), то ни о каком полном списке даже непрерывных (автономных) первых интегралов не может идти и речи (см. [6, 22, 30, 33]).

Работа состоит из трех частей. В данной первой части проведен достаточно подробный анализ некоторой естественной порождающей задачи из динамики n-мерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил, при этом в системе присутствует также гладкое управление. При естественных предположениях данная задача редуцируется к динамическим системам на касательном расслоении $(n-1)$-мерной сферы и обладает полным набором, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечные комбинации элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции имеются существенно особые точки (см. также [5, 24, 31, 41]).

Вторая и третья части работы будут опубликованы в следующих выпусках. Во второй части будут рассмотрены более общие динамические системы на касательном расслоении к n-мерной сфере. Данные системы обобщают системы, рассмотренные ранее в первой части. При этом системы более общего вида включают также и классическую задачу о движении точки по n-мерной сфере, где при некоторых условиях также получены полные наборы, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов (см. также [50, 51, 53]).

В заключительной третьей части будут рассмотрены системы на касательных расслоениях к достаточно обширным классам гладких n-мерных многообразий; для таких систем также получены достаточные условия интегрируемости.

1. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил

1. Динамика на $\mathrm{so}(n)$ и $\mathbb{R}^n$. Конфигурационным пространством свободного n-мерного твердого тела является прямое произведение пространства $\mathbb{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) и группы его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс) (см. также [8, 9, 11])

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{SO}(n) \tag{1.1.1}$$

и имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Соответственно, размерность фазового пространства равна $n(n+1)$.

В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твердого тела (он является терзором второго ранга, см. [29,32,34]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то часть динамических уравнений движения, отвечающая алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, имеет следующий вид (см. [26, 27, 47, 48]):

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{1.1.2}$$

где

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \quad \ldots,$$

$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \qquad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbb{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\ldots,\ldots]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

(см. также [3,21]), где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$. При этом, очевидно, для любых $i, j = 1, \ldots, n$ выполнены следующие равенства:

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i. \tag{1.1.4}$$

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{so}(n), \tag{1.1.5}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{1.1.6}$$

из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{1.1.7}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это и есть координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, то введем такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Продолжая далее, получаем заключительную группу G_{n-1} координат, состоящую из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе имеют знак «+».

Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть *координатами момента* $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [54,55,57,58]). При этом нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, а именно в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстает перед нами как уравнение движения центра масс — часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству $\mathbb{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{1.1.9}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса; при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2 \mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega \mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{1.1.10}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело, E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются циклическими в следующем смысле: если обобщенная сила $\mathbf{F}$ и ее момент $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщенных скоростей (квазискоростей), и не зависят от положения тела в пространстве, то система уравнений (1.1.2), (1.1.9) на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твердого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (1.1.1) и может быть исследована самостоятельно.

2. Динамическая часть уравнений движения. Рассмотрим движение однородного динамически симметричного n-мерного твердого тела, граница которого является кусочно гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью. В частности, часть этой поверхности может иметь форму $(n-1)$-мерного диска, являющегося многомерным передним торцом, взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство, в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности (см. также [13, 19, 25]).

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (в частности, D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ — тензор (второго ранга) угловой скорости тела. При этом $Dx_1 \ldots x_n$ — такая система координат, связанная с телом, что ось динамической симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2 = \ldots = I_n$, m — главные моменты инерции тела в рассматриваемых осях и масса тела.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\}, \quad \mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.2.1}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

Примем также разложение для обобщенной силы (в частности, силы воздействия среды; считаем, что касательные силы, действующие на $(n-1)$-мерный диск, отсутствуют), действующей на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}\}, \tag{1.2.3}$$

т.е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F} = \mathbf{S}$.

Тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина, см. [28, 40, 60, 64]), которая описывает движение центра масс и соответствует *пространству* $\mathbb{R}^n$. В частности, в случае $n = 6$ данная система примет следующий вид:

$$\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha-\omega_{15}v\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_{14}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-$$
$$-\omega_{12}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\omega_9v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4-$$
$$-\omega_5v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\sigma(\omega_{15}^2+\omega_{14}^2+\omega_{12}^2+\omega_9^2+\omega_5^2)=\frac{F_1}{m}=-\frac{S}{m},\quad(1.2.4a)$$

$$\dot v\sin\alpha\cos\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1v\sin\alpha\sin\beta_1+\omega_{15}v\cos\alpha-$$
$$-\omega_{13}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_{11}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_8v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\omega_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-\sigma(\omega_{13}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{12}+\omega_8\omega_9+\omega_4\omega_5)-\sigma\dot\omega_{15}=0,\quad(1.2.4b)$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2-\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2-$$
$$-\omega_{14}v\cos\alpha+\omega_{13}v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_{10}v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+$$
$$+\omega_7v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4-\omega_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-$$
$$-\sigma(\omega_{13}\omega_{15}-\omega_{10}\omega_{12}-\omega_7\omega_9-\omega_3\omega_5)+\sigma\dot\omega_{14}=0,\quad(1.2.4c)$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+$$
$$+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_{12}v\cos\alpha-\omega_{11}v\sin\alpha\cos\beta_1+$$
$$+\omega_{10}v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_6v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\sigma(\omega_{11}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{14}-\omega_6\omega_9-\omega_2\omega_5)-\sigma\dot\omega_{12}=0,\quad(1.2.4d)$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3\cos\beta_4-\dot\beta_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-$$
$$-\omega_9v\cos\alpha+\omega_8v\sin\alpha\cos\beta_1-\omega_7v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+$$
$$+\omega_6v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4-$$
$$-\sigma(\omega_8\omega_{15}+\omega_7\omega_{14}+\omega_6\omega_{12}-\omega_1\omega_5)+\sigma\dot\omega_9=0,\quad(1.2.4e)$$

$$\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+$$
$$+\dot\beta_1v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+\dot\beta_2v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3\sin\beta_4+$$
$$+\dot\beta_3v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3\sin\beta_4+\dot\beta_4v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\omega_5v\cos\alpha-\omega_4v\sin\alpha\cos\beta_1+\omega_3v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-$$
$$-\omega_2v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\omega_1v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3\cos\beta_4+$$
$$+\sigma(\omega_4\omega_{15}+\omega_3\omega_{14}+\omega_2\omega_{12}+\omega_1\omega_9)+\sigma\dot\omega_5=0,\quad(1.2.4f)$$

$\sigma=CD$, где внешнее поле квадратично по v (при этом можно рассмотреть более общий случай зависимости внешнего поля сил квадратичным образом и от тензора угловой скорости, но это нам пока не потребуется): $S=s(\alpha)v^2$.

Вспомогательная матрица для вычисления момента внешней силы (приложенной в точке N) имеет вид

$$\begin{pmatrix}0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN}\\ -S & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},;\quad(1.2.5)$$

тогда может быть получена *часть динамических уравнений* движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют *алгебре Ли* $\mathrm{so}(n)$. В таком случае данная система примет вид (см. также [14, 15, 35, 36]):

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_1 = 0, \tag{1.2.6a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1-1} = 0, \tag{1.2.6b}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_1} + (-1)^{n+1}(I_1 - I_2)W_{n-1}(\Omega) = (-1)^n x_{nN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6c}$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_1+1} = 0, \tag{1.2.6d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2-1} = 0, \tag{1.2.6e}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_2} + (-1)^{n}(I_1 - I_2)W_{n-2}(\Omega) = (-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6f}$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_2+1} = 0, \tag{1.2.6g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I_1 + (n-3)I_2)\dot{\omega}_{r_{n-2}-1} = 0, \tag{1.2.6h}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-2}} + (I_1 - I_2)W_2(\Omega) = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \tag{1.2.6i}$$

$$(n-2)I_2\dot{\omega}_{r_{n-1}} + (I_2 - I_1)W_1(\Omega) = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2; \tag{1.2.6j}$$

при этом $r_{n-2} + 1 = r_{n-1}$, а функции $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1, \ldots, \omega_f$, $f = n(n-1)/2$, тензора Ω, причем

$$W_t(\Omega)\Big|_{\omega_{k_1} = \ldots = \omega_{k_s} = 0} = 0, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad k_j \neq r_i, \quad j = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.2.7}$$

Поясним формулу (1.2.7). Всего компонент у тензора $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ имеется $f = n(n-1)/2$ штук. Соответственно, компонент у момента силы $M_F = (\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ столько же. Поскольку вспомогательная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.2.8}$$

$s = (n-1)(n-2)/2$ уравнений в правой части системы (1.2.6) содержат тождественный нуль. Номера этих уравнений обозначим через $k_1, \ldots, k_s$. При этом соответствующие компоненты ω_{k_j}, $j = 1, \ldots, s$, тензора Ω угловой скорости будем называть *циклическими.*

Оставшиеся номера уравнений, в которых стоят следующие величины со знаком:

$$x_{lN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad l = 2, \ldots, n,$$

обозначим через $r_1, \ldots, r_{n-1}$, поскольку

$$f - s = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1.$$

Очевидно, что $W_t(0) \equiv 0$ для любых $t = 1, \ldots, n-1$, т.е. квадратичные формы $W_t(\Omega)$ обращаются в нуль, когда все компоненты тензора Ω нулевые. Формула (1.2.7) означает, что для обращения в нуль квадратичных форм $W_t(\Omega)$, $t = 1, \ldots, n-1$, достаточно, чтобы все циклические компоненты тензора Ω были нулевые.

В частности, при $n = 6$ соответствующие уравнения примут следующий вид:

$$(\lambda_5 + \lambda_6)\dot{\omega}_1 + (\lambda_5 - \lambda_6)(\omega_5\omega_9 + \omega_4\omega_8 + \omega_3\omega_7 + \omega_2\omega_6) = 0, \tag{1.2.9a}$$

$$(\lambda_4 + \lambda_6)\dot{\omega}_2 + (\lambda_6 - \lambda_4)(-\omega_5\omega_{12} - \omega_4\omega_{11} - \omega_3\omega_{10} + \omega_1\omega_6) = 0, \tag{1.2.9b}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_6)\dot{\omega}_3 + (\lambda_3 - \lambda_6)(\omega_5\omega_{14} + \omega_4\omega_{13} - \omega_2\omega_{10} - \omega_1\omega_7) = 0, \tag{1.2.9c}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_6)\dot{\omega}_4 + (\lambda_6 - \lambda_2)(-\omega_5\omega_{15} + \omega_3\omega_{13} + \omega_2\omega_{11} + \omega_1\omega_8) = 0, \tag{1.2.9d}$$

$$(\lambda_1+\lambda_6)\dot\omega_5+(\lambda_1-\lambda_6)(-\omega_4\omega_{15}-\omega_3\omega_{14}-\omega_2\omega_{12}-\omega_1\omega_9)=x_{6N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9e)$$

$$(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_9\omega_{12}+\omega_8\omega_{11}+\omega_7\omega_{10}+\omega_1\omega_2)=0, \quad (1.2.9f)$$

$$(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_7+(\lambda_5-\lambda_3)(-\omega_9\omega_{14}-\omega_8\omega_{13}+\omega_6\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \quad (1.2.9g)$$

$$(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_9\omega_{15}-\omega_7\omega_{13}-\omega_6\omega_{11}+\omega_1\omega_4)=0, \quad (1.2.9h)$$

$$(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_9+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_8\omega_{15}+\omega_7\omega_{14}+\omega_6\omega_{12}-\omega_1\omega_5)=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9i)$$

$$(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_{10}+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_{12}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{13}+\omega_6\omega_7+\omega_2\omega_3)=0, \quad (1.2.9j)$$

$$(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_{11}+(\lambda_4-\lambda_2)(-\omega_{12}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{13}-\omega_6\omega_8-\omega_2\omega_4)=0, \quad (1.2.9k)$$

$$(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_{12}+(\lambda_4-\lambda_1)(\omega_{11}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{14}-\omega_6\omega_9-\omega_2\omega_5)=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9l)$$

$$(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_{13}+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_{14}\omega_{15}+\omega_{10}\omega_{11}+\omega_7\omega_8+\omega_3\omega_4)=0, \quad (1.2.9m)$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_{14}+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_{13}\omega_{15}-\omega_{10}\omega_{12}-\omega_7\omega_9-\omega_3\omega_5)=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \quad (1.2.9n)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{15}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_{13}\omega_{14}+\omega_{11}\omega_{12}+\omega_8\omega_9+\omega_4\omega_5)=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_4,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \quad (1.2.9o)$$

Таким образом, фазовым пространством совместной системы динамических уравнений при любом натуральном $n \geqslant 2$ порядка $n(n-1)/2$ является прямое произведение следующего n-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(n)$:

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n). \quad (1.2.10)$$

В частности, при $n=6$ фазовым пространством системы динамических уравнений (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o) 21-го порядка является прямое произведение следующего 6-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(6)$:

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^5 \times \mathrm{so}(6). \quad (1.2.11)$$

3. Следствия динамической симметрии. Сразу же заметим, что система (1.1.2) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n \quad (1.3.1)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \quad \ldots, \quad \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (1.3.2)$$

При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Будем рассматривать набор (1.3.2) первых интегралов на их нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \quad (1.3.3)$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$). В частности, система (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o) обладает первыми интегралами

$$\begin{gathered}\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_4 \equiv \omega_4^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \\ \omega_7 \equiv \omega_7^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0, \quad \omega_{11} \equiv \omega_{11}^0, \quad \omega_{13} \equiv \omega_{13}^0,\end{gathered} \quad (1.3.4)$$

которые рассматриваются на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_4^0 = \omega_6^0 = \omega_7^0 = \omega_8^0 = \omega_{10}^0 = \omega_{11}^0 = \omega_{13}^0 = 0. \quad (1.3.5)$$

Ненулевых же компонент тензора Ω (при $n=6$) осталось *пять*: $\omega_{r_1}=\omega_5$, $\omega_{r_2}=\omega_9$, $\omega_{r_3}=\omega_{12}$, $\omega_{r_4}=\omega_{14}$, $\omega_{r_5}=\omega_{15}$.

4. Более общая задача и новые квазискорости в системе. Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$ (имеющей, вообще говоря, n компонент), лежащей на прямой Dx_1 и обеспечивающей во все время движения выполнение определенного векторного равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [38, 39]), например,

$$\mathbf{V}_C\equiv\mathrm{const},\tag{1.4.1}$$

то в расматриваемой системе вместо силового поля должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T-s(\alpha)v^2\equiv 0.\tag{1.4.2}$$

Очевидно, для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=s(\alpha)v^2,\quad \mathbf{T}\equiv-\mathbf{S}.\tag{1.4.3}$$

Случай (1.4.3) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в рассматриваемой системе после некоторого преобразования.

Укажем на *достаточное условие* такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$T=T_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega)=\sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1}\tau_{i,j}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j}=$$
$$=T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2,\quad \omega_{r_0}=v.\tag{1.4.4}$$

Введем новые квазискорости, для чего преобразуем величины $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции $(n-2)$-х поворотов, описываемых углами $\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$:

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\cdots\\z_{n-1}\end{pmatrix}=T_{n-2,n-1}(-\beta_1)\circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2)\circ\ldots\circ T_{1,2}(-\beta_{n-2})\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\\omega_{r_2}\\\cdots\\\omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix},\tag{1.4.5}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k=1,\ldots,n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0\\0&0&M_{k,k+1}&0&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{1.4.6}$$

$$M_{k,k+1}=\begin{pmatrix}m_{k,k}&m_{k,k+1}\\m_{k+1,k}&m_{k+1,k+1}\end{pmatrix},\quad m_{k,k}=m_{k+1,k+1}=\cos\beta,\quad m_{k+1,k}=-m_{k,k+1}=\sin\beta.$$

В частности, при $n=6$ имеем следующее:

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\\z_5\end{pmatrix}=T_{4,5}(-\beta_1)\circ T_{3,4}(-\beta_2)\circ T_{2,3}(-\beta_3)\circ T_{1,2}(-\beta_4)\begin{pmatrix}\omega_5\\\omega_9\\\omega_{12}\\\omega_{14}\\\omega_{15}\end{pmatrix},\tag{1.4.7}$$

где

$$T_{4,5}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&0&0&\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix},\quad T_{3,4}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\cos\beta&-\sin\beta&0\\0&0&\sin\beta&\cos\beta&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$T_{2,3}(\beta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta&0&0\\0&\sin\beta&\cos\beta&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad T_{1,2}(\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta&0&0&0\\\sin\beta&\cos\beta&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда (касательно системы (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&z_1=\omega_5\cos\beta_4+\omega_9\sin\beta_4,\\
&z_2=(\omega_9\cos\beta_4-\omega_5\sin\beta_4)\cos\beta_3+\omega_{12}\sin\beta_3,\\
&z_3=[(\omega_5\sin\beta_4-\omega_9\cos\beta_4)\sin\beta_3+\omega_{12}\cos\beta_3]\cos\beta_2+\omega_{14}\sin\beta_2,\\
&z_4=[[(\omega_9\cos\beta_4-\omega_5\sin\beta_4)\sin\beta_3-\omega_{12}\cos\beta_3]\sin\beta_2+\omega_{14}\cos\beta_2]\cos\beta_1+\omega_{15}\sin\beta_1,\\
&z_5=[[(\omega_5\sin\beta_4-\omega_9\cos\beta_4)\sin\beta_3+\omega_{12}\cos\beta_3]\sin\beta_2-\omega_{14}\cos\beta_2]\sin\beta_1+\omega_{15}\cos\beta_1.
\end{aligned}\tag{1.4.8}$$

5. Редукции в системе и системы нормального вида. Динамическую часть уравнений движения (а также при наличии следящей силы и условия (1.4.4)) можно переписать в виде

$$\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=\frac{T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha,\tag{1.5.1a}$$

$$\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=$$
$$=\frac{s(\alpha)v^2-T_1\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)v^2}{m}\sin\alpha,\tag{1.5.1b}$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1c}$$

$$\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1d}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^nz_1\cos\alpha-$$
$$-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0,\tag{1.5.1e}$$

$$\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\tag{1.5.1f}$$

$$\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha),\tag{1.5.1g}$$

. . . .

$$\dot{\omega}_{r_{n-1}} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha). \tag{1.5.1h}$$

Здесь введены следующие функции:

$$\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2a}$$

$$\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.5.2c}$$

$$\Delta_{v,n-3}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-3} + \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2d}$$

$$\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\rangle, \tag{1.5.2e}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\rangle =$$
$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{1.5.3}$$

Здесь $\langle \ldots, \ldots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Итак, $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, ($i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{1.5.4}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ определяется в (1.2.2). Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$, $z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v$ в силу (1.4.5).

Вводя далее новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle ' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \tag{1.5.5}$$

приведем систему (1.5.1a)–(1.5.1h) к следующему виду:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.5.6a}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha)\cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) -$$
$$- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha, \tag{1.5.6b}$$

$$Z'_{n-1} = \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$
$$+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)\right\} -$$
$$- Z_{n-1} \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.5.6c}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\times$$
$$\times\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) + \sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\}-$$
$$-\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_{n-2}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6d)$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1} + Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^{s}Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\}+$$
$$+\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_{n-3}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6e)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s}Z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}+$$
$$+(-1)^n\frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2n_1^2}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - Z_1\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z), \quad (1.5.6f)$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6g)$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6h)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}\Delta_{v,n-2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z), \quad (1.5.6i)$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -\sigma n_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)+$$
$$+\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha. \quad (1.5.7)$$

Видно, что в системе (1.5.6a)–(1.5.6i) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (1.5.6b)–(1.5.6i) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$.

В частности, при выполнении условия (1.4.3) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем также зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ (сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z_1, \ldots, n_1 Z_{n-1}))$ в силу (1.4.5) и (1.5.5).

6. Замечания о распределении индексов. В правой части системы (1.5.6b)–(1.5.6i) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входят линейным образом (и всегда ровно $(n-2)$ штуки). Так, например, в уравнении (1.5.6c) (с левой частью Z'_{n-1}) функции (1.5.2) входят со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс), т.е.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2. \tag{1.6.1}$$

Далее, в уравнениях (1.5.6d)–(1.5.6f) набор функций (1.5.2) появляется по-другому. Так, например, в уравнение для Z'_{n-2} по-прежнему входит набор функций (1.5.2) с индексами (1.6.1), а в уравнение для Z'_{n-3} входит уже набор с индексами

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad n-2 \tag{1.6.2}$$

т.е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$ уже повторяется дважды. Общее распределение индексов дается таблицей 1.

Таблица 1. Общее распределение индексов набора функций (1.5.2)

Левая часть системы (1.5.6b)–(1.5.6i)	Распределение индексов s набора функций (1.5.2)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	...	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	...	$n-2$
...	...	...	...	...	...	...
Z'_1	n-2	n-2	n-2	n-2	...	$n-2$

Так, минор (1) первого порядка в левом верхнем углу таблицы 1 соответствует случаю $n=3$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях лишь функции (1.5.2) лишь при $s=1$. Там же минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (1.5.2) лишь при $s=1,2$. Минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n=5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.5.6b)–(1.5.6i) функций (1.5.2) лишь при $s=1,2,3$ и т. д. Наконец, минор порядка $n-2$ соответствует случаю произвольного натурального n (какой мы, собственно, и рассматриваем) и указывает на присутствие в динамических уравнениях (1.5.6b)–(1.5.6i) функций (1.5.2) при всех $s=1,\ldots,n-2$.

7. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

7.1. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [28, 59]), пользуясь (1.2.2), (1.5.4) динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.7.1}$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, $\ldots, \beta_{n-2}$). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входящие в систему (1.5.6a)–(1.5.6i), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n-2. \tag{1.7.2}$$

Выберем безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.7.3}$$

Будем рассматривать следующую систему порядка $2n-1$:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.7.4a}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.7.4b}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4c}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4d}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.7.4e}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.7.4f}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.7.4g}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.7.4h}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.7.4i}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.7.4j}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (1.7.4a)–(1.7.4j) может быть рассмотрена на своем фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}^1_+\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\Big\}, \quad (1.7.5)$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере. Видно, что в системе (1.7.4a)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1; \alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (1.7.4b)–(1.7.4i) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *У системы* (1.1.2), (1.1.9) *при условиях* (1.4.1) *выделяется динамическая система* (1.5.6b)–(1.5.6i) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ *к* $(n-1)$-*мерной сфере* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (1.7.1) *выделяется система* (1.7.4b)–(1.7.4j).

7.2. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.4.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.5.1a)–(1.5.1h) (при условии (1.4.3)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1} v\sin\alpha = V_C^2 \quad (1.7.6)$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.4.5)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.7.4a)–(1.7.4j) также существует аналитический интеграл, а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = v^2(1 + b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \quad (1.7.7)$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.7.7) позволяет, не решая системы (1.7.4a)–(1.7.4j), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \quad (1.7.8)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.7.4a)–(1.7.4j) существуют асимптотические предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.7.7) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.7.4a)–(1.7.4j) во всем фазовом пространстве (ср. с [1, 4, 10, 12]).

7.3. Общие замечания об интегрируемости системы. Для полного интегрирования системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до $n+1$ для интегрирования рассматриваемых систем.

7.4. Система при отсутствии внешнего силового поля. Для начала рассмотрим систему (1.7.4b)–(1.7.4j) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ так, что получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.5.3) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент

$\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.7.4c) отсутствует, а также $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$. Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{1.7.9a}$$

$$Z'_{n-1} = -\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9b}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9c}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.7.9d}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.9e}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.7.9f}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.7.9g}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.7.9h}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \tag{1.7.9i}$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.7.4a) на величину v функцию $\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Система (1.7.9a)–(1.7.9i) описывает движение твердого тела при отсутствии *внешнего* поля сил, хотя, как показано в [61–63, 65], некое внутреннее поле сил в системе присутствует, и отвечает за это как раз параметр b.

Теорема 7.2. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = C_1 = \text{const}, \tag{1.7.10a}$$

$$\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \text{const}, \tag{1.7.10b}$$

$$\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \text{const}, \tag{1.7.10c}$$

. . . .

$$\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \text{const}, \tag{1.7.10d}$$

$$\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \text{const}, \tag{1.7.10e}$$

$$\Phi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \text{const}. \tag{1.7.10f}$$

Замечание 7.1. Поскольку в первые интегралы (1.7.10a)–(1.7.10f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.9a)–(1.7.9i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Первые $n-1$ первых интегралов (1.7.10a)–(1.7.10e) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются оставшиеся $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно,

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{1.7.11}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.7.10a) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \mathrm{const}. \tag{1.7.12}$$

Последний (n-й) первый интеграл (1.7.10f) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}; \tag{1.7.13}$$

если при этом воспользоваться уровнями первых интегралов (1.7.10d), (1.7.10e) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}, \tag{1.7.14}$$

то квадратура (1.7.13) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_{n-3}. \tag{1.7.15}$$

Ее вычисление приводит к формуле

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}}, \quad C_n = \mathrm{const}, \tag{1.7.16}$$

позволяющей получить первый интеграл (1.7.10f). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\beta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\,\mathrm{tg}^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{1.7.17}$$

Перефразируем теорему 7.2 следующим образом.

Теорема 7.3. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18a}$$

$$\Psi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18b}$$

$$\Psi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18c}$$

. . . .

$$\Psi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\beta_2} = C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{1.7.18d}$$

$$\Psi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2} \sin \beta_1} = C'_{n-1} = \text{const}, \quad (1.7.18e)$$

$$\Psi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C'_n = \text{const}. \quad (1.7.18f)$$

Замечание 7.2. Поскольку в первые интегралы (1.7.18a)–(1.7.18f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.9a)–(1.7.9i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Последний (n-й) первый интеграл (1.7.18f) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 7.3 (в отличие от теоремы 7.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. Именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.7.18a)–(1.7.18f) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 7.3 преобразованный набор первых интегралов (1.7.18a)–(1.7.18f) системы (1.7.9a)–(1.7.9i) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.7.9a)–(1.7.9i) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ldots, \quad (1.7.19)$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (1.7.9a)–(1.7.9i) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \sin \alpha, \quad (1.7.20a)$$

$$w'_{n-1} = -w_{n-2}^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b w_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (1.7.20b)$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b w_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) \cos \alpha, \quad (1.7.20c)$$

$$\begin{cases} w'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \dfrac{1 + w_s^2}{w_s} \dfrac{\cos \beta_s}{\sin \beta_s}, \\ \beta'_s = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \ s = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \quad (1.7.20d)$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad (1.7.20e)$$

где

$$d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \mathcal{Z}_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (1.7.21a)$$

$$d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -\mathcal{Z}_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (1.7.21b)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (-1)^{n+1} \mathcal{Z}_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \ldots \sin \beta_{n-3}}; \quad (1.7.21c)$$

при этом

$$z_k = \mathcal{Z}_k(w_{n-1}, \dots, w_1), \quad k = 1, \dots, n-2, \tag{1.7.22}$$

— функции в силу замены (1.7.19).

Видно, что система (1.7.20a)–(1.7.20e) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.20a)–(1.7.20c) — третьего, а системы (1.7.20d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.20a)–(1.7.20e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.20a)–(1.7.20c), по одному — для систем (1.7.20d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.20e) (*т.е. всего* n).

Замечание 7.3. Выпишем первые интегралы (1.7.18a)–(1.7.18f) в переменных $w_1, \dots, w_{n-1}$ в силу (1.7.19). Получим:

$$\Theta_1(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{1.7.23a}$$

$$\Theta_2(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{1.7.23b}$$

$$\Theta_{s+2}(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2}'' = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{1.7.23c}$$

$$\Theta_n(v; w_{n-1}, \dots, w_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = C_n'' = \text{const}. \tag{1.7.23d}$$

Замечание 7.4. Поскольку в первые интегралы (1.7.23a)–(1.7.23d), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.20a)–(1.7.20e) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.7.23a), (1.7.23b) достаточны для интегрирования системы (1.7.20a)–(1.7.20c), первые интегралы (1.7.23c) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, \dots, n-3, \tag{1.7.24}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.7.20d), и, наконец, первый интеграл (1.7.23d) достаточен для «привязывания» уравнения (1.7.20e). Доказана следующая теорема.

Теорема 7.4. *Система* (1.7.9a)–(1.7.9i) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

7.5. Частичное введение внешнего силового поля. Теперь рассмотрим систему (1.7.4b)–(1.7.4j) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих $Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2$. При этом частично добавим внешнее силовое поле. Именно, его наличие характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (1.7.25b) (в отличие от системы (1.7.9a)–(1.7.9i)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{1.7.25a}$$

$$Z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.25b}$$

$$Z_{n-2}' = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{1.7.25c}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \quad (1.7.25d)$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \quad (1.7.25e)$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (1.7.25f)$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (1.7.25g)$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (1.7.25h)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \quad (1.7.25i)$$

при этом во вспомогательном уравнении (1.7.4a) на величину v функцию $\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z)$ следует выбрать в виде

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Теорема 7.5. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad (1.7.26a)$$

$$\Phi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \quad (1.7.26b)$$

$$\Phi_3(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \quad (1.7.26c)$$

. . . .

$$\Phi_{n-2}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \quad (1.7.26d)$$

$$\Phi_{n-1}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \quad (1.7.26e)$$

$$\Phi_n(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \quad (1.7.26f)$$

Замечание 7.5. Поскольку в первые интегралы (1.7.26a)–(1.7.26f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.25a)–(1.7.25i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Первый интеграл (1.7.26a) по своей структуре похож на интеграл полной энергии. Последний (n-й) первый интеграл (1.7.26f) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Перефразируем теорему 7.5 следующим образом.

Теорема 7.6. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C'_1 = \mathrm{const}, \quad (1.7.27a)$$

$$\Psi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C'_2 = \mathrm{const}, \quad (1.7.27b)$$

$$\Psi_3(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}}=\frac{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_{n-3}}=C_3'=\mathrm{const},\tag{1.7.27c}$$

. . . .

$$\Psi_{n-2}(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_3}{\Phi_4}=\frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}\sin\beta_2}=C_{n-2}'=\mathrm{const},\tag{1.7.27d}$$

$$\Psi_{n-1}(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=\frac{\Phi_2}{\Phi_3}=\frac{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\beta_1}=C_{n-1}'=\mathrm{const},\tag{1.7.27e}$$

$$\Psi_n(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=C_n'=\mathrm{const}.\tag{1.7.27f}$$

Замечание 7.6. Поскольку в первые интегралы (1.7.27a)–(1.7.27f), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.25a)–(1.7.25i) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 7.6 (в отличие от теоремы 7.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.7.27a)–(1.7.27f) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 7.6 преобразованный набор первых интегралов (1.7.27a)–(1.7.27f) системы (1.7.25a)–(1.7.25i) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.7.25a)–(1.7.25i) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.7.19) система (1.7.25a)–(1.7.25i) распадается следующим образом:

$$\alpha'=-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha,\tag{1.7.28a}$$

$$w_{n-1}'=\sin\alpha\cos\alpha-w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha,\tag{1.7.28b}$$

$$w_{n-2}'=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha,\tag{1.7.28c}$$

$$\begin{cases}w_s'=d_s(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})\dfrac{1+w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta_s'=d_s(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\ s=1,\dots,n-3,\end{cases}\tag{1.7.28d}$$

$$\beta_{n-2}'=d_{n-2}(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\tag{1.7.28e}$$

где выполнены условия (1.7.21). Видно, что система (1.7.28a)–(1.7.28e) порядка $3+2(n-3)+1=2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.28a)–(1.7.28c) — третьего, а системы (1.7.28d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.28a)–(1.7.28e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.28a)–(1.7.28c), по одному — для систем (1.7.28d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.28e) (*т.е. всего* n).

Замечание 7.7. Выпишем первые интегралы (1.7.27a)–(1.7.27f) в переменных $w_1,\dots,w_{n-1}$ в силу (1.7.19):

$$\Theta_1(v;w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=\frac{w_{n-2}^2+w_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1''=\mathrm{const},\tag{1.7.29a}$$

$$\Theta_2(v;w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})=w_{n-2}\sin\alpha=C_2''=\mathrm{const},\tag{1.7.29b}$$

$$\Theta_{s+2}(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=\frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s}=C''_{s+2}=\text{const},\quad s=1,\ldots,n-3,\tag{1.7.29c}$$

$$\Theta_n(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=C''_n=\text{const}.\tag{1.7.29d}$$

Замечание 7.8. Поскольку в первые интегралы (1.7.29a)–(1.7.29d), вообще говоря, входит величина v, то либо ее следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (1.7.8), либо вместе с системой (1.7.28a)–(1.7.28e) использовать вспомогательное уравнение (1.7.4a).

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.7.29a), (1.7.29b) достаточны для интегрирования системы (1.7.28a)–(1.7.28c), первые интегралы (1.7.29c) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s}=\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\quad s=1,\ldots,n-3,\tag{1.7.30}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (1.7.28d), и, наконец, первый интеграл (1.7.29d) достаточен для «привязывания» уравнения (1.7.28e). Доказана следующая теорема.

Теорема 7.7. *Система* (1.7.25a)–(1.7.25i) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

7.6. Полный список первых интегралов. Перейдем теперь к интегрированию системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ (без каких бы то ни было упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.7.4b)–(1.7.4j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.7.19) система (1.7.4b)–(1.7.4j) распадается следующим образом:

$$\alpha'=-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha,\tag{1.7.31a}$$

$$w'_{n-1}=\sin\alpha\cos\alpha-w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha,\tag{1.7.31b}$$

$$w'_{n-2}=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha,\tag{1.7.31c}$$

$$\begin{cases}w'_s=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\dfrac{1+w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta'_s=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\ s=1,\ldots,n-3,\end{cases}\tag{1.7.31d}$$

$$\beta'_{n-2}=d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\tag{1.7.31e}$$

где выполнены условия (1.7.21). Видно, что система (1.7.31a)–(1.7.31e) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.7.31a)–(1.7.31c) — третьего, а системы (1.7.31d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.7.31a)–(1.7.31e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.7.31a)–(1.7.31c), по одному — для систем (1.7.31d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.31e) (*т.е. всего* n).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases}\dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha+bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha-w_{n-2}^2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha},\\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\alpha}=\dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha+w_{n-2}w_{n-1}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha}.\end{cases}\tag{1.7.32}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.7.32) в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{n-1}}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - w_{n-2}^2/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)}, \\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\tau} = \dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-2}^2)}. \end{cases} \tag{1.7.33}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{1.7.34}$$

приводим систему (1.7.33) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \end{cases} \tag{1.7.35}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}. \end{cases} \tag{1.7.36}$$

Поставим в соотвествие системе второго порядка (1.7.36) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{1.7.37}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.7.38}$$

Итак, уравнение (1.7.37) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.7.39}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{1.7.40}$$

Замечание 7.9. При $b = 0$ первый интеграл (1.7.40) системы (1.7.31a)–(1.7.31c) совпадает с первым интегралом (1.7.29a) системы (1.7.28a)–(1.7.28c), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (1.7.40), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (1.7.31a)–(1.7.31c) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (1.7.40) являются первыми интегралами системы (1.7.28a)–(1.7.28c)).

Далее найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.7.39) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{1.7.41}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.7.42}$$

и фазовое пространство системы (1.7.31a)–(1.7.31c) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.7.41). Таким образом, в силу соотношения (1.7.39) первое уравнение системы (1.7.36) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{1.7.43}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}; \tag{1.7.44}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.7.42), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{1.7.45}$$

Уравнение (1.7.45) (при учете (1.7.44)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{1.7.46}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.7.46) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.7.46), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C\big[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1\big] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \quad C = \text{const}. \tag{1.7.47}$$

Замечание 7.10. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.7.40).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{1.7.48}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.7.40), (1.7.48) независимой системы третьего порядка (1.7.31a)–(1.7.31c). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.7.31d) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.7.31e).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.7.29c), (1.7.29d), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.7.49}$$

$$\Theta_n(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C''_n = \text{const}; \tag{1.7.50}$$

при этом в левую часть равенства (1.7.50) вместо C_{n-2}, C_{n-1} можно подставить интегралы (1.7.49) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 7.8. *Система* (1.7.31a)–(1.7.31e) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (1.7.40), (1.7.48), (1.7.49), (1.7.50).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений при условии (1.7.1) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.4.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.7.6), циклические первые интегралы вида (1.3.2), (1.3.3), первый интеграл вида (1.7.40), также имеется первый интеграл (1.7.48), который может быть найден из уравнения (1.7.46), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.7.49), (1.7.50).

Теорема 7.9. *Система динамических уравнений (в случае $n = 6$ это система* (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) *при условиях* (1.4.1), (1.7.1), (1.3.2), (1.3.3) *обладает* $1 + (n-1)(n-2)/2 + n = (n^2 - n + 4)/2$ *инвариантными соотношениями (полным набором), n из которых являются, вообще говоря, трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

8. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.

8.1. Введение зависимости от тензора угловой скорости и приведенная система. Продолжаем изучать динамику n-мерного твердого тела в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих внешних сил от тензора угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения внешней силы на тело (в частности, на $(n-1)$-мерный диск, задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку даже само данное введение априори не очевидно (см. [44, 46]).

Итак, примем зависимость $x = Q + R$, где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}; \tag{1.8.1}$$

например, в случае $n = 6$ тензор Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{15} & \omega_{14} & -\omega_{12} & \omega_9 & -\omega_5 \\ \omega_{15} & 0 & -\omega_{13} & \omega_{11} & -\omega_8 & \omega_4 \\ -\omega_{14} & \omega_{13} & 0 & -\omega_{10} & \omega_7 & -\omega_3 \\ \omega_{12} & -\omega_{11} & \omega_{10} & 0 & -\omega_6 & \omega_2 \\ -\omega_9 & \omega_8 & -\omega_7 & \omega_6 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_5 & -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Omega \in \mathrm{so}(n)$ — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры.

Применительно к нашей задаче можно считать, что $x_{1N} \equiv 0$; при этом

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v},\ x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \ldots, x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}, \tag{1.8.2}$$

где $h_2 = \ldots = h_n$ в силу динамической симметрии (что, в принципе, нам сейчас не требуется). Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря, ненулевые компоненты тензора угловой скорости Ω.

8.2. Приведенная система. Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина (см. [28, 73]), пользуясь (1.5.4), имеем:

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.8.3}$$

а динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{1.8.4}$$

убеждающем нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \ldots, n-1$, входящие в систему (1.5.6b)–(1.5.6i), примут следующий вид:

$$\begin{gathered}
\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = A \sin\alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\
\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v} z_{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = (-1)^{n+1}\frac{h_1}{v} z_1.
\end{gathered} \tag{1.8.5}$$

Тогда благодаря условиям (1.4.1), (1.8.4) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (1.5.6a)–(1.5.6i)) примет вид аналитической системы:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{1.8.6a}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{1.8.6b}$$

$$\begin{aligned}
Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\
- bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-1}^2 \sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-1}\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{1.8.6c}$$

$$\begin{aligned}
Z'_{n-2} = (1+bH_1) Z_{n-2} Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\
- bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-2} Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-2}\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{1.8.6d}$$

$$\begin{aligned}
Z'_{n-3} = (1+bH_1) Z_{n-3} Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\
- (1+bH_1) Z_{n-3} Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
+ bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-3} Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-3}\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{1.8.6e}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}
Z'_1 = (1+bH_1) Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1} Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right) - \\
\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_1\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{1.8.6f}$$

$$\beta'_1 = (1+bH_1) Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.8.6g}$$

$$\beta'_2 = -(1+bH_1) Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.8.6h}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n (1+bH_1) Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.8.6i}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} (1+bH_1) Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.8.6j}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha;$$

при этом выбираем, как и выше, безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{1.8.7}$$

Итак, система (1.8.6a)–(1.8.6j) может быть рассмотрена на своем фазовом $2(n-1)+1$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi,\ \ldots,\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\Big\}, \tag{1.8.8}$$

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (1.8.6a)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\ \alpha, \beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ образовалась еще одна независимая система (1.8.6b)–(1.8.6i) порядка $2n-3$ на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

Теорема 8.1. *У динамической части уравнений движения при условиях* (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) *выделяется динамическая система* (1.5.6b)–(1.5.6i) *на касательном расслоении*

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. В частности, при условии (1.7.1) *выделяется система* (1.8.6b)–(1.8.6j).

8.3. Об аналитическом первом интеграле. В силу (1.4.1) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (1.5.1a)–(1.5.1h) (при условии (1.4.3)), а именно функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) = v^2 + \sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1} v\sin\alpha = V_C^2 \tag{1.8.9}$$

постоянна на ее фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются в силу (1.4.8)).

В силу невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (1.8.6a)–(1.8.6j) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = v^2(1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{1.8.10}$$

постоянна на ее фазовых траекториях.

Равенство (1.8.10) позволяет, не решая системы (1.8.6a)–(1.8.6j), найти зависимость скорости характерной точки твердого тела (центра D $(n-1)$-мерного диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{1.8.11}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (1.8.6a)–(1.8.6j) существуют асимптотические (или притягивающие, или отталкивающие) предельные множества, то, как будет видно, равенство (1.8.10) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.8.6a)–(1.8.6j) во всем фазовом пространстве.

8.4. Полный список первых интегралов. Для полного интегрирования системы (1.8.6b)–(1.8.6j) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем. Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \dots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \dots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \quad w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \quad \ldots, \tag{1.8.12}$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}},$$

система (1.8.6b)–(1.8.6j) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{1.8.13a}$$

$$\begin{gathered} w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.8.13b}$$

$$\begin{gathered} w_{n-2}' = (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1.8.13c}$$

$$\begin{cases} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\dfrac{1 + w_s^2}{w_s}\dfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{cases} \tag{1.8.13d}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.8.13e}$$

где выполнены условия

$$d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (1 + bH_1)\mathcal{Z}_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.8.14a}$$

$$d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -(1 + bH_1)\mathcal{Z}_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.8.14b}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{gathered} d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1}(1 + bH_1)\mathcal{Z}_1(w_{n-1}, \ldots, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}; \end{gathered} \tag{1.8.14c}$$

при этом

$$z_k = \mathcal{Z}_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.8.15}$$

— функции в силу замены (1.8.12).

Видно, что система (1.8.13a)–(1.8.13e) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (1.8.13a)–(1.8.13c) — третьего, а системы (1.8.13d) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.8.13a)–(1.8.13e) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.8.13a)–(1.8.13c), по одному — для систем (1.8.13d) (всего $n-3$ штуки), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.8.13e) (*т.е. всего* n).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \dfrac{R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha}, \\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \dfrac{R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha}, \end{cases} \tag{1.8.16}$$

где

$$R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = \sin\alpha\cos\alpha + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha - \\ - (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha,$$

$$R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \\ + (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha.$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1.8.16) в алгебраическом виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{n-1}}{d\tau} = \dfrac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - (1 + bH_1)\dfrac{w_{n-2}^2}{\tau} + bH_1 w_{n-1}^2\tau - H_1 w_{n-1}}{-w_{n-1} + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1 - \tau^2)}, \\ \dfrac{dw_{n-2}}{d\tau} = \dfrac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + (1 + bH_1)\dfrac{w_{n-2}w_{n-1}}{\tau} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\tau - H_1 w_{n-2}}{-w_{n-1} + b\tau(1 - \tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1 - \tau^2)}. \end{cases} \tag{1.8.17}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{1.8.18}$$

приводим систему (1.8.17) к следующему виду:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} + u_2 = \dfrac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} + u_1 = \dfrac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)} \end{cases} \tag{1.8.19}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{cases} \tau\dfrac{du_2}{d\tau} = \dfrac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}, \\ \tau\dfrac{du_1}{d\tau} = \dfrac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1 - \tau^2) - bH_1 u_2(1 - \tau^2)}. \end{cases} \tag{1.8.20}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1.8.20) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}, \tag{1.8.21}$$

которое несложно привести к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.8.22}$$

Итак, уравнение (1.8.21) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{1.8.23}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \quad (1.8.24)$$

Замечание 8.1. Рассмотрим систему (1.8.13a)–(1.8.13c) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [66, 68, 69, 71]), которая становится консервативной при $b = H_1$:

$$\alpha' = -(1+b^2)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2 w_{n-1}\cos^2\alpha, \quad (1.8.25a)$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-1}\cos\alpha, \quad (1.8.25b)$$

$$w'_{n-2} = (1+b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-2}\cos\alpha. \quad (1.8.25c)$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - 2bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \text{const}, \quad (1.8.26)$$

$$w_{n-2}\sin\alpha = C_2^* = \text{const}. \quad (1.8.27)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.8.26), (1.8.27) также является первым интегралом системы (1.8.25). Однако при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha \quad (1.8.28)$$

и (1.8.27) по отдельности не является первым интегралом системы (1.8.13a)–(1.8.13c). Однако отношение функций (1.8.28), (1.8.27) является первым интегралом системы (1.8.13a)–(1.8.13c) при любых b, H_1.

Далее найдем дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.8.23) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1+bH_1)^2}. \quad (1.8.29)$$

Параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \quad (1.8.30)$$

и фазовое пространство системы (1.8.13a)–(1.8.13c) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.8.29).

Таким образом, в силу соотношения (1.8.23) первое уравнение системы (1.8.20) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2) + u_2^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)}, \quad (1.8.31)$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\right\}, \quad (1.8.32)$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.8.30), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \quad (1.8.33)$$

Уравнение (1.8.33) (при учете (1.8.32)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1-H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \quad (1.8.34)$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т.е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (1.8.34) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.8.34), даже в частном случае

$$|b - H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1 - A_1^4}{1 + A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b + H_1)$$

имеет следующее достаточно громоздкое решение:

$$p = p_0(u_2) = C[1 - A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left| \frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1 - A_1u_2)^2} \mp C_1} \right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$
$$\times \exp \frac{2(A_1 - b)}{(1 + A_1^4)A_1(A_1u_2 - 1)}, \quad C = \text{const}. \quad (1.8.35)$$

Замечание 8.2. В выражение найденного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.8.24). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (1.8.36)$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.8.24), (1.8.36) независимой системы третьего порядка (1.8.13a)–(1.8.13c). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.8.13d) (их всего $n-3$), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.8.13e).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.7.29c), (1.7.29d), а именно,

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \quad (1.8.37)$$

$$\Theta_n(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}) = \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}; \quad (1.8.38)$$

при этом в левую часть равенства (1.8.38) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.8.37) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 8.2. *Система* (1.8.13a)–(1.8.13e) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов* (1.8.24), (1.8.36), (1.8.37), (1.8.38).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений при условии (1.8.4) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (1.4.1), соответствующая аналитическому первому интегралу (1.7.6), циклические первые интегралы вида (1.3.2), (1.3.3), первый интеграл вида (1.8.24), также имеется первый интеграл (1.8.36), который может быть найден из уравнения (1.8.34), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (1.8.37), (1.8.38).

Теорема 8.3. *Система динамических уравнений* (*в случае* $n = 6$ *это система* (1.2.4a)–(1.2.4f), (1.2.9a)–(1.2.9o)) *при условиях* (1.4.1), (1.8.4), (1.3.2), (1.3.3) *обладает* $1 + (n-1)(n-2)/2 + n = (n^2 - n + 4)/2$ *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются, вообще говоря, трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

8.5. Топологические аналогии. Имеют место следующие топологические и механические аналогии.

1. Движение свободного n-мерного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [67, 70, 74]).
2. Движение закрепленного n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил) при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [60, 64]).
3. Вращение n-мерного твердого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости от тензора угловой скорости (см. также [52, 56]).

О более общих топологических аналогиях см. также [2, 15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Архимедовы равномерные структуры// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 46–51.
2. *Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В.* Многообразия непрерывных структур// Совр. мат. Фундам. напр. — 2007. — *23.* — С. 71–86.
3. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
4. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
7. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5.* — С. 37–41.
11. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76.* — С. 22–39.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
15. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
16. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
17. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
18. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100.* — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.

21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
28. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
30. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
31. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
32. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
33. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
34. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
35. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
36. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
37. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
38. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
39. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
40. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
41. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
42. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
43. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
45. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.

47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
48. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
49. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
50. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
51. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
52. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
53. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
57. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
63. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
64. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
67. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
70. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.

71. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
72. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
73. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
74. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 75–82
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-75-82

УДК 517.9; 531.01

СТРУКТУРА ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе обсуждается обобщенное понятие неисправности, а также понятие окрестности опорной неисправности. Вводится понятие обобщенного диагностического пространства, рассматривается его математическая структура, формализующая непрерывность процессов в диагностическом пространстве, показано, что в этом пространстве рассматриваемые опорные неисправности и соответствующие им дифференциальные уравнения невырождены. Рассматривается обобщенная задача дифференциальной (топологической) диагностики.

Ключевые слова: классификация неисправностей, окрестность неисправности, диагностическое пространство, задача дифференциальной диагностики.

STRUCTURE OF THE DIAGNOSTIC SPACE IN PROBLEMS OF DIFFERENTIAL DIAGNOSTICS

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we discuss the generalized concepts of a malfunction and a neighborhood of a reference malfunction. We introduce the concept of a generalized diagnostic space and examine its mathematical structure, which formalizes the continuity of processes in the diagnostic space. We show that in the diagnostic space, reference malfunctions and the corresponding differential equations are nondegenerate. The generalized problem of differential (topological) diagnostics is considered.

Keywords and phrases: classification of malfunctions, neighborhood of a of malfunction, diagnostic space, differential diagnosis problem.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

1. Разрыв векторного поля динамической системы как обобщенная неисправность. Рассмотрим неавтономную динамическую систему, заданную достаточно гладким векторным полем $v(x,t)$ на гладком многообразии $M^n\{x\}\times\mathbb{R}^1\{t\}$, $x=(x_1,\dots,x_n)$:

$$\dot{x}=v(x,t); \tag{1}$$

при этом поле v имеет компоненты $v^1(x,t),\dots,v^n(x,t)$ в координатах x, t.

Определение 1. Если в какой-либо момент времени t_0 наблюдается разрыв правой части динамической системы (1) в точке (x_0,t_0) фазового пространства, то будем говорить, что в момент времени t_0 в системе произошла (обобщенная) неисправность.

Конечно, описанная только что ситуация встречалась в классических работах [1, 10, 11]. Выбранный нами стиль изложения удобен именно для описания задач дифференциальной (топологической) диагностики.

Пример. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (см. [2, 5, 34])

$$\dot{\xi} = \Phi(\delta), \quad \delta = C(t)u + \phi(\sigma), \quad \sigma = E(t)s, \tag{2}$$

описывающей систему управления движения летательных аппаратов с обратной связью (см. [6]). Неисправность, в частности, отказ датчика может быть обусловлен исчезновением сигнала, поступившего на вход датчика, или отказом прибора, формирующего оператор при входном сигнале, или и тем, и другим одновременно. Таких комбинаций много. Для простоты выделим из этого множества и математически опишем только следующие:

(i) обращение в нуль одной из составляющих ξ_i, $i = 1, 2, 3$, трехмерного вектора ξ, что означает отказ одного из трех каналов управления (2);

(ii) обращение в нуль одного из коэффициентов матриц

$$C(t) = (c_{ij}(t)), \quad E(t) = (e_{ik}(t)), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots, q, \tag{3}$$

которые формируются из вполне определенных физических параметров и удовлетворяют достаточным условиям устойчивости ключевого решения рассматриваемой системы. При этом, как обычно, система (в том числе датчик), реагирующая только на уже поступивший на вход сигнал, устойчива, если любому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченный сигнал на выходе;

(iii) обращение в нуль одной из составляющих векторов u и s в (2).

В этом примере описано разнообразие возможностей при математическом моделировании изучаемого процесса.

2. Окрестности опорных неисправностей и математическая структура диагностического пространства. Предполагаем, что для рассматриваемой управляемой динамической системы выполнены условия теоремы существования и единственности решений, теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметра на конечном промежутке времени, а также теоремы о продолжаемости решений до границы на любом компактном множестве фазового пространства.

Конечному набору (формально попарно различных) датчиков системы управления движением объекта можно поставить в соответствие конечный набор H опорных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{4}$$

из класса возможных (см. [3, 7, 9]).

В силу принятых естественных предположений все процессы в рассматриваемой управляемой динамической системе предполагаются протекающими непрерывно. Если в некоторый заранее неизвестный момент времени t_0 в рассматриваемой системе возникнет некоторая неисправность *из* определенного списка (4) или неисправность, *не предусмотренная* списком (4), но «близкая» в соответствующей метрике к какой-либо из списочной неисправности, то траектория рассматриваемой системы в последующее время при $t \geqslant t_0$ будет непрерывно продолжаемой.

Очевидно, что в силу непрерывности процессов (строго говоря, в силу выполнения перечисленных теорем), если неучтенная списком (4) непредвиденная неисправность произойдет в «близкой» к H_j области, то траектории рассматриваемой системы с этими неисправностями будут мало отличимы.

Итак, мы имеем так называемое множество опорных неисправностей, при этом каждая имеющаяся опорная неисправность изолирована, в силу конечного их числа l. Введем понятие окрестности опорной неисправности.

Определение 2. Окрестностью O_j (областью влияния) опорной неисправности H_j (с фиксированным номером j) из (4) назовем множество таких точек фазового пространства, что если в точке окрестности O_j, включая точку H_j, произойдет не предусмотренная списком (4) неисправность, развивающаяся по заранее неизвестному закону, то фазовые траектории рассматриваемой системы с этой неисправностью и с неисправностью H_j из (4) будут «мало» отличаться, и она будет распознаваться как одна из опорных неисправностей (4).

Близость точек фазового пространства в каждом конкретном случае может определяться по-разному, в том числе и в топологии евклидова фазового пространства рассматриваемой управляемой динамической системы.

Неисправность, не предусмотренная списком (4), но «близкая» к списочной неисправности H_j из окрестности O_j, т.е. такая, при возникновении которой траектории системы будут «мало» отличаться от траекторий системы со списочной неисправностью H_j, будет распознаваться алгоритмом, решающим задачу обнаружения неисправности, как списочная неисправность H_j. Если же не предусмотренная списком (4) неисправность произойдет в области пересечения окрестностей O_j, она может быть обнаружена как одна из списочных неисправностей, окрестности которых образуют область пересечения.

Последнее не должно считаться проблемой в том смысле, что интерес, главным образом, представляет обнаружение именно неисправного датчика, а не конкретной неисправности в этом датчике.

Теперь можно дать более конкретные определения окрестностей неисправностей из классификационного списка и рассмотреть простейшие математические модели этих окрестностей.

Пример. Окрестностью неисправности H_{j_0} в управляемой динамической системе назовем такое множество точек фазового пространства (распределенное во времени, т.е. умноженное в теоретико-множественном смысле на ось времени, если рассматриваемая система автономна), что любая возникшая и развивающаяся в этом множестве по неизвестному нам закону неисправность, возможно ведущая к неисправности H_{j_0}, может быть диагностирована как неисправность H_{j_0}.

Так, в частности, окрестности отказов датчиков (см. [4, 8, 15, 16]) математически можно моделировать как полосы во времени, ограниченные «сверху» и «снизу» максимально и минимально возможными значениями координат ξ_i, u_j, s_k, а для коэффициентов c_{ij} и e_{ik} — максимально возможными их значениями и осью времени t:

$$\begin{aligned} \xi_i \in [\underline{\xi_i},\ \overline{\xi_i}], &\quad \underline{\xi_i} \leqslant \overline{\xi_i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ c_{ij} \in [\underline{c_{ij}},\ \overline{c_{ij}}], &\quad u_j \in [\underline{u_j},\ \overline{u_j}], \quad j = 1, \ldots, p, \\ e_{ik} \in [\underline{e_{ik}},\ \overline{e_{ik}}], &\quad s_k \in [\underline{s_k},\ \overline{s_k}], \quad k = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{5}$$

Определенные таким образом окрестности (5) отказов (4) могут пересекаться только по прямым на оси времени t.

Замечание 1. Если рассматриваемая управляемая динамическая система неавтономна, то ее фазовым пространством является теоретико-множественное прямое произведение фазового множества «пространственных» координат на ось времени. Оно же является и интегральным пространством (т.е. пространством изображения решений). В этом пространстве окрестности неисправностей и необходимо рассматривать.

Если же рассматриваемая управляемая динамическая система автономна, то ее фазовым пространством является фазовое множество собственно самих координат. Поэтому в этом случае окрестности неисправностей необходимо рассматривать в расширенном фазовом пространстве — прямом теоретико-множественном произведении множества самих координат на ось времени.

Необходимо также заметить, что приближенные границы рассмотренных окрестностей возможных опорных неисправностей априори могут быть найдены, если это необходимо, различными численными методами. Действительно, сложность управляемых систем такова, что аналитически далеко не всегда можно получить удовлетворительный результат.

В дальнейшем окрестности O_j опорных неисправностей H_j из априорного списка (4) считаются *открытыми* множествами.

Замечание 2. Математически строго говоря, окрестности опорных неисправностей являются открытыми множествами, если одним из теоретико-множественным сомножителем является вся прямая $\mathbb{R}^1\{t\}$, а не какая-то ее часть как замкнутое множество (например, числовой луч).

Определение 3. Опорные неисправности (4) из класса возможных, окрестности которых не пересекаются или пересекаются только вдоль прямых по оси времени, назовем невырожденными.

Таким образом, конечному набору попарно различных датчиков системы управления (3) движением объекта, описываемым рассматриваемыми дифференциальными уравнениями, можно поставить в соответствие конечный набор (4) опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Если для конкретного датчика некоторые окрестности неисправностей, которыми он представлен в наборе (4), пересекаются, то это, как уже отмечалось, не следует считать проблемой. Важно уметь диагностировать датчик, в котором произошла неисправность.

Определение 4. Диагностическим пространством назовем совокупность датчиков (в математическом смысле), которой становится в соответствие набор возможных опорных неисправностей H_j с их окрестностями O_j, подвергающихся диагностированию посредством опорных невырожденных неисправностей из класса возможных.

Рассмотрим математическую структуру всего диагностического пространства следующим образом:

$$(M; O_1, O_2, \dots, O_l; A_1, A_2, A_3), \tag{6}$$

где M — множество неисправностей $H_1, \dots, H_l$ из (4) вместе с их окрестностями $O_1, \dots, O_l$. Сформулируем следующие аксиомы:

$\mathbf{A}_1$**:** $\forall H_j \in M\ \exists O_j\ (H_j \in O_j)$;
$\mathbf{A}_2$**:** $\forall O_j\ \exists H_j\ (H_j \in O_j)$;
$\mathbf{A}_3$**:** $H_j \in O_j \cap O_k \Rightarrow \exists O_\mu\ (H_j \in O_\mu \subset O_j \cap O_k \vee O_\mu \subset O_j \cup O_k)$.

Аксиома $\mathbf{A}_1$ утверждает, что окрестности O_j, являющиеся подмножествами множества M, покрывают все M. Аксиома $\mathbf{A}_2$ утверждает, что эти окрестности не пусты. Аксиома $\mathbf{A}_3$ позволяет обеспечить непрерывный процесс приближения к элементу H_j:

$$H_j = \lim_{\mu \to \infty} O_\mu \iff \forall O_\mu\ \exists \overline{M}\ (\mu > \overline{M} \Rightarrow H_j \in O_\mu),$$

а именно, каждая окрестность O_μ содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (4) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях O_j, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (4).

Далее, неисправности в системе можно, в естественном смысле, отождествить с событиями.

Если же под элементом z понимать не только событие H_j, но и непредвиденное событие (не включенное в список H возможных неисправностей (4)), которое может произойти в любой точке M и которое требуется диагностировать посредством H_j, то аксиомы математической структуры диагностического пространства (6) могут быть записаны в следующем виде:

$\mathbf{A}_1$**:** $\forall z \in M\ \exists O_i\ (z \in O_i)$, т.е. окрестности покрывают все M;
$\mathbf{A}_2$**:** $\forall O_i\ \exists z\ (z \in O_i)$, т.е. окрестности не пусты;
$\mathbf{A}_3$**:** $z \in O_i \cap O_j \Rightarrow \exists O_k\ (z \in O_k \subset O_i \cap O_j \vee O_k \subset O_i \cup O_j)$, т.е. окрестности можно измельчать и обеспечивать процесс приближения к элементу z.

Предел последовательности $\{O_k\}$ можно определить как элемент

$$z = \lim_{k \to +\infty} O_k,$$

каждая окрестность $O_j(x)$ которого содержит H_j и «близкие» к H_j непредвиденные и не содержащиеся в наборе (4) неисправности, которые, если они возникнут в окрестностях $O_j(H_j)$, надо уметь диагностировать посредством априорного набора неисправностей (4):

$$z = \lim_{k \to \infty} O_k \iff \forall O_k(z)\ \exists \overline{K}\ (k > \overline{K}\ \Rightarrow\ z \in O_k,\ H_j \subset O_k,\ j = 1, \dots, l).$$

Итак, рассмотренная только что математическая структура диагностического пространства (6) позволяет обеспечить ситуацию, при которой решение рассматриваемой системы и этой системы с неисправностями (4) в системе управления с одинаковыми начальными условиями x^0 из некоторого ограниченного пространства будут отличаться (различимы) друг от друга, а решение рассматриваемой системы с опорной неисправностью H_j из (4) и с не предусмотренной списком (4) (непредвиденной) неисправностью из окрестности O_j этой опорной неисправности с одинаковыми начальными условиями x^0 будут «близкими», т.е. «мало» отличаться друг от друга, и они могут быть диагностированы как опорные неисправности. Это во всяком случае будет справедливо для непересекающихся окрестностей O_j, $j = 1, \ldots, l$, или окрестностей, пересекающихся только вдоль прямых по оси времени.

Перейдем теперь к постановке преобразованной задачи дифференциальной (топологической) диагностики.

3. Преобразованная задача дифференциальной (топологической) диагностики. Как известно, дифференциальная диагностика алгоритмическим способом решает задачу обнаружения неисправности, возникшей в управляемой динамической системе, компьютерными средствами, исходя из знания математической модели движения системы, некоторой информации о возможных неисправностях (которые позволят построить класс опорных неисправностей) в системе и имеющейся внешней (более точно, внешнетраекторной) информации. Если при этом используются топологические свойства диагностического пространства, то рассматриваемую задачу можно назвать задачей *топологической диагностики*.

Отметим также, что задачу дифференциальной (топологической) диагностики целесообразно разрабатывать одновременно с проектированием конкретной системы. В частности, разработку задачи диагностики системы управления движением объекта целесообразно совместить с синтезом системы управления. Последнее откладывает свой отпечаток на математические свойства рассматриваемых динамических систем.

Будем рассматривать объекты, движение которых может быть описано обыкновенными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = f(x, u, t) = f_0(x, t), \tag{7}$$

где x — вектор $(n \times 1)$, характеризующий отклонение от режима, предписанного целью управления. Относительно управлений

$$u(t) = \|u_s(t)\|_{s=1}^{m}$$

будем предполагать, что они принимают значения из ограниченной и замкнутой области $U \subset \mathbb{R}^n$, т.е.

$$u(t) \in U. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что цель управления будет формализоваться следующим тождеством:

$$x(t) \equiv 0. \tag{9}$$

Действительно, если это не так, т.е. цель управления $x(t) = \varphi(t)$ не равна тождественно нулю, то сделаем замену фазовой переменной $y(t) = x(t) - \varphi(t)$ и получим искомую цель управления в виде (9).

Рассмотрим далее функцию Ляпунова $V(x, t) > 0$ (положительную почти всюду) и пару

$$\{V(x, t); u(x, t)\}, \tag{10}$$

где $u(x, t) \in U$ (см. [5, 12, 14]). Пара (10) позволяет определенным способом синтезировать [13, 17, 19] допустимое управление, удовлетворяющее (8), доставляющее асимптотическую устойчивость решению (9) нелинейной системы (7).

Пусть, кроме того, известен конечный набор (4) опорных невырожденных неисправностей

$$H = \|H_j\|_{j=1}^{l} \tag{11}$$

в системе управления объектом, движение которого описывается уравнениями (7) и, значит, известен соответствующий набор функций управления

$$u = \|u_j(x, t)\|_{j=1}^{l}. \tag{12}$$

Набор функций (12) не изменяет фазового пространства системы (7). Функции, его составляющие, отличаются той или иной неисправностью и не обязательно удовлетворяют в области параметров системы (7) условиям асимптотической устойчивости решения (9), определяемым функцией $V(x, t)$ в (10).

Конечному набору управления (12) поставим в соответствие следующий набор систем дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f_j(x,t), \quad j = 1, \ldots, l, \tag{13}$$

где $f_j(x,t)$ — соответствующие неисправностям (11) в управлениях (12) известные вектор-функции размеров $(n \times 1)$, отличные друг от друга и от «невозмущенной» функции $f_0(x,t)$ в (7).

Модели (7) и (13) принадлежат одному и тому же фазовому пространству и отличаются лишь внутренней структурой. Если в заранее неизвестный момент времени функция $f_0(x,t)$ в (7) заменяется на одну из функций $f_j(x,t)$, $j = 1, \ldots, l$, из (13), то траектория системы (7) *непрерывно* продолжается одной из траекторий системы (13) (см. также [18, 20, 23, 26]). Это может напоминать качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с нелипшицевой (где нарушается теорема единственности, или даже разрывной) правой частью (см. также [10,24,30]).

Задача дифференциальной (топологической) диагностики в некотором обобщенном виде может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны дифференциальные уравнения (7) и (13) и значение фазового вектора в начальный момент времени $x(t_0)$. Требуется построить обобщенный функционал

$$S_j = \Phi(x(t), x(t_0), f_j(x,t), \tau - \tau_0), \quad j = 0, \ldots, l,$$

решающий задачу дифференциальной диагностики, т.е. задачу однозначного распознавания возникшей в диагностическом пространстве (6) системы (7) неисправности по априорному набору (11) опорных невырожденных неисправностей. Данная задача решается минимизацией по j, т.е. осуществлением процесса обработки выходной информации в силу уравнений (7) и (13) по входной информации о состоянии системы в момент времени t_0 и последующего слежения за траекторией объекта (7) на интервале времени $[\tau_0, \tau]$, где $\tau - \tau_0$ — время диагностики (ср. с [21,25,35]).

Множество функционалов и алгоритмов, решающих поставленную задачу, непусто (см. [33,34]). При этом нам следует исходить из того, что, как и в классическом случае (см. [10, 27, 32]), задачу дифференциальной (топологической) диагностики управляемых динамических систем можно представить в виде двух самостоятельных последовательно решаемых задач: *задачи контроля* и *задачи диагностирования* (см. также [2, 22, 28]).

Задача контроля устанавливает критерий наличия неисправности в системе, а *задача диагностирования* устанавливает критерий поиска и обнаружения датчика, в котором произошла неисправность при условии, что известен априорный список возможных опорных неисправностей (ср. с [29, 31]).

В нашем (обобщенном) случае применительно к объектам, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, предложен простой подход решения задач дифференциальной диагностики управляющих систем этих объектов. Как видно, наше исследование опирается на знание законов классической механики, теории управления и основаны на сравнении действительного и возможных состояний объекта (ср. с [1, 2, 31, 32]). Эти подходы являются естественным продолжением дифференциальной теории управления движущимися объектами, работающими в идеальных условиях и в условиях воздействия шумов, и требуют более глубокого понимания и математического описания динамики отдельных узлов системы управления и ее возможных состояний (см. также [21]).

При этом важно заметить, что в действительности системы (7) и (13) являются системами с неполной информацией, и неисправности в системе (7) могут возникать и развиваться по законам, которые не предусмотрены системами (13), а начальные условия систем (7) и (13) в общем случае определены ограниченными множествами. Поэтому при решении задач контроля и диагностирования на этапе проектирования на уровне математических моделей и программ целесообразно использовать статистический метод теории вероятностей и получать, таким образом, детерминированный аналог решения задачи диагностики, который и должен реализовываться на борту реального объекта (см. также [6, 16, 33]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. В., Жермоленко В. Н.* Абсолютная устойчивость параметрически возмущаемых систем третьего порядка// Автомат. телемех. — 2009. — № 8 С. 19–39.
2. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики// Фундам. прикл. мат. — 1999. — *5*, № 3. — С. 775–790.
3. *Борисенок И. Т., Шамолин М. В.* Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 29–31.
4. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем// Автомат. телемех. — 1994. — № 3. — С. 24–36.
5. *Жуков В. П.* О редукции задачи исследования нелинейных динамических систем на устойчивость вторым методом Ляпунова// Автомат. телемех. — 2005. — № 12. — С. 51–64.
6. *Жуков В. П.* О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости// Автомат. телемех. — 2008. — № 1. — С. 30–38.
7. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем// Автомат. телемех. — 1980. — № 3. — С. 96–121.
8. *Окунев Ю. М., Парусников Н.* Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.
9. *Пархоменко П. П., Сагомонян Е. С.* Основы технической диагностики. — М.: Энергия, 1981.
10. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью// Мат. сб. — 1960. — *51 (93)*, № 1. — С. 99–128.
11. *Филиппов А. Ф.* Классификация компактных инвариантных множеств динамических систем// Изв. РАН. Сер. мат. — 1993. — *57*, № 6. — С. 130–140.
12. *Чикин М. Г.* Системы с фазовыми ограничениями// Автомат. телемех. — 1987. — № 10. — С. 38–46.
13. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.
14. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. Изд. 2-е, перераб. и дополн.. — М.: Экзамен, 2007.
15. *Шамолин М. В.* Расширенная задача дифференциальной диагностики и ее возможное решение// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 1. — С. 97–115.
16. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случае точных траекторных измерений с ошибкой// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 3. — С. 73–90.
17. *Шамолин М. В.* Диагностика неисправностей в одной системе непрямого управления// Электрон. модел. — 2009. — *31*, № 4. — С. 55–66.
18. *Шамолин М. В.* Диагностика одной системы прямого управления движением летательных аппаратов// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 1. — С. 45–52.
19. *Шамолин М. В.* Диагностика движения летательного аппарата в режиме планирующего спуска// Электрон. модел. — 2010. — *32*, № 5. — С. 31–44.
20. *Шамолин М. В.* Диагностика гиростабилизированной платформы, включенной в систему управления движением летательного аппарата// Электрон. модел. — 2011. — *33*, № 3. — С. 121–126.
21. *Шамолин М. В.* Решение задачи диагностирования в случаях траекторных измерений с ошибкой и точных траекторных измерений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *150*. — С. 88–109.
22. *Шамолин М. В., Кругова Е. П.* Задача диагностики модели гиростабилизированной платформы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *160*. — С. 137–141.
23. *Altman E., Avrachenkov K., Menache I., Miller G., Prabhu B. J., Shwartz A.* Power control in wireless cellular networks// IEEE Trans. Automat. Control. — 2009. — *54*, № 10. — P. 2328–2340.
24. *Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.* Schwarz matrix properties for continuous and discrete time systems// Int. J. Contr. — 1976. — *3*. — P. 1–16.
25. *Antoulas A. C., Sorensen D. C., Zhou Y.* On the decay rate of Hankel singular values and related issues// Syst,. Control Lett. — 2002. — *46*. — P. 323–342.
26. *Beck A., Teboulle M.* Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization// Oper. Res. Lett. — 2003. — *31*, № 3. — P. 167–175.
27. *Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A.* The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography// SIAM J. Optim. — 2001. — *12*, № 1. — P. 79–108.

28. *Ceci C., Gerardi A., Tardelli P.* Existence of optimal controls for partially observed jump processes// Acta Appl. Math. — 2002. — *74*, № 2. — P. 155–175.
29. *Choi D. H., Kim S. H., Sung D. K.* Energy-efficient maneuvering and communication of a single UAV-based relay// IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. — 2014. — *50*, № 3. — P. 2119–2326.
30. *Fleming W. H.* Optimal control of partially observable diffusions// SIAM J. Control. — 1968. — *6*, № 2. — P. 194–214.
31. *Ho D.-T., Grotli E. I., Sujit P. B., Johansen T. A., Sousa J. B.* Optimization of wireless sensor network and UAV data acquisition// J. Intel. Robot. Syst. — 2015. — *78*, № 1. — P. 159–179.
32. *Ober R. J.* Balanced parameterization of classes of linear systems *// SIAM J. Control Optim. — 1991. — *29*, № 6. — P. 1251–1287.
33. *Rieder U., Winter J.* Optimal control of Markovian jump processes with partial information and applications to a parallel queueing model// Math. Meth. Oper. Res. — 2009. — *70*. — P. 567–596.
34. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — *114*, № 1. — P. 976–1024.
35. *Tang X., Wang S.* A low hardware overhead self-diagnosis technique using Reed–Solomon codes for self-repairing chips// IEEE Trans. Comput. — 2010. — *59*, № 10. — P. 1309–1319.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 83–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-83-95

УДК 517.911

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ХИЛЬФЕРА И НЕЛИНЕЙНЫМИ МАКСИМУМАМИ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Б. Ж. КАДИРКУЛОВ**

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости начальной задачи для нелинейного дробного интегро-дифференциального уравнения типа Хильфера с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. С помощью несложного интегрального преобразования, основанного на формуле Дирихле, начальная задача сводится к нелинейному дробному интегральному уравнению типа Вольтерра с нелинейными максимумами. Доказана теорема существования и единственности решения заданной начальной задачи на рассматриваемом интервале. Доказана также устойчивость решения по параметру и по начальным данным. Приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение, уравнение с нелинейными максимумами, оператор Хильфера, однозначная разрешимость, вырожденное ядро.

ON ONE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL HILFER OPERATOR AND NONLINEAR MAXIMUMS

© 2022 **T. K. YULDASHEV, B. Zh. KADIRKULOV**

Abstract. In this paper, we discuss the unique solvability of the initial-value problem for a nonlinear fractional integro-differential equation of the Hilfer type with a degenerate kernel and nonlinear maximums. USing a simple integral transformation based on the Dirichlet formula, we reduce the initial-value problem to a nonlinear, fractional integral equation of the Volterra type with nonlinear maximums. The theorem of existence and uniqueness of a solution of the initial-value problem considered is proved. The stability of solutions with respect to the parameter and the initial data is also proved. Illustrative examples are given.

Keywords and phrases: ordinary integro-differential equation, equation with nonlinear maximums, Hilfer operator, unique solvability, degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 34K29, 45D05, 41A30

1. Постановка задачи. В начале вводной части приведем операторы, которые будут использованы в данной статье. Пусть $(t_0; b) \subset \mathbb{R}^+ \equiv [0; \infty)$ — конечный интервал на множестве положительных действительных чисел, $\alpha > 0$. Дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка α для функции $\eta(t)$ определяется следующим образом:

$$I^{\alpha}_{t_0+}\eta(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\eta(s)ds, \quad \alpha > 0, \quad t \in (t_0; b),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n-1 < \alpha \leqslant n$. Дробная производная Римана—Лиувилля порядка α для функции $\eta(t)$ задается с помощью формулы

$$D_{t_0+}^{\alpha}\eta(t) = \frac{d^n}{dt^n} I_{t_0+}^{n-\alpha}\eta(t), \quad t \in (t_0; b).$$

Дробная производная Герасимова—Капуто порядка α для функции $\eta(t)$ имеет следующий вид (см. [2, 12, 24, 26]):

$$_{*}D_{t_0+}^{\alpha}\eta(t) = I_{t_0+}^{n-\alpha}\eta^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\eta^{(n)}(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, \quad t \in (t_0; b).$$

Такие производные дробного порядка сводятся к следующим производным порядка $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$D_{t_0+}^{n}\eta(t) = {}_{*}D_{t_0+}^{n}\eta(t) = \frac{d^n}{dt^n}\eta(t), \quad t \in (t_0; b).$$

Дробная производная Хильфера порядка α $(n-1 < \alpha \leqslant n,\ n \in \mathbb{N})$ и типа β $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ определяется как композиция трех операторов:

$$D_{t_0+}^{\alpha,\beta}\eta(t) = I_{t_0+}^{\beta(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} I_{t_0+}^{(1-\beta)(n-\alpha)}\eta(t), \quad t \in (t_0; b).$$

При $\beta = 0$ этот оператор сводится к дробной производной Римана—Лиувилля $D_{t_0+}^{\alpha,0} = D_{t_0+}^{\alpha}$. Случай $\beta = 1$ соответствует дробной производной Герасимова—Капуто $D_{t_0+}^{\alpha,1} = {}_{*}D_{t_0+}^{\alpha}$. Пусть $\gamma = \alpha + \beta n - \alpha\beta$. Тогда нетрудно убедиться, что $\alpha \leqslant \gamma \leqslant n$. Поэтому для оператора удобно использовать другое обозначение $D^{\alpha,\gamma}\eta(t) = D_{t_0+}^{\alpha,\beta}\eta(t)$. Обобщенный оператор Римана—Лиувилля был введен Р. Хильфером на основе эволюции дробного времени, возникающей при переходе от микроскопического масштаба времени к макроскопическому (см. [10, 13]). Используя интегральные преобразования, он исследовал задачу Коши для обобщенного уравнения диффузии, решение которой представлено в виде функции Фокса H. Отметим работы [14, 15], в которых обобщенный оператор Римана—Лиувилля использовался для исследования диэлектрической релаксации в стеклообразующих жидкостях различного химического состава. В [16] свойства обобщенного оператора Римана—Лиувилля были исследованы в специальном функциональном пространстве, и был разработан операционный метод решения дробных дифференциальных уравнений с таким оператором. Основываясь на результатах работы [16], авторы [20] разработали операционный метод решения дробно-дифференциальных уравнений, содержащий конечную линейную комбинацию обобщенных операторов Римана—Лиувилля с различными параметрами.

Дробное исчисление играет важную роль в математическом моделировании во многих научных и технических дисциплинах (см. [27]). Например, в [22] рассматриваются задачи сплошной среды и статистической механики. В [11] анализируются математические проблемы модели эпидемии лихорадки Эболы. В [17] и [31] изучаются фракционные модели динамики туберкулезной инфекции и нового коронавируса (nCoV-2019) соответственно. Построение различных моделей теоретической физики с помощью дробного исчисления описано в [13, тт. 4, 5] и [21, 30]. Конкретная интерпретация дробной производной Хильфера, описывающей случайное движение частицы, движущейся по действительной прямой с временами шага Пуассона с конечной скоростью, дается в [29]. Подробный обзор применения дробного исчисления при решении задач прикладных наук приведен в [13, тт. 6-8] и [25]. Более подробную информацию, относящуюся к теории дробного интегро-дифференцирования, включая дробную производную Хильфера, можно найти в монографии [28]. В [32] аналитическим методом исследуется однозначная разрешимость краевой задачи для слабых нелинейных уравнений в частных производных смешанного типа с дробным оператором Хильфера. В [33] изучается разрешимость нелокальной задачи для дифференциального уравнения смешанного типа четвертого порядка с дробным оператором Хильфера. В [34] рассматривается обратная задача для интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с операторами Герасимова—Капуто дробного порядка. Интересные результаты получены также в [3, 8, 9, 18].

В настоящей статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости дробного интегро-дифференциального уравнения типа Хильфера с вырожденным ядром и нелинейными максимумами. Уравнение будем решать при заданных начальных условиях. Отметим, что дифференциальные уравнения с максимумами играют важную роль в решении задач управления продажей товаров и инвестициями производственных компаний в рыночной экономике (см. [7]). В [4] обоснована актуальность теоретического исследования дифференциальных уравнений с максимумами. Появление интегрального члена в дифференциальном уравнении имеет приложения в теории автоматического регулирования динамическими системами (см. [5, 6]).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с дробным оператором типа Хильфера на интервале $(t_0; T)$:

$$D^{\alpha,\gamma}x(t) + \omega x(t) = \int\limits_{t_0}^{T} K(t,s)x(s)ds + f\Big(t, x(t), \max\big\{x(\theta)\,\big|\,\theta \in [q_1(t);\ q_2(t)]\big\}\Big) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t\to+t_0} J_{t_0+}^{2-\gamma}x(t) = \varphi_0, \quad \lim_{t\to+t_0} \frac{d}{dt}J_{t_0+}^{2-\gamma}x(t) = \varphi_1, \quad x(t) = \varphi_2(t), \quad t \notin (t_0, T), \tag{2}$$

где $f(t,u,\vartheta) \in C(\Omega)$, $\varphi_2(t) \in C([0;t_0] \cup [T;\infty))$, $0 < \omega$ — действительный параметр, $\varphi_0, \varphi_1 = \mathrm{const}$, $\Omega \equiv [t_0;T] \times \mathbb{X} \times \mathbb{X}$, $0 \leqslant t_0$, $\mathbb{X} \subset \mathbb{R} \equiv (-\infty;\infty)$, $q_i(t) = q_i(t, x(t)) \in C([t_0;T] \times \mathbb{X})$, $i = 1, 2$, $\mathbb{X}$ — замкнутое множество. Здесь

$$D^{\alpha,\gamma} = J_{t_0+}^{\gamma-\alpha}\frac{d^2}{dt^2}J_{t_0+}^{2-\gamma}, \quad 1 < \alpha \leqslant 2, \quad \gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta, \quad \alpha < \gamma \leqslant 2.$$

В данной работе рассмотрим простой случай вырожденного ядра: $K(t,s) = t \cdot s$. Положим $0 < q_1 < q_2 < \infty$. Здесь возможны следующие три случая:

(i) $0 < q_1 < q_2 < 1$;
(ii) $0 < q_1 < 1$, $1 < q_2 < \infty$;
(iii) $1 < q_1 < q_2 < \infty$.

2. Сведение задачи к интегральному уравнению.

Лемма. *Решение интегро-дифференциального уравнения* (1) *с начальными условиями* (2) *представляется следующим образом*:

$$x(t) = \varphi_0(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(\omega(t-t_0)^\alpha) + \varphi_1(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\omega(t-t_0)^\alpha) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha)[\chi\cdot s + f(s, x(s), \max\{x(\theta) \mid \theta \in [q_1(s); q_2(s)]\})]ds, \tag{3}$$

где $E_{\alpha,\gamma}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера, имеющая вид

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}, \quad z, \alpha, \gamma \in (0;\infty)$$

(см. [13, т. 1, с. 269—295]),

$$q_i(t) = q_i(t, x(t)), \quad i = 1, 2, \qquad \chi = \int\limits_{t_0}^{T}\xi x(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Доказательство. Перепишем интегро-дифференциальное уравнение (1) в виде

$$J_{t_0+}^{\gamma-\alpha}D_{t_0+}^{\gamma}x(t) = -\omega x(t) + f(t,\cdot),$$

где $f(t,\cdot)=f\big(t,x(t),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(t);\ q_2(t)]\}\big)$. Применяя оператор $J^{\alpha}_{t_0+}$ к обеим частям этого уравнения с учетом линейности данного оператора и формулы

$$J^{\delta}_{t_0+}D^{\delta}_{t_0+}u(t)=u(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^{\delta+k-n}}{\Gamma(\delta+k+1-n)}\lim_{t\to t_0+}\frac{d^k}{dt^k}J^{n-\delta}_{t\to t_0+}u(t),\quad \delta\in(n-1;n]$$

(см. [20]), получаем, что

$$x(t)=-\omega J^{\alpha}_{t_0+}x(t)\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(t-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(t-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot).\tag{5}$$

Используя лемму из [1], представим решение уравнения (5) в виде

$$u(t)=\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(t-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(t-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot)-$$
$$-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\left[\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}(s-t_0)^{\gamma-2}+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}(s-t_0)^{\gamma-1}+J^{\alpha}_{t_0+}f(s,\cdot)\right]ds.\tag{6}$$

Перепишем представление (6) как сумму двух выражений:

$$\begin{aligned}I_1(t)=\frac{\varphi_0}{\Gamma(\gamma-1)}&\left[(t-t_0)^{\gamma-2}-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})(s-t_0)^{\gamma-2}ds\right]+\\&+\frac{\varphi_1}{\Gamma(\gamma)}\left[(t-t_0)^{\gamma-1}-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})(s-t_0)^{\gamma-1}ds\right],\end{aligned}\tag{7}$$

$$I_2(t)=J^{\alpha}_{t_0+}f(t,\cdot)-\omega\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})J^{\alpha}_{t_0+}f(s,\cdot)ds.\tag{8}$$

Применим следующие представления (см. [13, т. 1, с. 269—295]):

$$E_{\alpha,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+z\cdot E_{\alpha,\mu+\alpha}(t),\quad \alpha>0,\quad \mu>0,\tag{9}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int\limits_{0}^{z}(z-t)^{\nu-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt=z^{\beta+\nu-1}\cdot E_{\alpha,\beta+\nu}(\lambda z^{\alpha}),\quad \nu>0,\quad \beta>0.\tag{10}$$

Тогда для интеграла (7) получаем представление

$$I_1(t)=\varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+\varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha}).\tag{11}$$

Интеграл в формуле (8) легко преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})J^{\alpha}_{t_0+}f(\xi,\cdot)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})d\xi\int\limits_{t_0}^{\xi}(\xi-s)^{\alpha-1}f(s,\cdot)ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t_0}^{t}f(s,\cdot)ds\int\limits_{s}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^{\alpha})d\xi.\tag{12}$$

С учетом представления (10) второй интеграл в последнем равенстве (12) можно записать так:

$$\int_s^t (t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha)d\xi = \Gamma(\alpha)(t-\xi)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha).$$

Тогда с учетом формулы (9) представим (8) в следующем виде:

$$I_2(t) = \int_{t_0}^t (t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-\xi)^\alpha)f(\xi,\cdot)d\xi. \tag{13}$$

Подставляя представления (11) и (13) в сумму $x(t) = I_1(t) + I_2(t)$, получаем (3). □

Интегральное уравнение (3) подставим в (4):

$$\chi = \sigma_1 + \chi\cdot\sigma_2 + \\ + \int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s (s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi ds, \tag{14}$$

где

$$\sigma_1 = \int_{t_0}^T s\cdot P_1(s)ds, \quad q_i(t) = q_i(t,x(t)), \quad i=1,2,$$

$$P_1(t) = \varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(\omega\cdot(t-t_0)^\alpha) + \varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(\omega\cdot(t-t_0)^\alpha), \tag{15}$$

$$\sigma_2 = \int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s \xi\cdot(s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)d\xi ds \neq 1. \tag{16}$$

Если выполняется условие (16), то из представления (14) получаем

$$\chi = \frac{\sigma_1}{1-\sigma_2} + \frac{1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^T s\int_{t_0}^s (s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(s-\xi)^\alpha)\times \\ \times f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi ds, \tag{17}$$

где $q_i(t) = q_i(t,x(t))$, $i=1,2$. Подставляя представление (17) в интегральное уравнение (3), получаем

$$x(t) = G(t) + \frac{1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^t s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)\times \\ \times\int_{t_0}^T \zeta\int_{t_0}^\zeta (\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^\alpha)f(\xi,x(\xi),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(\xi);q_2(\xi)]\})d\xi d\zeta ds + \\ + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha)f(s,x(s),\max\{x(\theta)\mid\theta\in[q_1(s);q_2(s)]\})ds, \tag{18}$$

где

$$G(t) = P_1(t) + \frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int_{t_0}^t s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)ds, \quad q_i(t) = q_i(t,x(t)), \quad i=1,2$$

и $P_1(t)$ определяется из формулы (15).

Вместо интегрального уравнения (18) исследуются вопросы однозначной разрешимости следующего интегрального уравнения на отрезке $[t_0;T]$:

$$x(t,\omega)(t-t_0)^{2-\gamma}=\Im(t;x,\omega)\equiv G(t,\omega)(t-t_0)^{2-\gamma}+$$
$$+\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\times$$
$$\times f(\xi,x(\xi,\omega),\max\{x(\theta,\omega)\mid\theta\in[q_1(\xi,x(\xi,\omega));q_2(\xi,x(\xi,\omega))]\})d\xi d\zeta ds+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})\times$$
$$\times f(s,x(s,\omega),\max\{x(\theta,\omega)\mid\theta\in[q_1(s,x(s,\omega));q_2(s,x(s,\omega))]\})ds,\qquad(19)$$

который не имеет особенностей в точке $t=t_0$.

Для доказательства однозначной разрешимости нелинейного функционально-интегрального уравнения (19) воспользуемся пространством непрерывных функций $C[t_0;T]$ с нормой

$$\|x(t)\|=\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\max\left\{\max\limits_{t\notin(t_0;T)}|\varphi_2(t)|;\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}|f(t,x,y)|\right\}\leqslant M_0=\text{const}<\infty;$

(ii) $\big|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\big|\leqslant L_0\big(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\big),\quad 0<L_0=\text{const}<\infty;$

(iii) $\big|q_i(t,x_1)-q_i(t,x_2)\big|\leqslant L_{0i}|x_1-x_2|,\quad 0<L_{0i}=\text{const}<\infty,\quad i=1,2;$

(iv) $\rho=L_0M_3(2+M_0(L_{01}+L_{02}))\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\dfrac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\dfrac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\dfrac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]<1,$

где

$$k_0=\frac{(T-t_0)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)},\quad M_3\geqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})|.$$

Тогда существует единственное решение начальной задачи (1), (2) *в пространстве непрерывных функций* $C(t_0;T)$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений*:

$$\begin{cases}(t-t_0)^{2-\gamma}x_0(t,\omega)=(t-t_0)^{2-\gamma}G(t,\omega),\\ (t-t_0)^{2-\gamma}x_{k+1}(t,\omega)=\Im(t;x_k),\quad k=0,1,2,\dots,\end{cases}\qquad(20)$$

где

$$G(t,\omega)=\varphi_0\cdot(t-t_0)^{\gamma-2}E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+\varphi_1\cdot(t-t_0)^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^{\alpha})+$$
$$+\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^{\alpha})ds.$$

Доказательство. Функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\gamma}(z)$ обладает следующим свойством (см. [23]). Предположим, что $0<\alpha<2$, γ — действительная постоянная $\arg z=\pi$. Тогда имеет место оценка

$$|E_{\alpha,\gamma}(z)|\leqslant\frac{C_0}{1+|z|},$$

где $0 < C_0 = \mathrm{const}$. Нетрудно видеть, что из приближений (20) для уравнения (19) получаем следующую оценку:

$$\left\|(t-t_0)^{2-\gamma} x_0(t,\omega)\right\| \leqslant \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_0 E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^\alpha)\right| +$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\varphi_1\cdot(t-t_0)E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^\alpha)\right| + \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_0|M_1 + \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[|\varphi_1|(t-t_0)M_2 + \sigma_0\cdot M_3\frac{(t-t_0)^{3+\alpha-\gamma}}{\alpha(\alpha+1)}\right], \quad (21)$$

где

$$0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega\cdot(t-t_0)^\alpha)|\leqslant M_1, \quad 0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\gamma}(-\omega\cdot(t-t_0)^\alpha)|\leqslant M_2,$$

$$\sigma_0=\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\right|, \quad 0<\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}|E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-t_0)^\alpha)|\leqslant M_3, \quad M_i=\mathrm{const}, \quad i=1,2,3.$$

В силу первого условия теоремы и оценки (21) из приближений (20) получаем

$$\|x_1(t,\omega)-x_0(t,\omega)\|\leqslant$$

$$\leqslant \max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{1-\sigma_2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(\zeta-\xi)^\alpha)f_0 d\xi d\zeta ds\right| +$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega\cdot(t-s)^\alpha)f_0 ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_0(M_3)^2}{|1-\sigma_2|}\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds\right| + M_0M_3\left|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right], \quad (22)$$

где

$$k_0=\frac{(T-t_0)^{\alpha+2}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}, \quad f_0=f\Big(s,x_0(s,\omega),\max\Big\{x_0(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(s,x_0(s,\omega));\ q_2(s,x_0(s,\omega))\big]\Big\}\Big).$$

Продолжим итерационный процесс Пикара для интегрального уравнения (19) в соответствии с приближениями (20). Тогда в силу условий теоремы и с учетом оценки (22) для произвольных натуральных чисел k получаем:

$$\Big\|x_{k+1}(t,\omega)-x_k(t,\omega)\Big\|\leqslant\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0(M_3)^2}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+M_3\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right]\times$$

$$\times\Big\|f\Big(t,x_k(t,\omega),\max\Big\{x_k(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\Big\}\Big)-$$

$$-f\Big(t,x_{k-1}(t,\omega),\max\Big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \Big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_{k-1}(t,\omega));q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big]\Big\}\Big)\Big\|\leqslant$$

$$\leqslant L_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha}\right]\Big[\Big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\Big\|+$$

$$+\Big\|\max\{x_k(\theta,\omega)\ |\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\}-$$

$$-\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(t,\omega));q_2(t,x_k(t,\omega))\big]\big\}\Big\|+$$

$$+\Big\|\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_k(s,\omega));q_2(t,x_k(s,\omega))\big]\big\}-$$
$$-\max\big\{x_{k-1}(\theta,\omega)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(t,x_{k-1}(t,\omega));q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big]\big\}\Big\|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant L_0M_3\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right]\Big[2\big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\big\|+$$
$$+M_0\Big(\big|q_1(t,x_k(t,\omega))-q_1(t,x_{k-1}(t,\omega))\big|+\big|q_2(t,x_k(t,\omega))-q_2(t,x_{k-1}(t,\omega))\big|\Big)\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\rho\cdot\big\|x_k(t,\omega)-x_{k-1}(t,\omega)\big\|,\quad(23)$$

где

$$\rho=L_0M_3\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{k_0M_3}{|1-\sigma_2|}\frac{(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{(t-t_0)^{\alpha}}{\alpha}\right].$$

Согласно последнему условию теоремы имеем $\rho<1$. Рассматриваем решение интегрального уравнения (19) в пространстве непрерывных функций $C[t_0;T]$. Из оценок (21)–(23) следует, что интегральное уравнение (19) имеет единственное решение на отрезке $[t_0;T]$. Отсюда вытекает существование и единственность решения задачи (1), (2) на интервале $(t_0;T)$. Теорема 1 доказана. □

3. Непрерывная зависимость решения от параметра ω и от начальных данных φ_0 и φ_1. Теперь покажем, что решение $x(t,\omega)$ начальной задачи для дробно-дифференциального уравнения (1) устойчиво относительно заданного параметра ω.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1), (2) *на интервале* $(t_0;T)$ *является непрерывным по заданному параметру* ω.

Доказательство. Пусть $x(t,\omega_1)$ и $x(t,\omega_2)$ — два разных решения интегрального уравнения (19), соответствующие двум различным значениям параметра ω_1 и ω_2. Предположим, что $|\omega_1-\omega_2|<\delta$, где $0<\delta$ — достаточно малое число.

В доказательстве этой теоремы воспользуемся следующими оценками:

$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{41}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{41}=\mathrm{const};\qquad(24)$$
$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{42}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{42}=\mathrm{const};\qquad(25)$$
$$\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\Big|E_{\alpha,\gamma}(-\omega_1(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma}(-\omega_2(t-s)^{\alpha})\Big|\leqslant M_{43}|\omega_1-\omega_2|,\quad 0<M_{43}=\mathrm{const}.\qquad(26)$$

Тогда из интегрального уравнения (19) получаем оценку

$$\Big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\Big\|\leqslant|\varphi_0|\Big\|E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_1\cdot(t-t_0)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma-1}(-\omega_2\cdot(t-t_0)^{\alpha})\Big\|+$$
$$+\big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|\Big\|E_{\alpha,\gamma}(-\omega_1\cdot(t-t_0)^{\alpha})-E_{\alpha,\gamma}(-\omega_2\cdot(t-t_0)^{\alpha})\Big\|+$$
$$+\left|\frac{\sigma_1}{1-\sigma_2}\right|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|ds+$$
$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int\limits_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|\times$$
$$\times\int\limits_{t_0}^{T}\zeta\int\limits_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\Big\|\times$$
$$\times\Big\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_1),\max\big\{x(\theta,\omega_1)\ \big|\ \theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_1));q_2(\xi,x(\xi,\omega_1))\big]\big\}\Big)\Big\|d\xi d\zeta ds+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\times$$

$$\times\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\big\|\times$$

$$\times\left\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\left\{x(\theta,\omega_2)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\right\}\Big)\right\|d\xi d\zeta ds+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(\zeta-\xi)^{\alpha})\big\|\times$$

$$\times\left\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_1),\max\left\{x(\theta,\omega_1)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_1));q_2(\xi,x(\xi,\omega_1))\big]\right\}\Big)-\right.$$

$$\left.-f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\left\{x(\theta,\omega_2)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\right\}\Big)\right\|d\xi d\zeta ds+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\Big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_1\cdot(t-s)^{\alpha})-E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\Big\|\times$$

$$\times\left\|f\Big(\xi,x(\xi,\omega_2),\max\left\{x(\theta,\omega_2)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(\xi,x(\xi,\omega_2));q_2(\xi,x(\xi,\omega_2))\big]\right\}\Big)\right\|ds+$$

$$+\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\big\|E_{\alpha,\alpha}(-\omega_2\cdot(t-s)^{\alpha})\big\|\times$$

$$\times\left\|f\Big(s,x(s,\omega_1),\max\left\{x(\theta,\omega_1)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(s,x(s,\omega_1));q_2(s,x(s,\omega_1))\big]\right\}\Big)-\right.$$

$$\left.-f\Big(s,x(s,\omega_2),\max\left\{x(\theta,\omega_2)\;\big|\;\theta\in\big[q_1(s,x(s,\omega_2));q_2(s,x(s,\omega_2))\big]\right\}\Big)\right\|ds. \qquad (27)$$

В силу условий теоремы 1 и оценок (24)–(26) аналогично оценке (23) из (27) получаем

$$\big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\big\|\leqslant|\varphi_0|M_{42}\cdot|\omega_1-\omega_2|+\big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|M_{43}\cdot|\omega_1-\omega_2|+$$

$$+\big(M_0+|\sigma_0|\big)M_{41}\cdot|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}ds+$$

$$+M_0M_3M_{41}|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds+$$

$$+M_0M_3M_{41}\cdot|\omega_1-\omega_2|\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}d\xi d\zeta ds+$$

$$+(M_3)^2L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\int_{t_0}^{t}s(t-s)^{\alpha-1}\int_{t_0}^{T}\zeta\int_{t_0}^{\zeta}(\zeta-\xi)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\big\|x(\xi,\omega_1)-x(\xi,\omega_2)\big\|d\xi d\zeta ds+$$

$$+M_3L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\big\|x(s,\omega_1)-x(s,\omega_2)\big\|ds. \qquad (28)$$

Из (28) получаем, что
$$\big\|(t-t_0)^{2-\gamma}(x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2))\big\| \leqslant A_1\cdot|\omega_1-\omega_2| + A_2\big\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\big\|, \tag{29}$$
где константы A_1 и A_2 определены формулами
$$A_1 = |\varphi_0|M_{42} + \big|\varphi_1\cdot(T-t_0)\big|M_{43} + \big(M_0+|\sigma_0|\big)M_{41}\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}s}{(t-s)^{1-\alpha}}ds+\right.$$
$$\left.+M_0M_3M_{41}\left(1+\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{|1-\sigma_2|}\right)\int\limits_{t_0}^{t}\frac{s}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\zeta}\frac{\zeta}{(\zeta-\xi)^{1-\alpha}}d\xi d\zeta ds\right],$$
$$A_2 = M_3L_0\big(2+M_0(L_{01}+L_{02})\big)\max_{t_0\leqslant t\leqslant T}\left[\frac{M_3}{|1-\sigma_2|}\int\limits_{t_0}^{t}s\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\zeta}\frac{\zeta}{(\zeta-\xi)^{1-\alpha}}d\xi d\zeta ds+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-t_0)^{2-\gamma}}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right].$$
Из последней оценки (29) имеем
$$\big\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\big\| < \frac{A_2\delta}{\left|\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}(t-t_0)^{2-\gamma}-A_1\right|}. \tag{30}$$
Если положить
$$\varepsilon = \frac{A_2\delta}{\left|\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}(t-t_0)^{2-\gamma}-A_1\right|},$$
то из (30) получим оценку
$$\|x(t,\omega_1)-x(t,\omega_2)\| < \varepsilon, \tag{31}$$
из которой видно, что решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от параметра ω на интервале $(t_0;T)$. Теорема 2 доказана. □

Аналогично теореме 2 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда решение задачи* (1), (2) *на интервале* $(t_0;T)$ *устойчиво по начальным данным* φ_0 *и* φ_1.

4. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим в классе непрерывных функций $C[0;a]$ $(a>0)$ задачу Коши
$$\begin{cases} {}_CD^{\alpha}_{0+}y(t) = \sqrt{\max\{y(\theta):\theta\in[\lambda t;t]\}} + \int\limits_0^t sy(s)ds - \dfrac{At^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}, \\ y(0)=0, \quad A = \dfrac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(2\alpha+1)}, \end{cases}$$
имеющую единственное решение $y=At^{2\alpha}$ в случае $0<\lambda<1$ и $0<\alpha<1/2$. Действительно,
$${}_CD^{\alpha}_{0+}y(t) = {}_CD^{\alpha}_{0+}(At^{2\alpha}) = \frac{A\cdot\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1-\alpha)}t^{2\alpha-\alpha} = \frac{A\cdot\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} = \sqrt{A}t^{\alpha},$$
$$\sqrt{\max\{y(\theta):\theta\in[\lambda t;t]\}} = \sqrt{A}t^{\alpha}, \quad \int\limits_0^t sy(s)ds = \int\limits_0^t s\cdot A\cdot s^{2\alpha}ds = A\int\limits_0^t s^{3\alpha}ds = \frac{A\cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1}.$$

Подставляя всё это в данное уравнение, получим

$$\sqrt{A}t^{\alpha} = \sqrt{A}t^{\alpha} + \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} \iff 0 = 0.$$

Проверим начальное условие: $y(0) = A \cdot 0^{2\alpha} = 0$. Так как правая часть уравнения имеет вид

$$f(t, y(t)) = \sqrt{\max\{y(\theta) : \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t sy(s)ds - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} =$$

$$= \sqrt{A}t^{\alpha} + \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} - \frac{A \cdot t^{3\alpha+1}}{3\alpha+1} = \sqrt{A}t^{\alpha},$$

отсюда следует, что $f \in C[0; a]$. Следовательно, решение задачи единственно в классе $C^{\alpha}[0; a]$, $a = \mathrm{const}$. Отметим, что $C^{\alpha}[0; a] = \big\{y(t) \in C[0; a],\ {}_C D^{\alpha}_{0+} y(t) \in C[0; a]\big\}$.

Пример 2 (пример с оператором Хильфера $D^{\alpha,\gamma}$ для случая $\alpha \in (1; 2]$)**.** Известно, что

$$D^{\alpha,\gamma} = D^{\alpha,\beta}_{0+}, \quad \gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta, \quad \alpha \leqslant \gamma \leqslant 2.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$D^{\alpha,\gamma} y(t) = \frac{4\Gamma(4\alpha/3)}{\Gamma(\alpha/3)} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{3t^{4\alpha/3+3}}{4\alpha+6}, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{32}$$

Нетрудно проверить, что функция $y = t^{4\alpha/3}$ является решением дифференциального уравнение (32) на положительной полуоси.

Как известно, в случае $\beta = 1 \Leftrightarrow \gamma = 2$ оператор Хилфера имеет вид $D^{\alpha,2} = D^{\alpha,1}_{0+} = {}_C D^{\alpha}_{0+}$, и дифференциальное уравнение (32) приобретает вид

$${}_C D^{\alpha}_{0+} = \frac{4\Gamma(4\alpha/3)}{\Gamma(\alpha/3)} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{3t^{4\alpha/3+3}}{4\alpha+6}, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{33}$$

где $\alpha \in (1; 2]$. Используя [19, теорема 3.25, с. 202], нетрудно показать, что функция $y = t^{4\alpha/3}$ является единственным решением дифференциального уравнения (33) из класса $C^{\alpha,1}[0; T]$, $T > 0$. Это решение удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} y(t) = 0. \tag{34}$$

Отметим, что

$$C^{\alpha,1}[a; b] = \big\{y(t) \in C^1[a; b] :\ {}_C D^{\alpha}_{a+} y(t) \in C[a; b]\big\}.$$

Пусть теперь $\alpha = 3/2$. Тогда дифференциальное уравнение (33) имеет вид

$${}_C D^{\frac{3}{2}}_{0+} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt[4]{\max\{y(\theta) \mid \theta \in [\lambda t; t]\}} + \int\limits_0^t tsy(s)ds - \frac{t^5}{4}, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{35}$$

а функция $y = t^2$ является единственным решением задачи (35), (34).

5. Заключение. В данной статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости начальной задачи для нелинейного дробного интегро-дифференциального уравнения (1) с вырожденным ядром и максимумами на заданном интервале $(t_0; T)$. Эта начальная задача сводится к нелинейному интегральному уравнению дробного порядка типа Вольтерра (3). Уравнение (3) имеет слабую особенность в точке $t = t_0$, которая может мыть нейтрализована умножением обеих частей интегрального уравнения (3) на величину, обратную сингулярности. Затем на основе метода последовательных приближений доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи (1), (2) и о непрерывной зависимости решения от параметра ω и от исходных данных φ_0 и φ_1 на интервале $(t_0; T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев А. С., Кадиркулов Б. Ж.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Джрбашяна—Нерсесяна// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 1. — С. 123–128.
2. *Герасимов А. Н.* Обобщение законов линейной деформации и их приложение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12*, № 3. — С. 251–260.
3. *Кадиркулов Б. Ж., Жалилов М. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Хилфера// Бюлл. Ин-та мат. им. В. И. Романовского. — 2020. — № 1. — С. 59–67.
4. *Юлдашев Т. К.* Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами// Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — *1*, № 16. — С. 15–22.
5. *Юлдашев Т. К.* Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
6. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
7. *Юлдашев Т. К., Овсяников С. М.* Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества// Ж. Средневолжск. мат. о-ва. — 2015. — *17*, № 2. — С. 85–95.
8. *Abdullaev O. Kh.* Solvability of a nonlocal problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi–Kober operators// Fract. Differ. Calculus. — 2017. — *7*, № 2. — P. 371–383.
9. *Abdullaev O. Kh.* Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order// Uzbek Math. J. — 2019. — № 3. — P. 4–18.
10. *Hilfer R.* (ed.). Application of Fractional Calculus in Physics.. — Singapore: World Scientific, 2000.
11. *Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A.* On a fractional order Ebola epidemic model// Adv. Differ. Equations. — 2015. — *2015*. — 278.
12. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2008. — *11*, № 1. — P. 3–14.
13. *Tenreiro Machado J. A.* (ed.). Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vols. 1–8. — Berlin–Boston: Walter de Gruyter, 2019.
14. *Hilfer R.* Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials// Chem. Phys. — 2002. — *284*, № 1-2. — P. 399–408.
15. *Hilfer R.* On fractional relaxation// Fractals. — 2003. — *11*, № 1. — P. 251–257.
16. *Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2009. — *12*, № 3. — P. 299–318.
17. *Hussain A., Baleanu D., Adeel M.* Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model// Adv. Differ. Equations. — 2020. — *2020*. — 384.
18. *Karimov E. T.* Frankl-type problem for a mixed type equation with the Caputo fractional derivative// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 9. — P. 1829–1836.
19. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: North-Holland, 2006.
20. *Kim M.-Ha, Ri G., Chol O. H.* Operational method for solving multi-term fractional differential equations with the generalized fractional derivatives// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2014. — *17*, № 1. — P. 79–95.
21. *Kumar D., Baleanu D.* Editorial: fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*, № 6.
22. *Mainardi F.* Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics// in: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (*Carpinteri A., Mainardi F.*, eds.). — Wien: Springer, 1997.
23. *Malik S. A., Aziz S.* An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions// Comput. Math. Appl. — 2017. — *73*, № 12. — P. 2548–2560.
24. *Novozhenova O. G.* Life and science of Alexey Gerasimov, one of the pioneers of fractional calculus in Soviet union// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — *20*, № 3. — P. 790–809.

25. *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: a review// Proc. Roy. Soc. A. — 2020. — *476.* — 20190498.
26. *Rossikhin Y. A.* Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids// Appl. Mech. Rev. — 2010. — *63*, № 1. — 010701.
27. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
28. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019.
29. *Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.* Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives// Integral Transforms Spec. Funct. — 2015. — *27*, № 1. — P. 30–42.
30. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*, № 1. — P. 27–59.
31. *Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z., Baleanu D.* A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative// Discr. Cont. Dynam. Syst., Ser. S. — 2020. — *13*, № 3. — P. 975–993.
32. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
33. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed-type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.
34. *Yuldashev T. K., Karimov E. T.* Inverse problem for a mixed type integro-differential equation with fractional order Caputo operators and spectral parameters// Axioms. — 2020. — *9*, № 4. — 121.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Кадиркулов Бахтиёр Жалилович
Ташкентский государственный университет востоковедения, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `kadirkulovbj@gmail.com`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 96–113
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-96-113

УДК 517.968.74

ОБ ОДНОМ НАГРУЖЕННОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Э. Т. КАРИМОВ**

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с дробными операторами Герасимова—Капуто, спектральными параметрами и малыми параметрами при смешанных производных. Решение задачи получено в виде рядов Фурье. Доказана однозначная разрешимость задачи для регулярных значений спектральных параметров. Изучена непрерывная зависимость решения краевой задачи от малых параметров и от заданных функций при регулярных значениях спектральных параметров.

***Ключевые слова*:** интегро-дифференциальное уравнение, уравнение смешанного типа, вырожденное ядро, однозначная разрешимость, дробный оператор Герасимова—Капуто.

ON ONE LOADED MIXED-TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL GERASIMOV–CAPUTO OPERATORS

© 2022 **T. K. YULDASHEV, E. T. KARIMOV**

Abstract. In this paper, we examine the unique solvability of a boundary-value problem for a loaded mixed-type integro-differential equation with fractional Gerasimov–Caputo operators, spectral parameters, and small coefficients of mixed derivatives. The solution of the problem is obtained in the form of a Fourier series. The unique solvability of the problem for regular values of the spectral parameters is proved. The continuous dependence of the solution of the boundary-value problem on small parameters and on given functions is studied for regular values of the spectral parameters.

***Keywords and phrases*:** integro-differential equation, mixed-type equation, degenerate kernel, unique solvability, fractional Gerasimov–Caputo operator.

***AMS Subject Classification*:** 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория краевых задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Сегодня бурно развивается теория нагруженных дифференциальных уравнений с локальными и нелокальными краевыми условиями. Изучению этого раздела теории дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ (см., например, [1–6, 8, 9, 11–16, 25, 44]).

Дробное исчисление играет важную роль в математическом моделировании во многих научных и инженерных дисциплинах (см. [34]). Так, в [31] рассматриваются некоторые основные проблемы сплошной среды и статистической механики; в [26] изучаются математические проблемы модели эпидемии Эболы; в [27, 40] изучается фракционная модель динамики туберкулезной инфекции и нового коронавируса (nCoV-2019), соответственно. Построение различных моделей задач теоретической физики с помощью дробного исчисления описано в [38, vols. 4, 5], [30, 37]. В [36] рассматривается конкретная физическая интерпретация дробных производных Хильфера и Герасимова—Капуто, описывающая случайное движение частицы, движущейся по действительной прямой с временами шага Пуассона с конечной скоростью. Подробный обзор применения дробного исчисления при решении прикладных задач приведен в [38, vol. 6–8], [32, 35].

Приложения для уравнений смешанного типа изучались в [7, 19, 39]. В частности, в [7] И. М. Гельфанд рассматривал пример движения газа в канале, окруженном пористой средой, причем движение газа в канале описывалось волновым уравнением, а вне канала — уравнением диффузии. Я. С. Уфлянд в [19] рассмотрел задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда потери на полубесконечной линии не учитывались, а остальная часть линии трактовалась как кабель без утечки. Он свел эту задачу к уравнению смешанного парабол-гиперболического типа. В [39] исследована гиперболо-параболическая система, возникающая при импульсном горении. Дробные дифференциальные уравнения смешанного типа изучаются во многих работах, в частности в [10, 17, 18, 23, 24, 28, 29, 33, 45, 46].

Одним из важных разделов теории интегральных и дифференциальных уравнений является теория интегро-дифференциальных уравнений. Наличие интегрального члена в дифференциальных уравнениях первого и второго порядков играет важную роль в теории динамических систем с автоматическим управлением (см. [20, 21]). Интегро-дифференциальные уравнения смешанного типа целого порядка с вырожденными ядрами и спектральными параметрами изучены в [41, 42].

В данной работе исследуются вопросы однозначной разрешимости краевой задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с дробными операторами Герасимова—Капуто и спектральными параметрами в многомерной прямоугольной области. Отметим, что краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами имеют особенности при исследовании вопросов однозначной разрешимости (см. [22, 43]).

В основе настоящего исследования лежат дифференциальные операторы, которые относительно первого аргумента являются операторами Герасимова—Капуто дробного порядка $0 < \alpha < 1$, а относительно других аргументов являются частными дифференциальными операторами четвертого порядка. Оператор Герасимова—Капуто дробного порядка $m-1 < \alpha < m$ имеет вид

$$
{}_C D_{at}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds,
$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

В многомерной области $\Omega = \{-T < t < T,\ 0 < x_1, \ldots, x_m < l\}$ рассматривается следующее нагруженное интегро-дифференциальное уравнение дробного порядка:

$$
A_{\varepsilon}(U) - B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \nu \displaystyle\int_0^T K_1(t,s) U(s,x) ds + F_1(t,x), & t > 0, \\ \nu \displaystyle\int_{-T}^0 K_2(t,s) U(s,x) ds + F_2(t,x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}
$$

где

$$
F_i(t,x) = k_i(t) f_i \left(x, \int_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy \right), \quad i = 1, 2,
$$

$$A_\varepsilon(U)=\frac{1+\operatorname{sgn}(t)}{2}\left[{}_C D_{0t}^{\alpha_1}-\sum_{i=1}^m\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}-\varepsilon_2\frac{\partial^4}{\partial x_i\partial x_i\partial x_i\partial x_i}\right){}_C D_{0t}^{\beta_1}\right]U(t,x)+$$
$$+\frac{1-\operatorname{sgn}(t)}{2}\left[{}_C D_{0t}^{\alpha_2}-\sum_{i=1}^m\left(\varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}-\varepsilon_2\frac{\partial^4}{\partial x_i\partial x_i\partial x_i\partial x_i}\right){}_C D_{0t}^{\beta_2}\right]U(t,x),$$

$$B_{1,\omega}(U)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^m(U_{x_ix_i}-U_{x_ix_ix_ix_i}), & t>0,\\ \omega^2\sum\limits_{i=1}^m(U_{x_ix_i}-U_{x_ix_ix_ix_i}), & t<0,\end{cases}$$

T и l — положительные числа, ω — положительный параметр, ε_1, ε_2 — положительные малые параметры, ν — действительный параметр, отличный от нуля, $0\neq K_j(t,s)=a_j(t)b_j(s)$ — вырожденное ядро, $a_j(t)\in C^2[-T;T]$, $b_j(s)\in C[-T;T]$, $f_i\in C_x^2(\Omega_l^m\times\mathbb{R})$,

$$\int\limits_{\Omega_l^m}|\Theta_i(y)|dy<\infty,\quad \int\limits_{\Omega_l^m}|\Theta_i(y)|dy=\int\limits_0^l\ldots\int\limits_0^l|\Theta_i(y)|dy_1\cdot\ldots\cdot dy_m,\quad i,j=1,2,$$
$$k_1(t)\in C^2[0;T],\quad k_2(t)\in C^2[-T;0],\quad \mathbb{R}\equiv(-\infty;\infty),$$
$$x\in\Omega_l^m\equiv[0;l]^m,\quad 0<\beta_1<\alpha_1\leqslant 1,\quad 1<\beta_2<\alpha_2\leqslant 2.$$

Будем изучать следующую задачу.

Задача. Найти в области Ω неизвестную функцию $U(t,x)$, принадлежащую классу функций

$$U(t,x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{\alpha_1,4}(\Omega_+)\cap C^{\alpha_2,4}(\Omega_-)\cap C_{t,x}^{\alpha_1+4}(\Omega_+)\cap C_{t,x}^{\alpha_2+4}(\Omega_-)\cap$$
$$\cap\, C_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}^{\alpha_1+4+0+\ldots+0}(\Omega_+)\cap C_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}^{\alpha_2+4+0+\ldots+0}(\Omega_-)\cap C_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}^{\alpha_1+0+4+0+\ldots+0}(\Omega_+)\cap$$
$$\cap\, C_{t,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m}^{\alpha_2+0+4+0+\ldots+0}(\Omega_-)\cap\ldots\cap C_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}^{\alpha_1+0+\ldots+0+4}(\Omega_+)\cap C_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}^{\alpha_2+0+\ldots+0+4}(\Omega_-)\quad (2)$$

и удовлетворяющую смешанному интегро-дифференциальному уравнению (1) и следующим граничным условиям:

$$U(-T,x)=\varphi_1(x),\quad {}_C D_{0t}^{\theta}U(-T,x)=\varphi_2(x),\quad x\in\Omega_l^m,\quad (3)$$
$$U(t,0)=U(t,l)=U_{xx}(t,0)=U_{xx}(t,l)=0,\quad -T<t<T,\quad (4)$$

где $0<\theta<1$, $\varphi_i(x)$ — гладкие функции, $F_i(t,0)=F_i(t,l)=0$, $\varphi_i(0)=\varphi_i(l)=0$, $i=1,2$, $C^r(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\ldots,x_m)$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^r U}{\partial t^r},\quad \frac{\partial^r U}{\partial x_1^r},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^r U}{\partial x_m^r}$$

в области Ω, $C_{t,x}^{r,s}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\ldots,x_m)$ с непрерывными производными

$$\frac{\partial^r U}{\partial t^r},\quad \frac{\partial^s U}{\partial x_1^s},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^s U}{\partial x_m^s}$$

в области Ω, $C_{t,x_1,x_2,\ldots,x_m}^{r+r+0+\ldots+0}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\ldots,x_m)$ с непрерывными производными $\partial^{2r}U/\partial t^r\partial x_1^r$ в области Ω и т. д.; $C_{t,x_1,\ldots,x_{m-1},x_m}^{r+0+\ldots+0+r}(\Omega)$ — класс функций $U(t,x_1,\ldots,x_m)$ с непрерывной производной $\partial^{2r}U/\partial t^r\partial x_m^r$ в области Ω, r, s — положительные числа,

$$\overline{\Omega}=\big\{-T\leqslant t\leqslant T,\ x\in\Omega_l^m\big\},$$
$$\Omega_-=\big\{-T<t<0,\ 0<x_1,\ldots,x_m<l\big\},\quad \Omega_+=\big\{0<t<T,\ 0<x_1,\ldots,x_m<l\big\}.$$

2. Разложение решение задачи (1)–(4) **в ряд Фурье.** Исходя из характера задания спектральных условий (4), решение нагруженного интегро-дифференциального уравнения (1) в области Ω будем разыскивать в виде ряда Фурье по синусам

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^{\pm}_{n_1,\ldots,n_m}(t)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{5}$$

где

$$u^{\pm}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\begin{cases}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, & t>0,\\ u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx, & t<0,\end{cases} \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega_l^m}U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_0^l\ldots\int\limits_0^l U(t,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m,$$

$$\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m,\quad n_1,\ldots,n_m=1,2,\ldots$$

Предположим также, что имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$f_i(x,V_i)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x), \tag{7}$$

где

$$f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i)=\int\limits_{\Omega_l^m}f_i(y,V_i)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy,\quad f_i(y,V_i)=f_i\left(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_i(z)U(0,z)dz\right),\quad i=1,2.$$

Подставляя ряды (5) и (7) в смешанное уравнение (1), получаем две счетные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка с вырожденными ядрами:

$$\begin{gathered}{}_C D^{\alpha_1}_{0t}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\ +\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big){}_C D^{\beta_1}_{0t}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\ =\nu\int\limits_0^T a_1(t)b_1(s)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+F_{1n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}{}_C D^{\alpha_2}_{0t}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\ +\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big){}_C D^{\beta_2}_{0t}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\ =\nu\int\limits_{-T}^0 a_2(t)b_2(s)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds+F_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t<0,\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\mu_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2},\quad F_{in_1,\ldots,n_m}(t)=k_i(t)f_{in_1,\ldots,n_m}(V_i),\quad i=1,2. \tag{10}$$

Будем использовать метод Фредгольма для вырожденного ядра. Введя обозначения

$$\tau^{+}_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_0^T b_1(s)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds,\quad \tau^{-}_{n_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{-T}^0 b_2(s)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(s)ds, \tag{11}$$

представим счетные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (8) и (9) в следующем виде:

$$\begin{gathered}{}_CD_{0t}^{\alpha_1}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)\,{}_CD_{0t}^{\beta_1}u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\=\nu a_1(t)\tau^{+}_{n_1,\ldots,n_m}+F_{1n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0,\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}{}_CD_{0t}^{\alpha_2}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\\+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)\,{}_CD_{0t}^{\beta_2}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\\=\nu a_2(t)\tau^{-}_{n_1,\ldots,n_m}+F_{2n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t<0.\end{gathered}\tag{13}$$

Решения счетных систем (12) и (13), удовлетворяющие условиям

$$u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^{+}_{1n_1,\ldots,n_m},\quad u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^{-}_{1n_1,\ldots,n_m},\quad \frac{d}{dt}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(0)=C^{-}_{2n_1,\ldots,n_m},$$

представим следующим образом:

$$u^{+}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\tau^{+}_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{11n_1,\ldots,n_m}(t)+\Psi_{12n_1,\ldots,n_m}(t)+C^{+}_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{13n_1,\ldots,n_m}(t),\quad t>0,\tag{14}$$

$$\begin{gathered}u^{-}_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\nu\tau^{-}_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\\+C^{-}_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)-C^{-}_{2n_1,\ldots,n_m}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),\quad t<0,\end{gathered}\tag{15}$$

где $C^{+}_{1n_1,\ldots,n_m}$, $C^{-}_{in_1,\ldots,n_m}$ $(i=1,2)$ — неизвестные коэффициенты интегрирования, которые будут однозначно найдены в дальнейших вычислениях,

$$\begin{gathered}\Psi_{11n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_0^t a_1(t-s)s^{\alpha_1-1}\times\\\times E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Bigl(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)s^{\alpha_1}\Bigr)ds,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Psi_{12n_1,\ldots,n_m}(t)=\int\limits_0^t F_{1n_1,\ldots,n_m}(t-s)s^{\alpha_1-1}\times\\\times E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Bigl(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)s^{\alpha_1}\Bigr)ds,\end{gathered}$$

$$\Psi_{13n_1,\ldots,n_m}(t)=E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),1}\bigl(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)t^{\alpha_1-\beta_1},-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)t^{\alpha_1}\bigr),$$

$$\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int\limits_t^0 a_2(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)ds,$$

$$\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int\limits_t^0 F_{2n_1,\ldots,n_m}(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon,\omega)ds,$$

$$\begin{gathered}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\\=E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1}\Bigl(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)(-t)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)(-t)^{\alpha_2}\Bigr),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\\=tE_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}\Bigl(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)(-t)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigl(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\bigr)(-t)^{\alpha_2}\Bigr),\end{gathered}$$

$$\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=$$
$$=E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-s)^{\alpha_2-\beta_2},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\omega^2+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)(-s)^{\alpha_2}\Big).$$

Через $E_{(\alpha,\beta),\gamma}(z_1,z_2)$ обозначена функция Миттаг-Леффлера двух переменных:

$$E_{(\alpha,\beta),\gamma}(z_1,z_2)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{z_1^{m_1}z_2^{m_2}}{\Gamma(\gamma+\alpha m_1+\beta m_2)},$$

где $z_i,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$.

Из постановки задачи (см. свойства в (2)) следует, что для неизвестной функции выполняется условие непрерывного сопряжения $U(0+0,x)=U(0-0,x)$. Следовательно, учитывая формулу (6), получаем условия на коэффициенты Фурье от неизвестной функции:

$$u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0+0)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(0+0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega_l^m}U(0-0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0-0). \tag{16}$$

Положим

$$\varphi_{in_1,\ldots,n_m}=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_i(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx,\quad i=1,2.$$

Тогда с учетом формулы (6) из условий в (3) получаем

$$u^-_{n_1,\ldots,n_m}(-T)=\int\limits_{\Omega_l^m}U(-T,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_1(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}, \tag{17}$$

$${}_CD^\theta_{0t}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(-T)=\int\limits_{\Omega_l^m}{}_CD^\theta_{0t}U(-T,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega_l^m}\varphi_2(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx=\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}. \tag{18}$$

С помощью условия непрерывного сопряжения (16) из (14) и (15) получаем соотношение

$$C^+_{1n_1,\ldots,n_m}=C^-_{1n_1,\ldots,n_m}.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты интегрирования $C^-_{1n_1,\ldots,n_m}$ и $C^-_{2n_1,\ldots,n_m}$ в (15), воспользуемся условиями (17) и (18); получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\\ \qquad+C^-_{1n_1,\ldots,n_m}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-C^-_{2n_1,\ldots,n_m}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m},\\ \nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+D^\theta_{0t}\Psi_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)+\\ \qquad+C^-_{1n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-C^-_{2n_1,\ldots,n_m}D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)=\varphi_{2n_1,\ldots,n_m},\end{cases} \tag{19}$$

где $D^\theta_{0t}\Psi(-T)\equiv D^\theta_{0t}\Psi(t)|_{t=-T}$. При выполнении условия

$$\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\neq 0 \tag{20}$$

система (19) однозначно разрешима относительно $C^-_{1n_1,\ldots,n_m}$ и $C^-_{2n_1,\ldots,n_m}$. Решая ее, приходим к следующим представлениям для неизвестных коэффициентов:

$$C^{-}_{1n_1,\dots,n_m} = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \times$$
$$\times \Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \nu\tau^{-}_{n_1,\dots,n_m} \times$$
$$\times \big(\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\big) +$$
$$+ \Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$C^{-}_{2n_1,\dots,n_m} = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \times$$
$$\times \Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} D^{\theta}_{0t} \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m} \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \nu\tau^{-}_{n_1,\dots,n_m} \times$$
$$\times \big(\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\big) +$$
$$+ \Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) - \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big].$$

Подставим полученные данные в (15); с учетом того, что $C^{+}_{1n_1,\dots,n_m} = C^{-}_{1n_1,\dots,n_m}$ в (14), получаем следующие представления для коэффициентов Фурье основных неизвестных функций в положительной и отрицательной частях области:

$$u^{+}_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) = \big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\big] N_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega) +$$
$$+ \nu\tau^{+}_{n_1,\dots,n_m} N_{12n_1,\dots,n_m}(t) - \nu\tau^{-}_{n_1,\dots,n_m} N_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega) +$$
$$+ f_{1n_1,\dots,n_m}(V_1) N_{14n_1,\dots,n_m}(t) + f_{2n_1,\dots,n_m}(V_2) N_{15n_1,\dots,n_m}(t,\omega), \quad t > 0, \quad (21)$$

$$u^{-}_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\dots,n_m} N_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m} N_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega) +$$
$$+ \nu\tau^{-}_{n_1,\dots,n_m} N_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega) + f_{2n_1,\dots,n_m}(V_2) N_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega), \quad t < 0, \quad (22)$$

где

$$N_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t) \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega), \quad N_{12n_1,\dots,n_m}(t) = \Psi_{11n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \Big[\Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) -$$
$$- \Psi_{21n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big] \Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{14n_1,\dots,n_m}(t) = \overline{\Psi}_{12n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{15n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) -$$
$$- \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) D^{\theta}_{0t} \overline{\Psi}_{22n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big] \Psi_{13n_1,\dots,n_m}(t),$$

$$N_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \Big[\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) -$$
$$- \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega) D^{\theta}_{0t} \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$N_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega) = \frac{1}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)} \Big[\Psi_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega) \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(-T,\omega) +$$
$$+ \Psi_{24n_1,\dots,n_m}(t,\omega) \Psi_{23n_1,\dots,n_m}(-T,\omega)\Big],$$

$$N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)-$$
$$-\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{21n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),$$

$$N_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$
$$+\frac{1}{\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\Big[\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)-$$
$$-\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)D_{0t}^{\theta}\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\Big]\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),$$

$$\overline{\Psi}_{12n_1,\ldots,n_m}(t)=$$
$$=\int_0^t k_1(t-s)s^{\alpha_1-1}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1}\Big(-\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big(\varepsilon_1+\varepsilon_2\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}\big)s^{\alpha_1-\beta_1},\ -\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}s^{\alpha_1}\Big)ds,$$

$$\overline{\Psi}_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\int_t^0 k_2(s-t)(-s)^{\alpha_2-1}\Psi_{25n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)ds.$$

Согласно методу Фредгольма для вырожденного ядра, подставим (21) и (22) в (11):

$$\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}\big[1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)\big]+\nu\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)=$$
$$=\big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}\big]\chi_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega)+f_{1n_1,\ldots,n_m}(V_1)\chi_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega)+$$
$$+f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2)\chi_{15n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (23)$$

$$\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}\big[1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)\big]=\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}\chi_{21n_1,\ldots,n_m}(\omega)+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}\chi_{22n_1,\ldots,n_m}(\omega)+$$
$$+f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2)\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (24)$$

где

$$\chi_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int_0^T b_1(s)N_{1in_1,\ldots,n_m}(s,\omega)ds, \quad i=\overline{1,5},$$

$$\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int_{-T}^0 b_2(s)N_{2in_1,\ldots,n_m}(s,\omega)ds, \quad i=\overline{1,4}.$$

Решим линейные алгебраические уравнения (23) и (24) как систему алгебраических уравнений относительно величин $\tau^+_{n_1,\ldots,n_m}$ и $\tau^-_{n_1,\ldots,n_m}$. Если выполняются условия

$$\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 1, \quad \nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 1, \quad (25)$$

то из (23) и (24) получим

$$\tau^+_{n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} M_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} M_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \\ + f_{1n_1,\ldots,n_m}(V_1) M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega) + f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2) M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (26)$$

$$\tau^-_{n_1,\ldots,n_m} = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} M_{21n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} M_{22n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \\ + f_{2n_1,\ldots,n_m}(V_2) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad (27)$$

где

$$M_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{1}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)} \left[\chi_{11n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \nu \frac{\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)} \right], \quad i = 1,2,$$

$$M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)},$$

$$M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{1}{1-\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)} \left[\chi_{15n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \nu \frac{\chi_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega)\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)} \right],$$

$$M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}, \quad i = 1,2,$$

$$M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \frac{\chi_{24n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{1-\nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}.$$

Подставляя (26) и (27) в (21) и (22), при $t > 0$ получим

$$u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\ + Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) \int\limits_{\Omega_l^m} f_1 \left(y, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_1(z) \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z) dz \right) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y) dy + \\ + Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) \int\limits_{\Omega_l^m} f_2 \left(y, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_2(z) \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z) dz \right) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y) dy \quad (28)$$

а при $t < 0$ —

$$u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = \varphi_{1n_1,\ldots,n_m} Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\ldots,n_m} Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\ + Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) \int\limits_{\Omega_l^m} f_2 \left(y, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_2(z) \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z) dz \right) \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y) dy, \quad (29)$$

где

$$Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{1in_1,\ldots,n_m}(\omega) - \\ - \nu N_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad i = 1,2,$$

$$Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{13n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

$$Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{15n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{14n_1,\ldots,n_m}(\omega) - \\ - \nu N_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

$$Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{2in_1,\ldots,n_m}(\omega), \quad i = 1,2,$$

$$Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu) = N_{24n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) + \nu N_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega) M_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega).$$

Подставляя представление (28) в ряд Фурье (5), получим следующее формальное решение задачи (1)–(4) при $t > 0$:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times$$
$$\times\Bigg[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_1\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_1(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy+$$
$$+Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy\Bigg]\quad(30)$$

Подставляя представление (29) в ряд Фурье (5), получим следующее формальное решение задачи (1)–(4) при $t<0$:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times$$
$$\times\Bigg[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy\Bigg].\quad(31)$$

Рассмотрим интегралы, присутствующие в составе рядов (30) и (31). В представлениях (28) и (29) положим $t=0$:

$$u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)=0\cdot\int\limits_{\Omega_l^m}f_1\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_1(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy,$$
$$u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)=0\cdot\int\limits_{\Omega_l^m}f_2\Bigg(y,\int\limits_{\Omega_l^m}\Theta_2(z)\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(z)dz\Bigg)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy.$$

Отсюда следует, что $u^+_{n_1,\ldots,n_m}(0)=u^-_{n_1,\ldots,n_m}(0)=0$. Поэтому ряды (30) и (31) можно переписать в следующем виде:

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{11n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{12n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+Q_{13n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_1(y,0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy+$$
$$+Q_{14n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2(y,0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy\Bigg],\quad(32)$$

$$U(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Bigg[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\int\limits_{\Omega_l^m}f_2(y,0)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(y)dy\Bigg].\quad(33)$$

Теперь предположим, что условие (20) нарушается при некоторых значениях спектрального параметра ω. Тогда будем рассматривать следующее алгебраическое уравнение относительно спектрального параметра ω:

$$\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)- \\ -\Psi_{23n_1,\ldots,n_m}(-T,\omega)\cdot D^\theta_{0t}\Psi_{24n_1,\ldots,n_m}(-T,\varepsilon,\omega)=0. \quad (34)$$

Множество положительных решений этого алгебраического уравнения (34) относительно спектрального параметра ω обозначим через $\Im_1$. Указанные значения $\omega \in \Im_1$ назовем иррегулярными; для таких значений условие (20) нарушается. Множество $\Lambda_1 = (0;\infty)\backslash\Im_1$ называется множеством регулярных значений спектрального параметра ω; для таких регулярных значений условие (20) выполняется.

Теперь предположим, что условия в (25) нарушаются:

$$\nu\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\varepsilon,\omega)=1, \quad \nu\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)=1.$$

Имеем

$$\nu_1 = \frac{1}{\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)}.$$

Для регулярных значений $\omega \in \Lambda_1$ имеют место неравенства

$$\chi_{12n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 0, \quad \chi_{23n_1,\ldots,n_m}(\omega)\neq 0.$$

Множество $\{\nu_1,\nu_2\}$ обозначим через $\Im_2$. Тогда множество $\Lambda_2 = (-\infty;0)\cup(0;\infty)\setminus\Im_2$ называется множеством регулярных значений спектрального параметра ν. Для всех значений $\nu\in\Lambda_2$ условия (25) выполняются. Введем обозначение

$$\aleph = \big\{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N};\ \omega\in\Lambda_1;\ \nu\in\Lambda_2\big\},$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Это множество, в котором все значения спектральных параметров ω и ν регулярны. Для таких регулярных значений параметра ν решения задачи (1)–(4) в подобластях Ω_1 и Ω_2 представляются в виде рядов (32) и (33) соответственно.

3. Сходимость рядов (32) **и** (33)**.** Для установления единственности решения $U(t,x,\omega,\nu)$ задачи (1)–(4) предположим, что существуют два решения этой задачи U_1 и U_2. Тогда их разность $U=U_1-U_2$ также является решением интегро-дифференциального уравнения (1), удовлетворяющим условиям (2)–(4) с функциями $\varphi_i(x)\equiv 0$ $(i=1,2)$. Тогда для $\varphi_{in_1,\ldots,n_m}=0$ $(i=1,2)$ из формул (32) и (33) в области Ω следует, что

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x,\omega,\nu)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)dx = 0.$$

Следовательно, в силу полноты системы собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\right\},\ \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_2}{l}x_2\right\},\ \ldots,\ \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m\right\}$$

в пространстве $L_2(\Omega_l^m)$, заключаем, что $U(t,x,\omega,\nu)\equiv 0$ для всех $x\in\Omega_l^m\equiv[0;l]^m$ и $t\in[-T;T]$. Следовательно, при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν функция $U(t,x,\omega,\nu)$ является единственным решением интегро-дифференциального уравнения смешанного типа (1) с условиями (2)–(4), если эта функция существует в области Ω.

Воспользуемся пространством $L_2(\Omega_l^m)$ суммируемых функций в области Ω_l^m с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l^m)} = \sqrt{\int\limits_{\Omega_l^m}|\vartheta(x)|^2\,dx} < \infty.$$

Условия гладкости. Пусть функции

$$\varphi_i(x), f_i(x) \in C^4(\Omega_l^m), \quad i = 1, 2$$

имеют кусочно непрерывные производные пятого порядка в области Ω_l^m.

Интегрируя по частям пять раз по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, получим следующие формулы (см. [43]):

$$|\varphi_{in_1,\ldots,n_m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \frac{\left|\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right|}{n_1^5 \ldots n_m^5}, \quad |f_{in_1,\ldots,n_m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \frac{\left|f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right|}{n_1^5 \ldots n_m^5}, \tag{35}$$

где

$$\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{5m}\varphi_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx,$$

$$f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l^m} \frac{\partial^{5m} f_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

Для этих функций имеют место неравенства Бесселя:

$$\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[\varphi^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right]^2} \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)}, \tag{36}$$

$$\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left[f^{(5m)}_{in_1,\ldots,n_m}\right]^2} \leqslant \left(\frac{2}{l}\right)^m \left\| \frac{\partial^{5m} f_i(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5} \right\|_{L_2(\Omega_l^m)}, \quad i = 1, 2. \tag{37}$$

Также используем следующие известные свойства функции Миттаг-Леффлера:

1. Для всех $k > 0$, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in (0; 2]$, $\alpha_0 \leqslant \beta_0 \leqslant \gamma_0$, $t \geqslant 0$ функция $t^{\beta_0 - 1} E_{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0}(-kt^{\alpha}, -kt^{\beta})$ является полной, монотонной и имеет место оценка

$$(-1)^s [t^{\beta_0 - 1} E_{(\alpha_0, \beta_0), \gamma_0}(-kt^{\alpha_0}, -kt^{\beta_0})]^{(s)} \geqslant 0, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{38}$$

2. Для всех $\alpha_0, \beta_0 \in (0, 2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\arg z_1 = \pi$, справедливы следующие оценки

$$|E_{(\alpha_0, \beta_0), \gamma_0}(z_1, z_2)| \leqslant \frac{C_1}{1 + |z_1|}, \tag{39}$$

$$|E_{(\alpha_0, \beta_0), \gamma_0}(\varepsilon_1 z_1, z_2) - E_{(\alpha_0, \beta_0), \gamma_0}(\varepsilon_2 z_1, z_2)| \leqslant |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \frac{C_2}{1 + |z_1|}, \tag{40}$$

где $0 < C_i = \mathrm{const}$ не зависит от z, $\varepsilon_i \in (0; \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Используя условия гладкости, докажем, что при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν ряды (32) и (33) сходятся абсолютно и равномерно; при этом возможно их почленное дифференцирование.

Согласно свойствам (38) и (39) функции Миттаг-Леффлера, функции $Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t, \omega, \nu)$ $(i = \overline{1,4})$ и $Q_{2jn_1,\ldots,n_m}(t, \omega, \nu)$ $(j = \overline{1,3})$ равномерно ограничены на отрезке $[-T; T]$. Тогда для всех положительных целых чисел $n_1, \ldots, n_m$ существуют такие постоянные C_{1k} $(k = 1, 2)$, что справедливы следующие оценки:

$$\max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{i=\overline{1,4}} |Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t, \omega, \nu)| \leqslant C_{11}, \quad \max_{n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}} \max_{j=\overline{1,3}} |Q_{2jn_1,\ldots,n_m}(t, \omega, \nu)| \leqslant C_{12}, \tag{41}$$

где $C_{1k} = \mathrm{const}$, $k = 1, 2$.

Применяя оценки (41), формулу (35), неравенство Коши—Буняковского и неравенства Бесселя (36) и (37) к рядам (32) и (33), получаем

$$
\begin{aligned}
|U(t,x,\omega,\nu)| &\leqslant \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} |u^{+}_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)| \leqslant \\
&\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_{11} \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \left[|\varphi_{1n_1,\dots,n_m}| + |\varphi_{2n_1,\dots,n_m}| + |f_{1n_1,\dots,n_m}| + |f_{2n_1,\dots,n_m}|\right] \leqslant \\
&\leqslant \gamma_1 \left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \right. \\
&\left. + \left\|\frac{\partial^{5m} f_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] < \infty, \quad (42)
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{11} C_{01} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}, \quad C_{01} = \sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{10}\dots n_m^{10}}};
$$

$$
\begin{aligned}
|U(t,x,\omega,\nu)| &\leqslant \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} |u^{-}_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)| \leqslant \\
\leqslant \gamma_2 &\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\|\frac{\partial^{5m} f_2(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \dots \partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] < \infty, \quad (43)
\end{aligned}
$$

где

$$
\gamma_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{12} C_{01} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}.
$$

Из оценок (42) и (43) следует, что ряды (32) и (33) сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$ при $(n_1,\dots,n_m,\omega,\nu) \in \aleph = \{n_1,\dots,n_m \in \mathbb{N};\ \omega \in \Lambda_1;\ \nu \in \Lambda_2\}$. Поэтому при таких чисел $(n_1,\dots,n_m,\omega,\nu) \in \aleph$ функций (32) и (33) можно нужное число раз формально дифференцировать в области $\overline{\Omega}$:

$$
\begin{aligned}
{}_C D_{0t}^{\alpha_1} U(t,x,\omega,\nu) = &\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x) \times \\
&\times \Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{12n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ f_{1n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{2n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_1} Q_{14n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t > 0, \quad (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_C D_{0t}^{\alpha_2} U(t,x,\omega,\nu) = &\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x) \Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{21n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ \varphi_{2n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{22n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{2n_1,\dots,n_m}\, {}_C D_{0t}^{\alpha_2} Q_{23n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t < 0, \quad (45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu) = &\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4 \vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x) \Big[\varphi_{1n_1,\dots,n_m} Q_{11n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ \varphi_{2n_1,\dots,n_m} Q_{12n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + f_{1n_1,\dots,n_m} Q_{13n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu) + \\
&+ f_{2n_1,\dots,n_m} Q_{14n_1,\dots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big], \quad t > 0, \quad (46)
\end{aligned}
$$

$$U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\Big[\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}Q_{21n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+$$
$$+\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{22n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)+f_{2n_1,\ldots,n_m}Q_{23n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)\Big],\quad t<0.\quad (47)$$

Аналогичным образом в области Ω определяются разложения в ряды Фурье следующих функций:

$$U_{x_2x_2x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ U_{x_3x_3x_3x_3}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ U_{x_mx_mx_mx_m}(t,x,\omega,\nu),$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu).$$

Сходимость рядов (44) и (45) доказывается аналогично доказательству сходимости рядов (32) и (33). Поэтому достаточно показать сходимость рядов (46) и (47). Принимая во внимание формулы (35)–(37) и оценки (41) и применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$|U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)|\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4|u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^4C_{11}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}n_1^4\Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}|+|\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}|+|f_{1n_1,\ldots,n_m}|+|f_{2n_1,\ldots,n_m}|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^mC_{11}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-4}\left[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|\varphi^{(5m)}_{1n_1,\ldots,n_m}|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|\varphi^{(5m)}_{2n_1,\ldots,n_m}|+\right.$$
$$\left.+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|f^{(5m)}_{1n_1,\ldots,n_m}|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1n_2^5\ldots n_m^5}|f^{(5m)}_{2n_1,\ldots,n_m}|\right]\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_3\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\right.$$
$$\left.+\left\|\frac{\partial^{5m}f_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right]<\infty,$$

где

$$\gamma_3=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2}C_{11}C_{02}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-2},\quad C_{02}=\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^2n_2^{10}\ldots n_m^{10}}};$$

$$|U_{x_1x_1x_1x_1}(t,x,\omega,\nu)|\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n_1}{l}\right)^4|u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega,\nu)|\cdot|\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m\left(\frac{\pi}{l}\right)^4C_{11}\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}n_1^4\Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}|+|\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}|+|f_{2n_1,\ldots,n_m}|\Big]\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_4\left[\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}+\left\|\frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right]<\infty,$$

где

$$\gamma_4=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2}C_{12}C_{02}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m-2}.$$

Аналогично доказывается сходимость рядов Фурье в области Ω для следующих функций:

$$U_{x_2x_2x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ U_{x_3x_3x_3x_3}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ U_{x_mx_mx_mx_m}(t,x,\omega,\nu),$$
$${}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_2}U_{x_1x_1}(t,x,\omega,\nu),\ {}_CD_{0t}^{\alpha_1}U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,$$

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha_2} U_{x_2x_2}(t,x,\omega,\nu),\ \ldots,\ {}_C D_{0t}^{\alpha_1} U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu),\ {}_C D_{0t}^{\alpha_2} U_{x_mx_m}(t,x,\omega,\nu). $$

Отсюда следует, что функции (32) и (33) обладают свойствами (2) для регулярных значений спектральных параметров ω и ν.

4. Непрерывная зависимость решения от малого параметра. Рассматривается непрерывная зависимость решения задачи (1)–(4) от малых параметров $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2)$ при регулярных значениях спектральных параметров ω и ν. Пусть ε_{11} и ε_{12} — два разных значения первого малого положительного параметра ε_1. С помощью оценок (38)–(40) легко проверить, что верны следующие оценки:

$$ \max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \max_{t\in[0;T]} \Big| Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - Q_{1in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu)\Big| \leqslant C_{21}|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}|, \quad i=\overline{1,4}, \tag{48} $$

$$ \max_{n_1,\ldots,n_m\in\mathbb{N}} \max_{t\in[-T;0]} \Big| Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - Q_{2in_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu)\Big| \leqslant C_{22}|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}|, \quad i=\overline{1,3}, \tag{49} $$

где $0 < C_{2i} = \text{const}$, $\varepsilon_{1i} \in (0;\varepsilon_{10})$, $0 < \varepsilon_{10} = \text{const}$, $i = 1, 2$.

Далее, учитывая формулу (35), оценки (48), (49) и применяя неравенство Коши—Буняковского и неравенства Бесселя (36) и (37), из рядов (32) и (33) получаем

$$ \begin{aligned} &\Big| U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left| u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - u^+_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu)\right| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_{21}|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}| \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \Big[|\varphi_{1n_1,\ldots,n_m}| + |\varphi_{2n_1,\ldots,n_m}| + |f_{1n_1,\ldots,n_m}| + |f_{2n_1,\ldots,n_m}|\Big] \leqslant \\ &\leqslant \gamma_5|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}| \left[\left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \right. \\ &\left. + \left\| \frac{\partial^{5m}f_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] = |\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}|\cdot C_{31}, \end{aligned} \tag{50} $$

где

$$ \gamma_5 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{21}C_{01}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}, \quad 0 < C_{31} = \text{const} < \infty; $$

$$ \begin{aligned} &\Big| U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu)\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left| u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - u^-_{n_1,\ldots,n_m}(t,\varepsilon_{12},\omega,\nu)\right| \cdot |\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)| \leqslant \\ &\leqslant \gamma_{10}|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}| \left[\left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_1(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \right. \\ &\left. + \left\| \frac{\partial^{5m}\varphi_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)} + \left\| \frac{\partial^{5m}f_2(x)}{\partial x_1^5\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\right\|_{L_2(\Omega_l^m)}\right] = |\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}|\cdot C_{32}, \end{aligned} \tag{51} $$

где

$$ \gamma_6 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{5m/2} C_{22}C_{01}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}, \quad 0 < C_{32} = \text{const} < \infty. $$

Из оценок (50) и (51) следует, что $|U(t,x,\varepsilon_{11},\omega,\nu) - U(t,x,\varepsilon_{12},\omega,\nu)|$ мало, если $|\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12}|$ мало в области $\overline{\Omega}$ при $(n_1,\ldots,n_m,\omega,\nu) \in \aleph$.

Аналогично доказывается, что решение $U(t,x,\omega,\nu)$ задачи (1)–(4) непрерывно зависит от второго малого параметра ε_2 и от заданных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

5. Заключение и формулировка теоремы. В данной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи (1)–(4) для нагруженного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с операторами Герасимова—Капуто различных дробных порядков, спектральными параметрами и малым параметром при смешанных производных в многомерной прямоугольной области Ω. Для $(n_1, \ldots, n_m, \omega, \nu) \in \aleph$ доказаны некоторые утверждения при выполнении условий гладкости: пусть функции

$$\varphi_i(x) \in C^4(\Omega_l^m), \quad f_i\left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy\right) \in C_x^2(\Omega_l^m \times \mathbb{R}), \quad i = 1, 2,$$

имеют кусочно непрерывные производные пятого порядка в области Ω_l^m.

Сформулируем теорему доказанную в данной работе.

Теорема. *Пусть выполняются условия гладкости. Тогда для всевозможных натуральных чисел $n_1, \ldots, n_m$ и для всех регулярных значений параметров ω и ν из множества $\aleph$ граничная задача* (1)*–*(4) *однозначно разрешима в области Ω, а её решение представляется в виде рядов Фурье* (32) *и* (33) *в соответствующих подобластях. Данное решение задачи* (1)*–*(4) *непрерывно зависит от заданных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Кроме того, имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} U(t, x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, \nu) = U(t, x, 0, 0, \omega, \nu), \quad i = 1, 2,$$

где $U(t, x, 0, 0, \omega, \nu)$ — решение дробного интегро-дифференциального уравнения смешанного типа вида

$$A_0(U) - B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \nu \int\limits_0^T K_1(t,s) U(s,x) ds + F_1(t,x), & t > 0, \\ \nu \int\limits_{-T}^0 K_2(t,s) U(s,x) ds + F_2(t,x), & t < 0, \end{cases}$$

где

$$A_0(U) = \left[\frac{1 + \operatorname{sgn}(t)}{2} {}_C D_{0t}^{\alpha_1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(t)}{2} {}_C D_{0t}^{\alpha_2}\right] U(t,x),$$

$$B_{1,\omega}(U) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^m (U_{x_i x_i} - U_{x_i x_i x_i x_i}), & t > 0, \\ \omega^2 \sum\limits_{i=1}^m (U_{x_i x_i} - U_{x_i x_i x_i x_i}), & t < 0, \end{cases}$$

при граничных условиях (3) *и* (4),

$$F_i(t,x) = k_i(t) f_i\left(x, \int\limits_{\Omega_l^m} \Theta_i(y) U(0,y) dy\right), \quad i = 1, 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллаев О. Х.* Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — *20*, № 2. — С. 220–240.
2. *Абдуллаев О. Х.* Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с нелинейной нагруженной частью// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *176.* — С. 121–128.
3. *Аттаев А. Х.* Краевые задачи с характеристическими носителями для нагруженных вырождающихся гиперболических уравнений/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 1989.

4. *Бозиев О. Л.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных уравнений гиперболического типа/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2000.
5. *Борисов В. Н., Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, № 1. — С. 105–110.
6. *Бородин А. В.* Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных произволных второго порядка// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 1. — С. 18–26.
7. *Гельфанд И. М.* Некторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1959. — *14*, № 3 (87). — С. 3–19.
8. *Геккиева С. Х.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Нальчик, 2003.
9. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 1995.
10. *Зарубин А. Н.* Краевая задача для дифференциально-разностного смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 2. — С. 217–226.
11. *Казиев В. М.* О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1978. — *14*, № 1. — С. 181–185.
12. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 840–853.
13. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1976. — *12*, № 1. — С. 103–108.
14. *Нахушев А. М.* Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги// Докл. АН СССР. — 1978. — *242*, № 5. — С. 1008–1011.
15. *Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 1. — С. 96–105.
16. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 1. — С. 86–94.
17. *Репин О. А.* Нелокальная задача с операторами Сайго для уравнения смешанного типа третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 63–68. — № 1.
18. *Репин О. А.* Об одной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной// Изв. вузов. Мат. — 2018. — № 8. — С. 46–51.
19. *Уфлянд Я. С.* О распространении колебаний в сложных электрических линиях// Инж.-физ. ж. — 1964. — *7*, № 1. — С. 89–92.
20. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1687–1694.
21. *Юлдашев Т. К.* О разрешимости краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 252–263.
22. *Юлдашев Т. К.* Спектральные особенности решений краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с отражением аргумента// Изв. Ин-та мат. информ. Удмурт. ун-та. — 2019. — *54*. — С. 122–134.
23. *Abdullaev O. Kh., Sadarangani K.* Nonlocal problems with integral gluing condition for loaded mixed-type equations involving the Caputo fractional derivative// Electron. J. Differ. Equations. — 2016. — 164.
24. *Agarwal P., Berdyshev A. S., Karimov E. T.* Solvability of a nonlocal problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative// Results Math. — 2017. — *71*, № 3. — P. 1235–1257.
25. *Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M.* A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order// Вестн. Караганд. ун-та. Мат. — 2020. — № 1 (97). — С. 6–16.
26. *Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A.* On a fractional order Ebola epidemic model// Adv. Difference Equations. — 2015. — 278.
27. *Hussain A., Baleanu D., Adeel M.* Existence of solution and stability for the fractional order novel coronavirus (nCoV-2019) model// Adv. Difference Equations. — 2020. — 384.

28. *Karimov E. T., Al-Salti N., Kerbal S.* An inverse source non-local problem for a mixed-type equation with a Caputo fractional differential operator// East-Asian J. Appl. Math. — 2017. — *7*, № 2. — P. 417–438.
29. *Karimov E. T., Kerbal S., Al-Salti N.* Inverse source problem for multi-term fractional mixed-type equation// in: Advances in Real and Complex Analysis with Applications. — Singapore: Springer Nature, 2017. — P. 289–301.
30. *Kumar D., Baleanu D.* Fractional calculus and its applications in physics// Front. Phys. — 2019. — *7*, № 6. — 81.
31. *Mainardi F.* Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics// in: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (*Carpinteri A., Mainardi F.*, eds.). — Wien: Springer, 1997.
32. *Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F.* Applications of variable-order fractional operators: A review// Proc. Roy. Soc. A. — 2020. — *476*. — 20190498.
33. *Salakhitdinov M. S., Karimov E. T.* Uniqueness of an inverse source non-local problem for fractional-order mixed-type equations// Eurasian Math. J. — 2016. — *7*, № 1. — P. 74–83.
34. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
35. *Sandev T., Tomovski Z.* Fractional Equations and Models: Theory and Applications. — Cham, Switzerland: Springer Nature, 2019.
36. *Saxena R. K., Garra R., Orsingher E.* Analytical solution of space-time fractional telegraph-type equations involving Hilfer and Hadamard derivatives// Integral Transform. Spec. Funct. — 2016. — *21*, № 1. — P. 30–42.
37. *Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W.* A review on variable-order fractional differential equations: Mathematical foundations, physical models, numerical methods, and applications// Fract. Calc. Appl. Anal. — 2019. — *22*, № 1. — P. 27–59.
38. *Tenreiro Machado J. A.* Handbook of Fractional Calculus with Applications. — Berlin–Boston: De Gruyter, 2019.
39. *Terlyga O., Bellout H., Bloom F.* A hyperbolic-parabolic system arising in pulse combustion: Existence of solutions for the linearized problem// Electron. J. Differ. Equations. — 2013. — 46.
40. *Ullah S., Khan M. A., Farooq M., Hammouch Z., Baleanu D.* A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative// Discr. Cont. Dynam. Syst. Ser. S. — 2020. — *13*, № 3. — P. 975–993.
41. *Yuldashev T. K.* On an integro-differential equation of pseudoparabolic-pseudohyperbolic type with degenerate kernels// Proc. Yerevan Univ. Phys. Mat. Sci. — 2018. — *52*, № 1. — P. 19–26.
42. *Yuldashev T. K.* Nonlocal inverse problem for a pseudohyperbolic-pseudoelliptic type integro-differential equations// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 45.
43. *Yuldashev T. K.* On a boundary-value problem for Boussinesq-type nonlinear integro-differential equation with reflecting argument// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 111–123.
44. *Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K.* Boundary-value problems for loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — P. 926—944.
45. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Boundary-value problem for weak nonlinear partial differential equations of mixed-type with fractional Hilfer operator// Axioms. — 2020. — *9*, № 2. — 68.
46. *Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J.* Nonlocal problem for a mixed type fourth-order differential equation with Hilfer fractional operator// Ural Math. J. — 2020. — *6*, № 1. — P. 153–167.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Каримов Эркинжон Тулкинович
Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `erkinjon.karimov@mathinst.uz`

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 211 (2022). С. 114–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-211-114-130

УДК 517.968.74

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2022 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Ф. Д. РАХМОНОВ, А. С. ИСМОИЛОВ**

Аннотация. В работе доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для трехмерного линейного интегро-дифференциального уравнения Буссинеска высокого порядка с вырожденным ядром и общими интегральными условиями и построено решение в виде ряда Фурье. Обоснованы абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда и возможность почленного дифференцирования решения по всем переменным. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной краевой задачи в случае регулярных значений параметра. Для иррегулярных значений параметра построено бесконечное множество решений в виде ряда Фурье.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Буссинеска, смешанная производная, однозначная разрешимость, интегральное условие, вырожденное ядро.

BOUSSINESQ INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS AND A SMALL COEFFICIENT OF MIXED DERIVATIVES

© 2022 **T. K. YULDASHEV, F. D. RAKHMONOV, A. S. ISMOILOV**

Abstract. In this paper, we prove the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for a high-order, three-dimensional, linear Boussinesq integro-differential equation with a degenerate kernel and general integral conditions and construct a solution in the form of a Fourier series. The absolute and uniform convergence of the resulting series and the possibility of term-by-term differentiation of the solution with respect to all variables are established. A criterion for the unique solvability of the boundary-value problem in the case of regular values of the parameter is obtained. For irregular values of the parameter, an infinite set of solutions is constructed in the form of a Fourier series.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Boussinesq equation, mixed derivative, unique solvability, integral condition, degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 35A02, 35M10, 35S05

1. Постановка задачи. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория смешанных задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Исследованию краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество публикаций (см. [1–4,8,15,17]). В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Такие нелокальные задачи рассматривались в работах многих авторов (см. [6, 9, 18, 19]). При исследовании дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных часто применяется метод разделения переменных (см. [10–14, 16, 20, 22, 23]). Отметим, что интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром рассматривались в работах многих авторов (см. [5, 7, 24, 25, 27–30]).

В данной работе при помощи метода вырожденного ядра доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для трехмерного линейного интегро-дифференциального уравнения Буссинеска высокого порядка с вырожденным ядром и общими интегральными условиями в трехмерной области $\Omega = \{(t, x, y) : 0 < t < \beta,\ 0 < x, y < l\}$. С помощью метода рядов Фурье, основанного на разделении переменных, получена счетная система линейных интегральных уравнений Фредгольма.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\varepsilon\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2 \partial x^{2k}} + \varepsilon\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2 \partial y^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}\right)\right] U(t, x, y) = \\ = \nu \int_0^\beta K(t, s) U(s, x, y) ds + f(t) \int_0^\beta U(\theta, x, y) d\theta, \quad (1)$$

где $k \in \mathbb{N}$, β и l — заданные положительные действительные числа, ν — действительный параметр, отличный от нуля, ε — малый положительный параметр, $f(t) \in C[0; \beta]$,

$$0 \neq K(t, s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s),$$

$a_i(t), b_i(s) \in C[0; \beta]$. Здесь предполагается, что система функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^k$ и система функций $\{b_i(s)\}_{i=1}^k$ являются линейно независимыми в совокупности.

Интегро-дифференциальное уравнение (1) будем рассматривать при нелокальных интегральных условиях

$$U(0, x, y) + \int_0^\beta U(t, x, y) dt = \varphi(x, y), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant l, \quad (2)$$

$$U_t(0, x, y) + \int_0^\beta U_t(t, x, y) dt = \psi(x, y), \quad 0 \leqslant x, y \leqslant l \quad (3)$$

и граничных условиях типа Бенара

$$U(t, x, y)\big|_{x=0} = U(t, x, y)\big|_{x=l} = U(t, x, y)\big|_{y=0} = U(t, x, y)\big|_{y=l} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x, y)\big|_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x, y)\big|_{x=l} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(t, x, y)\big|_{y=0} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(t, x, y)\big|_{y=l} = \ldots = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}} U(t, x, y)\big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}} U(t, x, y)\big|_{x=l} = \\ = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}} U(t, x, y)\big|_{y=0} = \frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}} U(t, x, y)\big|_{y=l} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta, \quad (4)$$

где $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(x,y)\big|_{x=0}=\varphi(x,y)\big|_{x=l}=\varphi(x,y)\big|_{y=0}=\varphi(x,y)\big|_{y=l}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)\Big|_{y=l}=\ldots=$$
$$=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\varphi(x,y)\Big|_{y=l}=$$
$$=\psi(x,y)\big|_{x=0}=\psi(x,y)\big|_{x=l}=\psi(x,y)\big|_{y=0}=\psi(x,y)\big|_{y=l}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)\Big|_{y=l}=\ldots=$$
$$=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{x=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{x=l}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{y=0}=\frac{\partial^{2k-2}}{\partial y^{2k-2}}\psi(x,y)\Big|_{y=l}=0. \quad (5)$$

Задача. Найти в области Ω неизвестную функцию $U(t,x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) и заданным условиям (2)–(4), а также следующим условиям:

$$U(t,x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,2k,2k}(\Omega)\cap C^{2+2k+0}_{t,x,y}\cap C^{2+0+2k}_{t,x,y}, \quad (6)$$

где $\overline{\Omega}=\{(t,x,y): 0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant x,y\leqslant l\}$.

2. Разложение формального решения задачи в ряд Фурье.

Будем искать нетривиальные решения задачи в виде ряда Фурье

$$U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (7)$$

где

$$u_{n,m}(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy, \quad n,m=1,2,3,\ldots,$$
$$\vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right).$$

Подставляя ряд (7) в интегро-дифференциальное уравнение (1), получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)u_{n,m}(t)=\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}\int_0^\beta\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)u_{n,m}(s)ds+\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}f(t)\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta, \quad (8)$$

где

$$\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)=\frac{\mu^{2k}_{n,m}}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}, \quad \mu^{2k}_{n,m}=\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}(n^{2k}+m^{2k}).$$

Вводя обозначения

$$\tau_{i,n,m}=\int_0^\beta b_i(s)u_{n,m}(s)ds, \quad (9)$$

перепишем систему (8) в виде

$$u''_{n,m}(t)+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)u_{n,m}(t)=\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}\sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_{i,n,m}+\frac{\nu}{1+\varepsilon\mu^{2k}_{n,m}}f(t)\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta. \quad (10)$$

Систему дифференциальных уравнений (10) будем решать методом вариации произвольных постоянных:

$$u_{n,m}(t) = c_{n,m}\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)) + d_{n,m}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)) + \\ + \frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\sum_{i=1}^{k}\tau_{i,n,m}\int_0^t \sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds + \\ + \frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta\int_0^t \sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))f(s)ds. \quad (11)$$

Интегральные условия (2) и (3) запишем в виде

$$u_{n,m}(0) + \int_0^\beta u_{n,m}(t)dt = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \left[U(0,x,y) + \int_0^\beta U(t,x,y)dt\right]\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \varphi(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy = \varphi_{n,m}, \quad (12)$$

$$u'_{n,m}(0) + \int_0^\beta u'_{n,m}(t)dt = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \left[U_t(0,x,y) + \int_0^\beta U_t(t,x,y)dt\right]\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy = \\ = \frac{2}{l}\int_0^l\int_0^l \psi(x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy = \psi_{n,m}. \quad (13)$$

Для нахождения коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ в (11) воспользуемся условиями (12) и (13):

$$\varphi_{n,m} = u_{n,m}(0) + \int_0^\beta u_{n,m}(t)dt = c_{n,m}\left(1 + \frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\right) + \\ + \frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)) + \gamma_{1n,m} + \gamma_{2n,m},$$

$$\psi_{n,m} = u'_{n,m}(0) + \int_0^\beta u'_{n,m}(t)dt = \frac{c_{n,m}}{\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta) - 1) + \\ + \frac{d_{n,m}}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\left(1 + \frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\right) + \eta_{1n,m}(\beta) + \eta_{2n,m}(\beta),$$

где

$$\gamma_{in,m} = \int_0^\beta \eta_{in,m}(t)dt, \quad \eta_{1n,m}(t) = \nu\sum_{i=1}^k \tau_{i,n,m}\xi_{i,n,m}(t), \quad \eta_{2n,m}(t) = \chi_{n,m}(t)\int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta,$$

$$\xi_{i,n,m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^t \sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds,$$

$$\chi_{n,m}(t) = \frac{\nu}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^t \sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))f(s)ds.$$

Отсюда получаем следующую систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$:

$$\begin{cases} c_{n,m}(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))+d_{n,m}(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))= \\ \qquad\qquad =\lambda_{n,m}(\varepsilon)(\varphi_{1n,m}-\gamma_{1n,m}-\gamma_{2n,m}), \\ c_{n,m}(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-1)+d_{n,m}(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))= \\ \qquad\qquad =\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)(\varphi_{2n,m}-\eta_{1n,m}(\beta)-\eta_{2n,m}(\beta)). \end{cases} \tag{14}$$

Для однозначной разрешимости системы (14) требуется выполнение следующего условия:

$$A_{n,m}=(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))^2+(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))^2= \\ =\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+2(1+\lambda_{n,m}(\varepsilon)\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))\neq 0. \tag{15}$$

Рассуждая от противного, покажем, что условие (15) выполняется при любых натуральных n, m. Предположим, что условие (15) нарушего. Тогда справедливо равенство

$$A_{n,m}=\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+2(1+\lambda_{n,m}(\varepsilon)\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta))=0.$$

Это условие эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta+\theta_{n,m})=\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}},$$

где

$$\theta_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}.$$

Учтем, что $0<\lambda_{n,m}(\varepsilon)<1$. Покажем, что правая часть тригонометрического уравнения больше единицы:

$$\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}>1.$$

Действительно,

$$2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)>2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}.$$

Каждое из этих выражений в неравенстве больше единицы. Поэтому их можно возвести в квадрат:

$$(2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>4(1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)) \quad\Longleftrightarrow\quad 4+4\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)+(\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>4+4\lambda^2_{n,m}(\varepsilon).$$

Отсюда $(\lambda^2_{n,m}(\varepsilon))^2>0$. Следовательно,

$$\frac{2+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{2\sqrt{1+\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}}>1.$$

Поэтому данное тригонометрическое уравнение не имеет решений; противоречие. Следовательно, при любых натуральных n, m условие (15) выполняется. Поэтому система (14) имеет единственное решение

$$c_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}}\Big[\big(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\big)\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)- \\ -\lambda_{n,m}(\varepsilon)\big(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\big)\big(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)\Big],$$

$$d_{n,m}=\frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}}\Big[\big(\varphi_{n,m}-\gamma_{n,m}\big)\big(1-\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)+ \\ +\lambda_{n,m}(\varepsilon)\big(\psi_{n,m}-\eta_{n,m}(\beta)\big)\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)+\sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta)\big)\Big].$$

Подставляя эти найденные коэффициенты в представление (11), получаем представление

$$u_{n,m}(t,\nu) = D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \tau_{i,n,m} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta, \tag{16}$$

где

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t),$$

$$E_{in,m}(t) = B_{1n,m}(t) \int_0^\beta \xi_{in,m}(t)dt + B_{2n,m}(t)\xi_{in,m}(\beta) - \xi_{in,m}(t),$$

$$F_{n,m}(t) = B_{1n,m}(t) \int_0^\beta \chi_{n,m}(t)dt + B_{2n,m}(t)\chi_{n,m}(\beta) - \chi_{n,m}(t),$$

$$B_{1n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}} \times$$
$$\times \Big[\cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(\lambda_{n,m}(\varepsilon) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(1 - \cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big)\Big],$$

$$B_{2n,m}(t) = \frac{\lambda^2_{n,m}(\varepsilon)}{A_{n,m}} \times$$
$$\times \Big[\cos\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\big(\cos(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta) - 1\big) + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)t\big)\Big(\lambda_{n,m} + \sin\big(\lambda_{n,m}(\varepsilon)\beta\big)\Big)\Big].$$

Подставляя (16) в (9), получаем следующую систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений:

$$\tau_{in,m} + \nu \sum_{j=1}^{k} \tau_{jn,m} H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{17}$$

где

$$H_{ijn,m} = \int_0^\beta b_i(s) E_{jn,m}(s)ds, \quad \Psi_{in,m} = \int_0^\beta b_i(s) \left[D_{n,m}(s) - F_{n,m}(s) \int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta \right] ds.$$

Отметим, что из линейной независимости систем функций $a_i(t)$ и $b_i(s)$ следует, что $H_{ijn,m} \neq 0$. Система (17) однозначно разрешима при любых конечных $\Psi_{in,m}$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta_{n,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \nu H_{12n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & 1+\nu H_{22n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \nu H_{k2n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Решения системы (17) записываются в виде

$$\tau_{in,m} = \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int_0^\beta u_{n,m}(\theta)d\theta, \quad i = \overline{1,k}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_{jn,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix}, \quad j = 1,2,$$

$$\Psi_{1in,m} = \int\limits_0^\beta b_i(s) D_{n,m}(s) ds, \quad \Psi_{2in,m} = \int\limits_0^\beta b_i(s) F_{n,m}(s) ds.$$

Подставляя решения (19) системы (17) в представление (16), получаем

$$u_{n,m}(t,\nu) = D_{n,m}(t) - \\ - \nu \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \right] E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta. \quad (20)$$

Теперь представление (20) подставим в ряд Фурье (7):

$$U(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \vartheta_{n,m}(x,y) \Bigg\{ D_{n,m}(t) - \\ -\nu \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} - \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \right] E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta) d\theta \Bigg\}, \quad (21)$$

где

$$\vartheta_{n,m}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l} y\right).$$

3. Исследование однородной задачи. Исследуем случай, когда $f(t) = 0$ для всех $t \in [0;\beta]$. Тогда вместо ряда (21) получим следующий упрощенный ряд Фурье:

$$U(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[D_{n,m}(t) - \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) \right] \vartheta_{n,m}(x,y). \quad (22)$$

3.1. Регулярный случай параметра ν. Определитель $\Delta_{n,m}(\nu)$ в (18) является многочленом относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n,m}(\nu)$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются собственными числами (иррегулярными значениями параметра ν) ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Множество иррегулярных значений параметра ν обозначим через $\Im$, а множество значений параметра $\nu \in \Lambda = ((-\infty;0) \cup (0;\infty)) \setminus \Im$ назовём регулярным. Для регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$ условие (18) выполняется. Поэтому для таких значений $\nu \in \Lambda$ имеет место разложение (22) и устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной задачи.

Покажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (22) для всех регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$. С этой целью сначала рассмотрим сходимость следующего ряда:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m}(t) \vartheta_{n,m}(x,y). \quad (23)$$

Учтем, что $D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t)$. Так как справедливы неравенства $0 < \lambda_{n,m}(\varepsilon) < 1$, гладкие функции $B_{1n,m}(t)$ и $B_{2n,m}(t)$ ограничены вместе со своими производными второго порядка. Поэтому справедливы оценки

$$|D_{n,m}(t)| \leqslant C_1 \cdot [|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|], \quad (24)$$

$$|D''_{n,m}(t)| \leqslant C_1 \cdot [|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|], \quad (25)$$

где $0 < C_1 = \text{const}$.

Условия *A.* Пусть $\varphi(x,y) \in C^{2k}([0;l] \times [0;l])$, $\psi(x,y) \in C^{2k}([0;l] \times [0;l])$ и в области $[0;l] \times [0;l]$ имеют также кусочно непрерывные производные порядка $2k+1$.

При выполнении условий A справедливы следующие формулы:

$$|\varphi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(2k+1)}\right|}{n^{2k+1}}, \quad \left|\varphi_{n,m}^{(2k+1)}\right| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{m^{2k+1}}, \tag{26}$$

$$|\psi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(2k+1)}\right|}{n^{2k+1}}, \quad \left|\psi_{n,m}^{(2k+1)}\right| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{2k+1} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{m^{2k+1}}, \tag{27}$$

где

$$\varphi_{n,m}^{(2k+1)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \varphi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{28}$$

$$\varphi_{n,m}^{(4k+2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{29}$$

$$\psi_{n,m}^{(2k+1)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \psi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy, \tag{30}$$

$$\psi_{n,m}^{(4k+2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \vartheta_{n,m}(x,y) dxdy. \tag{31}$$

Из соотношения (26) и (27) получаем, что справедливы формулы

$$|\varphi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2} \frac{\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{n^{2k+1} m^{2k+1}}, \quad |\psi_{n,m}| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2} \frac{\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|}{n^{2k+1} m^{2k+1}}. \tag{32}$$

Для коэффициентов Фурье (28)–(31) справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y)\right]^2 dxdy, \tag{33}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right]^2 \leqslant \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y)\right]^2 dxdy. \tag{34}$$

С учетом оценки (24), формулы (32) и неравенства Бесселя (33), (34) и применением неравенство Коши—Буняковского получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m}(t) \vartheta_{n,m}(x,y) \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} |D_{n,m}(t)| \cdot |\vartheta_{n,m}(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \Big[|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|\Big] \leqslant \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^{2k+1}} \Big[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right| + \left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1 \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{(nm)^{4k+2}}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_1}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\varphi(x,y)\right]^2 dxdy}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\psi(x,y)\right]^2 dxdy}\right] < \infty, \quad (35)$$

где

$$\gamma_1 = C_1\cdot\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+2}.$$

Отсюда заключаем, что ряд (23) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Теперь рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y). \quad (36)$$

Учтем, что

$$E_{in,m}(t) = B_{1n,m}(t)\int_0^{\beta}\xi_{in,m}(t)dt + B_{2n,m}(t)\xi_{in,m}(\beta) - \xi_{in,m}(t),$$

$$\xi_{i,n,m}(t) = \frac{1}{\lambda_{n,m}(\varepsilon)(1+\varepsilon\mu_{n,m}^{2k})}\int_0^t \sin(\lambda_{n,m}(\varepsilon)(t-s))a_i(s)ds, \quad i=\overline{1,k}.$$

Тогда из гладкости этих функций получаем, что

$$|E_{in,m}(t)| \leqslant C_{i2}, \quad |E''_{in,m}(t)| \leqslant C_{i2}, \quad (37)$$

где $0 < C_{i2} = \mathrm{const}$, $i=\overline{1,k}$. Из выполнения условия (18) следует, что $|\Delta_{n,m}(\nu)| > 0$. В состав определителей $\Delta_{in,m}(\nu)$ входят столбцы

$$\Psi_{in,m} = \int_0^{\beta} b_i(s)D_{n,m}(s)ds, \quad \text{где} \quad D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m}B_{2n,m}(t).$$

С учетом соотношений (32)–(34) и (37) аналогично оценке (35) покажем, что ряд (36) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Действительно, применяя неравенство Коши—Буняковского к (36), получаем оценку

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\vartheta_{n,m}(x,y) \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{|\Delta_{n,m}(\nu)|}\sum_{i=1}^{k}|\Delta_{1in,m}(\nu)|\cdot|E_{in,m}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}C_{i2}|\Delta_{in,m}(\nu)| \leqslant C_1C_3\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[|\varphi_{1n,m}|+|\varphi_{2n,m}|\right]\sum_{i=1}^{k}C_{i2}|\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}+\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma_2}{l}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\varphi(x,y)\right]^2 dxdy}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int_0^l\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1}\partial y^{2k+1}}\psi(x,y)\right]^2 dxdy}\right]<\infty, \quad (38)$$

где

$$\gamma_2 = C_1\cdot C_3\cdot C_4\cdot\left(\frac{l}{\pi}\right)^6, \quad C_3 \geqslant \min_{n,m}\frac{1}{|\Delta_{n,m}(\nu)|}, \quad C_4 \geqslant \sum_{i=1}^{k} C_{i2}|\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu)|,$$

$$\overline{\Delta}_{1in,m}(\nu) = \begin{vmatrix} 1+\nu H_{11n,m} & \ldots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{1kn,m} \\ \nu H_{21n,m} & \ldots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \ldots & \nu H_{2kn,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu H_{k1n,m} & \ldots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \overline{\psi}_{kn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \ldots & 1+\nu H_{kkn,m} \end{vmatrix},$$

$$\overline{\psi}_{in,m} = \int_0^{\beta} b_i(s)ds, \quad i=\overline{1,k}.$$

Из оценки (38) заключаем, что ряд (36) сходится абсолютно и равномерно в области Ω. Из сходимости рядов (35) и (38) следует сходимость ряда (22). Для ряда (22) при всех регулярных значениях параметра $\nu \in \Lambda$ покажем непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1). Формально дифференцируем ряд (22) нужное число раз:

$$U_{tt}(t,x,y,\nu) = \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[D''_{n,m}(t) - \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (39)$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu) = (-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}\left[D_{n,m}(t) - \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (40)$$

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu) = (-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^{2k}\left[D_{n,m}(t) - \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (41)$$

$$\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu) = (-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^{2k}\left[D''_{n,m}(t) - \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y), \quad (42)$$

$$\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu) = (-1)^k\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi m}{l}\right)^{2k}\left[D''_{n,m}(t) - \nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E''_{in,m}(t)\right]\vartheta_{n,m}(x,y). \quad (43)$$

Применим к ряду (39) сначала формулу (32) и оценки (25), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда получим

$$|U_{tt}(t,x,y,\nu)| \leqslant \frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[|D''_{n,m}(t)| + |\nu|\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|\cdot|E''_{in,m}(t)|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l}\gamma_1\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{2k+1}}\left[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right| + \left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|\right] + \frac{2}{l}\gamma_2|\nu|\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{2k+1}}\left[\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right| + \left|\psi_{n,m}^{4k+2}\right|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l}\big(\gamma_1+\gamma_2|\nu|\big)\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{(nm)^{4k+2}}}\left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\psi_{n,m}^{(4k+2)}\right|^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_3 \left[\sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (44)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{2}{l} (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^{4k+2}}}.$$

Применим к ряду (40) сначала формулу (32) и оценки (24), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда аналогично (44) получим

$$\left| \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} U_{xx}(t,x,y,\nu) \right| \leqslant \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} \left\{ \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^1 m^{2k+1}} \left[|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}| + |\psi_{n,m}^{(4k+2)}| \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 |\nu| \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^1 m^{2k+1}} \left[|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}| + |\psi_{n,m}^{(4k+2)}| \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{4k+2}}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}^{(4k+2)}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\psi_{n,m}^{(4k+2)}|^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_4 \left[\sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (45)$$

где

$$\gamma_4 = \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{4k+2}}}.$$

Применим к ряду (41) сначала формулу (32) и оценки (24), (35), а затем неравенство Коши—Буняковского и оценки (33)–(35), (37), (38). Тогда аналогично (45) получим

$$\left| \frac{\partial^{2k}}{\partial y^{2k}} U(t,x,y,\nu) \right| \leqslant \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^{2k} \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} \left\{ \gamma_1 \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^1} \left[|\varphi_{n,m}^{(4k+2)}| + |\psi_{n,m}^{(4k+2)}| \right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 |\nu| \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1} m^1} \left[|\varphi_{n,m}^{(4k+1)}| + |\psi_{n,m}^{(2k+1)}| \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \left(\frac{\pi}{l} \right)^{2k} (\gamma_1 + \gamma_2 |\nu|) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^2}} \left[\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{n,m}^{(4k+2)}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} |\psi_{n,m}^{(4k+2)}|^2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_5 \left[\sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int\limits_0^l \int\limits_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (46)$$

где

$$\gamma_5 = \frac{2}{l}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k}(\gamma_1 + \gamma_2|\nu|)\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k+2}m^2}}.$$

Аналогично оценкам (44)–(46) для рядов (42) и (43) легко показать, что

$$\left|\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial x^{2k}}U(t,x,y,\nu)\right| < \infty, \quad \left|\frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\partial y^{2k}}U(t,x,y,\nu)\right| < \infty.$$

Следовательно, решение $U(t,x,y,\nu)$ задачи существует в области Ω, определено рядом (22) и удовлетворяет условию (6).

Теперь покажем при всех регулярных значениях $\nu \in \Lambda$ единственность решения задачи. Предположим, что $\varphi(x,y) \equiv 0$, $\psi(x,y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} \equiv 0$, $\psi_{n,m} \equiv 0$. Поэтому

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m}B_{2n,m}(t) \equiv 0,$$

$$\Psi_{in,m} = \int_0^\beta b_i(s)D_{n,m}(s)ds \equiv 0, \quad \Delta_{in,m}(\nu) \equiv 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

Следовательно, из формулы (22) вытекают равенства

$$\int_0^l\int_0^l U(t,x,y)\vartheta_{n,m}(x,y)dxdy = 0, \quad n,m = 1,2,3,\ldots$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right\}, \quad \left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right)\right\}$$

в пространстве $L_2[0;l]$ заключаем, что $U(t,x,y) \equiv 0$ для всех $x,y \in [0;l]\times[0;l]$ и $t \in [0;\beta]$.

3.2. Иррегулярный случай. Теперь переходим к иррегулярному случаю параметра $\nu \in \Im$. Для этих значений получаем следующую однородную систему, состоящую из счетных систем алгебраических уравнений:

$$\tau_{in,m} + \nu\sum_{j=1}^{k}\tau_{jn,m}H_{ijn,m} = \Psi_{in,m}, \tag{47}$$

где

$$H_{ijn,m} = \int_0^\beta b_i(s)E_{jn,m}(s)ds.$$

В качестве необходимого условия существования решения системы (47) выступает условие ортогональности

$$\Psi_{in,m} = \int_0^\beta b_i(s)D_{n,m}(s)ds = 0.$$

Так как по условию постановки задач $b_i(t) \neq 0$, то согласно теореме о среднем должно быть выполнено условие

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m}B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m}B_{2n,m}(t) \equiv 0.$$

Поскольку $D_{n,m}(t) \neq 0$, необходимым условием существования решения системы (47) является $\varphi_{n,m} \equiv 0$, $\psi_{n,m} \equiv 0$. При этом система (47) имеет некоторое число p $(1 \leqslant p \leqslant k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\left\{\tau_{1n,m}^{(\ell)}, \tau_{2n,m}^{(\ell)}, \ldots, \tau_{kn,m}^{(\ell)}\right\}$, $\ell = \overline{1,p}$. Функции

$$u_{\ell n,m}(t,\nu) = \nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{1n,m}^{(\ell)}E_{in,m}(t), \quad \ell = \overline{1,p},$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u_{n,m}(t,\nu)=\nu\sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^\beta W_{in,m}(t,s)E_{in,m}(t)u_{n,m}(s,\nu)ds, \tag{48}$$

где $W_{in,m}(t,s)=E_{in,m}(t)b_i(s)$.

Общее решение однородного интегрального уравнения (48) можно записать в виде

$$u_{n,m}(t,\nu)=\sum_{\ell=1}^{p}\sigma_\ell u_{\ell n,m}(t,\nu), \tag{49}$$

где σ_ℓ — произвольные постоянные. Подставляя функцию (49) в ряд Фурье (7), получаем

$$\begin{gathered} U(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{p}\sigma_\ell u_{\ell n,m}(t,\nu)\vartheta_{n,m}(x,y),\\ \vartheta_{n,m}(x,y)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}y\right). \end{gathered} \tag{50}$$

Следовательно, для иррегулярных значений параметра $\nu\in\Im$ справедливо разложение (50). При этом необходимым условием существования решения задачи является однородность краевых условий $\varphi(x,y)\equiv 0$, $\psi(x,y)\equiv 0$.

4. Исследование неоднородной задачи.

4.1. Разрешимость задачи. Рассмотрим регулярные значения параметра $\nu\in\Lambda$. Методом сжимающих отображений докажем существование и единственность счетной системы линейных интегральных уравнений (20). Счетную систему уравнений (20) перепишем в следующем виде:

$$u_{n,m}(t,\nu)=W_{n,m}(t)+V_{n,m}(t)\int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta,\nu)d\theta, \tag{51}$$

$$W_{n,m}(t)=D_{n,m}(t)-\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t), \tag{52}$$

$$V_{n,m}(t)=\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)-F_{n,m}(t). \tag{53}$$

Теперь в соответствии с представлением (51) перепишем ряд Фурье (21) в виде

$$U(t,x,y,\nu)=\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}\vartheta_{n,m}(x,y)\left[W_{n,m}(t)+V_{n,m}(t)\int\limits_0^\beta u_{n,m}(\theta,\nu)d\theta\right]. \tag{54}$$

Рассмотрим банахово пространство $B_2(\beta)$ последовательности непрерывных функций

$$\{u_{n,m}(t)\}_{n,m=1}^{\infty}$$

на отрезке $[0;\beta]$ с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(\beta)}=\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\max_{t\in[0;\beta]}|u_{n,m}(t)|\right)^2}<\infty.$$

Итерационный процесс Пикара для счетной системы (51) определим следующим образом:

$$u^0_{n,m}(t,\nu)=W_{n,m}(t),\quad u^{q+1}_{n,m}(t,\nu)=W_{n,m}(t)+V_{n,m}(t)\int\limits_0^\beta u^q_{n,m}(\theta,\nu)d\theta,\quad q=0,1,2,\ldots \tag{55}$$

Для первого приближения итерационного процесса (55) справедлива оценка, аналогичная (44):

$$\|u^0_{n,m}(t,\nu)\|_{B_2(\beta)} \leqslant \sum_{n,m=1}^{\infty} \max_{t\in[0;\beta]} \left[|D_{n,m}(t)| + |\nu| \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\Delta_{1in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} \right| \cdot |E_{in,m}(t)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_0 \left[\sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \varphi(x,y) \right]^2 dxdy} + \sqrt{\int_0^l \int_0^l \left[\frac{\partial^{4k+2}}{\partial x^{2k+1} \partial y^{2k+1}} \psi(x,y) \right]^2 dxdy} \right] < \infty, \quad (56)$$

где

$$\gamma_0 = C_1 \cdot \left(\frac{l}{\pi} \right)^{4k+2} \big(1 + C_3 \cdot C_4 \cdot |\nu|\big) \sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4k+2} m^{4k+2}}}.$$

Для произвольной разности приближения (55) получаем оценку

$$\left| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0;\beta]} \left| \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \right| \int_0^{\beta} \left| u^{q}_{n,m}(\theta,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(\theta,\nu) \right| d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \beta C_5 \max_{t\in[0;\beta]} \left| u^{q}_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right|,$$

где

$$C_5 \geqslant \max_{t\in[0;\beta]} \left| \nu \sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)} E_{in,m}(t) - F_{n,m}(t) \right|.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \beta C_5 \left\| u^{q}_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)}. \quad (57)$$

Из оценок (56) и (57) при $\beta C_5 < 1$ следует, что счетная система линейных интегральных уравнений (51) имеет единственное решение на отрезке $[0;\beta]$.

Аналогично оценке (57) получаем оценку

$$\left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) + u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta C_5 \left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} + \beta C_5 \left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)}$$

и далее оценку

$$\left\| u_{n,m}(t,\nu) - u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \frac{\beta C_5}{1 - \beta C_5} \left\| u^{q+1}_{n,m}(t,\nu) - u^{q}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\beta C_5)^2}{1 - \beta C_5} \left\| u^{q}_{n,m}(t,\nu) - u^{q-1}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} \leqslant \ldots \leqslant \frac{(\beta C_5)^{q+2}}{1 - \beta C_5} \left\| u^{0}_{n,m}(t,\nu) \right\|_{B_2(\beta)} < \infty.$$

В силу последней оценки аналогично случаю ряда Фурье (22) доказывается сходимость ряда (54).

4.2. Устойчивость решения от интегральных данных. С учетом представления (52), (53) и равенства

$$D_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} B_{1n,m}(t) + \psi_{n,m} B_{2n,m}(t),$$

используя свойства определителя, запишем счетную систему (51) в виде

$$u_{n,m}(t,\nu)=\varphi_{n,m}B_{1n,m}(t)+\psi_{n,m}B_{2n,m}(t)-$$
$$-\nu\sum_{i=1}^{k}\left(\varphi_{n,m}\frac{\Delta_{11in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}+\psi_{n,m}\frac{\Delta_{12in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right)E_{in,m}(t)+$$
$$+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}E_{in,m}(t)-F_{n,m}(t)\int\limits_0^{\beta}u_{n,m}(\theta,\nu)d\theta, \quad (58)$$

где

$$\Delta_{1jin,m}(\nu)=\begin{vmatrix}1+\nu H_{11n,m} & \dots & \nu H_{1(i-1)n,m} & \Psi_{1j1n,m} & \nu H_{1(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{1kn,m}\\ \nu H_{21n,m} & \dots & \nu H_{2(i-1)n,m} & \Psi_{1j2n,m} & \nu H_{2(i+1)n,m} & \dots & \nu H_{2kn,m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \nu H_{k1n,m} & \dots & \nu H_{k(i-1)n,m} & \Psi_{1jkn,m} & \nu H_{k(i+1)n,m} & \dots & 1+\nu H_{kkn,m}\end{vmatrix},$$

$$\Psi_{1jin,m}=\int\limits_0^{\beta}b_i(s)B_{jn,m}(s)ds, \quad j=1,2.$$

Пусть $U_1(t,x,y,\nu)$ и $U_2(t,x,y,\nu)$ — два разных решения задачи (1)–(6), соответствующие двум различным значениям функций $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ и $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, соответственно. Положим

$$\max\left\{\left|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}\right|,\ \left|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}\right|\right\}<\delta_{n,m},$$

где $0<\delta_{n,m}$ — достаточно малое число, удовлетворяющее условию

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}<\infty.$$

Тогда из счетной системы (58) получим

$$\left|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}\right|\cdot|B_{1n,m}(t)|+\left|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}\right|\cdot|B_{2n,m}(t)|+$$
$$+|\nu|\sum_{i=1}^{k}\left(|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}|\cdot\left|\frac{\Delta_{11in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|+|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}|\left|\frac{\Delta_{12in,m}(\nu)}{\Delta_{n,m}(\nu)}\right|\right)|E_{in,m}(t)|+$$
$$+|F_{n,m}(t)|\int\limits_0^{\beta}\left|u_{1n,m}(\theta,\nu)-u_{2n,m}(\theta,\nu)\right|d\theta\leqslant$$
$$\leqslant C_6|\varphi_{1n,m}-\varphi_{2n,m}|+C_7|\psi_{1n,m}-\psi_{2n,m}|+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|<$$
$$<(C_6+C_7)\delta_{n,m}+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|. \quad (59)$$

Тогда из ряда (54) получим

$$\left|U_1(t,x,y,\nu)-U_2(t,x,y,\nu)\right|<\frac{2}{l}\sum_{n,m=1}^{\infty}|\vartheta_{n,m}(x,y)|\times$$
$$\times\left[(C_6+C_7)\delta_{n,m}+C_5\beta|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|\right]=$$
$$=\frac{2}{l}(C_6+C_7)\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}|\vartheta_{n,m}(x,y)|+\frac{2}{l}C_5\beta\sum_{n,m=1}^{\infty}|u_{1n,m}(t,\nu)-u_{2n,m}(t,\nu)|\cdot|\vartheta_{n,m}(x,y)|=$$
$$=\frac{2}{l}(C_6+C_7)\sum_{n,m=1}^{\infty}\delta_{n,m}+C_5\beta|U_1(t,x,y,\nu)-U_2(t,x,y,\nu)|.$$

Отсюда следует оценка

$$\left|U_1(t,x,y,\nu) - U_2(t,x,y,\nu)\right| < \frac{2}{l} \cdot \frac{C_6 + C_7}{1 - C_5\beta} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m}.$$

Если положить

$$\varepsilon = \frac{2}{l} \cdot \frac{C_6 + C_7}{1 - C_5\beta} \sum_{n,m=1}^{\infty} \delta_{n,m},$$

то получим доказательство устойчивости решения задачи (1)–(6) от интегральных данных.

Аналогично доказывается, что решение поставленной нелокальной задачи (1)–(6) непрерывно зависит от малого параметра ε.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия A. Для регулярных значений параметра $\nu \in \Lambda$ при $C_5\beta < 1$, $C_5 = \mathrm{const}$ задача однозначно разрешима в трехмерной области Ω, а решение определяется рядом* (21). *Для иррегулярных значений параметра $\nu \in \Im$ задача имеет бесконечное множество решений в области Ω, которые определяются рядом* (50). *Кроме того, решения нелокальной задачи* (1)–(6) *устойчивы по интегральным данным $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ и по малому параметру ε.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. — Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Апаков Ю. П.* О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// Укр. мат. ж. — 2012. — *64*, № 1. — С. 1–11.
3. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями// Укр. мат. ж. — 2013. — *65*, № 3. — С. 315–328.
4. *Бештоков М. Х.* Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 9. — С. 1497–1514.
5. *Бойчук А. А., Страх А. П.* Нетеровы краевые задачи для систем линейных интегро-динамических уравнений с вырожденным ядром на временной шкале// Нелин. колебания. — 2014. — *17*, № 1. — С. 32–38.
6. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды// Мат. модел. — 2000. — *12*, № 1. — С. 94–103.
7. *Джумабаев Д. С., Бакирова Э. А.* Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегродифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром// Нелин. колебания. — 2015. — *18*, № 4. — С. 489–506.
8. *Джураев Т. Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. — Ташкент: ФАН, 2000.
9. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 4. — С. 547–564.
10. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2 (92). — С. 97–154.
11. *Лажетич Н.* О существовании классического решения смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка// Диффер. уравн. — 1998. — *34*, № 5. — С. 682–694.
12. *Мартемьянова Н. В.* Задача Дирихле для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с переменным потенциалом// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 11. — С. 44–53.
13. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи// Диффер. уравн. — 1999. — *35*, № 8. — С. 1094–1100.
14. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени// Изв. вузов. Мат. — 2012. — № 10. — С. 32–44.
15. *Репин О. А.* Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа// Докл. РАН. — 1999. — *365*, № 5. — С. 593–595.

16. *Сабитов К. Б.* Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 596–602.
17. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
18. *Тагиев Р. К., Габибов В. М.* Об одной задаче оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием// Вестн. Самар. техн. ун-та. — 2016. — *20*, № 1. — С. 54–64.
19. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 2. — С. 133–166.
20. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. — М.: Изд-во МГУ, 1991.
21. *Эгамбердиев У., Апаков Ю. П.* О задаче Дирихле для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерной области// Изв. АН УзССР. — 1989. — № 3. — С. 51–56.
22. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 9. — С. 1703–1711.
23. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 1. — С. 112–123.
24. *Юлдашев Т. К.* Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка// Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 9. — С. 74–79.
25. *Юлдашев Т. К.* Нелокальная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Укр. мат. ж. — 2016. — *68*, № 8. — С. 1115–1131.
26. *Юлдашев Т. К.* Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка// Изв. ин-та мат. мех. Удмурт. гос. ун-та. — 2016. — *47*, № 1. — С. 119–128.
27. *Юлдашев Т. К.* Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 101–110.
28. *Юлдашев Т. К.* Об одной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *145*. — С. 95–109.
29. *Юлдашев Т. К.* Обратная краевая задача для интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *149*. — С. 129–140.
30. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Boundary-value problems for systems of integro-differential equations with degenerate kernel// Ukr. Math. J. — 1996. — *48*, № 11. — P. 1785–1789.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `tursun.k.yuldashev@gmail.com`

Рахмонов Фарход Дустмуродович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `mr.haker-frd@bk.ru`

Исмоилов Алишер Сидикович
Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
E-mail: `alisher_8778@mail.ru`

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с С2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.