

ISSN 2782-4438



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СОВРЕМЕННАЯ
МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Тематические
обзоры

Том 226



Москва 2023

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Современная математика и ее приложения

Тематические обзоры

Том 226 (2023)

Дата публикации 14 августа 2023 г.

Издается в электронной форме с 2016 года

Выходит 12 раз в год

Научные редакторы выпуска

А. С. Бондарев

Е. Е. Букжалёв

Н. И. Гусева

М. В. Шамолин

Компьютерная вёрстка

А. А. Широнин

Учредитель и издатель:

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки Всероссийский институт научной и технической
информации Российской академии наук
(ФГБУН ВИНТИ РАН)

Адрес редакции и издателя:

125190, Москва, А-190, ул. Усиевича, д. 20, офис 1223

Телефон редакции

+7 (499) 155-42-29, +7 (499) 155-42-30

Электронная почта

math@viniti.ru

Свидетельство о регистрации

Эл № ФС77-82877 от 25 февраля 2022 г.

ISSN

2782-4438

Форма распространения:

периодическое электронное сетевое издание

URL:

<http://www.viniti.ru/products/publications/pub-itogi#issues>

<http://www.mathnet.ru/into>

http://elibrary.ru/title_about.asp?id=9534

ISSN 2782–4438

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВСЕРОССИЙСКИЙ ИНСТИТУТ
НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ РАН)

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЗОРЫ

Том 226

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



Москва 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Граничные управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с промежуточными условиями (<i>В. Р. Барсегян, С. В. Солодуша</i>)	3
Нормализация и квантование гамильтоновых систем с применением компьютерной алгебры (<i>И. Н. Беляева, И. К. Кириченко, Н. Н. Чеканова</i>)	16
О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана (<i>В. Е. Березовский, С. В. Лещенко, Й. Микеш</i>)	23
О дискретной задаче Дирихле в четверти плоскости (<i>В. Б. Васильев, А. А. Ходырева</i>)	34
Краевые задачи со сдвигом и сопряжением и соответствующие системы сингулярных интегральных уравнений для бианалитических функций (<i>А. М. Володченко, А. В. Юденков</i>)	47
О применении метода обобщенных степеней Берса при построении решений уравнения Дирака для движения частицы в центрально симметричном поле ядра (<i>Ю. А. Гладышев, Е. А. Лошкарева</i>)	54
Критерий единственности решения обратных задач для абстрактных сингулярных дифференциальных уравнений (<i>А. В. Глушак</i>)	61
Инвариантные многообразия и аттракторы периодической краевой задачи уравнения Курамото—Сивашинского с учетом дисперсии (<i>А. Н. Куликов, Д. А. Куликов</i>)	69
Разрешимость задач стартового управления для класса вырожденных нелинейных уравнений с дробными производными (<i>М. В. Плеханова, Г. Д. Байбулатова</i>)	80
О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной (<i>В. С. Рылов</i>)	89
Ресурсные сети с динамическими длительностями прохождения по дугам (<i>В. А. Скороходов, Я. М. Ерусалимский, Х. Абдулрахман</i>)	108
Задача рассеяния для одного несамосопряженного оператора Штурма—Лиувилля (<i>Р. Г. Фарзуллазаде, Х. Р. Мамедов</i>)	120
Квазилинейные уравнения с дробной производной Герасимова—Капуто. Секториальный случай (<i>В. Е. Федоров, Т. А. Захарова</i>)	127
Интегральные нечеткие средние в задаче агрегирования нечеткой информации (<i>В. Л. Хацкевич</i>)	138
Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы (<i>О. Б. Цехан</i>)	150
Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании задачи Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (<i>В. А. Шишкин</i>)	165
О задаче, связанной с линейной перидинамической моделью (<i>А. В. Юлдашева</i>)	170
Таблицы соответствия математических специальностей Номенклатуры научных специальностей ВАК РФ и рубрикационных кодов УДК и ГРНТИ (<i>Е. Е. Букжалева, А. В. Обчинников, А. А. Широнин</i>)	175



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 3–15
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-3-15

УДК 517.977: 534.112

ГРАНИЧНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Рассматриваются задачи граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками. Полагается, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением одного конца при закреплённом другом конце с заданными начальным, конечным условиями и заданными промежуточными условиями на значения функции прогиба и скоростей точек системы. Предложен подход аналитического построения граничного управления. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере. Проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ.

Ключевые слова: управление колебаниями, граничное управление, многоточечные промежуточные состояния, разделение переменных.

BOUNDARY CONTROL OF SOME DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH INTERMEDIATE CONDITIONS

© 2023 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA

ABSTRACT. We consider boundary-control problems for a distributed inhomogeneous oscillatory system described by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. We assume that the propagation times for all homogeneous sections are the same. The control is performed by shifting one end with the other end fixed. The initial, intermediate, and final conditions on the deflection function and the velocities of the points of the system are given. An approach to the analytical construction of the boundary control is proposed. The results obtained are illustrated by a specific example. A computational experiment and a comparative analysis were performed.

Keywords and phrases: control of oscillations, boundary control, multipoint intermediate states, separation of variables.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Задачи управления колебательными процессами, описываемые волновыми уравнениями, имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение (см. [1, 2, 5–10, 13, 14, 17–19, 21–24]). Задачам управления разнородных распределённых колебательных систем посвящены, в частности, работы [2, 7–10, 13, 14, 19, 23, 24]. Одной из первых работ в этой области является [13], где решена задача (поставленная А. Г. Бутковским) управления распределённой колебательной системой, состоящей из двух кусочно однородных сред. В [9, 10] и других работах В. А. Ильина и его учеников для задач граничных управлений процессом, описываемым одномерным волновым уравнением, состоящим из двух участков разной плотности и

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема AAAA-A21-121012090034-3).

упругости, при условии, что длины этих участков выбраны так, что время прохождения волны по каждому из этих участков является одинаковым, изучены и введены формулы типа Даламбера. Исследованиям кусочно однородных систем посвящены, в частности, работы [12, 15, 16]. Задачи граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой пока еще недостаточно исследованы. Весьма важны краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми условиями заданы также многоточечные промежуточные условия. Такие задачи изучаются, в частности, в [1, 5, 17, 18, 21, 22].

В настоящей работе рассмотрены новые задачи управления неоднородной (кусочно однородной) колебательной системой с заданными значениями функции колебания и скоростей точек в промежуточные моменты времени. Управление осуществляется смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными начальным, конечным условиями и заданными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени. Рассмотренный кусочно однородный колебательный процесс состоит из двух участков с разными физическими характеристиками (упругими свойствами и плотностями) материалов. Предполагается, что длины однородных участков таковы, что время прохождения волны по каждому из однородных участков является одинаковым.

Предложен подход аналитического построения граничного управления. Схема построения заключается в следующем: исходная задача сводится к задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее при помощи метода разделения переменных и метода теории управления конечномерных систем с многоточечными промежуточными условиями (см. [1, 3–5, 17, 18, 20–22]) для произвольного числа первых гармоник построены граничные управления. Полученные результаты проиллюстрированы на конкретном примере. Проведен также вычислительный эксперимент с построением соответствующих графиков и их сравнительный анализ, которые подтверждают полученные результаты.

2. Постановки задач. Рассматриваются колебания распределенной кусочно однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоящей из двух участков: участка $-l_1 \leq x \leq 0$ и участка $0 \leq x \leq l$. Обозначим через $\rho_i = \text{const}$ линейную плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $a_i = \sqrt{\frac{k_i}{\rho_i}}$ — скорость прохождения по участкам волны соответственно для первого и второго участка, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}.$$

Отметим, что такими колебательными неоднородными процессами могут быть, в частности, продольные колебания кусочно однородного стержня (ρ — плотность, k — модуль упругости) или поперечные колебания кусочно однородной струны (ρ — плотность, k — натяжение струны).

Пусть состояние колебательной системы (продольные колебания стержня или поперечные колебания струны) описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а отклонение от состояния равновесия подчиняется следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (3)$$

Распределенная кусочно однородная колебательная система переменной структуры (см. [3, 4, 20]), представленная однородным волновым уравнением (1), в частности, описывает не только поперечные колебания неоднородного стержня, но и продольные колебания неоднородной струны.

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Пусть в промежуточные моменты времени t_k : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$, заданы промежуточные значения функции состояния (прогиба струны) и ее производной (значения скоростей точек струны):

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad j = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Отметим, что промежуточные значения функции состояния (6) и значения производной (7) можно задавать в промежуточные моменты времени t_k ($k = \overline{1, m}$) в любой очередности. Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_j(x) \in C^1[-l_1, l]$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются соответствующие условия согласования (см. [1, 17, 18, 21, 22]).

В данной работе для уравнения (1) с начальными (4) и конечными (5) условиями на промежутке времени $[0, T]$ с заданными различными условиями ((6) или (7)) на значения функции состояния и значения производной системы в разные промежуточные моменты времени рассматриваются следующие задачи граничного управления системы смещением левого конца при закреплённом правом конце:

1. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2)), под воздействием которого колебательное движение системы (1) с условиями сопряжения (3) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (6).

2. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (2)), под воздействием которого колебательное движение системы (1) с условиями сопряжения (3) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (7).

3. Сведение поставленных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Для построения решения поставленных задач перейдем к новой переменной (см. [16])

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (8)$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1) будем иметь, что отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит к отрезку $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции состояния $Q(\xi, t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

с начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (11)$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = \overline{1, m}, \quad (13)$$

с конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (14)$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (15)$$

Для удобства после замены переменной (8) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (10) неоднородны, решение уравнения (9) построим в виде суммы

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (16)$$

где $V(\xi, t)$ — функция с граничными условиями

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (17)$$

требуемая определения, а функция $W(\xi, t)$ — решение уравнения (9) с условиями

$$W(-l, t) = u(t), \quad W(l, t) = 0$$

и имеет вид

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi)u(t). \quad (18)$$

Подстановка (16) в (9) с учетом (18) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l}(\xi - l)\ddot{u}(t). \quad (20)$$

Функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (15) в точке $\xi = 0$ соединения участков. Отметим, что согласно (8) будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_0(-l_1) &= \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \\ \psi_0(-l_1) &= \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \end{aligned} \quad (21)$$

Из начальных (11), промежуточных (12), (13) и конечных (14) условий, с учетом условий согласования и (21), получим, что функция $V(\xi, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_0(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_0(-l), \quad (22)$$

промежуточным условиям

$$V(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_i(-l), \quad i = \overline{1, m}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_j(-l), \quad j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

и конечным условиям

$$V(\xi, T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_T(-l), \quad \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_T(-l). \quad (25)$$

Таким образом, решение поставленных задач сведено к решению задач управления колебаниями, описываемым уравнением (19) с однородными граничными условиями (17), которые формулируются следующим образом:

1⁰. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (10)), под воздействием которого колебательное движение системы (19) с условиями сопряжения (15) из заданного начального состояния (22) переходит в конечное состояние (25), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (23).

2⁰. Требуется найти такое граничное управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (10)), под воздействием которого колебательное движение системы (19) с условиями сопряжения (15) из заданного начального состояния (22) переходит в конечное состояние (25), обеспечивая выполнение в промежуточных моментах времени условия (24).

4. Решение задачи. Решение уравнения (21) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}. \quad (26)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$, $\psi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье, в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l} \right\}$, и, подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнения (19), (20) и в условия (22)–(25), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$F_k(t) = -\frac{2a_2}{\lambda_k l} \ddot{u}(t), \quad (28)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_0(-l), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_0(-l), \quad (29)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_i(-l), \quad i = \overline{1, m}, \quad (30)$$

$$\dot{V}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_j(-l), \quad j = \overline{1, m}, \quad (31)$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \varphi_T(-l), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a_2}{\lambda_k l} \psi_T(-l). \quad (32)$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ соответственно. Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (33)$$

Следуя [1, 3, 17, 18, 21, 22], подставляя выражение функции $F_k(t)$ из (28) в (33), учитывая условия (30)–(32) и интегрируя по частям с учетом условий согласования, получим, что функции $u(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \quad (34)$$

$$\int_0^T u(\tau) h_{1k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_{1k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_m), \quad (35)$$

$$\int_0^T u(\tau) h_{2k}^{(1)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_{2k}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{2k}(t_m), \quad (36)$$

где

$$C_{1k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} \right], \quad C_{2k}(T) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} \right],$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} \right], \quad C_{2k}(t_j) = \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} \right], \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k t_i, \\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k t_j, \end{aligned} \quad (37)$$

$$h_{1k}^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} \quad h_{2k}^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases} \quad (38)$$

Выражения для $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{2k}(t_i)$, $\tilde{C}_{1k}(t_i)$, $\tilde{C}_{2k}(t_i)$ не приводятся, так как они аналогичны приведенным в [5]. Отметим, что для задачи $\mathbf{1}^0$ соответствуют интегральные соотношения (34) и (35), а для задачи $\mathbf{2}^0$ — соотношения (34) и (36). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(a)}(\tau) &= \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{1k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{1k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \\ C_k^{(a)} &= \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{1k}(t_1) \quad \dots \quad C_{1k}(t_m) \right)^T, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(b)}(\tau) &= \left(\sin \lambda_k(T - \tau) \quad \cos \lambda_k(T - \tau) \quad h_{2k}^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad h_{2k}^{(m)}(\tau) \right)^T, \\ C_k^{(b)} &= \left(C_{1k}(T) \quad C_{2k}(T) \quad C_{2k}(t_1) \quad \dots \quad C_{2k}(t_m) \right)^T. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда, учитывая введенные обозначения (39), (40), соотношения (34)–(36) запишутся так:

$$\int_0^T \bar{H}_k^{(\delta)}(\tau) u^{(\delta)}(\tau) d\tau = C_k^{(\delta)}, \quad \delta = a, b; \quad k = 1, 2, \dots \quad (41)$$

Обозначения в верхнем индексе $\delta = a, b$ соответствуют задачам $\mathbf{1}^0$ и $\mathbf{2}^0$.

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник колебаний и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Поэтому

$$H_n^{(\delta)}(\tau) = \left(\bar{H}_1^{(\delta)}(\tau) \quad \bar{H}_2^{(\delta)}(\tau) \quad \dots \quad \bar{H}_n^{(\delta)}(\tau) \right)^T, \quad \eta_n^{(\delta)} = \left(C_1^{(\delta)} \quad C_2^{(\delta)} \quad \dots \quad C_n^{(\delta)} \right)^T, \quad \delta = a, b, \quad (42)$$

с размерностями $H_n^{(\delta)}(\tau) - (n(m+2) \times 1)$, $\eta_n^{(\delta)} - (n(m+2) \times 1)$ при всех $\delta = a, b$.

Для первых n гармоник соотношение (41), с учетом (42), запишется в виде

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(\tau) u_n^{(\delta)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(\delta)}, \quad \delta = a, b. \quad (43)$$

Из (43) следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Первые n гармоник системы (27) с условиями (29)–(32) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(\delta)}$ можно найти управление $u_n^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (43).

Для произвольного числа первых гармоник управляющее воздействие $u_n^{(\delta)}(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (43), имеет вид (см. [3, 11])

$$u_n^{(\delta)}(t) = \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T \left(S_n^{(\delta)} \right)^{-1} \eta_n^{(\delta)} + f_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b, \quad (44)$$

где $(H_n^{(\delta)}(t))^T$ — транспонированная матрица, $f_n^{(\delta)}(t)$ — некоторая вектор-функция, причем

$$\int_0^T H_n^{(\delta)}(t) f_n^{(\delta)}(t) dt = 0, \quad S_n^{(\delta)} = \int_0^T H_n^{(\delta)}(t) \left(H_n^{(\delta)}(t) \right)^T dt, \quad \delta = a, b.$$

Здесь $H_n^{(\delta)}(t) (H_n^{(\delta)}(t))^T$ — внешнее произведение, $S_n^{(\delta)}$ — известная матрица размерности $(n(m+2) \times n(m+2))$, для которой предполагается, что $\det S_n^{(\delta)} \neq 0$ при $\delta = a, b$.

Из формулы (44) следует, что существует множество управляющих функций, решающих задачи граничных управлений. Учитывая обозначения (38) для промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, m+1}$, функции управления $u_n^{(\delta)}(t)$ представляются в виде

$$u_n^{(\delta)}(t) = \begin{cases} u_n^{(\delta)1}(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ u_n^{(\delta)2}(t), & t_1 < t \leq t_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ u_n^{(\delta)m}(t), & t_{m-1} < t \leq t_m, \\ u_n^{(\delta)m+1}(t), & t_m < t \leq T. \end{cases} \quad (45)$$

Подставляя из (44) (или (45)) управление $u_n^{(\delta)}(t)$ в (28), а найденное для $F_k^{(\delta)}(t)$ выражение — в (33), получим функцию $V_k^{(\delta)}(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (26) будем иметь

$$V_n^{(\delta)}(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \quad (46)$$

где

$$V_k^{(\delta)}(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(\delta)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau,$$

а с помощью (16) и (18) функция колебания $Q_n^{(\delta)}(\xi, t)$, $-l \leq \xi \leq l$, для первых n гармоник запишется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(\xi, t) = V_n^{(\delta)}(\xi, t) + W_n^{(\delta)}(\xi, t), \quad W_n^{(\delta)}(\xi, t) = \frac{1}{2l}(l - \xi) u_n^{(\delta)}(t), \quad \delta = a, b. \quad (47)$$

Учитывая обозначения (8), функция $Q_n^{(\delta)}(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ представляется в виде

$$Q_n^{(\delta)}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) u_n^{(\delta)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=1}^n V_k^{(\delta)}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_n^{(\delta)}(t), & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (48)$$

Здесь функции управления $u_n^{(\delta)}(t)$ имеют вид (44) (или (45)).

5. Пример для $n = 1$. Для иллюстрации вышеизложенного построения рассмотрим случай $m = 1$, т.е. когда в одном промежуточном моменте времени $t = t_1$ ($0 < t_1 < T$) задано состояние колебания:

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Следовательно,

$$\bar{H}_k(t) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - t) \\ \cos \lambda_k(T - t) \\ h_{1k}^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Построим функцию граничного управления $u_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). Тогда, согласно (42), будем иметь $H_1(t) = \bar{H}_1(t)$, $\eta_1 = C_1$, а матрица S_1 имеет вид

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & s_{12} &= s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \\ s_{13} &= s_{31} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ s_{22} &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & s_{33} &= \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1, \\ s_{23} &= s_{32} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1); \end{aligned}$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$. Обозначим

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (44) следует, что

$$u_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau).$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(t) &= \sin \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \sin \lambda_1 (t_1 - t) [\hat{s}_{31} C_{11}(T) + \hat{s}_{32} C_{21}(T) + \hat{s}_{33} C_{11}(t_1)] \end{aligned}$$

при $t \in [0, t_1]$ и

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}(t) &= \sin \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ &+ \cos \lambda_1 (T - t) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] \end{aligned}$$

при $t \in (t_1, T]$. Отметим, что согласно формулам (46)–(48) будем иметь выражение для $Q_1(\xi, t)$ при $-l \leq \xi \leq l$ в виде

$$Q_1(\xi, t) = \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l} (l - \xi) u_1^{(1)}(t), & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} \xi + \frac{1}{2l} (l - \xi) u_1^{(2)}(t), & t_1 < \tau \leq T. \end{cases}$$

Учитывая обозначения (8), представим функцию состояния $Q_1(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) &= \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) u_1^{(1)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1^{(1)}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} & \text{при } t \in [0, t_1], \\ Q_1(x, t) &= \begin{cases} V_1(t) \sin \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) u_1^{(2)}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1^{(2)}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases} & \text{при } t \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

6. Результаты вычислительного эксперимента. Положим

$$a_1 = \frac{4}{5}a_2, \quad t_1 = 6\frac{l}{a_2}, \quad T = 12\frac{l}{a_2}, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{4}{5}.$$

Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ задано следующими функциями:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 + \left(\frac{2}{3}l_1 + \frac{l}{7l_1}\right)x^2 - \frac{1}{7}l \cdot l_1, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{l_1}{7l}x^2 - \frac{1}{7}l \cdot l_1, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \psi_0(x) = 0, \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Пусть при $t = t_1$ задано промежуточное состояние струны в виде функции

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} - \frac{l_1 x^2}{3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{x^3}{2} + \frac{l x^2}{2}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а при $t = T$ задано следующее конечное состояние:

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0, \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Тогда значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0) = -\frac{4}{35}, \quad \varphi_0(l) = \varphi_0(-l) = 0, \quad \varphi_1(l) = \varphi_1(-l) = 0, \quad \varphi_T(l) = \varphi_T(-l) = 0.$$

В этом случае матрицы S_1 и S_1^{-1} представлены следующим образом:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 6/a_2 & 0 & 3/a_2 \\ 0 & 6/a_2 & 0 \\ 3/a_2 & 0 & 3/a_2 \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_2/3 & 0 & -a_2/3 \\ 0 & a_2/6 & 0 \\ -a_2/3 & 0 & 2a_2/3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = a_2^3/54$. Для функции управления $u_1(t)$, с учетом (34)–(38), имеем:

$$u_1(t) = \begin{cases} -\frac{253}{375} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{503}{1125} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

а $V_1(t)$ имеет вид

$$V_1(t) = \begin{cases} \left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4}, & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

Для функции колебания имеем:

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \frac{5}{4} \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{750} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t - \frac{253}{750} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750} (1 - x) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \frac{5}{4} \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{2250} \frac{a_2 t}{\pi^3} \right) \cos a_2 \pi t + \frac{503}{2250} \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^4} \right) \sin \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250} (1 - x) \frac{\sin a_2 \pi t}{\pi^3}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad \text{при } t_1 < t \leq T.$$

Теперь предположим, что

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad t_1 = 24, \quad T = 48, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{4}{5}, \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Для функций $u_1(t)$ и $V_1(t)$ имеем:

$$u_1(t) = \begin{cases} -\frac{253}{375\pi^3} \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{503}{1125\pi^3} \sin \frac{1}{4} \pi t, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

$$V_1(t) = \begin{cases} \left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t, & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

Их графики представлены на рис. 1 и 2 соответственно.

Явные выражения функции прогиба струны:

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \frac{5}{4} \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750\pi^3} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \sin \frac{1}{4} \pi t, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(-\frac{256}{375\pi^3} + \frac{253}{3000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t - \frac{253}{750\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \pi x - \\ \quad - \frac{253}{750\pi^3} (1 - x) \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1,$$

$$Q_1(x, t) = \begin{cases} \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \frac{5}{4} \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250\pi^3} \left(1 - \frac{5}{4} x \right) \sin \frac{1}{4} \pi t, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \left(\left(\frac{1006}{375\pi^3} - \frac{503}{9000} \frac{t}{\pi^3} \right) \cos \frac{1}{4} \pi t + \frac{503}{2250\pi^4} \sin \frac{1}{4} \pi t \right) \sin \pi x + \\ \quad + \frac{503}{2250\pi^3} (1 - x) \sin \frac{1}{4} \pi t, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \text{при } t_1 < t \leq T.$$

Выражения и графики (см. рис. 3–6) функций прогиба струны и ее производной представлены ниже. При $t = t_0 = 0$:

$$Q_1(x, 0) = \begin{cases} -\frac{256}{375\pi^3} \sin \frac{5}{4} \pi x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{256}{375\pi^3} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{253}{3000\pi^2} \left(1 - \frac{5}{4} x \right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{253}{3000\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = t_1 = 24$:

$$Q_1(x, 24) = \begin{cases} \frac{503}{375\pi^3} \sin \frac{5}{4}\pi x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{503}{375\pi^3} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = t_1 = 48$:

$$Q_1(x, 48) = 0, \quad \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=48} = \begin{cases} \frac{503}{9000\pi^2} \left(1 - \frac{5}{4}x\right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{503}{9000\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_1(x, t_i) = |Q_1(x, t_i) - \varphi_i(x)|, \quad \widehat{\varepsilon}_1(x, t_j) = |\dot{Q}_1(x, t_j) - \psi_j(x)|,$$

где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 2$ ($i = j = 2$ соответствуют моменту времени $t_2 = T$). Тогда

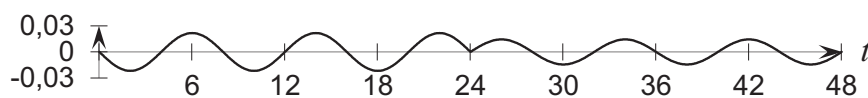
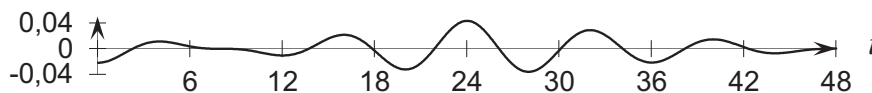
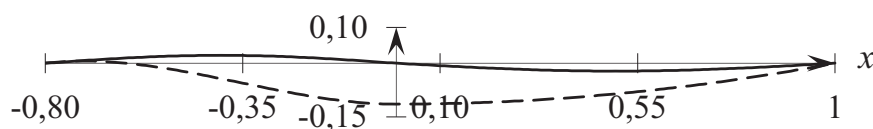
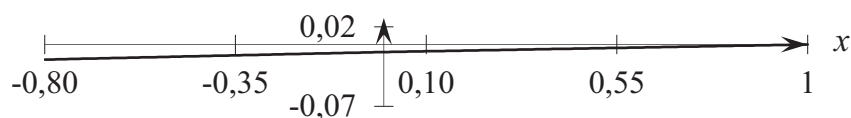
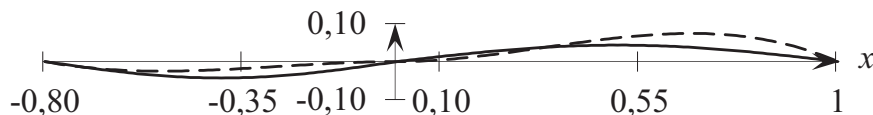
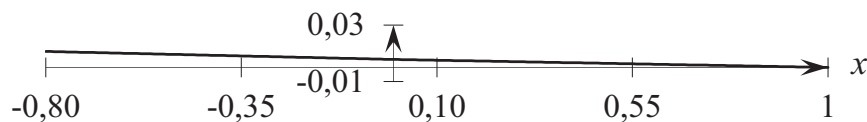
$$\begin{aligned} \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &\approx 0,114, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,017, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 24) &\approx 0,040, \\ \int_{-4/5}^1 \varepsilon_1(x, 0) dx &\approx 0,103, & \int_{-4/5}^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,015, & \int_{-4/5}^1 \varepsilon_1(x, 24) dx &\approx 0,025, \\ \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 48) &= 0, & \max_{-4/5 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 48) &= 0,011, & \int_{-4/5}^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 48) dx &\approx 0,010. \end{aligned}$$

Таким образом, результаты анализа показали, что (даже при $n = 1$) под воздействием построенного граничного управления $u_1(t)$ поведение функции прогиба неоднородной струны $Q_1(x, t)$ и ее производная $\dot{Q}_1(x, t)$ достаточно близки к заданным исходным функциям.

7. Заключение. В работе предложен основанный на методе Фурье конструктивный подход построения граничного управления неоднородной колебательной системой с заданными значениями функций колебания и скоростей точек в разные промежуточные моменты времени. Предложенный подход можно распространить на другие неоднородные колебательные системы. Вычислительный эксперимент показал эффективность построенного граничного управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
2. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
3. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
4. Барсегян В. Р., Барсегян Т. В. Критерий управляемости линейных стационарных систем переменной структуры// Тр. VIII Междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Горис-Степанакерт, Армения, 22-26 сентября 2014 г.), 2014. — С. 83–87.
5. Барсегян В. Р., Солодуша С. В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением на двух концах с заданными состояниями в промежуточные моменты времени// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 30–42.
6. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
7. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 85–92.

Рис. 1. График функции $u_1(t)$.Рис. 2. График функции $V_1(t)$.Рис. 3. Графики $Q_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия).Рис. 4. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x) = 0$.Рис. 5. Графики функций $Q_1(x, 24)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия).Рис. 6. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 48)$ (сплошная линия) и $\psi_T(x) = 0$.

8. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2009. — 49, № 5. — С. 786–796.
9. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 159–163.
10. Ильин В. А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. — 2010. — 435, № 6. — С. 732–735.
11. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

12. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 5. — С. 594–597.
13. Львова Н. Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой// Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
14. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы из m струн// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — № 1. — С. 60–69.
15. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 488–491.
16. Холодовский С. Е., Чухрий П. А. Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны// Уч. зап. Забайкал. гос. ун-та. Физ. Мат. Техн. Технол. — 2018. — 13, № 4. — С. 42–50.
17. Barseghyan V. R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time// Mech. Solid. — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
18. Barseghyan V. R. The problem of optimal control of string vibrations// Int. Appl. Mech. — 2020. — 56, № 4. — P. 471–480.
19. Barseghyan V. R. String vibration observation problem// Proc. I Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos” (August 27–29, 1997, St. Petersburg, Russia), 1997. — P. 309–311.
20. Barseghyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// 2016 Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (June 1–3, 2016, Moscow, Russia), 2016. — P. 1–4.
21. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// Proc. Int. Conf. “Mathematical Optimization Theory and Operations Research” MOTOR-2021 (July 5–10, 2021, Irkutsk, Russia). — Cham: Springer, 2021. — P. 299–313.
22. Barseghyan V. R., Solodusha S. V. On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. Int. Russian Automation Conference “RusAutoCon” (September 5–11, 2021, Sochi, Russia). — IEEE, 2021. — P. 343–349.
23. Ben Amara J., Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients// SIAM J. Control Optim. — 2019. — 57, № 5. — P. 3360–3387.
24. Mercier D., Regnier V. Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// Collect. Math. — 2009. — 60, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
E-mail: solodusha@isem.irk.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 16–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-16-22

УДК 519.624.3

НОРМАЛИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. И. Н. БЕЛЯЕВА, И. К. КИРИЧЕНКО, Н. Н. ЧЕКАНОВА

Аннотация. Описана нормализация гамильтоновых систем, т.е. приведение классической функции Гамильтона при помощи канонических преобразований к более простому виду, называемому нормальной формой в подходе Биркгофа—Густавсона. Получена классическая нормальная форма по правилам Борна—Йордана и Вейля—Маккоя, построены ее квантовые аналоги, для которых решена задача на собственные значения и найдены приближенные формулы для энергетического спектра. Для частных значений параметров квантовых нормальных форм по этим формулам проведены численные расчеты нижних уровней энергии.

Ключевые слова: функция Гамильтона, канонические преобразования, нормальная форма, правило квантования Вейля—Маккоя, правило квантования Борна—Йордана, квантовая нормальная форма, энергетический спектр, символично-численные вычисления, компьютерное моделирование.

NORMALIZATION AND QUANTIZATION OF HAMILTONIAN SYSTEMS USING COMPUTER ALGEBRA

© 2023 I. N. BELYAEVA, I. K. KIRICHENKO, N. N. CHEKANOVA

ABSTRACT. The normalization of Hamiltonian systems is described, i.e., the reduction of a classical Hamilton function using canonical transformations to a simpler form called the Birkhoff–Gustavson normal form. The classical normal form is obtained according to the Born–Jordan and Weyl–McCoy rules, its quantum analogs are constructed, for which the eigenvalue problem is solved, and approximate formulas for the energy spectrum are found. For partial values of the parameters of quantum normal forms, numerical calculations of the lower energy levels were carried out using these formulas.

Keywords and phrases: Hamilton function, canonical transformations, normal form, Weyl–McCoy quantization rule, Born–Jordan quantization rule, quantum normal form, energy spectrum, symbolic numerical calculations, computer simulation.

AMS Subject Classification: 34B27

1. Введение. Как известно (см. [1, 5, 11]), нормализация гамильтоновых систем позволяет провести приближенное интегрирование уравнений классической механики. Процедура нормализации состоит в выполнении канонических преобразований исходной классической функции Гамильтона и ее приведении к более простому нормальному виду. При этом нормальная форма представляется в виде различных однородных полиномов по каноническим переменным. Тогда уравнения движения с новой функцией Гамильтона в нормальной форме или непосредственно просто интегрируются в нерезонансном случае, или же существенно упрощаются по сравнению с исходной функцией Гамильтона в случае наличия в системе резонансов. Исследование нерезонансных гамильтоновых систем в представлении их в нормальной форме широко использовал

Дж. Биркгоф (см. [1]); Ф. Густавсон расширен такой подход на случай наличия в системе резонансов (см. [11]). Необходимые канонические преобразования выполнялись при помощи производящей функции, зависящей от исходных координат и новых импульсов, поэтому получение явных зависимостей исходных канонически сопряженных координат и импульсов от новых представляет крайне трудную практически невыполнимую ручную задачу. Использование для этих целей систем компьютерной алгебры позволяет решить данную задачу. В данной работе поставленная задача решается с применением компьютерной системы алгебраических вычислений Reduce и Maple.

Нормальная форма позволяет произвести квантование классической гамильтоновой системы без использования решений уравнений движения при регулярном или хаотическом режимах движения классической системы. Для получения квантовой нормальной формы были использованы известные правила соответствия классическим выражениям их квантовым аналогам из-за не коммутации канонически сопряженных координат и импульсов.

2. Нормализация гамильтоновых систем. В работе исследованы классические системы, которые описываются следующей функцией Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad (1)$$

где

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + b \left(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3} q_2^3 \right) + c q_1^2 q_2^2 + d (q_1^2 + q_2^2)^2,$$

(p_1, p_2) и (q_1, q_2) — канонически сопряженные координата и импульс, а параметры b , c и d подобраны таким образом, что $d > 0$ и $c + 4d > 0$. Выполним сначала вспомогательные канонические преобразования $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ (см. [8]):

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2i} (-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2), & p_1 &= \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2), \\ q_2 &= \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2), & p_2 &= \frac{1}{2i} (Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2), \end{aligned} \quad (2)$$

и тогда гамильтониан (1) будет иметь следующий вид:

$$M(Q, P) = M^{(2)} + \sum_{s>2} M^{(s)}(Q, P), \quad M^{(2)} = i(Q_1 P_1 + Q_2 P_2), \quad (3)$$

где $P = (P_1, P_2)$, $Q = (Q_1, Q_2)$ — новые канонически сопряженные координата и импульс.

Выполняя канонические преобразования $(Q, P) \rightarrow (\xi, \eta)$ с производящей функцией

$$F(Q, \eta) = Q\eta + W(Q, \eta), \quad (4)$$

приводим классическую гамильтонову функцию (3) к нормальной форме Биркгофа—Густавсона $M(Q, P) \rightarrow G(\xi, \eta)$.

Гамильтонова функция $G(\xi, \eta)$ имеет нормальную форму, если выполняется условие

$$DG(\xi, \eta) = 0, \quad (5)$$

где дифференциальное выражение

$$D = \sum_{\nu=1}^2 \left(\eta_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} \right) \quad (6)$$

называется оператором нормальной формы. Производящая функция (4) удовлетворяет уравнениям

$$P = \eta + \frac{\partial W(Q, \eta)}{\partial Q}, \quad \xi = Q + \frac{\partial W(Q, \eta)}{\partial \eta} \quad (7)$$

(см. [11]), которые связывают старые переменные (Q, P) и новые (ξ, η) .

В соответствии с методикой Густавсона для нахождения s порядка нормальной формы нужно решить основное дифференциальное уравнение

$$DW^{(s)}(Q, \eta) = -M^{(s)}(Q, \eta) + G^{(s)}(Q, \eta), \quad s = 2, 3, \dots, \quad (8)$$

где D есть оператор нормальной формы (6).

При помощи символьной программы REDUCE (см. [7]) получаем производящий полином $W(Q, \eta)$ и нормальную форму $G(\xi, \eta)$, которые представляются в виде суммы однородных полиномов разных степеней по переменным ξ и η .

Нормальная форма для функции Гамильтона (1) получена в виде

$$G_6 = i \left[\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + R_{41} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2)^2 - R_{42} (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2 + R_{43} (\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2)^2 + R_{61} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2)^2 - \right. \\ \left. - R_{62} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)^3 - R_{63} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2)^2 - R_{64} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2 + \right. \\ \left. + R_{65} (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)^2 + R_{66} (\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2) (\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2)^2 \right]. \quad (9)$$

Здесь постоянные коэффициенты определяются параметрами функции Гамильтона (1):

$$\begin{aligned} R_{41} &= \frac{3}{2}d - \frac{5}{12}b^2, \quad R_{42} = -\frac{5}{12}b^2 + \frac{3}{8}c, \quad R_{43} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{8}, \\ R_{61} &= \frac{13}{36}b^2c + \frac{173}{36}b^2d - \frac{235}{432}b^4 - \frac{17}{4}d^2, \quad R_{62} = -\frac{2}{9}b^2d + \frac{1}{18}b^2c, \\ R_{63} &= \frac{11}{36}b^2c - \frac{11}{9}b^2d, \quad R_{64} = \frac{277}{36}b^2d + \frac{199}{72}b^2c - \frac{17}{64}c^2 - \frac{235}{144}b^4 - \frac{17}{8}cd, \\ R_{65} &= \frac{11}{9}b^2 \left(d - \frac{1}{4}c \right), \quad R_{66} = \frac{9}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{64}c^2 - \frac{1}{36}b^2d + \frac{1}{144}b^2c. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Квантование гамильтоновых систем. Для выполнения квантования необходимо получить квантовый аналог классической нормальной формы (9). В настоящей работе были использованы известные правила Борна—Йордана (см. [2, 4, 9, 10, 14]):

$$BJ\{\xi^m \eta^n = \eta^n \xi^m\} \rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{\eta}^{n-k} \hat{\xi}^m \hat{\eta}^k \quad (11)$$

и правило Вейля—Маккоя (см. [3, 13, 17]):

$$WMc\{\xi^m \eta^n = \eta^n \xi^m\} \rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \hat{\eta}^{n-k} \hat{\xi}^m \hat{\eta}^k. \quad (12)$$

где $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ являются операторами со правилом коммутации

$$\hat{\xi} \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\xi} = 1.$$

Используя правила (11), (12) можно получить соответствующие квантовые нормальные формы. В частности, при использовании правила Борна—Йордана (11) получается квантовая форма

$$\begin{aligned} \hat{G}^{BJ} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1 + R_{41} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)^2 + \frac{5}{2} \right] + R_{42} \left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{1}{2} \right) + \\ &+ R_{43} \left[(\hat{A}_1 - \hat{A}_2)^2 + \frac{5}{2} \right] + R_{61} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)^3 + \frac{1}{4}\hat{A}_1^2 + \frac{1}{4}\hat{A}_2^2 + \frac{27}{4}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \frac{13}{2} \right] - \\ &- R_{64} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + 3) \right] + \\ &+ R_{66} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1) \left((\hat{A}_1 - \hat{A}_2)^2 + \frac{1}{4}(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \right) - \frac{1}{2}\hat{A}_1\hat{A}_2 \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\hat{A}_1 = \hat{\xi}_1 \hat{\eta}_1, \quad \hat{A}_2 = \hat{\xi}_2 \hat{\eta}_2.$$

Квантовая нормальная форма G^{WMc} , полученная при использовании правила (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{G}^{WMc} &= \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1 + \\ &+ R_{41} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \right] + R_{42} \left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + \frac{1}{2} \right) + R_{43} \left[(\hat{A}_1 - \hat{A}_2)^2 + \frac{1}{2} \right] + \end{aligned}$$

$$+ R_{61} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)^3 + 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 2) \right] - R_{64} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1)(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + 1) \right] + \\ + R_{66} \left[(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + 1) \left((\hat{A}_1)^2 + (\hat{A}_2)^2 - 2\hat{A}_1\hat{A}_2 + 1 \right) \right]. \quad (14)$$

4. Компьютерный расчет энергетического спектра. Векторы $|N, L\rangle$, определяемые выражением

$$|N, L\rangle = \left[\left(\frac{N+L}{2} \right) \left(\frac{N-L}{2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{\xi}_1^{\frac{N-L}{2}} \hat{\xi}_2^{\frac{N+L}{2}} |0, 0\rangle, \quad \hat{\eta}_1 |0, 0\rangle = \hat{\eta}_2 |0, 0\rangle = 0 \quad (15)$$

(см. [8]), в котором $N = 0, 1, \dots$ — главное квантовое число, а L — орбитальное число, принимающее при данном N значения $\pm N, \pm(N-2), \pm(N-4)$, которые являются собственными для построенных квантовых нормальных форм $\hat{G}^{BJ}$ и $\hat{G}^{WMc}$. Это позволяет получить формулы для энергетических спектров.

Формула для спектра, полученная при использовании правила Борна–Йордана для $\hat{G}^{BJ}$:

$$E_{NL}^{BJ} = N + 1 + \frac{1}{2}R_{41}(2N^2 + 4N + 7) + \frac{1}{2}R_{42}(N^2 + 2N - L^2 + 1) + \frac{1}{2}R_{43}(5 + 2L^2) + \\ + \frac{1}{8}R_{61}(8N^3 + 25N^2 + 78N + L^2 + 60) - \frac{1}{2}R_{64}(N^3 - L^2 + 3N^2 + 8N - NL^2 + 3) + \\ + \frac{1}{8}R_{66}(N^2 + 8NL^2 + 9L^2 + 14N + 12). \quad (16)$$

Формула для спектра, полученная при использовании правила Вейля–Маккоя для $\hat{G}^{WMc}$:

$$E_{NL}^{WMc} = N + 1 + \frac{1}{2}R_{41}(2N^2 + 4N + 3) + \frac{1}{2}R_{42}(N^2 + 2N - L^2 + 1) + \\ + \frac{1}{2}R_{43}(2L^2 + 1) + R_{61}(N^3 + 3N^2 + 5N + 3) - \frac{1}{2}R_{64}(N^3 + 3N^2 + 2N - NL^2 - L^2 + 1) + \\ + R_{66}(N + NL^2 + L^2 + 1). \quad (17)$$

Численное решение уравнения Шрёдингера является крайне сложной задачей. Поэтому получение спектра энергий при помощи квантования нормальной формы, сильно упрощает решение уравнения Шрёдингера, что представлено в настоящей работе.

Рассмотрим результаты численных расчетов энергетических спектров для конкретных числовых значений параметров b, c, d в тех случаях, когда классическая система (1) является интегрируемой.

Проведем сравнение результатов, вычисленных по формулам (16)–(17) согласно правилам квантования Борна–Йордана и Вейля–Маккоя, с известными и очень надежными численными результатами для энергетических спектров, полученными в [6, 15, 16].

Для конкретных параметров $b = 0, c = 0$ и $d \neq 0$ в уравнении Шрёдингера разделяются переменные в полярных координатах. Поэтому энергетический спектр характеризуется орбитальным моментом l и главным квантовым числом n . В [16] разработан метод численного решения радиального уравнения Шрёдингера, на основе которого проведены расчеты энергетических уровней для значений квантовых чисел равных $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ при значении параметра $d = 0,05 \cdot 10^{-4}$. Квантовые числа n, l связаны с нашими числами N, L соотношениями $N = l + 2n, |L| = l$.

В таблице 1 приведены величины уровней энергии, полученные в [16], а также их значения, рассчитанные при том же значении параметра d по формулам (16) и (17) на основе квантования классической нормальной формы по правилам Борна–Йордана и Вейля–Маккоя соответственно.

Из таблицы 1 видно, что очень хорошее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля–Маккоя. Энергия основного состояния, полученная с использованием правила квантования Вейля–Маккоя, совпадает с результатами из [15] до девяти знаков после десятичной точки, а при квантовании по правилу Борна–Йордана — до четырех знаков после десятичной точки. Для энергии 16 уровня также видно, что значения, полученные по правилу Борна–Йордана, совпадают с результатами из [15] до четырех знаков после десятичной точки, а значения, полученные по правилу квантования Вейля–Маккоя, — до девяти знаков

Таблица 1. Сравнение уровней энергии $b = 0$, $c = 0$, $d = 0,05 \cdot 10^{-4}$

No.	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Результаты из [15]
1.	$2E_{0,0}$	2,000039998	2,000019999	2,000019999
2.	$2E_{1,\pm 1}$	4,000079996	4,000059997	4,000059998
3.	$2E_{2,\pm 2}$	6,000139991	6,000119994	6,000119994
4.	$2E_{2,0}$	6,000159990	6,000139993	6,000139993
5.	$2E_{3,\pm 3}$	8,000219985	8,000199989	8,000199989
6.	$2E_{3,\pm 1}$	8,000259981	8,000239985	8,000239985
7.	$2E_{4,\pm 4}$	10,00031997	10,00029998	10,00029998
8.	$2E_{4,\pm 2}$	10,00037996	10,00035997	10,00035997
9.	$2E_{4,0}$	10,00039996	10,00037997	10,00037997
10.	$2E_{5,\pm 5}$	12,00043996	12,00041996	12,00041996
11.	$2E_{5,\pm 3}$	12,00051995	12,00049995	12,00049995
12.	$2E_{5,\pm 1}$	12,00055994	12,00053995	12,00053995
13.	$2E_{6,\pm 6}$	14,00057994	14,00055995	14,00055995
14.	$2E_{6,\pm 4}$	14,00067993	14,00065993	14,00065993
15.	$2E_{6,\pm 2}$	14,00073992	14,00071992	14,00071992
16.	$2E_{6,0}$	14,00075991	14,00073992	14,00073992

после десятичной точки. Таким образом, можно сделать вывод, что предсказание по правилу Вейля—Маккоя улучшается.

Рассмотрим еще один случай интегрируемости классической системы (1). Выберем значения параметров $c = -2d$, $b = 0$, $d \neq 0$. В данном случае исследуем следующее двумерное уравнение Шрёдингера:

$$(\hat{H}_1 + \hat{H}_2)\psi = 2E\psi, \quad \hat{H}_k = -\frac{d^2}{dq_k^2} + q_k^2 + 2dq_k^4, \quad k = 1, 2, \quad (18)$$

где переменные разделены. Таким образом его решение можно свести к решению двух одинаковых одномерных уравнений для ангармонического осциллятора. Энергетический спектр определяется в виде суммы $2E = 2E_1 + 2E_2$.

Квантовые числа изотропного двумерного осциллятора (N, L) связаны с квантовыми числами (n_1, n_2) одномерных осцилляторов соотношениями $N = n_1 + n_2$ и $L = n_1 - n_2$. Стоит отметить, что при упорядочении значений уровней энергетического спектра по величине квантовых чисел (N, L) состояния растут с увеличением главного квантового числа.

Изучив достаточно обширные численные результаты работ [6, 15] для квантового одномерного ангармонического осциллятора, чтобы провести сравнения с нашими методами расчетов, мы вычислили часть энергетического спектра двумерного уравнения Шрёдингера (1). Результаты полученных расчетов приведены в таблице 2. Сравнение обнаруживает достаточно хорошее согласие с результатами работы [6]. Отметим, что численные значения энергетического спектра, полученные в [6], для первых десяти уровней совпадают с результатами более поздней работы [15] до 13 знаков после десятичной точки. В таблице 2 представлены значения нижних уровней энергий E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc} , которые получены по формулам (16) и (17) соответственно.

Из таблицы 2 видно, что значения для основного состояния, вычисленное по формуле (17) (квантование по правилу Вейля—Маккоя), совпадает до пяти знаков после десятичной точки с результатами из [6]. Результат для основного состояния, вычисленное по формуле (16) (квантование по правилу Борна—Йордана), совпадает до двух знаков после десятичной точки с результатами из [6]. Заметим, что для 12 уровня энергии значения, полученные как по правилу Борна—Йордана, так и по правилу Вейля—Маккоя отличаются от результатов [6] уже во второй цифре

Таблица 2. Сравнение результатов при $b = 0$, $c = -2d$, $d = 0,5 \cdot 10^{-3}$

No.	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Результаты из [6]
1.	$2E_{0,0}$	2,002991	2,001493	2,001497
2.	$2E_{1,\pm 1}$	4,005976	4,004475	4,004488
3.	$2E_{2,\pm 2}$	6,010451	6,008939	6,010460
4.	$2E_{2,0}$	6,011941	6,010411	6,007479
5.	$2E_{3,\pm 3}$	8,016123	8,014885	8,019401
6.	$2E_{3,\pm 1}$	8,019387	8,017809	8,013451
7.	$2E_{4,\pm 4}$	10,02385	10,02230	10,03129
8.	$2E_{4,\pm 2}$	10,02831	10,02666	10,02239
9.	$2E_{4,0}$	10,02979	10,02811	10,01942
10.	$2E_{5,\pm 1}$	12,04167	12,03986	12,02836
11.	$2E_{5,\pm 3}$	12,03870	12,03697	12,03428
12.	$2E_{5,\pm 5}$	12,03278	12,03120	12,04613

после десятичной точки. Таким образом что лучшее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля—Маккоя, однако с увеличением величины квантовых чисел погрешность для значений E_{NL}^{BJ} уменьшается, т.е. для больших квантовых чисел расхождение между значениями E_{NL}^{WMc} и E_{NL}^{BJ} уменьшается.

Автор работы [12] оказывает предпочтение правилу Вейля—Маккоя. Однако, вероятно, преждевременно утверждать о преимуществе того или иного правила квантования.

5. Заключение. В работе исследована система с функцией Гамильтона (1). Для данной системы получена классическая нормальная форма Биркгофа—Густавсона, а также ее квантовые аналоги построены согласно правилам квантования Борна—Йордана и Вейля—Маккоя. Данные квантовые аналоги представляют приближенные дифференциальные выражения для точного оператора Шрёдингера. Решена задача на собственные значения, найдены формулы энергетических спектров. По полученным формулам с определенными значениями параметров выполнены расчеты нижних энергетических уровней, проведено сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными других авторов. Обнаружено, что лучшее согласие с известными результатами расчета энергетического спектра наблюдается при использовании правила квантования Вейля—Маккоя по сравнению с правилом Борна—Йордана. Однако распространение преимущества правила квантования Вейля—Маккоя, выявленного на частных численных расчетах, на другие системы является, вероятно, преждевременным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Динамические системы. — М.-Ижевск: РХД, 2002.
2. Борн М., Йордан П. О квантовой механике// Усп. физ. наук. — 1977. — 122, № 8. — С. 586–611.
3. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. — М.: Наука, 1986.
4. Гейзенберг В. О квантотеоретическом истолковании кинематических и механических соотношений// Усп. физ. наук. — 1977. — 122, № 4. — С. 574–586.
5. Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. — М.: Наука, 1986.
6. Vanerjee K. General anharmonic oscillator// Proc. Roy. Soc. — 1978. — 364. — P. 265–275.
7. Basios V., Chekanov N. A., Markovski B. L., Rostovtsev V. A., Vinitsky S. I. REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians// Comp. Phys. Commun. — 1995. — 90. — P. 355–368.
8. Chekanov N. A. Quantization of the normal form of Birkhoff–Gustavson// Nucl. Phys. — 1989. — 50, № 8. — P. 344–346.
9. Fedak W. A., Prentis J. J. The 1925 Born and Jordan paper “On quantum mechanics”// Am. J. Phys. — 2009. — 77. — P. 128–139.

10. *Gosson M. A.* Born–Jordan quantization and the uncertainty principle// J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — 46. — P. 445–462.
11. *Gustavson F. G.* On constructing formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point// Astron. J. — 1966. — 71, № 8. — P. 670–686.
12. *Kauffmann S. K.* Unambiguous quantization from the maximum classical correspondence that is self-consistent: the slightly stronger canonical commutation rule Dirac missed// Found. Phys. — 2011. — 41. — P. 805–918.
13. *McCoy N. H.* On the function in quantum mechanics which corresponds to a given function in classical mechanics// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1932. — 18. — P. 674–676.
14. *Razavy M.* Heisenberg’s Quantum Mechanics. — Singapore: World Scientific, 2011.
15. *Taseh H.* On the exact solution of the Schroedinger equation with a quartic anharmonicity// Int. J. Quant. Chem. — 1996. — 57. — P. 63–71.
16. *Taseh H., Demiralp M.* Studies on algebraic methods to solve linear eigenvalue problems: generalised anharmonic oscillators// J. Phys. A: Math. Gen. — 1988. — 21. — P. 3903–3919.
17. *Weyl H.* Quantenmechanik und Gruppentheorie// Z. Phys. — 1927. — 46. — P. 1–46..

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Беляева Ирина Николаевна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru

Кириченко Игорь Константинович

Харьковский национальный автомобильный университет

E-mail: ikir238@rambler.ru

Чеканова Наталья Николаевна

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина;

Харьковский учебно-научный институт «Каразинский банковский институт»

E-mail: natchek1976@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 23–33
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-23-33

УДК 514.76

О КАНОНИЧЕСКИХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПЕРВОГО ТИПА ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, ПРИ КОТОРЫХ СОХРАНЯЕТСЯ ТЕНЗОР РИМАНА

© 2023 г. В. Е. БЕРЕЗОВСКИЙ, С. В. ЛЕЩЕНКО, Й. МИКЕШ

Аннотация. В работе получены общие уравнения канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана. Эти уравнения сведены к замкнутой системе уравнений типа Коши в ковариантных производных. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение полученной системы уравнений. Рассмотрен частный случай таких отображений и приведены примеры почти геодезических отображений первого типа плоского пространства на плоское пространство.

Ключевые слова: почти геодезическое отображение, основное уравнение, пространство аффинной связности.

ON CANONICAL FIRST-TYPE ALMOST GEODESIC MAPPINGS OF AFFINELY CONNECTED SPACES THAT PRESERVE THE RIEMANN TENSOR

© 2023 V. E. BEREZOVSKII, S. V. LESHCHENKO, J. MIKEŠ

ABSTRACT. In this paper, we obtain general equations for canonical first-type almost geodesic mappings of affinely connected spaces under which the Riemann tensor is preserved. These equations are reduced to a closed system of Cauchy-type equations in covariant derivatives. The number of essential parameters on which the general solution of the resulting system of equations depends is established. A particular case of such mappings is considered and examples of almost geodesic mappings of the first type of flat space onto flat space are given.

Keywords and phrases: almost geodesic mapping, basic equation, space of affine connection.

AMS Subject Classification: 53B05

1. Введение. Работа посвящена дальнейшему исследованию почти геодезических отображений пространств аффинной связности. Эта теория, как и другие теории диффеоморфизмов, идейно восходит к работе Т. Леви-Чивиты [80], в которой он поставил и решил в специальной системе координат задачу о нахождении римановых пространств с общими геодезическими. Примечательно, что она была связана с изучением уравнений динамики механических систем.

Затем теория геодезических отображений развивалась в работах Т. Томаса [116, 117], Ж. Томаса [115], Г. Вейля [123], Л. П. Эйзенхарта [43, 68, 69], П. А. Широкова [41], А. П. Нордена [24], А. З. Петрова [25], А. С. Солодовниковой [36–38], Н. С. Синюкова [26–29, 31, 33, 34], А. В. Аминовой [1, 47], Й. Микеша [3, 13–20, 52, 53, 71, 73, 75, 76, 81–83, 86–88, 99, 103, 114] и др.

Вопросы, поднятые при изучении геодезических отображений, были развиты В. Ф. Каганом [10], Г. Врэнчану [122], Я. Л. Шапиро [40], Д. В. Веденяпиным [8] и др. Перечисленными авторами найдены специальные классы $(n - 2)$ -проективных пространств.

А. З. Петровым [92] было введено понятие квазигеодезических отображений. Специальными квазигеодезическими отображениями, в частности, являются голоморфно-проективные отображения келеровых пространств, рассмотренные Т. Оцуки, Я Тасиро [90], М. Прванович [96–98], Й. Микешем [9, 18, 19, 74, 82, 84–88, 91], И. Курбатовой [11, 12], М. Шиха [42, 65, 85, 104–106], Р. Ла-ми [45, 46], и др.

Естественным обобщением этих классов отображений являются почти геодезические отображения, введенные в рассмотрение Н. С. Синюковым (см. [30, 32–34]). Им же выделены три типа почти геодезических отображений π_1 , π_2 , π_3 . Вопрос о том, полна ли данная классификация почти геодезических отображений долгое время оставался открытым. Это решено в работах [58, 59].

Затем теория почти геодезических отображений развивалась в работах В. С. Собчука [35, 107], В. С. Шадного [39], Н. Я. Яблонской [44], В. Е. Березовского, Й. Микеша [2, 4–7, 49, 54–64, 84, 86–88] и др.

Интересные исследования геодезических, голоморфно проективных и почти геодезических кривых в работах О. Беловой, Й. Микеша и К. Штрамбаха [48, 51–53], Й. Микеша, Л. Рыпаровой и А. Сабыканова [79, 100–102].

Исследования геодезических, голоморфно проективных и почти геодезических отображений для более общих пространств получены Н. О. Весич, Л. М. Велимирович, М. Л. Златанович, М. Найданович, М. С. Станкович, М. З. Петрович [67, 89, 93–95, 108–113, 118–121, 124–129] и др.

Известно [33], что почти геодезические отображения позволяют моделировать процессы, протекающие при одних энергетических режимах (описываемые одними пространствами) при отсутствии внешних сил, процессами, протекающими при других энергетических режимах (описываемыми другими пространствами) под воздействием сил определенного типа.

Почти геодезические отображения и преобразования, в частности, используются в теории гравитации [78].

В работе [91] доказано, что сечение n -мерной сферы 2-мерной плоскостью является почти геодезической линией. На основании этого факта построены почти геодезические отображения «в целом» в виде параллельной и центральной проекций n -мерной плоскости или n -мерной сферы на n -мерную сферу [22]. Подобный результат установлен для поворотных отображений [21].

Общие закономерности систем уравнений типа Коши в частных производных изложены во многих монографиях, например [33, с. 34–39], [86, с. 34–39], [87, с. 34–39], [88, с. 34–39]. В частности, рассматриваются эти системы уравнений на n -мерных многообразиях и в тензорном виде, когда имеют форму уравнений типа Коши в ковариантных производных. Здесь показаны основные свойства решительности таких систем, выделено основное свойство, что общее решение таких систем зависит от конечного числа параметров, которыми как правило является совокупность реальных чисел. Эти свойства были ранее использованы классиками при исследовании изометрических, аффинных, конформных, конциркулярных, проективных и голоморфно-проективных преобразований, см. [33, 86–88].

Н. С. Синюковым [33] основные уравнения геодезических отображений (псевдо-) римановых пространств на (псевдо-) римановы пространства получены в виде линейной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных. Аналогичный результат получен Й. Микешем и В. Е. Березовским [83] для случая геодезических отображений эквиаффинных пространств на (псевдо-) римановы пространства. Заметим, что Ж. Томас [115] конструктивно показал проективную эквивалентность произвольного пространства аффинной связности некоторому пространству с эквиаффинной связностью. В. В. Домашев и Й. Микеш [9, 15] подобное доказали для голоморфно-проективных отображений. См. также статьи. Детально эти вопросы обсуждаются в монографиях [33, 86–88].

Ранее Н. С. Синюковым [34] доказано, что основные уравнения канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности на Риччи-симметрические римановы пространства можно представить в виде замкнутой системы уравнений типа Коши в ковариантных производных. Следовательно, семейство всех Риччи-симметрических римановых пространств, на которое допускает каноническое почти геодезическое отображение первого типа заданное пространство аффинной связности, зависит от конечного числа параметров.

С другой стороны, геодезические отображения являются частным случаем канонических почти геодезических отображений первого типа. Основные уравнения геодезических отображений пространств аффинной связности не сводятся к замкнутым системам уравнений типа Коши ввиду того, что общее решение зависит от n произвольных функций.

Следовательно, основные уравнения канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности в общем случае не сводятся к замкнутым системам уравнений типа Коши.

В работах [4, 63, 64] основные уравнения канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности на римановы пространства, а также канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности на обобщенные Риччи-симметрические пространства получены в виде замкнутых систем уравнений типа Коши. Эти результаты значительно усиливают результат, полученный Н. С. Синюковым [34] для канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности на римановы Риччи-симметрические пространства.

В данной работе основные уравнения канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана, получены в виде замкнутой системы уравнений типа Коши.

2. Основные понятия теории почти геодезических отображений пространства аффинной связности. Напомним основные понятия и теоремы теории почти геодезических отображений, изложенные в [32–34, 87, 88].

Рассмотрим пространство аффинной связности A_n с объектом аффинной связности $\Gamma_{ij}^h(x)$ без кручения, отнесенное к локальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Кривая $\ell: x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n называется *геодезической линией*, если ее касательный вектор $\lambda^h(t) = dx^h(t)/dt$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_1^h = \rho(t) \cdot \lambda^h,$$

где $\lambda_1^h = \lambda_{1,\alpha}^h \lambda^\alpha$, символ « $\cdot$ » обозначает ковариантную производную по связности пространства A_n , $\rho(t)$ — некоторая функция указанного аргумента.

Кривая $\ell: x^h = x^h(t)$ пространства аффинной связности A_n ($n > 2$) называется *почти геодезической линией*, если ее касательный вектор $\lambda^h(t) = dx^h(t)/dt$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_2^h = a(t) \cdot \lambda^h + b(t) \cdot \lambda_1^h,$$

где $\lambda_2^h \equiv \lambda_{1,\alpha}^h \lambda^\alpha$, $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции указанного аргумента.

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют *почти геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в почти геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Предположим, что пространство аффинной связности A_n допускает отображение f на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ и эти пространства отнесены к общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$. Тензором деформации связностей отображения f называют тензор

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x), \quad (1)$$

где $\Gamma_{ij}^h(x)$ и $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$, соответственно, в указанной системе координат.

Известно [30, 32–34], что для того, чтобы отображение пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ тензор деформации связностей $P_{ij}^h(x)$ удовлетворял условиям

$$A_{\alpha\beta\gamma}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = a \cdot P_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta + b \cdot \lambda^h,$$

где λ^h — произвольный вектор, a и b — некоторые функции переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$, а тензор A_{ijk}^h определен следующим образом:

$$A_{ijk}^h \stackrel{\text{def}}{=} P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h. \quad (2)$$

Почти геодезические отображения пространств аффинной связности введены в рассмотрение Н. С. Синюковым [30, 32–34]. Им, в соответствии с характером зависимости функций a и b от

координат $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^n$ вектора λ , были выделены три типа почти геодезических отображений π_1, π_2 и π_3 .

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют почти геодезическим типа π_1 , если выполняются условия

$$A_{(ijk)}^h = \delta_{(i}^h a_{jk)} + b_{(i} P_{jk)}^h, \quad (3)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование по указанным индексам без деления, a_{ij} — некоторый симметрический тензор, b_i — некоторый ковектор, δ_i^h — символы Кронекера.

Канонические почти геодезические отображения первого типа характеризуются тем, что в уравнении (3) ковектор b_i тождественно обращается в нуль. Таким образом, канонические почти геодезические отображения характеризуются следующими условиями

$$P_{(ij,k)}^h + P_{(ij}^\alpha P_{k)\alpha}^h = \delta_{(i}^h a_{jk)}. \quad (4)$$

Известно [34], что каждое отображение π_1 можно представить в виде композиции канонического отображения π_1 и геодезического отображения. Последнее можно считать тривиальным почти геодезическим отображением, которым можно пренебречь.

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют почти геодезическим типа π_2 , если выполняются условия

$$P_{ij}^h = \delta_{(i}^h \psi_{j)} + F_{(i}^h \varphi_{j)}, \quad F_{(i,j)}^h + F_{\alpha}^h F_{(i}^\alpha \varphi_{j)} = \delta_{(i}^h \mu_{j)} + F_{(i}^h \rho_{j)},$$

где $\psi_i, \varphi_i, \mu_i, \rho_i$ — некоторые ковекторы, F_i^h — аффинор. Заметим, что π_2 являются частным случаем F -планарных отображений [23, 70, 72, 77, 86–88].

Отображение $f: A_n \rightarrow \bar{A}_n$ называют почти геодезическим типа π_3 , если выполняются условия

$$P_{ij}^h = \delta_{(i}^h \psi_{j)} + \theta^h a_{ij}, \quad \theta_{,i}^h = \rho \delta_i^h + \theta^h a_i,$$

где θ^h — некоторый вектор, ψ_i, a_i — некоторые ковекторы, a_{ij} — симметрический тензор и ρ — некоторый инвариант.

Почти геодезические отображения π_1, π_2 и π_3 могут пересекаться. Если почти геодезическое отображение f является одновременно π_1 и π_2 , то f является отображением пространств аффинной связности с сохранением линейного комплекса геодезических линий, а одновременно π_1 и π_3 — отображением f с сохранением квадратичного комплекса геодезических [59].

В. Е. Березовским и Й. Микешем [58, 59] доказано, что при размерности пространств аффинной связности $n > 5$ других типов почти геодезических отображений, кроме π_1, π_2 и π_3 , не существует.

3. Канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана. Из (1) вытекает, что тензор Римана R_{ijk}^h пространства A_n связан с тензором Римана $\bar{R}_{ijk}^h$ пространства $\bar{A}_n$ соотношениями

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h - A_{i[jk]}^h, \quad (5)$$

где знак $[jk]$ обозначает альтернирование по индексам j и k , тензор A_{ijk}^h определен по формулам (2).

Из (5) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы тензор Римана являлся инвариантным геометрическим объектом относительно отображения пространства аффинной связности A_n на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат выполнялись условия*

$$A_{ijk}^h = A_{ikj}^h. \quad (6)$$

Учитывая (2) условия (6) запишем в виде

$$P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h = P_{ik,j}^h + P_{ik}^\alpha P_{\alpha j}^h. \quad (7)$$

Рассмотрим каноническое почти геодезическое отображение первого типа пространства аффинной связности A_n на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, характеризующееся уравнениями (4). Потребуем, чтобы при этом отображении сохранялся тензор Римана. Тогда уравнения (4) с учетом (7) имеют вид

$$P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h = \frac{1}{3} \delta_{(i}^h a_{jk)}. \quad (8)$$

Уравнения (8) являются общими для канонических почти геодезических отображений пространств аффинной связности с сохранением тензора Римана.

Введем в рассмотрение тензор $\tilde{a}_{ij}$, причем положим

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{3}a_{ij}. \quad (9)$$

С учетом (9) уравнения (8) запишем в виде

$$P_{ij,k}^h + P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h = \delta_{(i}^h \tilde{a}_{jk)}. \quad (10)$$

Рассматривая (10) как систему типа Коши относительно тензора деформации P_{ij}^h , найдем условия их интегрируемости. Для этого ковариантно продифференцируем (10) по x^m в A_n , а затем проальтернируем по индексам k и m . С учетом тождества Риччи получим

$$\delta_i^h \tilde{a}_{j[k,m]} + \delta_j^h \tilde{a}_{i[k,m]} + \delta_{[k}^h \tilde{a}_{ij,m]} = -P_{ij}^\alpha R_{\alpha km}^h + P_{\alpha(j}^h R_{i)km}^\alpha + \tilde{a}_{j[m} P_{k]i}^h + \tilde{a}_{i[m} P_{k]j}^h. \quad (11)$$

Условия интегрируемости (11) свернем по индексам h и m . В результате находим

$$\tilde{a}_{jk,i} + \tilde{a}_{ik,j} - (n+1)\tilde{a}_{ij,k} = -P_{ij}^\alpha R_{\alpha k} + P_{\alpha j}^\beta R_{ik\beta}^\alpha + P_{\alpha i}^\beta R_{jk\beta}^\alpha + \tilde{a}_{j\alpha} P_{ki}^\alpha - \tilde{a}_{jk} P_{\alpha i}^\alpha + \tilde{a}_{i\alpha} P_{jk}^\alpha - \tilde{a}_{ik} P_{j\alpha}^\alpha, \quad (12)$$

где R_{ij} — тензор Риччи пространства A_n .

Проальтернируем уравнения (12) по индексам k и j . Получим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij,k} = \tilde{a}_{ik,j} + \frac{1}{n+2} & (P_{ij}^\alpha R_{\alpha k} - P_{ik}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\alpha j}^\beta R_{ik\beta}^\alpha + P_{\alpha k}^\beta R_{ij\beta}^\alpha - \\ & - P_{\alpha i}^\beta R_{jk\beta}^\alpha + P_{\alpha i}^\beta R_{kj\beta}^\alpha - \tilde{a}_{j\alpha} P_{ki}^\alpha + \tilde{a}_{k\alpha} P_{ij}^\alpha + \tilde{a}_{ik} P_{j\alpha}^\alpha - \tilde{a}_{ij} P_{k\alpha}^\alpha). \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнении (13) поменяем местами индексы k и i . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kj,i} = \tilde{a}_{ki,j} + \frac{1}{n+2} & (P_{kj}^\alpha R_{\alpha i} - P_{ki}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\alpha j}^\beta R_{ki\beta}^\alpha + P_{\alpha i}^\beta R_{kj\beta}^\alpha - \\ & - P_{\alpha k}^\beta R_{ji\beta}^\alpha + P_{\alpha k}^\beta R_{ij\beta}^\alpha - \tilde{a}_{j\alpha} P_{ik}^\alpha + \tilde{a}_{i\alpha} P_{kj}^\alpha + \tilde{a}_{ki} P_{j\alpha}^\alpha - \tilde{a}_{kj} P_{i\alpha}^\alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (13) и (14) в уравнения (12) находим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik,j} = \frac{1}{(n-1)(n+2)} & (n(P_{ik}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\alpha(k}^\beta R_{i)j\beta}^\alpha) + R_{\alpha(k} P_{i)j}^\alpha - P_{\alpha j}^\beta R_{(ik)\beta}^\alpha - \\ & - P_{\alpha(i}^\beta R_{j|k)\beta}^\alpha + (n+1)(\tilde{a}_{j(i} P_{k)\alpha}^\alpha - \tilde{a}_{\alpha(i} P_{k)j}^\alpha) + 2(\tilde{a}_{ik} P_{j\alpha}^\alpha - \tilde{a}_{j\alpha} P_{ik}^\alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, уравнения (10) и (15) в данном пространстве A_n представляют собой систему уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно функций $P_{ij}^h(x)$ и $\tilde{a}_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P_{ij}^h(x) = P_{ji}^h(x), \quad \tilde{a}_{ij}(x) = \tilde{a}_{ji}(x). \quad (16)$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало каноническое почти геодезическое отображение первого типа на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы уравнений в ковариантных производных типа Коши (10), (15), (16) относительно неизвестных функций $P_{ij}^h(x)$ и $\tilde{a}_{ij}(x)$.

Следствие. Общее решение замкнутой смешанной системы уравнений в ковариантных производных типа Коши (10), (15) и (16) зависит не более чем от $1/2n(n+1)^2$ существенных параметров.

Поскольку тензор Римана в аффинном пространстве обращается в нуль, то имеет место следующий факт.

Теорема 3. Если аффинное пространство допускает каноническое почти геодезическое отображение первого типа, определяемое уравнениями (10) на $\bar{A}_n$, то $\bar{A}_n$ является аффинным пространством.

Таким образом, аффинные пространства образуют замкнутый класс относительно канонических почти геодезических отображений первого типа, определяемых уравнениями (10).

4. Частный случай канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана. Рассмотрим частный случай канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана. Допустим, что в основных уравнениях (10) указанных отображений тензор $\tilde{a}_{ij}$ тождественно обращается в нуль. В этом случае основные уравнения (10) принимают вид

$$P_{ij,k}^h = -P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h. \quad (17)$$

Уравнения (17) в плоском пространстве вполне интегрируемы. Следовательно, имеют решение для любых начальных значений $P_{ij}^h(x_0)$. Если начальные значения такие, что $P_{ij}^h(x_0) \neq \delta_{(i}^h \psi_{j)}(x_0)$, то построенное таким образом решение устанавливает каноническое почти геодезическое отображение первого типа, отличное от геодезического, плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Существует каноническое почти геодезическое отображение первого типа n -мерной плоскости на себя, при котором прямые переходят в кривые, лежащие в 2-мерных плоскостях, не все из которых являются прямыми.*

Приведем пример канонического почти геодезического отображения первого типа плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$.

Пусть $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ — аффинные координаты пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно. Точечное преобразование

$$\bar{x}^h = \frac{1}{2}C_i^h(x^i - C^i)^2 + x_0^h, \quad (18)$$

где C_i^h, C^i, x_0^h — некоторые постоянные, причем $\det(C_i^h) \neq 0$, определяет каноническое почти геодезическое отображение первого типа пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тензор деформации связности P_{ij}^h в системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеет вид

$$P_{ii}^i = \frac{1}{x^i - C^i}, \quad i = \overline{1, n},$$

а остальные компоненты равны нулю. При таком строении тензор P_{ij}^h удовлетворяет уравнениям (17).

Прямые пространства A_n , которые определяются уравнениями

$$x^h = a^h + b^h t,$$

где t — параметр, при преобразовании (18) переходят в параболы пространства $\bar{A}_n$, определяемые уравнениями

$$\bar{x}^h = F^h + D^h t + E^h t^2,$$

где

$$F^h = \frac{1}{2}C_i^h(a^i - C^i)^2, \quad D^h = C_i^h(a^i - C^i)b^i, \quad E^h = \frac{1}{2}C_i^h(b^i)^2.$$

Исключение представляют прямые, проходящие через точку $M(C^1, C^2, \dots, C^n)$. Они при преобразовании (18) отображаются на прямые пространства $\bar{A}_n$.

Приведем более общий пример канонического почти геодезического отображения первого типа. Точечное преобразование аффинных координат плоского пространства A_n

$$\bar{x}^h = x_0^h + a_\alpha^h x^\alpha + a_{\alpha\beta}^h x^\alpha x^\beta,$$

где x_0^h, a_i^h, a_{ij}^h — постоянные, для которых $\det(a_i^h) \neq 0, a_{ij}^h = a_{ji}^h$, является каноническим почти геодезическим отображением первого типа.

При таком отображении все геодезические линии переходят либо в параболы, либо в прямые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. — М.: Янус-К, 2003.
2. Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й. О частном случае почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при котором сохраняется некоторый тензор// Мат. заметки. — 2015. — 98, № 3. — С. 463–466.
3. Березовский В. Е., Гусева Н. И., Микеш Й. Геодезические отображения эквиаффинных и Риччи-симметрических пространств// Мат. заметки. — 2021. — 110, № 2. — С. 309–312.
4. Березовский В. Е., Микеш Й. Почти геодезические отображения типа π_1 на обобщенно риччи-симметрических пространствах// Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — 151, № 4. — С. 9–14.
5. Березовский В. Е., Микеш Й. О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 2014. — № 2. — С. 3–8.
6. Березовский В. Е., Микеш Й., Худа Г., Чепурная Е. Е. Канонические почти геодезические отображения, сохраняющие тензор проективной кривизны// Изв. вузов. Мат. — 2017. — № 6. — С. 3–8.
7. Вавржикова Х., Микеш Й., Покорна О., Старко Г. Об основных уравнениях почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ // Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 1. — С. 10–15.
8. Веденяпин Д. В. Об $(n-2)$ -проективном пространстве// Науч. докл. высш. школы. Физ.-мат. науки. — 1959. — 6. — С. 119–126.
9. Домашев В. В., Микеш Й. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств// Мат. заметки. — 1978. — 23, № 2. — С. 297–303.
10. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. — М., 1961.
11. Курбатова И. Н. НР-отображения Н-пространств// Укр. геом. сб. — 1984. — 27. — С. 75–83.
12. Курбатова И. Н. О 4-квазипланарных отображениях почти кватернионных многообразий// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 1. — С. 75–78.
13. Микеш Й. Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств. — Деп. в ВИНТИ. — №. 3924-76, 1976.
14. Микеш Й. О некоторых классах римановых пространств, замкнутых соответственно на геодезические отображения// VII Всесоюз. конф. «Современная дифференциальная геометрия». — Минск, 1979. — С. 126.
15. Микеш Й. О голоморфно-проективных отображениях келеровых пространств// Укр. геом. сб. — 1980. — 23. — С. 90–98.
16. Микеш Й. О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространств// Мат. заметки. — 1980. — 28, № 2. — С. 313–317.
17. Микеш Й. О геодезических отображениях пространств Эйнштейна// Мат. заметки. — 1980. — 28, № 6. — С. 935–938.
18. Микеш Й. Об эквидистантных келеровых пространствах// Мат. заметки. — 1985. — 38, № 4. — С. 627–633.
19. Микеш Й. О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах// Докл. АН СССР. — 1986. — 291, № 1. — С. 33–36.
20. Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н. И. Геодезические отображения «в целом» Риччи-плоских пространств с n полными геодезическими линиями// Мат. заметки. — 2020. — 108, № 2. — С. 306–310.
21. Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л. Поворотные отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2021. — 110, № 1. — С. 151–154.
22. Микеш Й., Гусева Н. И., Пешка П., Рыпарова Л. Почти геодезические отображения и проекции сферы// Мат. заметки. — 2022. — 111, № 3. — С. 476–480.
23. Микеш Й., Синюков Н. С. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1983. — № 1. — С. 55–61.
24. Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
25. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.: Наука, 1966.
26. Синюков Н. С. О геодезических отображениях римановых многообразий на симметрические пространства// Докл. АН СССР. — 1954. — 98. — С. 21–23.
27. Синюков Н. С. Нормальные геодезические отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1956. — 111. — С. 766–767.
28. Синюков Н. С. Об эквидистантных пространствах// Вестн. Одесск. ун-та. — 1957. — С. 133–135.
29. Синюков Н. С. Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими// Докл. АН СССР. — 1961. — 137, № 6. — С. 1312–1314.

30. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффиносвязных и римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 4. — С. 781–782.
31. *Синюков Н. С.* К теории геодезического отображения римановых пространств// Докл. АН СССР. — 1966. — 169, № 4. — С. 770–772.
32. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения пространств аффинной связности и ϵ -структуры// Мат. заметки. — 1970. — 7, № 4. — С. 449–459.
33. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.
34. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств// Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. — 1982. — 13. — С. 3–26.
35. *Собчук В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на симметрические римановы пространства// Мат. заметки. — 1975. — 17, № 5. — С. 757–763.
36. *Solodovnikov A. S.* Projective transformations of Riemannian spaces// Usp. Mat. Nauk. — 1956. — 11, № 4. — С. 45–116.
37. *Солодовников А. С.* Пространства с общими геодезическими// Тр. семин. вект. тенз. анализ. — 1961. — 11. — С. 43–102.
38. *Солодовников А. С.* Геометрическое описание всех возможных представлений римановой метрики в форме Леви-Чивиты// Тр. семин. вект. тенз. анализ. — 1963. — 12. — С. 131–173.
39. *Шадный В. С.* Почти геодезическое отображение римановых пространств на пространства постоянной кривизны// Мат. заметки. — 1979. — 25, № 2. — С. 293–298.
40. *Шапиро Я. Л.* О квазигеодезическом отображении// Изв. вузов. Мат. — 1980. — № 9. — С. 53–55.
41. *П. А. Широков* Избранные труды по геометрии. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966.
42. *Шиха М., Микеш Й.* Об эквидистантных параболически кэлеровых пространствах// Тр. геом. семин. — 1994. — 22. — С. 97–107.
43. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
44. *Яблонская Н. В.* О специальных группах почти геодезических преобразований пространств аффинной связности// Изв. вузов. Мат. — 1986. — № 1. — С. 78–80.
45. *Al Lami R. J. K.* Holomorphically projective mappings of compact semisymmetric manifolds// Acta Univ. Palacki. Olomouc. Fac. Rerum Nat. Math. — 2010. — 49, № 1. — P. 49–53.
46. *Al Lami R. J. K., Škodová M., Mikeš J.* On holomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto Kählerian spaces// Arch. Math. (Brno). — 2006. — 42, № 5. — P. 291–299.
47. *Aminova A. V.* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds// J. Math. Sci. — 2003. — 113, № 3. — P. 367–470.
48. *Belova O., Mikeš J.* Almost geodesics and special affine connection// Res. Math. — 2020. — 75, № 3. — 127.
49. *Berezovskii V. E., Mikeš J., Rýparová L., Sabykanov A.* On canonical almost geodesic mappings of type $\pi_2(e)$ // Mathematics. — 2020. — 8, № 1. — 54.
50. *Belova O., Mikeš J., Sherkuziyev M., Sherkuziyeva N.* An analytical inflexibility of surfaces attached along a curve to a surface regarding a point and plane// Res. Math. — 2021. — 76, № 2. — 56.
51. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Complex curves as lines of geometries// Res. Math. — 2017. — 71, № 1-2. — P. 145–165.
52. *Belova O., Mikeš J., Strambach K.* Geodesics and almost geodesics curves// Res. Math. — 2018. — 73, № 4. — 154.
53. *Belova O. et al.* Our friend and mathematician Karl Strambach// Res. Math. — 2020. — 75, № 2. — 69.
54. *Berezovski V., Bácsó S., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemannian curvature// Ann. Math. Inf. — 2015. — 45. — P. 3–10.
55. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Leshchenko S., Mikeš J.* Canonical almost geodesic mappings of the first type of spaces with affine connection onto generalized 2-Ricci-symmetric spaces// Geom. Integr. Quant. — 2021. — 22. — P. 78–87.
56. *Berezovski V. E., Cherevko Y., Rýparová L.* Conformal and geodesic mappings onto some special spaces// Mathematics. — 2019. — 7, № 8. — 664.
57. *Berezovski V. E., Jukl M., Juklová L.* Almost geodesic mappings of the first type onto symmetric spaces// Proc. 16th Conf. APLIMAT 2017. — Bratislava, 2017. — P. 126–131.
58. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On the classification of almost geodesic mappings of affine-connected spaces// Proc. Conf. “Differential Geometry and Applications” (Dubrovnik, 1988). — 1989. — P. 41–48.
59. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On a classification of almost geodesic mappings of affine connection spaces// Acta Univ. Palacki. Olomouc. Math. — 1996. — 35. — P. 21–24.

60. *Berezovski V. E., Mikeš J.* On almost geodesic mappings of the type π_1 of Riemannian spaces preserving a system of n -orthogonal hypersurfaces// *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1999. — 59. — P. 103–108.
61. *Berezovski V. E., Mikeš J.* Almost geodesic mappings of spaces with affine connection// *J. Math. Sci.* — 2015. — 207, № 3. — P. 389–409.
62. *Berezovski V. E., Mikeš J., Radulović Ž.* Almost geodesic mappings of type π_1^* of spaces with affine connection// *Math. Montisnigri.* — 2021. — 52. — P. 30–36.
63. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Almost geodesic mappings onto generalized Ricci-symmetric manifolds// *Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyhaziensis.* — 2010. — 26. — P. 221–230.
64. *Berezovski V. E., Mikeš J., Vanžurová A.* Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type π_1 // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* — 2014. — 37. — P. 647–659.
65. *Chudá H., Guseva N., Peška P.* On F_2^ε -planar mappings with function ε of (pseudo-) Riemannian manifolds// *Filomat.* — 2017. — 31, № 9. — P. 2683–2689.
66. *Chudá H., Shiha M.* Conformal holomorphically projective mappings satisfying a certain initial condition// *Miskolc. Math. Notes.* — 2013. — 14, № 2. — P. 569–574.
67. *Ćirić M. S., Zlatanović M. Lj., Stanković M. S., Velimirović Lj. S.* On geodesic mappings of equidistant generalized Riemannian spaces// *Appl. Math. Comput.* — 2012. — 218, № 12. — P. 6648–6655.
68. *Eisenhart L. P.* Non-Riemannian Geometry. — Mineola, NY: Dover, 2005.
69. *Eisenhart L. P.* Continuous Groups of Transformations. — New York: Dover, 1961.
70. *Hinterleitner I., Mikeš J.* On F -planar mappings of spaces with affine connections// *Note Mat.* — 2007. — 27, № 1. — P. 111–118.
71. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings onto Weyl manifolds// *J. Appl. Math.* — 2009. — 2, № 1. — P. 125–133.
72. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations// *J. Math. Sci.* — 2011. — 174, № 5. — P. 537–554.
73. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Projective equivalence and spaces with equiaffine connection// *J. Math. Sci.* — 2011. — 177. — P. 546–550.
74. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Holomorphically projective mappings onto complete Kähler manifolds// *Proc. XVI Geom. Seminar (Univ. Niš, Serbia), 2011.* — P. 56–64.
75. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings and Einstein spaces// *Trends Math.* — 2013. — 19. — P. 331–335.
76. *Hinterleitner I., Mikeš J.* Geodesic mappings of (pseudo-) Riemannian manifolds preserve class of differentiability// *Miskolc. Math. Notes.* — 2013. — 14, № 2. — P. 575–582.
77. *Hinterleitner I., Mikeš J., Peška P.* Fundamental equations of F -planar mappings// *Lobachevskii J. Math.* — 2017. — 38, № 4. — P. 653–659.
78. *Kozak A., Borowiec A.* Palatini frames in scalar-tensor theories of gravity// *Eur. Phys. J.* — 2019. — 79. — 335.
79. *Křížek J., Mikeš J., Peška P., Rýparová L.* Extremals and isoperimetric extremals of the rotations in the plane// *Geom. Integr. Quant.* — 2021. — 22. — P. 136–141.
80. *Levi-Civita T.* Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche// *Ann. Mat.* — 1896. — 24. — P. 252–300.
81. *Mikeš J.* Geodesic mappings of affine-connected and Riemannian spaces// *J. Math. Sci.* — 1996. — 78, № 3. — P. 311–333.
82. *Mikeš J.* Holomorphically projective mappings and their generalizations// *J. Math. Sci.* — 1998. — 89, № 3. — P. 1334–1353.
83. *Mikeš J., Berezovski V.* Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces// *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai.* — 1989. — 56. — P. 491–494.
84. *Mikeš J., Pokorná O., Starko G. A., Vavříková H.* On almost geodesic mappings $\pi_2(e)$, $e = \pm 1$ // *Proc. Conf. APLIMAT.* — Bratislava, 2005. — P. 315–321.
85. *Mikeš J., Shiha M., Vanžurová A.* Invariant objects by holomorphically projective mappings of parabolically Kähler spaces// *J. Appl. Math.* — 2009. — 2. — P. 135–141.
86. *Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.
87. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.
88. *Mikeš J. et al.* Differential Geometry of Special Mappings. 2nd edition. — Olomouc: Palacky Univ. Press, 2019.
89. *Najdanović M. S., Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I.* Conformal and geodesic mappings of generalized equidistant spaces// *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* — 2015. — 98 (112). — P. 71–84.
90. *Otsuki T., Tashiro Y.* On curves in Kaehlerian spaces// *Math. J. Okayama Univ.* — 1954. — 4. — P. 57–78.

91. *Peška P., Mikeš J., Rýparová L.* Almost geodesic curves as intersections of n -dimensional spheres// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 3. — P. 687–690.
92. *Petrov A. Z.* Modeling of physical fields// Gravit. Gen. Relat. — 1968. — 4. — P. 7–21.
93. *Petrović M. Z.* Canonical almost geodesic mappings of type $\theta\pi_2(0, F)$, $\theta \in \{1, 2\}$ between generalized parabolic Kähler manifolds// Miskolc. Math. Notes. — 2018. — 19. — P. 469–482.
94. *Petrović M. Z.* Special almost geodesic mappings of the second type between generalized Riemannian spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2019. — 42. — P. 707–727.
95. *Petrović M. Z., Stanković M. S.* Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces// Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2017. — 40. — P. 1353–1362.
96. *Prvanović M.* Holomorphically projective transformations in a locally product space// Math. Balk. — 1971. — 1. — P. 195–213.
97. *Prvanović M.* Holomorphically semi-symmetric connexions// Zb. Rad., Prir.-Mat. Fak., Univ. Novom Sadu. — 1979. — 9. — P. 91–99.
98. *Prvanović M.* A note on holomorphically projective transformations of the Kähler spaces// Tensor. — 1981. — 35. — P. 99–104.
99. *Radulovich Zh., Mikeš J., Gavril'chenko M. L.* Geodesic Mappings and Deformations of Riemannian Spaces. — Podgorica: CID, 1997.
100. *Rýparová L., Mikeš J.* On geodesic bifurcations// Geom. Integr. Quant. — 2017. — 18. — P. 217–224.
101. *Rýparová L., Mikeš J.* Bifurcation of closed geodesics// Geom. Integr. Quant. — 2018. — 19. — P. 188–192.
102. *Rýparová L., Mikeš J., Sabykanov A.* On geodesic bifurcations of product spaces// J. Math. Sci. — 2019. — 239, № 1. — P. 86–91.
103. *Shandra I. G., Mikeš J.* Geodesic mappings of semi-Riemannian manifolds with a degenerate metric// Mathematics. — 2022. — 10, № 1. — 154.
104. *Shiha M.* On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces// (Kowalski O. et al., eds.) Proc. 5th Int. Conf. “Differential Geometry and Its Applications” (Opava, Czechoslovakia, August 24–28, 1992). — Opava: Silesian Univ., 1993. — P. 157–160.
105. *Shiha M., Juklová L., Mikeš J.* Holomorphically projective mappings onto Riemannian tangent-product spaces// J. Appl. Math. Bratislava. — 2012. — 5, № 3. — P. 259–266.
106. *Shiha M., Mikeš J.* On holomorphically projective flat parabolically Kählerian spaces// (Bokan N. et al., eds.) Proc. Conference “Contemporary Geometry and Related Topics” (Belgrade, Serbia and Montenegro, June 26—July 2, 2005). — Belgrade: Univ. Belgrade, 2006. — P. 467–474.
107. *Sobchuk V. S., Mikeš J., Pokorná O.* On almost geodesic mappings π_2 between semisymmetric Riemannian spaces// Novi Sad J. Math. — 1999. — 9. — P. 309–312.
108. *Stanković M. S.* On canonic almost geodesic mappings of the second type of affine spaces// Filomat. — 1999. — 13. — P. 105–144.
109. *Stanković M. S., Čirić M. S., Zlatanović M. Lj.* Geodesic mappings of equiaffine and anti-equiaffine general affine connection spaces preserving torsion// Filomat. — 2012. — 26, № 3. — P. 439–451.
110. *Stanković M. S., Minčić S. M., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* On equitortion geodesic mappings of general affine connection spaces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2010. — 124. — P. 77–90.
111. *Stanković M. S., Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S.* Equitortion holomorphically projective mappings of generalized Kählerian space of the second kind// Int. Electron. J. Geom. — 2010. — 3, № 2. — P. 26–39.
112. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Basic equations of G -almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity// Czech. Math. J. — 2015. — 65. — P. 787–799.
113. *Stanković M. S., Zlatanović M. L., Vesić N. O.* Some properties of ET-projective tensors obtained from Weyl projective tensor// Filomat. — 2015. — 29, № 3. — P. 573–584.
114. *Stepanov S., Mikeš J.* Application of the Hopf maximum principle to the theory of geodesic mappings// Kragujevac J. Math. — 2021. — 45, № 5. — P. 781–786.
115. *Thomas J. M.* Asymmetric displacement of a vector// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — 28, № 4. — P. 658–670.
116. *Thomas T. Y.* On projective and equiprojective geometries of paths// Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1925. — 11. — P. 198–203.
117. *Thomas T. Y.* Note on the projective geometry of paths// Bull. Am. Math. Soc. — 1925. — 31. — P. 318–322.
118. *Vesić N. O., Stanković M. S.* Invariants of special second-type almost geodesic mappings of generalized Riemannian space// Mediterr. J. Math. — 2018. — 15, № 60.

119. *Vesić N. O., Velimirović L. S., Stanković M. S.* Some invariants of equitorsion third type almost geodesic mappings// *Mediterr. J. Math.* — 2016. — 13. — P. 4581–4590.
120. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj.* Invariants for geodesic and F-planar mappings of generalized Riemannian spaces// *Quaest. Math.* — 2021. — 44, № 7. — P. 983–996.
121. *Vesić N. O., Zlatanović M. Lj., Velimirović A. M.* Projective invariants for equitorsion geodesic mappings of semi-symmetric affine connection spaces// *J. Math. Anal. Appl.* — 2019. — 472, № 2. — P. 1571–1580.
122. *Vrančeanu G.* Proprietati globale ale spațiilor bui Riemann cu conexiune abina constantă// *Stud. Cerc. Mat. Acad. RPR.* — 1963. — 14, № 1. — P. 7–22.
123. *Weyl H.* Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung// *Göttinger Nachrichten.* — 1921. — P. 99–112.
124. *Zlatanović M. Lj.* On equitorsion geodesic mappings of general affine connection spaces onto generalized Riemannian spaces// *Appl. Math. Lett.* — 2011. — 24, № 5. — P. 665–671.
125. *Zlatanović M. Lj.* New projective tensors for equitorsion geodesic mappings// *Appl. Math. Lett.* — 2012. — 25, № 5. — P. 890–897.
126. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* On equitorsion concircular tensors of generalized Riemannian spaces// *Filomat.* — 2014. — 28, № 3. — P. 463–471.
127. *Zlatanović M. Lj., Hinterleitner I., Najdanović M.* Geodesic mapping onto Kählerian spaces of the first kind// *Czech. Math. J.* — 2014. — 64, № 4. — P. 1113–1122.
128. *Zlatanović M. Lj., Stanković V.* Geodesic mapping onto Kählerian space of the third kind// *J. Math. Anal. Appl.* — 2017. — 450, № 1. — P. 480–489.
129. *Zlatanović M. Lj., Velimirović Lj. S., Stanković M. S.* Necessary and sufficient conditions for equitorsion geodesic mapping// *J. Math. Anal. Appl.* — 2016. — 435, № 1. — P. 578–592.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Березовский Владимир Евгеньевич

Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

E-mail: berez.volod@gmail.com

Лещенко Светлана Владимировна

Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

E-mail: S.V.Leschenko1963@gmail.com

Mikeš Josef

Университет им. Ф. Палацкого, Оломоуц, Чехия

E-mail: josef.mikes@upol.cz



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 34–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-34-46

УДК 517.954, 517.983

О ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. В. Б. ВАСИЛЬЕВ, А. А. ХОДЫРЕВА

Аннотация. В работе рассматривается дискретное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в квадранте и связанная с ним дискретная краевая задача Дирихле. Описаны условия разрешимости дискретной краевой задачи в дискретных аналогах пространств Соболева—Слободецкого. Дается сравнение дискретного решения с решением соответствующей континуальной краевой задачи в зависимости от параметра дискретизации.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, периодическая волновая факторизация, аналитичность, разрешимость, дискретная задача Дирихле.

ON THE DISCRETE DIRICHLET PROBLEM IN A QUARTER PLANE

© 2023 V. B. VASILYEV, A. A. KHODYREVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a discrete elliptic pseudodifferential equation in a quadrant and the related discrete Dirichlet boundary-value problem and discuss conditions for the solvability of a discrete boundary-value problem in discrete analogs of the Sobolev–Slobodetsky spaces. We compare discrete solutions with solutions of the corresponding continual boundary-value problem depending on the discretization parameter.

Keywords and phrases: discrete pseudodifferential operator, periodic wave factorization, analyticity, solvability, discrete Dirichlet problem.

AMS Subject Classification: 35S15, 47B38

1. Введение. Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений активно развивалась с середины 60-х прошлого столетия, и основные задачи были связаны с ограниченностью этих операторов в различных функциональных пространствах, описанием свойств фредгольмовости и регулярности решений, вычисление индекса (см. [7, 11, 12]). Однако дискретные аспекты этой теории (в отличие от дифференциальных операторов в частных производных и соответствующих краевых задач; см. [8, 9]) исследовались не столь интенсивно, и, как правило, ограничивались рассмотрением псевдодифференциальных операторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ (см. [13, 14]). Оставалось неясным, могут ли дискретные операторы стать хорошим аппроксимационным инструментом для решения псевдодифференциальных уравнений, хотя априори понятно, что дискретизация является неизменным условием для компьютерных вычислений. В связи с этим первый автор начал разрабатывать дискретную теорию таких уравнений, начав с сингулярных интегралов Кальдерона—Зигмунда (см. [1, 16]) как простейшего представления псевдодифференциальных операторов, постепенно переходя к модельным псевдодифференциальным операторам и уравнениям (пока в канонических областях) в дискретных пространствах $L_2(h\mathbb{Z}^m)$, $L_2(h\mathbb{Z}^m_+)$, $h > 0$, и сравнение дискретных и континуальных решений. Оказалось, что картина разрешимости дискретных уравнений выглядит подобно континуальному случаю, и в случае $h \rightarrow 0$ дискретные условия разрешимости переходят в свой континуальный аналог. Аналогичные исследования

были проведены для более общих модельных псевдодифференциальных операторов в дискретных аналогах H^s -пространств (см. [17, 18]) со сравнением дискретных и непрерывных решений (см. [3, 15]).

В этой работе мы рассматриваем новую модельную область — квадрант в $\mathbb{R}^2$, описываем условия разрешимости соответствующего модельного уравнения, выделяем дискретную краевую задачу и даем сравнение дискретных и континуальных решений. Для описания разрешимости модельных псевдодифференциальных уравнений и постановки дискретных краевых задач используем периодический аналог волновой факторизации (см. [2]). Некоторые элементы этих построений были анонсированы в [19, 21]. Здесь приведены более общее определение и расширен класс рассматриваемых уравнений.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости. Обозначим через $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0\}$ первый квадрант на плоскости, $k_s = h\mathbb{Z}^2 \cap K, h > 0$. Введем пространство функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$, обладающих приведенными далее свойствами.

Пусть $\mathbb{T}^2$ — квадрат $[-\pi, \pi]^2$, $h > 0$, $\hbar = h^{-1}$. Будем рассматривать функции, изначально заданные в квадрате, как периодические функции, определенные на всей плоскости $\mathbb{R}^m$ с основным квадратом периодов $\mathbb{T}^2$. Для таких функций можно определить дискретное преобразование Фурье формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

в случае сходимости такого ряда, и функция $\tilde{u}_d(\xi)$ будет периодической функцией в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Определенное таким образом дискретное преобразование Фурье наследует все свойства интегрального преобразования Фурье, и обратное дискретное преобразование Фурье можно записать в виде

$$(F_d^{-1} \tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2 \right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие пространства дискретных функций; и для их введения используем понятие разделенных разностей (см. [9]) и их дискретные преобразования Фурье. С помощью этих конструкций определим дискретные пространства Соболева—Слободецкого для исследования разрешимости широкого класса дискретных уравнений. Сначала введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ [17] и дискретную обобщенную функцию.

Определение 2.1. Дискретной обобщенной функцией называется любой линейный непрерывный функционал на $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Обозначим через $S'(h\mathbb{Z}^2)$ множество таких дискретных обобщенных функций, а через (f_d, u_d) — значение дискретного функционала f_d на основной дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$. Носителем дискретной функции $u_d \in S(h\mathbb{Z}^2)$ называется подмножество $h\mathbb{Z}^2$, на котором u_d отлична от нуля. Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ положим $M_d = M \cap h\mathbb{Z}^2$. Будем говорить, что f_d обращается в нуль в дискретной области M_d , если $(f_d, u_d) = 0$ для всех $u_d \in S(M_d)$, где $S(M_d) \subset S(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных функций с носителями, содержащимися в M_d . Если обозначить через $\widetilde{M}_d$ объединение таких M_d , где $f_d = 0$, носителем дискретной обобщенной функции f_d будет множество $h\mathbb{Z}^2 \setminus \widetilde{M}_d$.

Аналогично [4] можно определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, однако роль дифференцирования будет играть разделенная разность первого порядка. Свойства дискретных

обобщенных функций подробно описаны в [17]; сходимость понимается как слабая сходимость в пространстве функционалов $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пример 2.1. Если $f_d(\tilde{x})$ локально суммируема, она порождает дискретную обобщенную функцию по формуле

$$(f_d, u_d) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} f_d(\tilde{x}) u_d(\tilde{x}) h^2 \quad \forall u_d \in S(h\mathbb{Z}^2). \quad (1)$$

Однако возможны и другие варианты, аналогичные дельта-функции Дирака

$$(\delta_d, u_d) = u_d(0),$$

не представимые формулой (1).

Введем обозначение $\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih \cdot \xi_1} - 1)^2 + (e^{-ih \cdot \xi_2} - 1)^2)$.

Определение 2.2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{h\mathbb{T}^2} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Следует упомянуть, что многие свойства таких дискретных пространств были исследованы в [10]. Варьируя h в (2), получим различные нормы, которые эквивалентны L_2 -норме, однако постоянные эквивалентности будут зависеть от h . В этой связи хотелось бы отметить, что в наших конструкциях (см. ниже) все постоянные от h не зависят.

Определение 2.3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$, носители которых содержатся в $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H_0^s(K_d)$ состоит из дискретных обобщенных функций $f_d \in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями в K_d , и эти дискретные обобщенные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H_0^s(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где $\inf$ берется по всем продолжениям ℓ .

Фурье-образ пространства $H^s(K_d)$ будем обозначать $\tilde{H}^s(K_d)$.

Если $\tilde{A}_d(\xi)$ — измеримая периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным кубом периодов $h\mathbb{T}^2$, будем называть ее символом.

Определение 2.4. Дискретным псевдодифференциальным оператором A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ в дискретном квадранте K_d называется оператор следующего вида:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} \tilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d. \quad (3)$$

Оператор A_d называется эллиптическим, если

$$\text{ess inf}_{\xi \in h\mathbb{T}^2} |\tilde{A}_d(\xi)| > 0.$$

Можно определить более общий дискретный псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{A}_d(\tilde{x}, \xi)$, зависящим от дискретной пространственной переменной $\tilde{x}$:

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int_{h\mathbb{T}^2} \tilde{A}_d(\tilde{x}, \xi) e^{i(\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d,$$

однако в этой работе ограничимся модельным оператором вида (3).

Будем рассматривать класс E_α символов, удовлетворяющих условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |\tilde{A}_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \quad (4)$$

с постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h , и называть число $\alpha \in \mathbb{R}$ порядком псевдодифференциального оператора A_d .

Нетрудно убедиться в справедливости следующего результата.

Лемма 2.1. *Дискретный псевдодифференциальный оператор A_d с символом $\tilde{A}_d(\xi)$ — линейный ограниченный оператор $H^s(h\mathbb{Z}^2) \rightarrow H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от h .*

3. Периодическая волновая факторизация и разрешимость. Исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d, \quad (5)$$

в пространстве $H^s(K_d)$, предполагая, что $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Для получения картины разрешимости дискретного уравнения (5) нам понадобятся элементы многомерного комплексного анализа.

Область вида $\mathcal{T}_h(K) = h\mathbb{T}^2 + iK$ двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ назовем трубчатой областью над квадрантом K . Будем рассматривать аналитические функции $f(x + i\tau)$ в $\mathcal{T}_h(K) = h\mathbb{T}^2 + iK$, считая их вещественно-периодическими, определенными для почти всех значений x .

Введем периодическое ядро Бохнера по аналогии с [4]:

$$B_h(z) = \sum_{\tilde{x} \in K_d} e^{i\tilde{x} \cdot (\xi + i\tau) h^2}, \quad \xi \in h\mathbb{T}^2, \quad \tau \in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h \tilde{u}_d)(\xi) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \tau \in K}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{h\mathbb{T}^2} B_h(\xi + i\tau - \eta) \tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

Лемма 3.1. *Для квадранта K оператор B_h имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} (B_h \tilde{u}_d)(\xi) = & \frac{h^2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \\ & + \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{ih}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta + \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{ih}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta - \\ & - \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{h^2}{8\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_1 - \eta_1 + i\tau_1)}{2} \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_2 - \eta_2 + i\tau_2)}{2} \tilde{u}_d(\eta) d\eta. \quad (6) \end{aligned}$$

Доказательство. В [16] приведены вычисления для дискретной положительной полуоси (одномерный конус). Воспользуемся этими вычислениями применительно к нашему случаю. Одномерный вариант формулы имеет вид

$$\sum_{\tilde{x}_k \in h\mathbb{Z}_+} e^{-i\tilde{x}_k z_k} h = \frac{h}{2} - \frac{ih}{2} \operatorname{ctg} \frac{hz_k}{2}, \quad z_k = \xi_k + i\tau_k, \quad k = 1, 2.$$

Перемножая два компонента и используя свойство преобразования Фурье о свертке и произведении, получаем искомое представление. $\square$

Замечание 3.1. Используя известные результаты [10], нетрудно убедиться, что оператор B_h является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{T}^2) \rightarrow H^s(h\mathbb{T}^2)$, где $|s| < 1/2$, и, кроме этого, B_h — проектор $\tilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2) \rightarrow \tilde{H}^s(K_d)$.

Поскольку формула (6) слишком громоздка, сделаем следующие допущения. Будем рассматривать подпространство $S(h\mathbb{Z}^2)$, в котором функции обнуляются на координатных осях, и пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ будем определять как замыкание этого подпространства в H^s -норме. В этом случае первые три слагаемых в формуле (6) окажутся нулевыми.

Определение 3.1. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $\tilde{A}_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде

$$\tilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi)A_{d,= }(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,= }(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$ соответственно и удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2} &\leq |A_{d,\neq}(\xi + i\tau)| \leq c'_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\varkappa/2}, \\ c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2} &\leq |A_{d,= }(\xi - i\tau)| \leq c'_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{(\alpha-\varkappa)/2}, \end{aligned}$$

с постоянными c_1 , c'_1 , c_2 , c'_2 , не зависящими от h , где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv h^2 \left((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)} - 1)^2 \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in h\mathbb{T}^2, \quad \tau = (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $\varkappa \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

Замечание 3.2. К сожалению, алгоритм построения периодической волновой факторизации отсутствует. Достаточные условия для существования такой факторизации приведены в [20].

Всюду ниже предполагаем наличие периодической волновой факторизации для символа $\tilde{A}_d(\xi)$ с индексом $\varkappa$.

Наиболее простой случай, когда решение уравнения (5) существует и единственно, содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.1. Пусть $|\varkappa - s| < 1/2$. Тогда уравнение (5) для любой правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ имеет единственное решение, которое дается формулой

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)B_h(A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)),$$

где ℓv_d — произвольное продолжение v_d из $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$.

Доказательство. Пусть ℓv_d — произвольное продолжение v_d из $H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x}),$$

так что $w(\tilde{x}) = 0$, если $\tilde{x} \notin K_d$. Перепишем уравнение в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2,$$

и после применения дискретного преобразования Фурье и учета периодической волновой факторизации, в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,= }^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi), \quad \xi \in h\mathbb{T}^2, \quad (7)$$

Согласно лемме 2.1 имеем следующие включения:

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) \in \tilde{H}^{s-\varkappa}(K_d), \quad A_{d,= }^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) \in \tilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d), \quad A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi) \in \tilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2),$$

и тогда по лемме 3.1 правая часть последнего равенства допускает однозначное представление в виде прямой суммы

$$A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi) = f_d^+(\xi) + f_d^-(\xi),$$

где

$$f_d^+(\xi) = B_h(A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)), \quad f_d^-(\xi) = (I - B_h)(A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)).$$

Перепишем равенство (7) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - f_d^+(\xi) = f_d^-(\xi) - A_{d,= }^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi)$$

и в силу однозначности представления в виде прямой суммы $\tilde{H}^{s-\varkappa}(K_d) \oplus \tilde{H}^{s-\varkappa}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$ и в силу той же леммы левая и правая части равенства должны быть нулями. Следовательно,

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)B_h(A_{d,= }^{-1}(\xi)(\widetilde{\ell v_d})(\xi)),$$

и теорема доказана. $\square$

4. Дискретная краевая задача Дирихле. В этом разделе рассмотрим более содержательный случай, когда уравнение (5) может иметь много решений.

Используем здесь результат, подробное доказательство которого содержится в работе [17], который позволяет определить типы граничных условий, обеспечивающих однозначную разрешимость краевых задач.

Теорема 4.1. Пусть $\varkappa - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)Q_n(\xi)B_h(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)) + A_{d,\neq}^{-1}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}_1^k\right),$$

где $Q_n(\xi)$ — произвольный многочлен степени n переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, удовлетворяющий условию (4) с $\alpha = n$, $\tilde{c}_k(\xi_1)$, $\tilde{d}_k(\xi_2)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, — произвольные функции из $H^{s_k}(\hbar\mathbb{T})$, $s_k = s - \varkappa + k - 1/2$. Имеет место априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq \text{const} \left(\|f\|_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=0}^{n-1} ([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k}) \right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ обозначает норму в $H^{s_k}(\hbar\mathbb{T})$, и const не зависит от h .

В этой работе рассмотрим только одну дискретную краевую задачу с условием Дирихле на границе, ограничившись случаем $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$, $v_d \equiv 0$.

Как следует из теоремы 4.1, имеем следующую формулу для общего решения уравнения (5):

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_2)), \quad (8)$$

где $c_0, d_0 \in H^{s-\varkappa-1/2}(\hbar\mathbb{Z})$ — произвольные функции. Для их однозначной идентификации добавим к уравнению дискретные условия Дирихле на сторонах угла

$$u_d|_{\tilde{x}_1=0} = f_d(\tilde{x}_2), \quad u_d|_{\tilde{x}_2=0} = g_d(\tilde{x}_1). \quad (9)$$

Применение дискретного преобразования Фурье к дискретным условиям Дирихле (9) придает им следующий вид:

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \tilde{f}_d(\xi_2), \quad \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 = \tilde{g}_d(\xi_1). \quad (10)$$

Учет (10) в (8) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi_1 &= \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2) \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1, \\ \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi_2 &= \tilde{c}_0(\xi_1) \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_2 + \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2. \end{aligned}$$

Теперь введем обозначения

$$\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 \equiv \tilde{a}_0(\xi_2), \quad \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} A_{d,\neq}^{-1}(\xi) d\xi_2 \equiv \tilde{b}_0(\xi_1)$$

и предположим, что выполнены условия

$$\text{ess inf}_{\xi_2 \in \hbar\mathbb{T}} |\tilde{a}_0(\xi_2)| > 0, \quad \text{ess inf}_{\xi_1 \in \hbar\mathbb{T}} |\tilde{b}_0(\xi_1)| > 0. \quad (11)$$

Таким образом, получена следующая система двух линейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{c}_0(\xi_1)$, $\tilde{d}_0(\xi_2)$:

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} k_1(\xi) \tilde{c}_0(\xi_1) d\xi_1 + \tilde{d}_0(\xi_2) = \tilde{F}_d(\xi_2), \quad \tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-h\pi}^{h\pi} k_2(\xi) \tilde{d}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{G}_d(\xi_1), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_d(\xi_2) &= \tilde{f}_d(\xi_2) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2), & \tilde{G}_d(\xi_1) &= \tilde{g}_d(\xi_1) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), \\ k_1(\xi) &= A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{b}_0^{-1}(\xi_1), & k_2(\xi) &= A_{d,\neq}^{-1}(\xi) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2). \end{aligned}$$

Условия однозначной разрешимости системы (12) эквивалентны условиям однозначной разрешимости дискретной задачи Дирихле (5), (9). Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $f_d, g_d \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$, $s > 1/2$, $v_d \equiv 0$ и выполнено условие (11). Тогда дискретная задача Дирихле (5), (9) сводится к эквивалентной системе линейных интегральных уравнений (12).

5. Сравнение дискретных и непрерывных решений. Опишем континуальный аналог дискретной задачи Дирихле (5), (9) и проведем сравнение дискретных и непрерывных решений.

5.1. Континуальный аналог. Пусть $\tilde{A}(\xi)$ — символ псевдодифференциального оператора A , удовлетворяющий условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |\tilde{A}(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha,$$

который допускает волновую факторизацию относительно K

$$\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с таким индексом $\varkappa$, что $\varkappa - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} (Au)(x) = 0, & x \in K, \\ u|_{x_2 > 0, x_1 = 0} = f(x_2), & u|_{x_1 > 0, x_2 = 0} = g(x_1), \end{cases} \quad (13)$$

$f, g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}_+)$ — заданные функции. Система интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{C}_0(\xi_1)$, $\tilde{D}_0(\xi_2)$, эквивалентная задаче Дирихле (13), была получена ранее (см. [2]) и выглядит следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\xi) \tilde{C}_0(\xi_1) d\xi_1 + \tilde{D}_0(\xi_2) = \tilde{F}(\xi_2), \quad \tilde{C}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\xi) \tilde{D}_0(\xi_2) d\xi_2 = \tilde{G}(\xi_1), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_2) &= \tilde{f}(\xi_2) \tilde{A}_0^{-1}(\xi_2), & \tilde{G}(\xi_1) &= \tilde{g}(\xi_1) \tilde{B}_0^{-1}(\xi_1), \\ K_1(\xi) &= A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{B}_0^{-1}(\xi_1), & K_2(\xi) &= A_{\neq}^{-1}(\xi) \tilde{A}_0^{-1}(\xi_2), \\ \int_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 &\equiv \tilde{A}_0(\xi_2), & \int_{-\infty}^{\infty} A_{\neq}^{-1}(\xi) d\xi_2 &\equiv \tilde{B}_0(\xi_1) \end{aligned}$$

в предположении, что выполнены условия

$$\operatorname{ess\,inf}_{\xi_2 \in \mathbb{R}} |\tilde{A}_0(\xi_2)| > 0, \quad \operatorname{ess\,inf}_{\xi_1 \in \mathbb{R}} |\tilde{B}_0(\xi_1)| > 0. \quad (15)$$

Зная решение $\tilde{C}_0(\xi_1)$, $\tilde{D}_0(\xi_2)$ системы (14), можем найти решение задачи Дирихле (13) по формуле

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) (\tilde{C}_0(\xi_1) + \tilde{D}_0(\xi_2)), \quad (16)$$

Следующий шаг — сравнение решений (8) и (16).

5.2. *Операторная формулировка.* Перепишем системы (12) и (14) в векторной форме, введя операторные матрицы и вектор-функции

$$M = \begin{pmatrix} K_1 & I \\ I & K_2 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} k_1 & I \\ I & k_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_0 \\ \tilde{D}_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{d}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{G} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_d = \begin{pmatrix} \tilde{F}_d \\ \tilde{G}_d \end{pmatrix},$$

и эти системы примут вид

$$M\tilde{C} = \tilde{F}, \quad m\tilde{c} = \tilde{F}_d.$$

Операторы M и m ограничено действуют в пространствах $\mathbf{H}^{s_0}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{H}^{s_0}(\hbar\mathbb{T})$ соответственно. Это пространства вектор-функций, состоящих из двух компонент, каждая из которых принадлежит соответствующему H^s -пространству; норма определяется как сумма норм компонент. Будем предполагать, что для операторов M и m существует ограниченный обратный и что нормы этих обратных операторов ограничены сверху постоянной, не зависящей от $\hbar$. Следовательно,

$$\tilde{C} = M^{-1}\tilde{F}, \quad \tilde{c} = m^{-1}\tilde{F}_d$$

Исходя из формул (8) и (16), можно сделать вывод, что для оценки разности дискретных и непрерывных решений необходима оценка для $\tilde{C} - \tilde{c}$. Этому вопросу посвящен следующий раздел.

5.3. *Сравнение.* Для сравнения элементы дискретной краевой задачи Дирихле (5), (9) выберем следующим образом. По заданной периодической волновой факторизации символа континуальной задачи

$$\tilde{A}(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

построим элементы $A_{d,\neq}$ и $A_{d,=}(\xi)$, взяв сужения $A_{\neq}(\xi)$ и $A_{=}(\xi)$ на $\hbar\mathbb{T}^2$ и периодически продолжив их на все $\mathbb{R}^2$; после этого введем периодический символ

$$\tilde{A}_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) \cdot A_{d,=}(\xi).$$

Дискретные граничные функции f_d и g_d строятся по аналогичной схеме: берутся преобразования Фурье функций f и g , затем их сужения на $\hbar\mathbb{T}$ и периодическое продолжение на $\mathbb{R}$. После этого применяется обратное дискретное преобразование Фурье F_d^{-1} и полученные так дискретные функции обозначаются f_d и g_d .

Обозначим P_h проектор на подпространство $\tilde{\mathbf{H}}(\hbar\mathbb{T})$, так что

$$P_h\tilde{C}(\xi_1) = \tilde{C}(\xi_1), \quad \xi_1 \in \hbar\mathbb{T}, \quad \tilde{C}(\xi_1) = 0, \quad \xi_1 \notin \hbar\mathbb{T},$$

и сравним $\tilde{C}$ и $\tilde{c}$ на $\hbar\mathbb{T}$:

$$P_h\tilde{C}(\xi_1) - \tilde{c}(\xi_1) = P_hM^{-1}\tilde{F}(\xi_1) - m^{-1}\tilde{F}_d(\xi_1).$$

Лемма 5.1. Пусть $s > 1$. Имеет место оценка

$$\|P_h\tilde{C} - \tilde{c}\|_{s_0} \leq \text{const} \left(\|\tilde{F} - P_h\tilde{F}\|_{s_0} + \hbar^{\kappa-1}(\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0}) \right).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & (P_hM^{-1}\tilde{F})(t) - (m^{-1}\tilde{F}_d)(t) = \\ & = (P_hM^{-1}\tilde{F})(t) - (P_hM^{-1}P_h\tilde{F})(t) + (P_hM^{-1}P_h\tilde{F})(t) - (P_hM^{-1}\tilde{F}_d)(t) + (P_hM^{-1}\tilde{F}_d)(t) - (m^{-1}\tilde{F}_d)(t) = \\ & = (P_hM^{-1}(\tilde{F} - P_h\tilde{F}))(t) + ((P_hM^{-1})(P_h\tilde{F} - \tilde{F}_d))(t) + ((P_hM^{-1} - m^{-1})\tilde{F}_d)(t), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \|P_h\tilde{C} - \tilde{c}\|_{s_0} &= \|P_hM^{-1}\tilde{F} - m^{-1}\tilde{F}_d\|_{s_0} \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|\tilde{F} - P_h\tilde{F}\|_{s_0} + \|P_h\tilde{F} - \tilde{F}_d\|_{s_0} + \|(P_hM^{-1} - m^{-1})\tilde{F}_d\|_{s_0} \right), \quad (17) \end{aligned}$$

в силу ограниченности операторов P_h , M^{-1} , m^{-1} , и нам нужно оценить три слагаемых. (Обозначение $\|\cdot\|_s$ используется ниже как для нормы пространства $H^s(\mathbb{R})$, так и для нормы пространства $H^s(\hbar\mathbb{T})$; смысл обозначения ясен из контекста.)

Начнем с третьего слагаемого. Введем обозначение $m^{-1}\mathbf{F}_d \equiv \mathbf{v}$. Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$\mathbf{P}_h M^{-1} - m^{-1} = \mathbf{P}_h M^{-1}(m - M)m^{-1}, \quad (18)$$

так как $\mathbf{P}_h m^{-1} = m^{-1}$ в силу задания оператора m на функциях, определенных на $\hbar\mathbb{T}$.

Учитывая представление (18), оценим

$$((m - M)\mathbf{v})(t) = \begin{pmatrix} \int_{-h\pi}^{h\pi} (k_1(t, \eta) - K_1(t, \eta))v_1(\eta)d\eta \\ \int_{-h\pi}^{h\pi} (k_2(t, \eta) - K_2(t, \eta))v_2(\eta)d\eta \end{pmatrix}.$$

Оценим одну из разностей; вторая оценивается аналогично. Имеем

$$k_1(\eta, t) - K_1(\eta, t) = A_{d,\neq}^{-1}(\eta, t)b_0^{-1}(t) - A_{\neq}^{-1}(\eta, t)B_0^{-1}(t),$$

где

$$B_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\neq}^{-1}(t, \eta)d\eta, \quad b_0(t) = \int_{-h\pi}^{+h\pi} A_{d,\neq}^{-1}(t, \eta)d\eta.$$

Поскольку $A_{d,\neq}(t, \eta)$ выбрано как сужение $A_{\neq}(t, \eta)$ на $\hbar\mathbb{T}^2$, имеет место следующая оценка:

$$|B_0(t) - b_0(t)| \leq \text{const} \int_{h\pi}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1 + |t| + \eta)^\varkappa} \leq \text{const} \frac{h^{\varkappa-1}}{(1 + |t|)^{\varkappa-1}},$$

откуда, между прочим, следует, что при $\varkappa > 1$ и достаточно малых h условия (11) выполняются при справедливости условий (15). Продолжив оценку, получаем

$$|k_1(\eta, t) - K_1(\eta, t)| \leq \frac{\text{const} \cdot h^{\varkappa-1}}{(1 + |t| + |\eta|)^\varkappa (1 + |t|)^{\varkappa-1}}.$$

Теперь переходим к оценке нормы. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-h\pi}^{h\pi} (k_1(t, \eta) - K_1(t, \eta))v_1(\eta)d\eta \right| &\leq \int_{-h\pi}^{h\pi} |k_1(t, \eta) - K_1(t, \eta)| \cdot |v_1(\eta)|d\eta \leq \\ &\leq \frac{\text{const} \cdot h^{\varkappa-1}}{(1 + |t|)^{\varkappa-1}} \int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{|v_1(\eta)|d\eta}{(1 + |t| + |\eta|)^\varkappa} = \frac{\text{const} \cdot h^{\varkappa-1}}{(1 + |t|)^{\varkappa-1}} \int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{(1 + |\eta|)^{s_0} |v_1(\eta)|d\eta}{(1 + |\eta|)^{s_0} (1 + |t| + |\eta|)^\varkappa}. \end{aligned}$$

Напомним, что $s_0 = s - \varkappa - 1/2$, и применим к последнему интегралу неравенство Коши—Буняковского, учитывая, что

$$(1 + |t| + |\eta|)^\varkappa > (1 + |\eta|)^\varkappa, \quad \varkappa + s_0 = s - \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{(1 + |\eta|)^{s_0} |v(\eta)|d\eta}{(1 + |\eta|)^{s_0} (1 + |t| + |\eta|)^\varkappa} \leq \int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{(1 + |\eta|)^{s_0} |v(\eta)|d\eta}{(1 + |\eta|)^{s-1/2}} \leq \text{const} \cdot \|v\|_{s_0} \left(\int_0^{h\pi} \frac{d\eta}{(1 + \eta)^{2s-1}} \right)^{1/2}.$$

Легко убедиться, что последний интеграл ограничен постоянной. Действительно, при $s > 1$ интеграл не превосходит 1, поскольку $2s - 1 > 1$. Таким образом, получено неравенство

$$\left| \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t, \eta) - K_1(t, \eta)) v_1(\eta) d\eta \right| \leq \frac{\text{const} \cdot h^{\kappa-1}}{(1+|t|)^{\kappa-1}} \|v_1\|_{s_0}. \quad (19)$$

Возводя в квадрат обе части неравенства (19), умножая на $(1+|t|)^{2s_0}$ и интегрируя по отрезку $[-\hbar\pi, \hbar\pi]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (1+|t|)^{2s_0} \left| \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} (k_1(t, \eta) - K_1(t, \eta)) v_1(\eta) d\eta \right|^2 &\leq \\ &\leq \text{const} \cdot h^{2(\kappa-1)} \|v_1\|_{s_0}^2 \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \frac{(1+|t|)^{2s_0} dt}{(1+|t|)^{2(\kappa-1)}} \leq \text{const} \cdot h^{2(\kappa-1)} \|v_1\|_{s_0}^2 \int_0^{\hbar\pi} \frac{dt}{(1+|t|)^{2(\kappa-1-s_0)}}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что последний интеграл ограничен единицей, поскольку $\kappa - 1 - s_0 > 1/2$. Проверим это:

$$\kappa - 1 - s_0 = \kappa - 1 - \left(s - \kappa - \frac{1}{2}\right) = (\kappa - s) + \kappa - \frac{1}{2} = 1 + \delta + \kappa - \frac{1}{2} = \kappa + \delta + \frac{1}{2} > \frac{1}{2},$$

поскольку $\kappa > 1$, $|\delta| < 1/2$. Аналогичная оценка имеет место для $|k_2(\eta, t) - K_2(\eta, t)|$. Тогда

$$\|m - M\|_{s_0} \leq \text{const} \cdot h^{\kappa-1} \|\mathbf{v}\|_{s_0};$$

следовательно,

$$\|(\mathbf{P}_h M^{-1} - m^{-1}) \tilde{\mathbf{F}}_d\|_{s_0} \leq \text{const} \cdot h^{\kappa-1} \|\mathbf{F}_d\|_{s_0} \leq \text{const} \cdot h^{\kappa-1} (\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0})$$

в силу условий (11) и выбора элементов $\tilde{f}_d, \tilde{g}_d$.

Теперь оценим $\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_d\|_{s_0}$, вспомнив выражения для $\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{F}}_d$. Для первой компоненты вектора $\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_d$ имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\xi_2) \tilde{A}_0^{-1}(\xi_2) - \tilde{f}_d(\xi_2) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2)| &\leq \text{const} \cdot |\tilde{f}_d| \cdot |\tilde{A}_0(\xi_2) - \tilde{a}_0(\xi_2)| \leq \\ &\leq \text{const} \cdot |\tilde{f}(\xi_2)| \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_{\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 - \int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{A}_{\neq}^{-1}(\xi) d\xi_1 \right| \end{aligned}$$

в силу выбора элементов аппроксимации. Продолжив оценку, получим

$$|\tilde{f}(\xi_2) \tilde{A}_0^{-1}(\xi_2) - \tilde{f}_d(\xi_2) \tilde{a}_0^{-1}(\xi_2)| \leq \text{const} \cdot |\tilde{f}(\xi_2)| \int_{\hbar\pi}^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{\kappa}} \leq \text{const} \cdot \frac{h^{\kappa-1} |\tilde{f}(\xi_2)|}{(1+|\xi_2|)^{\kappa-1}}.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, умножая на $(1+|\xi_1|)^{2s_0}$ и интегрируя по $\hbar\mathbb{T}$, получим

$$\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_d\|_{s_0}^2 \leq \text{const} \cdot h^{2(\kappa-1)} \|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0}^2,$$

поскольку $(1+|\xi_2|)^{2(\kappa-1)} > 1$, и аналогичная оценка справедлива для второго компонента. Следовательно,

$$\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_d\|_{s_0} \leq \text{const} \cdot h^{\kappa-1} \|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0},$$

и этим завершается доказательство леммы. $\square$

Замечание 5.1. Скорость убывания по h величины $\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0}$ зависит от порядка роста (убывания) функции на бесконечности. Так, например, если $f, g \in S(\mathbb{R})$, то порядок убывания может быть быстрее любой степени h :

$$\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0} \leq C_{f,g} h^{\gamma} \quad \forall \gamma > 0,$$

где постоянная $C_{f,g}$ зависит только от функций f, g .

Теорема 5.1. Пусть $s > 2$. Тогда имеет место оценка

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq \text{const} \cdot \left(h^{s-1}(\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0}) + \|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0} \right).$$

Доказательство. Запишем

$$\begin{aligned} (2\pi)^2 (u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi - \int_{h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi + \int_{h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \left((\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)) + (\tilde{D}_0(\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_2)) \right) d\xi \end{aligned}$$

в силу выбора элемента $A_{d,\neq}(\xi_1, \xi_2)$. Оценим первый интеграл:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} \frac{(1 + |\xi|)^s}{(1 + |\xi|)^s} |\tilde{u}(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi \right)^{1/2} \|u\|_s$$

согласно неравенству Коши—Буняковского. Последний интеграл легко оценивается:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} (1 + |\xi|)^{-2s} d\xi \leq \text{const} \cdot h^{2(s-1)},$$

поскольку $s > 1$. Таким образом,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi \right| \leq \text{const} \cdot h^{s-1} \|u\|_s \leq \text{const} \cdot h^{s-1} (\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0}).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \int_{h\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2) \left((\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)) + (\tilde{D}_0(\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_2)) \right) d\xi \right| &\leq \\ &\leq \int_{h\mathbb{T}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)| d\xi + \int_{h\mathbb{T}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |\tilde{D}_0(\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_2)| d\xi. \end{aligned}$$

Оценим один из последних интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{h\mathbb{T}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)| d\xi &= \int_{-h\pi}^{h\pi} \left(\int_{-h\pi}^{h\pi} (1 + |\xi_1| + |\xi_2|)^{-\varkappa} d\xi_2 \right) |\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)| d\xi_1 \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_{-h\pi}^{h\pi} (1 + |\xi_1|)^{-\varkappa+1} |\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)| d\xi_1 = \text{const} \cdot \int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{(1 + |\xi_1|)^{s_0}}{(1 + |\xi_1|)^{\varkappa-1+s_0}} |\tilde{C}_0(\xi_1) - \tilde{c}_0(\xi_1)| d\xi_1 \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \|\tilde{C}_0 - \tilde{c}_0\|_{s_0} \left(\int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{d\xi_1}{(1 + |\xi_1|)^{2(\varkappa-1+s_0)}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Последний интеграл, как легко убедиться, ограничен постоянной:

$$\int_{-h\pi}^{h\pi} \frac{d\xi_1}{(1 + |\xi_1|)^{2(\varkappa-1+s_0)}} \leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(1 + \xi_1)^{2(\varkappa-1+s_0)}},$$

при условии, что $s > 2$. Очевидно, для второго интеграла оценка будет такой:

$$\int_{\hbar\mathbb{T}^2} |A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)| \cdot |\tilde{D}_0(\xi_2) - \tilde{d}_0(\xi_2)| d\xi \leq \text{const} \cdot \|\tilde{D}_0 - \tilde{d}_0\|_{s_0}.$$

Таким образом, приходим к следующей оценке:

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq \text{const} \cdot \left(h^{s-1} (\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0}) + \|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{c}}\|_{s_0} \right).$$

Теперь, применяя лемму 5.1, окончательно получаем оценку

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq \text{const} \cdot \left(h^{s-1} (\|f\|_{s_0} + \|g\|_{s_0}) + \|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0} \right),$$

поскольку $\varkappa > s$. □

Чтобы придать теореме 5.1 более конкретный вид, содержащий оценку для $\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0}$, приведем одно из следствий этой теоремы.

Следствие 5.1. *Если функции $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ ограничены, $s > 2$, то оценка теоремы 5.1 приобретает вид*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C_{f,g} h^\gamma,$$

где $\gamma = \min\{s - 1, \varkappa - s\}$, постоянная $C_{f,g}$ зависит только от граничных функций f , g .

Доказательство. По заданной функции $\tilde{f}(\xi_1)$ определим $\tilde{f}_h(\xi_1)$ как функцию вида

$$\tilde{f}_h(\xi_1) = \begin{cases} 0, & \xi_1 \in \hbar\mathbb{T}, \\ \tilde{f}(\xi_1), & \xi \notin \hbar\mathbb{T}; \end{cases}$$

аналогично определим $\tilde{g}_h(\xi_2)$. Запишем

$$\|\mathbf{P}_h \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}\|_{s_0} = \|P_h \tilde{F} - \tilde{F}\|_{s_0} + \|P_h \tilde{G} - \tilde{G}\|_{s_0}$$

и оценим одно из слагаемых:

$$\|P_h \tilde{F} - \tilde{F}\|_{s_0}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi_1|)^{2s_0} |\tilde{f}_h(\xi_1) A_0^{-1}(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq \text{const} \cdot \int_{\hbar\pi}^{+\infty} (1 + |\xi_1|)^{2s_0} d\xi_1$$

в силу условий (15) и ограниченности функции $\tilde{f}$. Последний интеграл конечен:

$$\begin{aligned} \int_{\hbar\pi}^{+\infty} (1 + |\xi_1|)^{2s_0} d\xi_1 &\leq \text{const} \cdot h^{-2s_0-1}, \\ -2s_0 - 1 &= -2 \left(s - \varkappa - \frac{1}{2} \right) - 1 = -2s + 2\varkappa + 1 - 1 = 2(\varkappa - s) = 2(1 + \delta) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|P_h \tilde{F} - \tilde{F}\|_{s_0} \leq \text{const} \cdot h^{\varkappa-s},$$

и такая же оценка имеет место для $\|P_h \tilde{G} - \tilde{G}\|_{s_0}$. Остается применить теорему 5.1, и доказательство окончено. □

6. Заключение. В этой работе рассмотрен лишь двумерный конус, однако авторы рассчитывают получить результаты для многомерной ситуации, аналогичные результатам для случая дискретного полупространства. Кроме этого, желательно избавиться от некоторых использованных дополнительных ограничений, связанных с обратимостью оператора m при малых значениях параметра решетки h .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 5. — С. 642–649.
2. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. — М.: КомКнига, 2010.
3. Васильев В. Б., Тарасова О. А. О дискретных краевых задачах и их аппроксимационных свойствах// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 174. — С. 12–19.
4. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. Ремпель Ш., Шульце Б. В. Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1986.
8. Рябенский В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения. — М.: Физматлит, 2002.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
10. Франк Л. С. Пространства сеточных функций// Мат. сб. — 1971. — 86, № 2. — С. 187–233.
11. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. — М.: Мир, 1987.
12. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
13. Botchway L., Kibiti G., Ruzhansky M. Difference equations and pseudo-differential operators on $\mathbb{Z}^n$ // J. Funct. Anal. — 2020. — 278, № 11. — P. 1–41.
14. Rabinovich V. S. Wiener algebra of operators on the lattice $\mu\mathbb{Z}^n$ depending on the small parameter $\mu > 0$ // Complex Var. Ellipt. Equations. — 2013. — 58, № 6. — P. 751–766.
15. Tarasova O. A., Vasilyev V. B. To the theory of discrete boundary value problems// 4Open. — 2019. — 2, № 17. — P. 1–7.
16. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Discrete singular operators and equations in a half-space// Azerb. J. Math. — 2013. — 3, № 1. — P. 81–93.
17. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space// Math. Model. Anal. — 2018. — 23, № 3. — P. 492–506.
18. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. On some discrete potential like operators// Tatra Mt. Math. Publ. — 2018. — 71. — P. 195–212.
19. Vasilyev V. B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators// AIP Conf. Proc. — 2017. — 1863, № 1. — 140014.
20. Vasilyev V. Discrete operators in canonical domains// WSEAS Trans. Math. — 2017. — 16. — P. 197–201.
21. Vasilyev V. B. On discrete solutions for pseudo-differential equations// AIP Conf. Proc. — 2019. — 2116. — 040010.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Васильев Владимир Борисович

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: vbv57@inbox.ru

Ходырева Анастасия Александровна

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: anastasia.kho@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 47–53
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-47-53

УДК 517.968

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ И СОПРЯЖЕНИЕМ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. А. М. ВОЛОДЧЕНКОВ, А. В. ЮДЕНКОВ

Аннотация. В работе исследуется система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана, соответствующая многоэлементной краевой задаче для бианалитических функций. Полученные результаты применимы для решения основных задач теории упругости при контактном взаимодействии тел с различными упругими свойствами.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, краевая задача, бианалитическая функция.

BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH SHIFT AND CONJUGATION AND CORRESPONDING SYSTEMS OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS FOR BIANALYTIC FUNCTIONS

© 2023 А. М. VOLODCHENKOV, A. V. YUDENKOV

ABSTRACT. In this paper, we examine a system of singular integral equations with a Carleman shift corresponding to a multielement boundary-value problem for bianalytic functions. The results obtained are applicable to the solution of the main problems of the theory of elasticity in the contact interaction of bodies with various elastic properties.

Keywords and phrases: singular equation, boundary-value problem, bianalytic function.

AMS Subject Classification: 45E99

1. Введение. Ряд важных задач, возникающих в теории статических полей, эффективно решаются с использованием комплексного потенциала. Комплексный потенциал, соответствующий напряженному состоянию однородного упругого тела, имеет достаточно сложную структуру. Так, для изотропного тела комплексный потенциал представляет собой бианалитическую функцию вида

$$F = F_1(z) + \bar{z}F_2(z), \quad (1)$$

где F_1, F_2 — аналитические функции в области D , занятой телом, $\bar{z} = x - iy$ — неаналитическая компонента [1]. В случае, когда тело обладает анизотропными свойствами, комплексный потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3), \quad (2)$$

где z_k ($k = 1, 2, 3$) — обобщенные комплексные постоянные, которые в общем случае не являются аналитическими функциями (см. [3, 9]).

Решение основных задач теории упругости равносильно решению краевых задач для функций (1) и (2). Так, первая задача теории упругости для плоского тела, занимающего область D ,

ограниченную контуром L , равносильна следующей краевой задаче: определить аналитические компоненты бианалитической функции (1) по краевому условию:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) + \varphi_1(t)] &= g_1(t), \\ \operatorname{Im} [\varphi'_0(t) + \bar{t}\varphi'_1(t) - \varphi_1(t)] &= g_2(t) \end{aligned} \quad t \in L.$$

Здесь $g_k(t)$, $k = 1, 2$, — функции, определяемые внешними напряжениями на границе контура L , $\varphi_k(t)$ — искомые аналитические в области D компоненты. Функции обычно рассматриваются на пространстве функций класса Гельдера.

В случае, когда тело обладает прямолинейными анизотропными свойствами, математическая модель первой основной задачи теории упругости имеет следующий вид (см. [3]):

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} (\Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \Phi_3(\alpha_1(\sigma))) &= f_1(\sigma), \\ 2 \operatorname{Re} (\mu_1 \Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \mu_2 \Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \mu_3 \Phi_3(\alpha_1(\sigma))) &= f_1(\sigma), \\ 2 \operatorname{Re} (\nu_1 \Phi_1(\alpha_1(\sigma)) + \nu_2 \Phi_2(\alpha_1(\sigma)) + \nu_3 \Phi_3(\alpha_1(\sigma))) &= f_3(\sigma); \end{aligned}$$

здесь f_k ($k = 1, 2, 3$) — заданные на контуре L функции, определяемые внешними нагрузками и формой контура, $\alpha_k(\sigma)$ — неаналитические функции сдвига, определяемыми упругими свойствами тела.

Первые работы, в которых для решения основных задач теории упругости использовались краевые задачи для бигармонических (бианалитических) функций принадлежат Г. В. Колосову. В основополагающих работах Н. И. Мусхелишвили [6, 7] была детально разработана математическая теория основных задач теории упругости для изотропных тел с использованием краевых задач и соответствующих интегральных уравнений для бианалитических функций. Так же следует упомянуть работы Д. И. Шермана, в которых для решения основных задач теории упругости использовались системы сингулярных интегральных уравнений (см. [7]). В [3] получен комплексный потенциал (2) для тел с прямолинейной анизотропией общего вида и выведены краевые условия для его определения. Решение основных краевых задач теории упругости для анизотропных тел с использованием функции сдвига для функций класса Гельдера и функций, сходящихся в среднем квадратическом, дано авторами (см. [9]).

Ф. Д. Гаховым были поставлены так называемые классические задачи для полианалитических функций. С одной стороны, эти задачи обобщают первую, вторую и смешанную задачи теории упругости для изотропных тел, а также задачу Рикье. С другой стороны, классические задачи для полианалитических функций обобщают известные задачи Гильберта и Римана для аналитических функций. Основные виды таких краевых задач для бианалитических функций и основные методы их решения можно найти в [2, 9, 10].

Следует также упомянуть, что качественная теория бианалитических функций и их обобщений развивалась смоленской школой математиков, возглавляемых долгие годы профессором М. Б. Балком (см. [1]).

Рассмотрим сингулярный интеграл типа Коши

$$\Phi(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau. \quad (3)$$

Функция $\varphi(\tau)$ называется плотностью, $1/(\tau - z)$ — ядром интеграла типа Коши; контур L ограничивает область, занятую телом.

Заменяя в краевых задачах соответствующие функции на граничные значения интеграла (3), можно получить соответствующие системы сингулярных уравнений (см. [2, 4, 7, 11]).

В работе рассматриваются системы сингулярных интегральных уравнений с неаналитическим сдвигом $\alpha(t)$ и неаналитическими компонентами $(\bar{t})$, соответствующие основным задачам для бианалитических функций и их обобщений. Системы рассматриваются на пространстве функций Гельдера и на пространстве функций, интегрируемых в среднем квадратическом.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений, содержащую как неаналитическую компоненту $\bar{t}$, так и функцию сдвига α :

$$\begin{aligned} a_1(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) + \rho_1'(t) \right] + \frac{c_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) + \rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + b_1(t) \left[\rho_0(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\alpha(t)) + \rho_1'(\alpha(t)) \right] + \frac{d_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\tau) + \rho_1'(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \\ + \int_L A_{11}(t, \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{12}(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) - \rho_1'(t) \right] + \frac{c_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) - \rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + b_2(t) \left[\rho_0(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\alpha(t)) - \rho_1'(\alpha(t)) \right] + \frac{d_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\tau) - \rho_1'(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \\ + \int_L A_{21}(t, \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{22}(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_2(t). \quad (4b) \end{aligned}$$

Здесь $\rho_0(t)$, $\rho_1(t)$ — искомые функции, $a_k(t)$, $b_k(t)$, $c_k(t)$, $d_k(t)$, $f_k(t)$ — заданные на контуре L функции класса Гельдера, $A_{km}(t, \tau)$ — известные ядра Фредгольма. Положим, что функция сдвига удовлетворяет условию Карлемана $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$.

Характеристическая часть системы (4) соответствует краевой задаче для бианалитической функции следующего вида:

$$\begin{aligned} m_1(t) \left[\varphi_0^{+'}(t) + \bar{t} \varphi_1^{+'}(t) + \varphi_1^{+'}(t) \right] + n_1(t) \left[\varphi_0^{+'}(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^{+'}(\alpha(t)) + \varphi_1^{+'}(\alpha(t)) \right] + \\ + l_1(t) \left[\varphi_0^{-'}(t) + \bar{t} \varphi_1^{-'}(t) + \varphi_1^{-'}(t) \right] + k_1(t) \left[\varphi_0^{-'}(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^{-'}(\alpha(t)) + \varphi_1^{-'}(\alpha(t)) \right] = g_1(t), \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2(t) \left[\varphi_0^{+'}(t) + \bar{t} \varphi_1^{+'}(t) - \varphi_1^{+'}(t) \right] + n_2(t) \left[\varphi_0^{+'}(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^{+'}(\alpha(t)) - \varphi_1^{+'}(\alpha(t)) \right] + \\ + l_2(t) \left[\varphi_0^{-'}(t) + \bar{t} \varphi_1^{-'}(t) - \varphi_1^{-'}(t) \right] + k_2(t) \left[\varphi_0^{-'}(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \varphi_1^{-'}(\alpha(t)) - \varphi_1^{-'}(\alpha(t)) \right] = g_2(t) \quad (5b) \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_k^{\pm}(z)$ — аналитические компоненты кусочно бианалитической функции. Краевую задачу (5) можно считать обобщением известной четырехэлементной задачи Карлемана для аналитических функций на бианалитические функции (см. [4, 5]).

3. Решение задачи. Вначале рассмотрим вспомогательную систему сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} a_1(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) + \rho_1'(t) \right] + \frac{c_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) + \rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_1(t), \\ a_2(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) - \rho_1'(t) \right] + \frac{c_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) - \rho_1'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f_2(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Проведем следующие преобразования:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{t} \rho_1'(\tau) d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\bar{\tau} \rho_1'(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i} \int_L \partial \left(\frac{\bar{t} - \bar{\tau}}{\tau - t} \right) \rho(\tau) d\tau.$$

Введем вспомогательные функции

$$W_1(t) = \rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) + \rho_1'(t), \quad W_2(t) = \rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) - \rho_1'(t)$$

С учетом проведенных преобразований и введенных обозначений получим из системы (6) следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1(t)W_1(t) + \frac{c_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_1(\tau)}{\tau - t} d\tau &= f_1(t) - \int_L R_1(t, \tau)\rho_1(\tau), \\ a_2(t)W_2(t) + \frac{c_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{W_2(\tau)}{\tau - t} d\tau &= f_2(t) - \int_L R_2(t, \tau)\rho_1(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $R_k(t, \tau)$ — известные ядра Фредгольма. Проводя регуляризацию системы (7) методом Карлемана—Векуа (см. [2]), получим:

$$\rho_1(t) + \int_L K_1(t, \tau)\rho_1(\tau)d\tau = Q_1, \quad (8)$$

$$\rho_0(t) = -\rho_1'(t) + \rho_1(t) + \int_L K_2(t, \tau)\rho_1(\tau)d\tau + Q_2. \quad (9)$$

В случае разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода (8) функция $\rho_0(t)$ определяется по формуле (9).

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Решение характеристической системы сингулярных интегральных уравнений (6) сводится к регуляризации двух обычных характеристических уравнений (7) и уравнения Фредгольма второго рода (8).*

Теорема 2. *Характеристическая система сингулярных интегральных уравнений является нетривальной. Индекс системы равен*

$$K = K_1 + K_2 = \text{Ind} \left(\frac{a_1(t) + c_1(t)}{a_1(t) - c_1(t)} \right) + \text{Ind} \left(\frac{a_2(t) + c_2(t)}{a_2(t) - c_2(t)} \right).$$

Замечание. Алгоритм решения системы (6) и основные результаты (теоремы 1, 2) не изменятся, если функцию $\bar{t}$ заменить на функцию $\alpha(t)$.

Перейдем к исследованию основной системы (4). Воспользовавшись свойством Карлемана для сдвига $\alpha(t)$, получим:

$$\begin{aligned} a_1(\alpha(t)) \left[\rho_0(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)}\rho_1'(\alpha(t)) + \rho_1(\alpha(t)) \right] &+ \frac{c_1(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)}\rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \\ &+ b_1(\alpha(t)) \left[\rho_0(t) + \bar{t}\rho_1'(t) + \rho_1(t) \right] + \frac{d_1(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t}\rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ &+ \int_L A_{11}(t, \tau)\rho_0(\tau)d\tau + \int_L A_{12}(t, \tau)\rho_1(\tau)d\tau = f_1(\alpha(t)), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned}
a_2(\alpha(t)) \left[\rho_0(\alpha(t)) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\alpha(t)) - \rho_1(\alpha(t)) \right] &+ \frac{c_2(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau + \\
&+ b_1(\alpha(t)) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) - \rho_1(t) \right] + \frac{d_2(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ \int_L A_{21}(t, \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{22}(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_2(\alpha(t)). \quad (10b)
\end{aligned}$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - \alpha(t)} d\tau = \frac{\gamma}{\pi i} \int_L \rho_0 \frac{\rho_0(\alpha(\tau)) + \overline{\alpha(t)} \rho_1'(\alpha(\tau)) - \rho_1(\alpha(\tau))}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \alpha'(\tau) d\tau$$

Здесь $\gamma = 1$, если сдвиг $\alpha(t)$ не меняет направления обхода (прямой сдвиг); $\gamma = -1$, если сдвиг меняет направление обхода (обратный сдвиг).

Введем дополнительные функции

$$\rho_3(t) = \rho_0(\alpha(t)), \quad \rho_4(t) = \rho_1(\alpha(t))$$

Получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
a_1(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) + \rho_1(t) \right] &+ \frac{c_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ b_1(t) \left[\rho_3(t) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(t) + \rho_4(t) \right] + \frac{\gamma d_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_3(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(\tau) + \rho_4(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \alpha'(\tau) d\tau + \\
&+ \int_L A_{11}(t, \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{12}(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2(t) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) - \rho_1(t) \right] &+ \frac{c_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ b_2(t) \left[\rho_3(t) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(t) - \rho_4(t) \right] + \frac{\gamma d_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\rho_3(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(\tau) - \rho_4(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \alpha'(\tau) d\tau + \\
&+ \int_L A_{21}(t, \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{22}(t, \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (11b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1(\alpha(t)) \left[\rho_3(t) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(t) + \rho_4(t) \right] &+ \frac{\gamma c_1(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_3(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho_4'(\tau) + \rho_4(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \alpha'(\tau) d\tau + \\
&+ b_1(\alpha(t)) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho_1'(t) + \rho_1(t) \right] + \frac{d_1(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho_1'(\tau) + \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
&+ \int_L A_{11}(\alpha(t), \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{12}(\alpha(t), \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_1(\alpha(t)), \quad (11c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2(\alpha(t)) \left[\rho_3(t) + \overline{\alpha(t)} \rho'_4(t) - \rho_4(t) \right] + \frac{\gamma c_2(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_3(\tau) + \overline{\alpha(t)} \rho'_4(\tau) - \rho_4(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \alpha'(\tau) d\tau + \\
+ b_2(\alpha(t)) \left[\rho_0(t) + \bar{t} \rho'_1(t) - \rho_1(t) \right] + \frac{d_2(\alpha(t))}{\pi i} \int_L \frac{\rho_0(\tau) + \bar{t} \rho'_1(\tau) - \rho_1(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
+ \int_L A_{21}(\alpha(t), \tau) \rho_0(\tau) d\tau + \int_L A_{22}(\alpha(t), \tau) \rho_1(\tau) d\tau = f_2(\alpha(t)). \quad (11d)
\end{aligned}$$

С учётом того, что интегральное ядро

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}$$

имеет разве что слабую особенность, получим условие нетеровости для системы (11).

Система (11) является нетеровой, если

$$\Delta_{k1} = C_k(t)C_k(\alpha(t)) - A_k(t)A_k(\alpha(t)) \neq 0, \quad k = 1, 2, \quad (12)$$

$$\Delta_{k1} = B_k(t)B_k(\alpha(t)) - D_k(t)D_k(\alpha(t)) \neq 0 \quad (13)$$

при прямом сдвиге Карлемана. Если сдвиг обратный, то для нетеровости системы достаточно выполнения следующих условий:

$$\Delta_k = -C_k(t)D_k(\alpha(t)) + B_k(t)A_k(\alpha(t)) \neq 0; \quad (14)$$

здесь

$$A_k(t) = a_k(t) - b_k(t), \quad B_k(t) = c_k(t) - d_k(t), \quad C_k(t) = b_k(t) - a_k(t), \quad D_k(t) = d_k(t) - c_k(t).$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. Система (4) является нетеровой, если выполняются условия (12) при прямом сдвиге и условия (14) при обратном сдвиге.

Индекс системы (4) определяется по формуле

$$K = \text{Ind} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} + \text{Ind} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22}}$$

при прямом сдвиге Карлемана и по формуле

$$K = \text{Ind} \Delta_1 + \text{Ind} \Delta_2$$

при обратном сдвиге Карлемана.

4. Стохастический вариант сингулярной системы сингулярных уравнений со сдвигом Карлемана. Результаты исследования системы (4), полученные при исследовании на пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера, можно поучить на пространстве функций L_2 , сходящихся в среднем квадратическом. Такое расширение важно по двум основным причинам. С теоретической точки зрения удастся провести исследование с использованием случайных процессов. Само решение может быть выражено в терминах броуновского движения (см. [8]). С практической точки зрения появляется возможность использовать теорию краевых задач и связанных с ними сингулярных интегральных уравнений при решении основных задач теории упругости в случае, когда нагрузки, форма контура и упругие свойства тела являются случайными функциями.

В стохастической постановке под значениями t и τ в системе (4) следует понимать значение диффузного процесса Z в момент первого выхода из области D , ограниченного контуром L . Сами условия (4) выполняются почти наверное. В такой постановке исследование стохастической системы (4) аналогично детерминированному случаю. Поэтому сформулируем только итоговый результат.

Теорема 4. Система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и неаналитической компонентой является нетеровой на классе функций, сходящихся в среднем квадратическом при выполнении условий (12) для прямого сдвига и (14) для обратного сдвига.

5. Выводы. В работе исследована система сингулярных интегральных уравнений со сдвигом и комплексно сопряжёнными неаналитическими компонентами, соответствующая многоэлементной краевой задаче Карлемана для бианалитических функций. Получены условия нетеровости системы, подсчитан ее индекс, дана общая схема сведения системы сингулярных интегральных уравнений к системе уравнений Фредгольма второго рода. Основные результаты справедливы для функций, удовлетворяющих условию Гельдера, а также для функций, сходящихся в среднем квадратическом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балж М. Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки техн. Совр. Пробл. мат. Фундамент. напр. — 1991. — 85. — С. 187–246.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
3. Лехницкий Г. С. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977.
4. Литвинчук Г. С. в кн.: Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977. — С. 448.
5. Максимова Л. А. Обобщенные системы сингулярных интегральных уравнений Шермана со сдвигом в плоской теории упругости // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Мех. предел. состояния. — 2016. — 2, № 28. — С. 15–23.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
8. Оксендаль Б. в кн.: Стохастические дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 2003.
9. Юденков А. В., Володченко А. М., Римская Л. П. в кн.: Математическое моделирование на основе теории потенциала. — М., 2020. — С. 152.
10. Rasulov K. M. On the uniqueness of the solution of the Dirichlet boundary-value problem for quasiharmonic functions in a non-unit disk // Lobachevskii J. Math. — 2018. — 39, № 1. — P. 142–145.
11. Yudenkov A. V., Volodchenkov A. M., Rimskaya L. P. Stability of systems of singular integral equations with Cauchy kernel // T-Comm. — 2020. — 14, № 9. — P. 48–55.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Володченко Александр Михайлович

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Смоленский филиал

E-mail: alexmw2012@yandex.ru

Юденков Алексей Витальевич

Смоленский государственный университет спорта

E-mail: aleks-yudenkov@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 54–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-54-60

УДК 517.9

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ЯДРА

© 2023 г. Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА

Аннотация. In this paper, we demonstrate an application of the method of generalized powers for constructing solutions to the Dirac equation of quantum electrodynamics, which governs the motion of an electron in a centrally symmetric electrostatic field.

Ключевые слова: обобщенная степень, уравнение Дирака, квантовая электродинамика.

ON THE APPLICATION OF GENERALIZED BERS POWERS FOR CONSTRUCTING SOLUTIONS TO THE DIRAC EQUATION FOR THE MOTION OF A PARTICLE IN A CENTRALLY SYMMETRIC FIELD OF A NUCLEUS

© 2023 Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA

1. Введение. Первоначально метод обобщенных степеней [3] развивался в матричной форме применительно к системам линейных дифференциальных уравнений, что отражено в монографии [4]. Метод обобщенных степеней Берса, прежде всего, может быть использован для решения краевых задач теории переноса в многослойной среде [10, 11], в неоднородных твердых пластинах и оболочках [12], на системе контактирующих стержней [13], при стационарной передаче тепла через стенку [16], а также для построения поля температур в цилиндре при наличии распределенных тепловых источников [14]. Работа [5] посвящена исследованию обобщенных степеней Берса на комплексной плоскости. В [1, 7–9] дано приложение этого метода к системам Мойсила—Теодореску, Максвелла и Дирака. В [6, 15] развит так называемый параметрический метод обобщенных степеней, который применим к отдельным уравнениям второго и более высоких порядков.

Основная цель работы — показать, что метод обобщенных степеней может быть с успехом использован для решения системы уравнений, полученных при конкретизации системы уравнений Дирака для движения частицы в центрально симметричном поле. Эта система имеет вид (см. [4])

$$\frac{df}{dr} + \frac{(1 - \nu)}{r}f + b_1g = 0, \quad \frac{dg}{dr} + b_2g + \frac{(1 + \nu)}{r}f = 0, \quad (1)$$

где $b_1 = \varepsilon - m - V(r)$, $b_2 = \varepsilon + m - V(r)$. Здесь ε — энергия частицы, m — масса частицы, $V(r)$ — потенциальная функция, ν — коэффициент, учитывающий орбитальный и спиновый моменты, r — радиальная координата сферической системы.

Для применения метода обобщенных степеней изменим вид этой системы (1), введя вспомогательные функции

$$\varphi_1 = r^{1-\nu} f, \quad \varphi_2 = r^{1+\nu} g. \quad (2)$$

Запишем систему для функций φ_1, φ_2 , заменив r на x

$$a_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 = 0, \quad a_2 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_1 = 0, \quad (3)$$

где

$$a_1 = \frac{x^{2\nu}}{b_1(x)}, \quad a_2 = \frac{x^{-2\nu}}{b_2(x)}. \quad (4)$$

Система (3) является стандартной для применения обобщенных степеней, и вся сложность сводится к возможности интегрирования функций a_1, a_2 . Решение может быть выписано в явной форме.

Для кулоновского потенциала все интегралы можно получить в явной форме и все интегралы сводятся к степенным функциям, поскольку a_1, a_2 имеют вид

$$a_1 = a_{11}x^{s_1} + a_{12}x^{t_1}, \quad a_2 = a_{21}x^{s_2} + a_{22}x^{t_2},$$

где s и t — заданные целые числа. Однако получаемые выражения весьма громоздки. Положив $V = \text{const}$ и введя обозначения $b_1 = -\beta_1, b_2 = -\beta_2$, получим

$$x^{2\nu} \frac{d\varphi_1}{dr} = \beta_1 \varphi_2, \quad x^{-2\nu} \frac{d\varphi_2}{dr} = -\beta_2 \varphi_1. \quad (5)$$

В системе (5) хорошо выделены два фактора: геометрический фактор, связанный с симметрией задачи и симметрией пространства, и физический фактор, связанный с внешним полем V .

Характер решения (5) существенно зависит от знака $\beta_1 \beta_2$, меняясь с осциллирующего поведения при $\beta_1 \beta_2 > 0$ к монотонному изменению при $\beta_1 \beta_2 < 0$.

При постоянных β_1, β_2 система (5) хорошо известна и определяет функцию Бесселя. Далее система (5) будет основой всех построения обобщенных степеней.

Введем дифференциальные операторы

$$D_1 = a_1(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x) \frac{d}{dx}. \quad (6)$$

На функции $a_1(x), a_2(x)$ (порождающая пара) обычно наложены условия положительности (постоянство знака). Поскольку в поставленной задаче оно нарушено, то это вынуждает ввести деление всей области изменения x на области постоянства знака $a_1(x), a_2(x)$, что использовано ниже. Остальные требования возможности построения обобщенных степеней, а именно наличие непустых ядер у операторов в (6), а также правых обратных выполнены.

В качестве правых обратных I_1, I_2 для D_1, D_2 всюду ниже взят самый простой случай определенного интеграла с указанным нижним пределом:

$$I_1 = \int_{x_0}^x \frac{d\eta}{a_1(\eta)} \dots, \quad I_2 = \int_{x_0}^x \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \dots \quad (7)$$

Ниже обобщенные степени построены для случая степенных функций

$$a_1 = x^p, \quad a_2 = x^{-p}, \quad p > 0, \quad p = 2\nu, \quad (8)$$

а также при кусочно построенных функциях порождающей пары:

$$X^{(2i)}(x, x_0)C = (2i)!(I_1 I_2)^i C, \quad \tilde{X}^{(2i+1)}(x, x_0)C = (2i+1)! I_1 (I_2 I_1)^i C. \quad (9)$$

Запишем присоединенные степени, полученные заменой $I_1 \rightarrow I_2, I_2 \rightarrow I_1$:

$$\tilde{X}^{(2i)}(x, x_0)C = (2i)!(I_2 I_1)^i C, \quad \tilde{\tilde{X}}^{(2i+1)}(x, x_0)C = (2i+1)! I_2 (I_1 I_2)^i C. \quad (10)$$

Можно показать, что степени связаны рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} X^{(2i)}(x, x_0) &= x^{p+1} \tilde{X}^{(2i-1)}(x, x_0) - x_0^{p+1} X^{(2i-1)}(x, x_0), \\ \tilde{X}^{(2i)}(x, x_0) &= x^{p+1} X^{(2i-1)}(x, x_0) - x_0^{-p+1} \tilde{X}^{(2i-1)}(x, x_0), \\ X^{(2i+1)}(x, x_0) &= \frac{2i+1}{2i+1-p} \left(x^{-p+1} X^{(2i)}(x, x_0) - x_0^{-p+1} X^{(2i)}(x, x_0) \right), \\ \tilde{X}^{(2i+1)}(x, x_0) &= \frac{2i+1}{2i+1-p} \left(x^{p+1} X^{(2i)}(x, x_0) - x_0^{p+1} X^{(2i)}(x, x_0) \right). \end{aligned}$$

Далее при решении уравнения Дирака важен случай $p = 2$. Для этого значения порождающей пары степень можно найти в явном виде. Имеем для степени с нуль-точкой x_0

$$\begin{aligned} X^{(2i+1)}(x, x_0) &= \frac{(x - x_0)^{2i+1}}{x}, \\ \tilde{X}^{(2i)}(x, x_0) &= \frac{1}{x_0} \left[x(x - x_0)^{2i} - \frac{1}{2i+1} (x - x_0)^{2i+1} \right], \\ X^{(2i)}(x, x_0) &= \frac{1}{x_0} \left[x_0(x - x_0)^{2i} - \frac{1}{2i+1} (x - x_0)^{2i+1} \right], \\ \tilde{X}^{(2i+1)}(x, x_0) &= xx_0(x - x_0)^{2i} + \frac{1}{2i+3} (x - x_0)^{2i+3}. \end{aligned}$$

Далее необходимы еще две последовательности обобщенных степеней с нуль-точкой в начале координат, т.е. $x_0 = 0$:

$$X^{(2i)}(x, \infty) = \frac{x^{2i}}{2i+1}, \quad X^{(2i+1)}(x, 0) = x^{2i+1}, \quad \tilde{X}^{(2i-1)}(x, 0) = \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.$$

2. Основные использованные функции. Далее рассмотрим функции, которые представлены в виде рядов от обобщенных степеней. На основе предложенного Л. Берсом принципа соответствия (см. [3]) элементарным функциям типа $\cos(x - x_0)$, $\sin(x - x_0)$ ставятся в соответствие функции, представленные рядами обобщенных степеней с теми же действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \cos \lambda X(x, x_0) C &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \lambda^{2i} X^{(2i)}(x, x_0) C, \\ \sin \lambda X(x, x_0) C &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \lambda^{2i+1} X^{(2i+1)}(x, x_0) C, \end{aligned} \tag{11}$$

где C — константа. Аналогично, гиперболическим функциям действительного переменного поставим в соответствие функции

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \lambda X(x, x_0) C &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i}}{(2i)!} X^{(2i)}(x, x_0) C, \\ \operatorname{sh} \lambda X(x, x_0) C &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2i+1}}{(2i+1)!} X^{(2i+1)}(x, x_0) C, \end{aligned} \tag{12}$$

где λ — действительный параметр. Напомним, что $X^{(i)}(x, x_0)$ — символическое обозначение заранее найденных функций, которые по построению обладают следующим свойством:

$$D_1 X^{(n)} = n \tilde{X}^{(n-1)}, \quad D_2 \tilde{X}^{(n)} = n X^{(n-1)}. \tag{13}$$

На основе соотношений (11)–(13) можно утверждать, что решение системы (1) можно записать в виде

$$\varphi_1 = C_1 \cos \beta X(x, x_0), \quad \varphi_2 = -C_1 \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \sin \beta \tilde{X}(x, x_0) \tag{14}$$

при $\beta = \sqrt{\beta_1 \beta_2}$. Второе решение имеет вид

$$\varphi_1 = C_2 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \sin \beta X(x, x_0), \quad \varphi_2 = C_2 \cos \beta \tilde{X}(x, x_0). \quad (15)$$

Если $\beta_1 \beta_2 < 0$, то решение ищется в виде аналогов гиперболических функций:

$$\varphi_1 = C_1 \operatorname{ch} \beta X(x, x_0), \quad \varphi_2 = C_1 \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \operatorname{sh} \beta \tilde{X}(x, x_0). \quad (16)$$

3. Аппроксимация решения основной системы методом обобщенных степеней.

Функция потенциала V может иметь достаточно сложное строение, и вычисление обобщенных степеней может быть трудно выполнимо. Поэтому укажем приближенное решение, заменяя функцию V подходящей кусочно постоянной функцией. Как было отмечено выше, рассматриваем функции a_1, a_2 как произведение двух функций:

$$a_1 = \frac{x^{2\nu}}{\beta_1}, \quad a_2 = \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2}.$$

Первоначально приведем решение задачи типа Коши при условии

$$\varphi_1|_{x_1} = C_1, \quad \varphi_2|_{x_1} = C_2. \quad (17)$$

Это решение можно записать в виде

$$\varphi_1 = C_1 \cos \beta X(x, x_1) + C_2 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \sin \beta X(x, x_1), \quad (18)$$

$$\varphi_2 = -C_1 \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \sin \beta \tilde{X}(x, x_1) + C_2 \cos \beta \tilde{X}(x, x_1) \quad (19)$$

(см. раздел 2). Функции $\sin \beta X, \cos \beta X$ были определены в разделе 2 для значения x_0 ; для (18) (19) нужно заменить x_0 в (14), (15) на x_1 . Введем матричную форму записи результата:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad V(x, x_1) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$K(x, x_1) = \begin{pmatrix} \cos \beta X(x, x_1) & + \sqrt{\beta_1/\beta_2} \sin \beta X(x, x_1) \\ -\sqrt{\beta_2/\beta_1} \sin \beta \tilde{X}(x, x_1) & \cos \beta \tilde{X}(x, x_1) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$V(x, x_1) = K(x, x_1)C. \quad (22)$$

Предположим, что имеем две области (x_1, x_2) и (x_2, x_3) . Все величины, относящиеся к первой (второй) области, снабдим верхним индексом «(1)» (соответственно, «(2)»). Таким образом, имеем величины

$$\beta_1^{(1)}, \quad \beta_2^{(1)}, \quad \beta^{(1)} = \sqrt{\beta_1^{(1)} \beta_2^{(1)}}, \quad \beta_1^{(2)}, \quad \beta_2^{(2)}, \quad \beta^{(2)} = \sqrt{\beta_1^{(2)} \beta_2^{(2)}}.$$

При символе степени номер области будем указывать нижним индексом; например, $X_1^{(n)}(x, x_1)$ — степень для первой области, $X_2^{(n)}(x, x_2)$ — для второй.

В каждой из областей справедливы соответствующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(1)}} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dx} = \varphi_2^{(1)}, \\ \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(1)}} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dx} = -\varphi_1^{(1)}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(2)}} \frac{d\varphi_1^{(2)}}{dx} = \varphi_2^{(2)}, \\ \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(2)}} \frac{d\varphi_2^{(2)}}{dx} = -\varphi_1^{(2)}. \end{cases} \quad (23)$$

Условия согласования включают непрерывность функций φ_1, φ_2 в граничной точке x_2 :

$$\varphi_1^{(1)}|_{x_2} = \varphi_1^{(2)}|_{x_2}, \quad \varphi_2^{(1)}|_{x_2} = \varphi_2^{(2)}|_{x_2}, \quad (24)$$

а также непрерывность производных по Берсу:

$$\frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(1)}} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dx} \Big|_{x_2} = \frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(2)}} \frac{d\varphi_1^{(2)}}{dx} \Big|_{x_2}, \quad \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(1)}} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dx} \Big|_{x_2} = \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(2)}} \frac{d\varphi_2^{(2)}}{dx} \Big|_{x_2}. \quad (25)$$

Обратим внимание, что эти условия отличны от общеизвестных требований непрерывности производных; они приняты из чисто математических соображений. В аппарате обобщенных степеней они очевидны. Можно показать, что требование непрерывности производных приводит к противоречию с системой уравнений.

Запишем

$$V^{(1)}(x_2, x_1) = K^{(1)}(x_2, x_1)C, \quad (26)$$

где $K^{(1)}$ — матрица Коши первой области, — вектор-столбец с компонентами C_1, C_2 . Будем рассматривать значения $\varphi_1^{(2)}(x_2), \varphi_2^{(2)}(x_2)$ в точке x_2 как граничные условия задачи Коши для вектор-столбца второй области. Тогда имеем

$$V^{(2)}(x, x_2) = K^{(2)}(x, x_2)V^{(1)}(x_2, x_1), \quad (27)$$

где $V^{(1)}(x_2, x_1), V^{(2)}(x, x_2)$ — вектор-столбцы значений φ_1, φ_2 .

Матрица для второй области имеет вид

$$K^{(2)}(x, x_2) = \begin{pmatrix} \cos \beta^{(2)} X(x, x_2) & + \sqrt{\beta_2^{(2)}/\beta_2} \sin \beta X(x, x_2) \\ -\sqrt{\beta_1^{(2)}/\beta_2^{(2)}} \sin \beta^{(2)} \tilde{X}(x, x_2) & \cos \beta^{(2)} X(x, x_2) \end{pmatrix}.$$

Все элементы, входящие в первую матрицу, снабжены индексом «(1)». Эта операция соединения областей может быть повторена любое число раз.

В физике важен случай $\nu = \pm 1$, поэтому укажем выражение основных функций через элементарные:

$$\begin{aligned} \cos \beta X(x, x_1) &= \frac{1}{x} \left[x_1 \cos \beta(x - x_1) + \frac{1}{\beta} \sin \beta(x - x_1) \right], \\ \sin \beta X(x, x_1) &= \frac{1}{xx_1} \sin \beta(x - x_1), \\ \cos \beta \tilde{X}(x, x_1) &= \frac{1}{x_1} \left[x \cos \beta(x - x_1) - \frac{1}{\beta} \sin \beta(x - x_1) \right], \\ \sin \beta \tilde{X}(x, x_1) &= \left[\left(xx_1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \sin \beta(x - x_1) - \frac{1}{\beta} \cos \beta(x - x_1) \right]. \end{aligned}$$

4. Частица в потенциальной яме конечной глубины. Основная система уравнений для частиц, движущихся в потенциальном поле V имеет вид (1). Задача о частице в сферической потенциальной яме подробно рассмотрена в [2]. Пусть в сферической области задан потенциал

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad (28)$$

где V_0 — константа. Имеем две области: внутреннюю $0 < r < r_0$ и внешнюю $r_0 < r < \infty$; величины, относящиеся к этим областям, будем обозначать $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$ для первой области и $\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}$ для второй. Имеем следующие две системы для первой и второй областей соответственно:

$$\begin{cases} r^{2\nu} \frac{d\varphi_1^{(1)}}{dr} = \beta_1^{(1)} \varphi_2^{(1)}, \\ r^{-2\nu} \frac{d\varphi_2^{(1)}}{dr} = -\beta_2^{(1)} \varphi_1^{(1)}, \end{cases} \quad \begin{cases} r^{2\nu} \frac{d\varphi_1^{(2)}}{dr} = \beta_1^{(2)} \varphi_2^{(2)}, \\ r^{-2\nu} \frac{d\varphi_2^{(2)}}{dr} = \left| \beta_2^{(2)} \right| \varphi_1^{(2)}. \end{cases} \quad (29)$$

В первой области знаки $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ одинаковы, а знаки $\beta_1^{(2)}$ и $\beta_2^{(2)}$ различны.

Если частица с допустимой энергией ε находится в яме, решение имеет осцилляционный характер. Вне ямы искомые функции f, g монотонны. Постановка граничных условий и условий

согласования была рассмотрена в разделе 3; как известно, эти условия сводятся к равенству функций $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ и $f^{(2)}$, $g^{(2)}$ слева и справа в граничной точке ямы r_0 .

Для первой области возьмем решение вида

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \frac{1}{r} \sin \beta^{(1)} r, \quad \varphi_2^{(2)} = -\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}} \left[\beta^{(2)} r e^{-\beta^{(2)} r} + e^{-\beta^{(2)} r} \right] C_2. \quad (30)$$

Запишем условие согласования:

$$\varphi_1^{(1)} \Big|_{r=r_0} = \varphi_1^{(2)} \Big|_{r=r_0}, \quad \varphi_2^{(1)} \Big|_{r=r_0} = \varphi_2^{(2)} \Big|_{r=r_0}. \quad (31)$$

В области 1 (внутри ямы)

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \frac{1}{r} \sin \beta^{(1)} r, \quad \varphi_2^{(2)} = C_2 \sqrt{\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}}} e^{-\beta^{(2)} r} \left(\beta^{(2)} r + 1 \right). \quad (32)$$

Тогда условия согласования примут вид

$$C_1 \frac{1}{r_0} \sin \beta^{(1)} r_0 = C_2 \frac{1}{r_0} e^{-\beta^{(2)} r_0},$$

$$C_1 \sqrt{\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}}} \left(\beta^{(1)} r_0 \cos \beta^{(1)} r_0 - \sin \beta^{(1)} r_0 \right) = -C_2 \sqrt{\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}}} \left(\beta^{(2)} r_0 - 1 \right) e^{-\beta^{(2)} r_0}.$$

Разделив второе соотношение на первое почленно, придем к выражению

$$\beta^{(1)} r_0 \operatorname{ctg} \beta^{(1)} r_0 - 1 + \sqrt{\frac{\beta_1^{(1)} \beta_2^{(2)}}{\beta_2^{(1)} \beta_1^{(2)}}} \left(\beta^{(2)} r_0 + 1 \right) = 0.$$

Это соотношение будет выполнено, если можно найти соответствующее ε . Это выражение для определения возможных значений в целом совпадает с решением, приведенным в [2]. Отличие связано с тем, что в [2] принято условие нулевой производной на стенке ямы, а в нашем случае — исчезновения f , g в бесконечности. На наш взгляд, это более соответствует физической сущности задачи и совпадает с обычно принимаемым в квантовой постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Применение метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила—Теодореску // Таврич. вестн. информ. мат. — 2021. — № 1 (50). — С. 48–64.
2. Ахиезер В. Б. Квантовая электродинамика. — М.: ИФМЛ, 1959.
3. Берс Л. Вопросы околосвуковой и сверхзвуковой газодинамики. — М.: Мир, 1976.
4. Гладышев Ю. А. Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга, 1997.
5. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса // Вестн. Калуж. ун-та. — 2020. — № 2 (47). — С. 77–80.
6. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений // Мат. Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2022». — Воронеж, 2022. — С. 67–71.
7. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Об одном методе построения класса решений обобщенной системы уравнений электромагнитного поля // Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2021. — С. 153–162.
8. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О построении обобщенных степеней для уравнения квантовой электродинамики Дирака // Мат. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач». — Воронеж, 2021. — С. 70–72.
9. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О приложении метода обобщенных степеней Берса для решения уравнения Дирака // Мат. Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания». — Калуга, 2021. — С. 300–301.

10. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье// Вестн. Калуж. ун-та. — 2018. — № 3. — С. 53–57.
11. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Об одном методе решения краевых задач теории теплопроводности в многослойной среде// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2017. — С. 44–47.
12. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О некоторых новых методах решения краевых задач теории переноса в неоднородных твердых пластинах и оболочках Вестн. Калуж. ун-та. — 2017. — № 2. — С. 23–26.
13. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Методы построения решений основных задач теории переноса на системе контактирующих стержней// Вестн. Калуж. ун-та. — 2014. — № 1. — С. 10–13.
14. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. Об одном методе построения поля температур в цилиндре при наличии распределенных тепловых источников// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2019. — С. 275–279.
15. Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А., Стамов Р. А. Об одном варианте метода обобщенных степеней Берса// Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 13-15 декабря 2021 г.). — Воронеж, 2022. — С. 45–52.
16. Канарейкин А. И. Применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — С. 175–178.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гладышев Юрий Александрович

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: gladyshev.yua@yandex.ru

Лошкарева Елена Анатольевна

Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

E-mail: losh-elena@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 61–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-61-68

УДК 517.983.23

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. В. ГЛУШАК

Аннотация. Для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу рассматривается обратная задача с финальным переопределением второго рода. Устанавливается критерий единственности решения. В качестве приложения установленного критерия, приводятся критерии единственности решения обратных задач для вырождающихся дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, вырождающееся дифференциальное уравнение, обратная задача, критерий единственности.

UNIQUENESS CRITERION FOR SOLUTIONS OF INVERSE PROBLEMS FOR ABSTRACT SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 A. V. GLUSHAK

ABSTRACT. For the abstract Euler–Poisson–Darboux equation, an inverse problem with a final redefinition of the second kind is considered. A uniqueness criterion for solutions is established. As an application of the criterion established, uniqueness criteria for solutions of inverse problems for degenerate differential equations are given.

Keywords and phrases: Euler–Poisson–Darboux equation, degenerate differential equation, inverse problem, uniqueness criterion.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E , область определения $D(A) \subset E$ которого не обязательно плотна в E . При $k > 0$ рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C([0, 1], E) \cap C^2((0, 1], E) \cap C((0, 1), D(A)),$$

принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0, 1)$, и элемента $p \in E$, удовлетворяющих сингулярному уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t) + p, \quad 0 < t < 1 \quad (1)$$

начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^k u'(t) = w_0, \quad u_0, w_0 \in D(A), \quad (2)$$

а также некоторому финальному переопределению в точке $t = 1$. В настоящей работе будет рассмотрен случай финального переопределения, имеющего вид

$$u'(1) = u_1 \in D(A). \quad (3)$$

Ограничиваемся случаем интервала $0 < t < 1$, так как общий случай $0 < t < T$ сводится к рассматриваемому заменой переменной t на t/T .

Задача (1)–(3) для эволюционного сингулярного уравнения относится к классу обратных задач (см. [7, 13]) и является, вообще говоря, некорректно поставленной задачей. Требуется восстановить неизвестную, не зависящую от времени t , правую часть p уравнения (1) при помощи дополнительного условия (3) в финальный момент времени. В работе будет исследован вопрос единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ранее в [11] был получен критерий единственности такого рода обратных задач в случае дифференциального уравнения первого порядка, а для несингулярных уравнений второго порядка (случай $k = 0$ в уравнении (1)) — в [1, 2, 12]. Отметим также, что в [11, 12] задавалось финальное переопределение в виде $u(1) = u_1$, в [1] — в виде $u'(1) = u_1$, а в [2] — в виде $\alpha u(1) + \beta u'(1) = u_1$. В указанных работах приведен обзор публикаций по данной тематике и установлено, что единственность решения обратных задач зависит лишь от расположения на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ собственных значений оператора A и связана с распределением нулей некоторых аналитических функций.

В настоящей работе будет показано, что аналогичная ситуация имеет место и в случае обратных задач для сингулярного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу и некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений. Отметим, что ранее похожие результаты были установлены при исследовании граничных задач для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (см. [6]).

2. Критерий единственности решения обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Исследование единственности решения задачи (1)–(3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $(u(t), p)$, удовлетворяющих нулевым условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^k u'(t) = 0, \quad (4)$$

$$u'(1) = 0, \quad (5)$$

поскольку нулевое решение $u(t) \equiv 0, p = 0$ у этой задачи всегда имеется.

Нетривиальные решения $(u(t), p)$ однородной задачи (1), (4), (5) будем искать методом разделения переменных в виде

$$(u(t), p) = (v(t)g, p), \quad (6)$$

где $v(t) \in C^2[0, 1]$ — ненулевая скалярная комплекснозначная функция, $g \in D(A)$, $g \neq 0$, а p — некоторый элемент из E . При этом требование $p \neq 0$ не налагается, ибо изначально нельзя исключать решения вида $(u(t), 0)$.

Подставляя пару (6) в задачу (1), (4), (5), будем иметь

$$v''(t)g + \frac{k}{t}v'(t)g = v(t)Ag + p, \quad (7)$$

и условия

$$v(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^k v'(t) = 0, \quad (8)$$

$$v'(1) = 0. \quad (9)$$

Если в уравнении (7) устремить $t \rightarrow 0$, то, учитывая условие (8), получим связывающее соотношение

$$p = \gamma g, \quad \gamma = (1 + k)v''(0). \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (7), получим равенство

$$Ag = \frac{v''(t) + (k/t)v'(t) - \gamma}{v(t)}g, \quad (11)$$

которое должно выполняться на множестве $\{t \in [0, 1] : v(t) \neq 0\}$.

Очевидно, равенство (11) может быть справедливым только, если

$$Ag = \lambda g \quad (12)$$

с некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, в силу (12), элемент $g \in D(A)$, $g \neq 0$, должен быть собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$, а уравнение (7) с учетом равенств (10), (11) превратится в уравнение

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = \lambda v(t) + \gamma. \quad (13)$$

Легко убедиться, что решение обыкновенного дифференциального уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (8), имеет вид

$$v(t) = \frac{\gamma}{\lambda}(Y_k(t; \lambda) - 1), \quad \lambda \neq 0, \quad v(t) = \frac{\gamma t^2}{2(k+1)}, \quad \lambda = 0, \quad (14)$$

где

$$Y_k(t; \lambda) = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{t\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda}), \quad (15)$$

$\gamma \neq 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, а $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя. Функцию $Y_k(t; \lambda)$ также часто называют нормированной функцией Бесселя и обозначают $j_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda})$.

Для нахождения подходящих собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ осталось воспользоваться финальным условием (9), подставляя в которое функцию (14), получим трансцендентное уравнение

$$\frac{Y'_k(1; \lambda)}{\lambda} = 0. \quad (16)$$

Поскольку производная функции $Y_k(t; \lambda)$ по переменной t имеет вид

$$Y'_k(t; \lambda) = \frac{\lambda t}{k+1} Y_{k+2}(t; \lambda),$$

то в терминах модифицированной функции Бесселя уравнение (16) имеет вид

$$\frac{I_{k/2+1/2}(\mu)}{\mu^{k/2+1/2}} = 0, \quad \mu = \sqrt{\lambda}. \quad (17)$$

Как известно, μ -корни уравнения (17) простые, чисто мнимые и расположены симметрично относительно точки $\mu = 0$ (см. [3, гл. XV]), поэтому λ -корни уравнения (16) действительные и отрицательные. Обозначим их через λ_j , $j \in \mathbb{N}$.

Подставляя λ_j , $j \in \mathbb{N}$ в (14) получим функции

$$v_j(t) = \frac{\gamma}{\lambda_j}(Y_k(t; \lambda_j) - 1), \quad j \in \mathbb{N}; \quad (18)$$

при этом соотношение (12) превратится в уравнения для нахождения $g_j \neq 0$:

$$Ag_j = \lambda_j g_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Предположим далее, что число λ_m при некотором $m \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $g_m \neq 0$. Тогда, выбирая в равенствах (6), (10), (18) постоянную $\gamma = \lambda_m$, мы определим нетривиальное решение однородной задачи (1), (4), (5) следующего вида:

$$(u_m(t), p_m) = (Y_k(t; \lambda_m) - 1)g_m, \quad \lambda_m g_m. \quad (19)$$

Сформулируем теперь критерий единственности решения обратной задачи (1)–(3).

Теорема 1. Пусть $k > 0$ и A — линейный замкнутый оператор в E . Предположим, что обратная задача (1)–(3) имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j , $j \in \mathbb{N}$ функции

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}}, \quad (20)$$

называемой характеристической функцией обратной задачи (1)–(3), не являлся бы собственным значением оператора A .

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, исследование единственности решения задачи (1)–(3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $(u(t), p)$, удовлетворяющих нулевым условиям (4), (5).

Необходимость. Предположим противное: пусть некоторый нуль λ_m , $m \in \mathbb{N}$ из счетного множества нулей функции $\varphi_k(\lambda)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $g_m \neq 0$. Тогда определяемая равенством (19) пара $(u_m(t), p_m)$ служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1), (4), (5), что противоречит единственности решения этой задачи. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что ни одно число из счетного множества нулей, определяемой равенством (20) функции $\varphi_k(\lambda)$, не является собственным значением оператора A , и пусть $(u(t), p)$ — некоторое решение однородной обратной задачи (1), (4), (5). Покажем, что в этом случае $u(t) \equiv 0$, $p = 0$.

Введем в рассмотрение функцию $U(\lambda)$ переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве E

$$U(\lambda) = \int_0^1 t^k Y_k(t; \lambda) u(t) dt,$$

где скалярная функция $Y_k(t; \lambda)$ определена равенством (15), является решением уравнения (13) при $\gamma = 0$ и удовлетворяет условиям $Y_k(0; \lambda) = I$, $Y'_k(0; \lambda) = 0$.

Учитывая замкнутость оператора A и равенство (1), вычислим $AU_\delta(\lambda)$, где

$$U_\delta(\lambda) = \int_\delta^1 t^k Y_k(t; \lambda) u(t) dt, \quad \delta > 0.$$

После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$\begin{aligned} AU_\delta(\lambda) &= \int_\delta^1 t^k Y_k(t; \lambda) Au(t) dt = \int_\delta^1 t^k Y_k(t; \lambda) \left(u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) - p \right) dt = \\ &= t^k Y_k(t; \lambda) u'(t) \Big|_\delta^1 - \int_\delta^1 \left(t^k Y'_k(t; \lambda) u'(t) + t^k Y_k(t; \lambda) p \right) dt = \\ &= t^k Y_k(t; \lambda) u'(t) \Big|_\delta^1 - t^k Y'_k(t; \lambda) u(t) \Big|_\delta^1 + \int_\delta^1 t^k \left(Y''_k(t; \lambda) + \frac{k}{t} Y'_k(t; \lambda) \right) u(t) dt - \int_\delta^1 t^k Y_k(t; \lambda) p dt. \end{aligned}$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, получим

$$AU(\lambda) = -Y'_k(1; \lambda)u(1) + \lambda U(\lambda) - \int_0^1 t^k Y_k(t; \lambda) p dt. \quad (21)$$

С помощью представления (15) и [10, интеграл 2.15.2.6], вычислим последний интеграл в равенстве (21):

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^k Y_k(t; \lambda) dt &= \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2-k/2} \int_0^1 t^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda}) dt = \\ &= 2^{k/2-1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}} = \frac{Y'_k(1; \lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя интеграл (22) в (21) приходим к равенству

$$(\lambda I - A)U(\lambda) = Y'_k(1; \lambda)u(1) + \frac{Y'_k(1; \lambda)}{\lambda} p. \quad (23)$$

Таким образом, для всех чисел λ_m , $m \in \mathbb{N}$ из счетного множества нулей определяемой равенством (20) функции $\varphi_k(\lambda)$, из равенства (23) вытекает соотношение

$$AU(\lambda_m) = \lambda_m U(\lambda_m).$$

Согласно предположению ни одно из таких чисел λ_m не является собственным значением оператора A . Но тогда все значения $U(\lambda_m)$ должны равняться нулю:

$$U(\lambda_m) = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Используя начальное условие (4), равенства (22), (16) и [10, интеграл 1.11.1.5], после очевидных преобразований равенство (24) запишем в виде

$$\begin{aligned} U(\lambda_m) &= \int_0^1 t^k Y_k(t; \lambda_m) u(t) dt = \int_0^1 t^k Y_k(t; \lambda_m) \int_0^t u'(\tau) d\tau dt = \\ &= \int_0^1 u'(\tau) \int_\tau^1 t^k Y_k(t; \lambda_m) dt d\tau = - \int_0^1 u'(\tau) \int_0^\tau t^k Y_k(t; \lambda_m) dt d\tau = \\ &= -\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{2}\right)^{1/2-k/2} \int_0^1 u'(\tau) \int_0^\tau t^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda_m}) dt d\tau = \\ &= -2^{k/2-1/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (\sqrt{\lambda_m})^{-k/2-1/2} \int_0^1 \tau^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}(\tau\sqrt{\lambda_m}) u'(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^1 \tau^k Y'_k(\tau; \lambda_m) u'(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть μ_m , $m \in \mathbb{N}$ — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения (17) и $(i\mu_m)^2 = \lambda_m$. Тогда равенства (25) принимают вид

$$U_m = \int_0^1 \sqrt{t} J_{k/2+1/2}(t\mu_m) t^{k/2} u'(t) dt = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (26)$$

где $J_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода.

Применив к определяемым равенством (26) векторным коэффициентам U_m линейный непрерывный функционал $f \in E^*$, получим непрерывную скалярную функцию $f(t^{k/2} u'(t))$, удовлетворяющую условиям

$$f(U_m) = \int_0^1 \sqrt{t} J_{k/2+1/2}(t\mu_m) f(t^{k/2} u'(t)) dt = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

С точностью до множителя скалярные коэффициенты $f(U_m)$ являются коэффициентами ряда Фурье—Бесселя разложения по функциям $J_{k/2+1/2}(t\mu_m)$ (см. [3, гл. XVIII], [8]) для функции $f(t^{k/2} u'(t))$, где $u(t)$ — решение задачи (1), (4), (5). Следовательно,

$$f(t^{k/2} u'(t)) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поскольку выбор функционала $f \in E^*$ был произвольным, то $u'(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq 1$, откуда, учитывая условие (4), получим

$$u(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Подставляя $u(t) \equiv 0$ в уравнение (1), получим $p = 0$. Тем самым установлено, что решение $(u(t), p)$ однородной обратной задачи (1), (4), (5), а, следовательно, и задачи (1)–(3), может быть только нулевым. $\square$

Следствие 1. Пусть A — линейный замкнутый оператор, не имеющий отрицательных собственных значений. Тогда обратная задача (1)–(3) при любом выборе элементов $u_0, w_0, u_1 \in D(A)$ имеет не более одного решения.

Например, для заданного на множестве функций

$$D(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1) \subset E = L_2(0, 1)$$

дифференциального оператора $A = B_{q,x}$, где

$$B_{q,x} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q}{x} \frac{d}{dx}, \quad q \geq 0,$$

единственность решения рассматриваемых обратных задач сводится к исследованию расположения нулей функции $I_{q/2-1/2}(\sqrt{z})$, которые являются собственными значениями оператора $B_{q,x}$, и нулей функции $I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})$ для задачи (1)–(3). Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных $0 < t < T$ и $0 < x < l$, поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение.

В зависимости от параметров k и q указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на $(-\infty, 0)$, поэтому единственность решения обратных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей см., например, в [9].

В случаях $A = -B_{q,x}$ или $A = iB_{q,x}$, где i — мнимая единица, собственные значения оператора A лежат либо на $(0, +\infty)$, либо на мнимой оси и не попадают на $(-\infty, 0)$, поэтому соответствующие обратные задачи имеют единственное решение.

Сделаем замечание об обратной задаче с финальным условием

$$u(1) = u_1, \quad (27)$$

задаваемом вместо условия (3). Как установлено в [4], характеристическая функция $\chi_k(\lambda)$ обратной задачи (1), (2), (27) имеет вид

$$\chi_k(\lambda) = \frac{Y_k(t; \lambda) - 1}{\lambda}.$$

и для того, чтобы решение обратной задачи (1), (2), (27) было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль характеристической функции $\chi_k(\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A . Нули характеристической функции $\chi_k(\lambda)$ не являются нулями функции Бесселя, явно не выписываются, поэтому для указанной задачи метод доказательства достаточности, использующий разложение в ряды Фурье—Бесселя, не проходит.

В [4] также указано, что для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (27) с ограниченным оператором A , необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие

$$\chi_k(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Кроме того, в этой же работе приводится достаточное условие однозначной разрешимости и с неограниченным оператором A .

Укажем также, что рассматриваемая в [5] задача Дирихле для уравнения Бесселя—Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t} (u'(t) - u'(0)) = Au(t), \quad (28)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \quad (29)$$

была переформулирована и решена как обратная задача нахождения функции $u(t)$ и входящего в уравнение (28) элемента $p = u'(0) \in D(A)$, одновременно являющимся вторым начальным условием, из уравнения

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t) + \frac{k}{t} p \quad (30)$$

по начальному и финальному условиям из равенства (29). Уравнение (30) отличается от уравнения (1) тем, что оно содержит зависящую от времени правую часть kp/t специального вида.

В качестве приложения установленного в теореме 1 критерия рассмотрим далее обратные задачи для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений.

3. Критерии единственности решения обратных задач для абстрактных вырождающихся дифференциальных уравнений. В этом разделе по-прежнему E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E , область определения $D(A) \subset E$ которого не обязательно плотна в E . Рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C([0, T], E) \cap C^2((0, T], E) \cap C((0, T), D(A))$$

и элемента $p \in E$, удовлетворяющих при $b \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ вырождающемуся при $t = 0$ дифференциальному уравнению

$$t^\gamma u''(t) + bt^{\gamma-1} u'(t) = Au(t) + t^{1-\gamma/2} p, \quad 0 < t < T, \quad (31)$$

начальным условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} t^{\gamma/2} u'(t) = 0, \quad (32)$$

а также финальному переопределению в точке $t = T$, имеющему вид

$$u'(T) = 0. \quad (33)$$

Требуется восстановить неизвестный, не зависящий от времени t входящий в правую часть уравнения (31) элемент $p \in E$ при помощи дополнительного условия (33) в финальный момент времени. Будем исследовать вопрос единственности решения обратной задачи, поэтому рассматривается однородная задача. При этом следует различать два случая: случай слабого вырождения $0 < \gamma < 2$ и случай сильного вырождения $\gamma > 2$. При $\gamma = 2$ получается уравнение Эйлера, которое, как известно, сводится к невырождающемуся уравнению.

В случае слабого вырождения $0 < \gamma < 2$ замена независимой переменной и неизвестной функции

$$t = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu = \frac{2}{2-\gamma}, \quad u(t) = u\left(\left(\frac{\tau}{\nu}\right)^\nu\right) = w(\tau),$$

с учетом равенств

$$u'(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1-\nu} w'(\tau), \quad u''(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{2(1-\nu)} \left(w''(\tau) + \frac{1-\nu}{\tau} w'(\tau)\right),$$

приводит слабо вырождающееся уравнение (31) к уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$w''(\tau) + \frac{k}{\tau} w'(\tau) = Aw(\tau) + p, \quad 0 < \tau < l, \quad (34)$$

где $k = b\nu - \nu + 1$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, $l = \nu T^{1/\nu}$. При этом условия (32), (33) превращаются соответственно в условия

$$w(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \tau^k w'(\tau) = 0, \quad (35)$$

$$w'(l) = 0. \quad (36)$$

Для обратной задачи (34)–(36) в силу теоремы 1 справедлив критерий единственности. Возвращаясь к задаче (31)–(33), получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $b > \gamma/2$ и A — линейный замкнутый оператор в E . Предположим, что обратная задача (31)–(33) имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j , $j \in \mathbb{N}$, функции

$$\phi_k(\lambda) = \frac{I_{k/2+1/2}(l\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}},$$

называемой характеристической функцией обратной задачи (31)–(33), не являлся бы собственным значением оператора A .

В случае сильного вырождения $\gamma > 2$ при исследовании обратной задачи условие (32) следует заменить на следующее условие:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{4-\gamma/2} u'(t) = 0. \quad (37)$$

Замена независимой переменной и неизвестной функции

$$t = \left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{2}{2-\gamma}, \quad u(t) = u\left(\left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}\right) = w(\tau),$$

приводит сильно вырождающееся уравнение (31) к уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$w''(\tau) + \frac{q}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau), \quad 0 < \tau < l,$$

где $q = \nu - b\nu + 1$, $l = -\nu T^{-1/\nu}$, и, так же как и в случае слабого вырождения, из теоремы 1 вытекает следующий критерий единственности.

Теорема 3. Пусть $b > 2 - \gamma/2$ и A — линейный замкнутый оператор в E . Предположим, что обратная задача (31), (33), (37) имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j , $j \in \mathbb{N}$, функции

$$\psi_k(\lambda) = \frac{I_{q/2+1/2}(l\sqrt{\lambda})}{\lambda^{q/4+1/4}},$$

называемой характеристической функцией обратной задачи (31), (33), (37), не являлся бы собственным значением оператора A .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2019. — № 3. — С. 50–58.
2. Алмохамед М., Тихонов И. В. Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода // в кн.: Современные методы теории функций и смежные проблемы. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. — С. 35–37.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
4. Глушак А. В., Попова В. А. Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу // Совр. мат. Фундам. направл. — 2006. — 15. — С. 126–141.
5. Глушак А. В. О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя—Струве // Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 8. — С. 1103–1110.
6. Глушак А. В. Критерий единственности решения граничных задач для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу на конечном интервале // Мат. заметки. — 2021. — 109, № 6. — С. 621–631.
7. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994.
8. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Усп. мат. наук. — 1951. — 1, № 2 (42). — С. 102–143.
9. Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — 54, № 9. — С. 1387–1441.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
11. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Диффер. уравн. — 2000. — 36, № 8. — С. 1132–1133.
12. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера // Диффер. уравн. — 2002. — 38, № 5. — С. 637–644.
13. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Глушак Александр Васильевич

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: aleglu@mail.ru, Glushak@bsu.edu.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 69–79
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-69-79

УДК 517.929

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И АТТРАКТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ

© 2023 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ

Аннотация. Рассмотрена периодическая краевая задача для уравнения Курамото—Сивашинского с учетом дисперсии. Исследована устойчивость однородных состояний равновесия, предложен анализ локальных бифуркаций при смене устойчивости, основанный на методах теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. Найдены достаточные условия наличия или отсутствия инвариантных многообразий. Для некоторых решений получены асимптотические формулы.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, дисперсия, краевая задача, устойчивость, бифуркация, асимптотическая формула.

INVARIANT MANIFOLDS AND ATTRACTORS OF A PERIODIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION WITH ALLOWANCE FOR DISPERSION

© 2023 A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV

ABSTRACT. A periodic boundary-value problem for the dispersive Kuramoto–Sivashinsky equation is considered. The stability of homogeneous equilibria is examined and an analysis of local bifurcations with a change in stability is performed. This analysis is based on the methods of the theory of dynamical systems with an infinite-dimensional space of initial conditions. Sufficient conditions for the presence or absence of invariant manifolds are found. Asymptotic formulas for some solutions are obtained.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, dispersion, boundary-value problem, stability, bifurcation, asymptotic formula.

AMS Subject Classification: 37L10, 37L15, 37L25

1. Введение. В [6] было предложено рассмотреть периодическую краевую задачу для одной из версий уравнения Курамото—Сивашинского

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \delta u_{xxx} + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

$$u(t, x + 2l) = u(t, x), \quad (2)$$

где $l > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, $u_x = \partial u / \partial x$, $u_t = \partial u / \partial t$. При $\delta = 0$ получаем один из вариантов традиционного уравнения Курамото—Сивашинского. В [6] рассматривался вариант, когда $\delta \neq 0$, и был сделан

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

вывод, что величина δ существенным образом влияет на динамику решений задачи (1), (2). Например, при $\delta > \delta_*$ ($\delta_* = 0.43$) образуются диссипативные структуры, но этого не происходит, если $\delta < \delta_*$.

В данной работе краевая задача (1), (2) будет проанализирована с других позиций на основе использования методов современной теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий (бесконечномерным фазовым пространством). Прежде чем приступить к непосредственному анализу задачи (1), (2), перепишем ее в иной форме, используя замены переменных

$$t_1 = \gamma_1 t, \quad x_1 = \gamma_2 x, \quad u_1 = \gamma_3 u.$$

Если выбрать положительные постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответствующим образом, а именно, $\gamma_1 = (\pi/l)^4$, $\gamma_2 = \pi/l$, $\gamma_3 = (l/\pi)^3$, то получим вариант задачи (1), (2) в следующей форме:

$$u_{1t_1} + u_1 u_{1x_1} + b u_{1x_1 x_1} + a u_{1x_1 x_1 x_1} + u_{1x_1 x_1 x_1 x_1} = 0, \\ u_1(t_1, x_1 + 2\pi) = u_1(t_1, x_1),$$

где $b = (l/\pi)^2$, $a = \delta(l/\pi)$, $u_1 = u_1(t_1, x_1)$. Для упрощения записи у переменных t_1, x_1, u_1 опустим индекс «1» и запишем полученную краевую задачу в следующем виде:

$$u_t + u_{xxxx} + b u_{xx} + a u_{xxx} + u u_x = 0, \quad (3)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (4)$$

Подчеркнем, что краевую задачу (3), (4) можно дополнить начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (5)$$

Пусть $f(x) \in H^4$, где H^4 — функциональное пространство, состоящее из функций $f(x)$ со следующими свойствами:

- (i) $f(x + 2\pi) = f(x)$;
- (ii) при $x \in [-\pi, \pi]$ данная функция принадлежит пространству Соболева¹ $W_2^4[-\pi, \pi]$ (см., например, [11]). Напомним, что в силу теорем вложения $f(x) \in C^3[-\pi, \pi]$.

Из результатов работы [12] вытекает, что начально-краевая задача (3), (4), (5) локально корректно разрешима. Вопросы разрешимости этой начально-краевой задачи изучались также в работах Р. Теама с соавторами (более подробно см. [19]). Для краевой задачи (3), (4) при $a = 0$, а также иных модификаций уравнения Курамото—Сивашинского некоторые вопросы, которые будут изучены далее, рассматривались в [9, 10, 15–17].

2. Некоторые общие свойства краевой задачи (3), (4) и ее линеаризованного варианта. Очевидно, что краевая задача (3), (4) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия, которые обозначим

$$S_c : u(t, x) = c, \quad c = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Пусть

$$M_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx.$$

Если $u(t, x)$ — решение задачи (3), (4), то $M_0(u) = c$, т.е. $M_0(u)$ не зависит от t . Действительно, проинтегрируем уравнение (3) по x от $-\pi$ до π . Нетрудно, заметить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = 0,$$

так как пространственные средние у остальных членов уравнения (3) равны нулю. Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u u_x dx = \frac{u^2(t, x)}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (u^2(t, \pi) - u^2(t, -\pi)) = 0.$$

¹ Напомним, что функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[-\pi, \pi]$, если она сама и ее обобщенные производные $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x)$ принадлежат пространству $L_2(-\pi, \pi)$.

Положим

$$lu(t, x) = c + w(t, x). \quad (6)$$

В результате замены (6) для вспомогательной функции $w(t, x)$ получим следующую краевую задачу:

$$w_t = Aw - ww_x, \quad (7)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \quad M_0(w) = 0, \quad (8)$$

где через $A = A(a, b, c)$ обозначен линейный дифференциальный оператор, определенный следующим образом:

$$Aw = A(a, b, c)w = -w_{xxxx} - bw_{xx} - aw_{xxx} - cw_x.$$

Подчеркнем, что в качестве фазового пространства решений краевой задачи (3), (4) можно и целесообразно выбирать пространство H_0^4 (считаем, что $f(x) \in H_0^4$, если $f(x) \in H^4$ и $M_0(f) = 0$).

Краевая задача (7), (8) имеет нулевое состояние равновесия S_0 . Для анализа его устойчивости в первом приближении заменим краевую задачу (7), (8) на линеаризованный ее вариант

$$w_t = Aw, \quad (9)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x). \quad (10)$$

Как известно, основную роль при анализе устойчивости играет расположение собственных чисел λ линейного дифференциального оператора A .

Лемма 1. *Линейный дифференциальный оператор, определенный равенством*

$$Av = -v^{IV} - bv'' - av''' - cv',$$

область определения которого состоит из достаточно гладких 2π -периодических функций $v(x)$ с нулевым средним ($M_0(w) = 0$), имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \tau_n + i\sigma_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

отвечающих собственным функциям $\exp(inx)$. Здесь $\tau_n = -n^4 + bn^2$, $\sigma_n = an^3 - cn$.

Проверка последнего утверждения стандартна. Отметим, также, что в ситуации общего положения $\sigma_n \neq 0$. Вариант, когда все $\sigma_n = 0$, реализуется при $a = c = 0$. Наконец, совокупность собственных функций $\{\exp(inx)\}$ образует полную ортогональную систему в $L_2(-\pi, \pi)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Решения линейной краевой задачи (9), (10) асимптотически устойчивы, если $b < 1$, и неустойчивы, если $b > 1$. При $b = 1$ решения устойчивы.*

Подчеркнем, что при $b < 1$ справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_n = \tau_n < 0$ при всех рассматриваемых в рамках леммы 2 значениях n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), а при $b > 1$ существует такой индекс m , что $\tau_m > 0$. Из этих замечаний и леммы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *При $b < 1$ нулевое решение краевой задачи (7), (8) асимптотически устойчиво, а при $b > 1$ это состояние равновесия неустойчиво.*

Последняя лемма — это аналог известной теоремы об устойчивости состояний равновесия по первому (линейному) приближению. Если же $b = 1$, то реализуется критический случай пары простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\sigma_1$, $\sigma_1 = a - c$, если, конечно, $a - c \neq 0$. При $a = c = 0$ получаем критический случай двукратного нулевого собственного значения. Иными словами, при $b = 1$ лемма 2 не дает основания сделать вывод об устойчивости решения $w = 0$ задачи (7), (8). Тем не менее ниже будет показано, что при $b = 1$ нулевое решение задачи (7), (8) асимптотически устойчиво.

Вернемся к нелинейной краевой задаче (7), (8) в случае, если $b < 1$. Домножив уравнение (7) на w и проинтегрировав полученное равенство от $-\pi$ до π , получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} w^2 dx = - \int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2 dx + b \int_{-\pi}^{\pi} w_x^2 dx,$$

а также серию неравенств

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} w^2 dx \leq b \int_{-\pi}^{\pi} w_x^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2 dx \leq (b-1) \int_{-\pi}^{\pi} w_x^2 dx,$$

так как для функций с нулевым средним справедливы неравенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_{xx}^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} w_x^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} w^2 dx.$$

Из данной серии неравенств вытекает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} w^2(t, x) dx \leq \exp(2(b-1)t) \int_{-\pi}^{\pi} w^2(0, x) dx.$$

Из последнего неравенства следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t, x) = 0$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. При $b < 1$ все решения краевой задачи (7), (8) стремятся к решению $w = 0$ в норме пространства $L_2(-\pi, \pi)$, если $t \rightarrow \infty$, т.е. в этой норме нулевое решение является глобальным аттрактором задачи (7), (8).

Сформулируем теперь основной результат для исходной краевой задачи.

Теорема 1. Все решения $u(t, x) = c$ краевой задачи (3), (4) устойчивы при $b \leq 1$ и неустойчивы при $b > 1$. При $b < 1$ все решения начально-краевой задачи (3), (4), (5) с течением времени приближаются к одному из состояний равновесия $u(t, x) = c$.

Подчеркнем, что при $b = 1$ многообразие $u(t, x) = c$ является локальным аттрактором.

Обозначим через H_c^4 аффинное подпространство фазового пространства краевой задачи (3), (4): $f(x) \in H_c^4$, если $f(x) \in H^4$ и $M_0(f) = c$. Очевидно, что H_c^4 инвариантно для решений краевой задачи (3), (4), т.е. из включения $f(x) \in H_c^4$ вытекает справедливость при $t > 0$ аналогичного включения $u(t, x) \in H_c^4$. Естественно, состояние равновесия $u(t, x) = c$ принадлежит H_c^4 и все решения этой краевой задачи из H_c^4 приближаются при $b < 1$ к состоянию равновесия $u(t, x) = c$, если $t \rightarrow \infty$. Подчеркнем, что все полученные утверждения в этом разделе не зависят от выбора a . В частности, отметим еще раз, что при $b < 1$ и любом a все решения краевой задачи (3), (4) приближаются к одному из однородных состояний равновесия в норме $L_2(-\pi, \pi)$.

3. Бифуркационная задача. Сведение к анализу нормальной формы. Пусть $b = 1 + \nu\varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, а параметр $\nu = \pm 1$ или 0. Подходящее его значение будет выбрано в процессе анализа краевой задачи

$$w_t = A_0 w + \nu\varepsilon A_1 w - w w_x, \quad (11)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \quad M_0(w) = 0, \quad (12)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_0 w = -w_{xxxx} - w_{xx} - a w_{xxx} - c w_x, \quad A_1 w = -w_{xx}.$$

Линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon) = A_0 + \nu\varepsilon A_1$ имеет пару собственных значений $\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon)$, где $\tau(\varepsilon) = \nu\varepsilon$, $\sigma(\varepsilon) = \sigma_1 = a - c$, если, конечно, $a - c \neq 0$. Особый случай $a - c = 0$ ($\sigma_1 = 0$) приводит к тому, что линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon)$ имеет двукратное собственное значение $\tau(\varepsilon)$, которому отвечают две собственные функции $\exp(\pm ix)$. Наконец, $\tau(0) = 0$, $\tau'(0) = \nu$ (т.е. $\tau'(0) \neq 0$, если $\nu \neq 0$). Подчеркнем, что остальные собственные значения линейного дифференциального оператора $A(\varepsilon)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0$, где $n = \pm 2, \pm 3, \dots$. В рассматриваемом случае $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon) \leq -12 + 4\varepsilon \leq -8$, если $\varepsilon \ll 1$, т.е. в качестве γ_0 можно выбрать, например, число 8.

Из результатов, изложенных, например, в монографии [18], а также утверждений из работ [7, 8] вытекает, что краевая задача (11), (12) имеет локально инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ размерности 2, обладающее следующим свойством.

Обозначим через $H_{0,2}^4$ двумерное подпространство фазового пространства H_0^4 , содержащее элементы $w(x) = y \exp(ix) + \bar{y} \exp(-ix)$, где в данный момент y — произвольная комплексная постоянная. Подчеркнем, что $M_0(w) = 0$. Обозначим через H_*^4 ортогональное дополнение к двумерному подпространству $H_{0,2}^4$:

$$H_*^4 = \left\{ Q(x) : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(x) \exp(\pm ix) dx = 0, \quad M_0(Q) = 0 \right\}.$$

В этом случае $(w, Q) \in M_2(\varepsilon)$, если $Q = G(w, \varepsilon)$. При этом нелинейный дифференциальный оператор $G(w, \varepsilon)$ обладает следующими свойствами:

- 1) он достаточно гладко зависит от w , если w принадлежит некоторой малой окрестности $V(r)$ нулевого решения;
- 2) $G(0, \varepsilon) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0, \bar{y}=0} = \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \Big|_{y=0, \bar{y}=0} = 0$;
- 3) все решения с начальными условиями из $V(r)$, где $r \ll 1$, приближаются к $M_2(\varepsilon)$ или покидают такую окрестность ($f(x) \in V(r)$, если $f(x) \in H_0^4$ и $\|f\|_{H^4} < r$).

Наконец, решения, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, могут быть восстановлены после анализа дифференциального уравнения для комплекснозначной функции

$$y' = \varphi(y, \bar{y}, \varepsilon), \quad (13)$$

где $y = y(s)$, $\varphi(y, \bar{y}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция переменных $y, \bar{y}, \varepsilon$, если отмеченные переменные и параметр ε достаточно малы. Добавим, что уравнение (13) принято называть нормальной формой (см. [1, 13]). При этом основную роль играет «укороченный» вариант нормальной формы:

$$y' = \psi(y, \bar{y}) = \varphi(y, \bar{y}, 0). \quad (14)$$

Здесь и далее $s = \varepsilon t$ — медленное время.

Замечание 1. Инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ принято в последнее время называть «центральной». Далее в работе будем использовать этот термин. Отметим, что такое употребление термина — это упрощенный (краткий) вариант терминологии из [14]. Если строго следовать работе [14], то при $\nu = 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ многообразие $M_2(\varepsilon)$ следует называть неустойчиво центральным, при $\nu = 0$ — центральным, а при $\nu = -1$ — устойчиво центральным. Поскольку такой вариант слишком громоздок, большинство авторов используют укороченную терминологию.

Следуя методике работ [9, 10, 15–17], будем искать решения краевой задачи (11), (12) в виде

$$w(t, x, y, \bar{y}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(t, x, y, \bar{y}) + \varepsilon w_2(t, x, y, \bar{y}) + \varepsilon^{3/2} w_3(t, x, y, \bar{y}) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (15)$$

где $y = y(s)$ — решение нормальной формы (14), а

$$w_1(t, x, y, \bar{y}) = yq + \bar{y}\bar{q}, \quad q = q(t, x) = \exp(i\sigma_1 t + ix),$$

т.е. по переменной t она имеет период $2\pi/\sigma_1$. Функции $w_2(t, x, y, \bar{y})$, $w_3(t, x, y, \bar{y})$ принадлежат классу W_δ функций $\Psi(t, x, y, \bar{y})$, обладающих следующими свойствами:

- (а) функция $\Psi(t, x, y, \bar{y})$ достаточно гладко зависит от своих аргументов при всех $t > 0$, всех x и малых $y, \bar{y}$;
- (б) функция $\Psi(t, x, y, \bar{y})$ по совокупности переменных $y, \bar{y}$ имеет порядок малости в нуле выше первого;
- (с) функция $\Psi(t, x, y, \bar{y})$ имеет период $2\pi/\sigma_1$ по t и период 2π по x ;
- (д) $M_0(\Psi) = M_\pm(\Psi) = 0$, где среднее $M_0(\Psi)$ было определено ранее и

$$M_\pm(\Psi) = \frac{\sigma_1}{(2\pi)^2} \int_{\pi/\sigma_1 - \pi}^{\pi/\sigma_1} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi q_\pm dx dt,$$

где $q_- = \bar{q}_+$, $q_+ = q(t, x)$ — функция, определенная ранее.

Члены в правой части равенства (15), обозначенные $o(\varepsilon^{3/2})$, обладают свойствами, которые характерны для w_2 , w_3 , и гладко зависят от μ ($\mu = \varepsilon^{1/2}$). Равенство (15) — это уравнение, определяющее $M_2(\varepsilon)$ в параметрической форме.

Подставим сумму (15) в краевую задачу (11), (12) и выделим слагаемые при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. В нашем случае при $\varepsilon^{1/2}$ получаем линейную однородную краевую задачу

$$w_{1t} = A_0 w_1, \quad w_1(t, x + 2\pi, y, \bar{y}) = w_1(t, x, y, \bar{y}),$$

решение которой было выбрано ранее. При ε , $\varepsilon^{3/2}$ формируются уже содержательные линейные неоднородные краевые задачи для нахождения функций w_2 , w_3 :

$$w_{2t} - A_0 w_2 = \Phi_2(t, x, y, \bar{y}), \quad (16)$$

$$w_2(t, x + 2\pi) = w_2(t, x), \quad M_0(w_2) = M_{\pm}(w_2) = 0, \quad (17)$$

$$w_{3t} - A_0 w_3 = \Phi_3(t, x, y, \bar{y}), \quad (18)$$

$$w_3(t, x + 2\pi) = w_3(t, x), \quad M_0(w_3) = M_{\pm}(w_3) = 0, \quad (19)$$

где

$$\Phi_2(t, x, y, \bar{y}) = -w_1 w_{1x}, \quad \Phi_3(t, x, y, \bar{y}) = -(w_1 w_{2x} + w_2 w_{1x}) - \nu w_{1xx} - (y' q + \bar{y}' \bar{q}).$$

Наконец, при формировании краевой задачи (16), (17); (18), (19) следует учитывать, что

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon y'(s) = \varepsilon \psi(y, \bar{y}).$$

Замечание 2. Напомним достаточно хорошо известный факт, который принято называть условием разрешимости неоднородной краевой задачи. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$v_t - A_0 v = f(t, x), \quad v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = M_{\pm}(v) = 0,$$

где функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных, имеет период $2\pi/\sigma_1$ по t и период 2π по x . Указанная неоднородная краевая задача имеет решение, принадлежащее W_{σ} , тогда и только тогда, если $M_0(f) = M_{\pm}(f) = 0$.

Краевая задача (16), (17) разрешима в классе функций W_{σ} , причем соответствующее решение имеет вид

$$w_2(t, x) = \eta y^2 q^2 + \bar{\eta} \bar{y}^2 \bar{q}^2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \eta_1 = \frac{a}{6(4 + a^2)}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{3(4 + a^2)}.$$

Краевая задача (18), (19) уже не является автоматически разрешимой, как задача (16), (17): для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условия

$$\psi(y, \bar{y}) = \nu y + (l_1 + il_2)y|y|^2, \quad l_1 = -\frac{1}{3(4 + a^2)}, \quad l_2 = -\frac{a}{6(4 + a^2)}.$$

Нормальную форму (14) следует считать записанной в виде

$$y' = \nu y + (l_1 + il_2)y|y|^2. \quad (20)$$

При таком выборе $\psi(y, \bar{y})$ задача (18), (19) имеет решение

$$w_3(t, x, y, \bar{y}) = \beta y^3 q^3 + \bar{\beta} \bar{y}^3 \bar{q}^3,$$

где

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \beta_1 = \frac{a^2 - 6}{48(9 + a^2)(4 + a^2)}, \quad \beta_2 = -\frac{5a}{48(9 + a^2)(4 + a^2)}.$$

4. Анализ нормальной формы. Рассмотрим нормальную форму (20) и положим

$$y(s) = \rho(s) \exp(i\omega(s)), \quad \rho(s) > 0. \quad (21)$$

В результате замены (21) вместо уравнения (20) получим два уравнения

$$\rho' = \nu\rho + l_1\rho^3, \quad (22)$$

$$\omega' = l_2\rho^2. \quad (23)$$

Если $\nu/l_1 < 0$, уравнение (22) имеет положительное состояние равновесия E : $\rho_0 = \sqrt{-\nu/l_1}$. При этом $l_1 < 0$, т.е. $\nu > 0$ ($\nu = 1$). Состоянию равновесия E соответствует решение дифференциального уравнения (23) $\omega(s) = \omega_0 s + h$, где $\omega_0 = -(l_2/l_1)$, $h \in \mathbb{R}$ — произвольное число. В результате получим, что состоянию равновесия E уравнения (22) соответствует однопараметрическое семейство периодических решений нормальной формы (20):

$$y(s) = \rho_0 \exp(i\omega(s)) = \rho_0 \exp(i\omega_0 s + ih). \quad (24)$$

Это однопараметрическое семейство периодических по t решений образует цикл C_0 нормальной формы (20). Цикл C_0 устойчив (орбитально асимптотически устойчив), так как состояние равновесия E асимптотически устойчиво в силу теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению, потому что в нашем случае $(\rho + l_1\rho^3)'|_{\rho=\rho_0} < 0$.

В иной терминологии цикл C_0 нормальной формы (20) является локальным аттрактором. Отметим, что при $a = 0$ получаем $l_2 = 0$ и, следовательно, $\omega_0 = 0$. В таком случае вместо периодических решений (24) нормальная форма (20) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия, которые образуют локальный аттрактор C_0 .

Пусть теперь $\nu \leq 0$ ($\nu = 0$ или $\nu = -1$). Нетрудно заметить, что все решения дифференциального уравнения (22) с течением времени приближаются к состоянию равновесия $\rho = 0$, которое соответствует нулевому состоянию равновесия нормальной формы (20). Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *При $\nu = 1$ нормальная форма (20) имеет притягивающий цикл C_0 , а нулевое решение при этом неустойчиво. Если $\nu = 0$ или $\nu = -1$, то нормальная форма (20) не имеет предельных циклов, и все его решения приближаются к нулевому состоянию равновесия, которое, следовательно, асимптотически устойчиво.*

Напомним, что случай $\nu = 0$ соответствует выбору $b = 1$.

5. Основной результат. Используя утверждения, приведенные в [3–5], и методику работ [9, 10, 15–17], примененную в предшествующих разделах, можно сформулировать основной результат для краевой задачи (11), (12).

Теорема 2. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $b = 1 + \varepsilon$ краевая задача (11), (12) имеет притягивающий цикл $C(\varepsilon)$. Для образующих его решений имеет место асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} w(t, x, \varepsilon, h) = & \varepsilon^{1/2} \rho_0 \left(\exp(i\Theta(t, x) + ih) + \exp(-i\Theta(t, x) - ih) \right) + \\ & + \varepsilon \rho_0^2 \left(\eta \exp(2i\Theta(t, x) + 2ih) + \bar{\eta} \exp(-2i\Theta(t, x) - 2ih) \right) + \\ & + \varepsilon^{3/2} \rho_0^3 \left(\beta \exp(3i\Theta(t, x) + 3ih) + \bar{\beta} \exp(-3i\Theta(t, x) - 3ih) \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (25)$$

где h — произвольная действительная постоянная,

$$\begin{aligned} \rho_0 = \sqrt{-\frac{1}{l_1}} = \sqrt{3(4+a^2)}, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \\ \eta_1 = \frac{a}{6(4+a^2)}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{3(4+a^2)}, \quad \beta_1 = \frac{a^2-6}{48(9+a^2)(4+a^2)}, \quad \beta_2 = -\frac{5a}{48(9+a^2)(4+a^2)}, \\ \Theta = (\sigma_1 + \omega_1(\varepsilon))t + x, \quad \sigma_1 = a - c, \quad \omega_1(\varepsilon) = -\frac{a}{2}\varepsilon + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что при любом выбранном ε формула (25) определяет однопараметрическое семейство решений, так как постоянная h произвольна.

Замечание 3. Если $a = c = 0$, то, конечно, $\sigma_1 = 0$; более того, можно показать, что $\omega_1(\varepsilon) = 0$. В этом случае краевая задача (11), (12) имеет одномерное инвариантное многообразие, заполненное состояниями равновесия; оно является локальным аттрактором для решений задачи (11), (12). Для состояний равновесия, образующих этот аттрактор, имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} w(x, \varepsilon, h) = & \varepsilon^{1/2} \rho_0 \left(\exp(ix + ih) + \exp(-ix - ih) \right) + \\ & + \varepsilon \rho_0^2 \left(\eta_1 \exp(2ix + 2ih) + \eta_1 \exp(-2ix - 2ih) \right) + \\ & + \varepsilon^{3/2} \rho_0^3 \left(\beta_1 \exp(3ix + 3ih) + \beta_1 \exp(-3ix - 3ih) \right) + o(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в этом случае $\eta_2 = \beta_2 = 0$.

Отметим еще один особый случай, возникающий при изучении бифуркационной задачи. Пусть $a - c = 0$, но $a \neq 0$; в таком случае $\sigma_1 = 0$. Поэтому функция $\Theta(t, x)$ из асимптотической формулы (25) имеет вид

$$\Theta(t, x) = \omega_1(\varepsilon)t + x,$$

где $\omega_1(\varepsilon) = (-a/2)\varepsilon + o(\varepsilon)$. Ясно, что теперь решения представленные формулой (25), будут периодическими функциями с частотой $\omega_1(\varepsilon)$ и периодом $T(\varepsilon) = 2\pi/\omega_1(\varepsilon)$. Добавим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_1(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = \infty.$$

Итак, в последнем случае получаем периодические по переменной t решения, но с периодом, который стремится к бесконечности, если уменьшается ε . В данном случае получаем так называемые «длиннопериодические» по эволюционной переменной t решения краевой задачи (11), (12).

При помощи замены (6) результаты, полученные для задачи (11), (12), можно перенести на основную краевую задачу (3), (4).

Следствие 1. Пусть $b = 1 + \varepsilon$. Тогда краевая задача (3), (4) имеет двупараметрическое семейство решений

$$u(t, x, \varepsilon, h, c) = c + w(t, x, \varepsilon, h), \quad (26)$$

где функция $w(t, x, \varepsilon, h, c)$ определена равенством (25).

Решения (26) в фазовом пространстве решений задачи (3), (4) образуют двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$ ($\dim V_2(\varepsilon) = 2$), которое для решений задачи (3), (4) является аттрактором. Все решения, принадлежащие $V_2(\varepsilon)$, являются периодическими функциями переменной t , но имеют, как правило, разные периоды

$$T(\varepsilon, c, a) \approx \frac{2\pi}{\sigma_1} + O(\varepsilon), \quad \sigma_1 = a - c,$$

где c — произвольная постоянная. В силу последнего обстоятельства все эти решения орбитально асимптотически устойчивы, но не могут быть устойчивыми в силу основного определения устойчивости А. М. Ляпунова (см. [2]). Более детальное доказательство последнего замечания можно найти в [10, 17]. Подчеркнем, что (устойчивость) неустойчивость согласно основному определению устойчивости (неустойчивости) является следствием зависимости частоты найденных периодических решений от c .

6. О некоторых возможных обобщениях. Рассмотрим еще раз краевую задачу (7), (8) и линейный дифференциальный оператор $A = A(a, b, c)$. Как уже отмечалось в разделе 1, он имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n(a, b, c) = \tau_n + i\sigma_n, \quad \tau_n = -n^4 + bn^2, \quad \sigma_n = an^3 - cn, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

т.е. τ_n зависит только от параметра b . Напротив, мнимая часть собственных значений зависит только от a и c .

Пусть $b = b_m = m^2$ ($m = \pm 2, \pm 3, \dots$). Элементарно проверяется, что при таком выборе b спектр линейного дифференциального оператора A разделяется на три части:

- (i) Собственные числа с номерами $n^2 > m^2$ ($n = \pm(m+1), \pm(m+2), \dots$) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ($\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_1 < 0$).
- (ii) При $n = m$, $n = -m$ получаем пару чисто мнимых собственных значений $\lambda_{\pm m} = \pm i(am^3 - cm)$ (или двукратное нулевое собственное значение, если выполнено равенство $am^3 - cm = 0$).
- (iii) При $n = \pm 1, \dots, \pm(m-1)$ имеется набор из $2(m-1)$ собственных чисел, для которых справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_n \geq \gamma_2 > 0$.

Пусть $b = b_m(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; в этом случае краевую задачу (7), (8) можно записать в виде

$$w_t = A_0(m)w + \varepsilon A_1(m)w - ww_x, \quad (27)$$

$$w(t, x + 2\pi) = w(t, x), \quad M_0(w) = 0, \quad (28)$$

где

$$A_0(m)w = -w_{xxxx} - m^2 w_{xx} - aw_{xxx} - cw_x, \quad A_1(m)w = -m^2 w_{xx}.$$

В такой ситуации краевая задача (27), (28) имеет гладкое седловое инвариантное двумерное многообразие $M_2(\varepsilon, n)$. Подчеркнем, что в рассматриваемом в этом разделе варианте постановки задачи спектр линейного дифференциального оператора $A = A(a, b, c)$ при $b = b_m(1 + \varepsilon)$ (т.е. $A = A_0(m) + \varepsilon A_1(m)$) разделяется на три части: часть собственных чисел этого оператора лежит в левой полуплоскости, а пара комплексно сопряженных значений находится вблизи мнимой оси. Следуя терминологии работы [14], назовём $M_2(\varepsilon, n)$ центральным инвариантным многообразием.

Решения на этом двумерном инвариантном многообразии можно искать в форме, аналогичной (15), когда m^2 было равно 1. Естественно, в данном случае соответствующая сумма будет выбрана с некоторыми, но небольшими, изменениями:

$$w(t, x, z, \bar{z}, m, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(t, x, z, \bar{z}, m) + \varepsilon w_2(t, x, z, \bar{z}, m) + \varepsilon^{3/2} w_3(t, x, z, \bar{z}, m) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (29)$$

где

$$w_1(t, x, z, \bar{z}, m) = z(s)q_m(t, x) + \bar{z}(s)\bar{q}_m(t, x), \quad q_m(t, x) = \exp(i\sigma_m t + imx), \quad \sigma_m = am^3 - cm.$$

Для достаточно гладких функций w_2, w_3 выполнены равенства

$$M_0(w_j) = 0, \quad M_{\pm}(w_3) = \frac{\sigma_m}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\sigma_m}^{\pi/\sigma_m} \int_{-\pi}^{\pi} w_j q_{\pm}(m) dx = 0, \quad j = 2, 3, \dots \quad (30)$$

Наконец, $q_+(m) = q_m(t, x)$, $q_-(m) = \bar{q}_m(t, x)$.

Подставляя сумму (29) в краевую задачу (27), (28), как и в разделе 3, получаем линейные неоднородные краевые задачи для определения w_2, w_3 . При этом функции $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ удовлетворяют уравнению

$$z' = \psi(z, \bar{z}, m) \quad (31)$$

— «укороченному варианту» нормальной формы. Последовательно повторяя построения раздела 3, которые были проделаны в частном случае $b = 1$, $m^2 = 1$, получаем, что в случае произвольного m справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} w_2(t, x, z, \bar{z}, m) &= \eta_m z^2 q_m^2 + \bar{\eta}_m \bar{z}^2 \bar{q}_m^2, \quad \eta_m = \eta_{1m} + i\eta_{2m}, \\ \eta_{1m} &= \frac{a}{6m^2(4m^2 + a^2)}, \quad \eta_{2m} = -\frac{1}{3m(4m^2 + a^2)}, \\ w_3(t, x, z, \bar{z}, m) &= \beta_m z^3 q_m^3 + \bar{\beta}_m \bar{z}^3 \bar{q}_m^3, \quad \beta_m = \beta_{1m} + i\beta_{2m}, \\ \beta_{1m} &= \frac{a^2 - 6m^2}{48m^4(9m^2 + a^2)(4m^2 + a^2)}, \quad \beta_{2m} = -\frac{5a}{48m^3(9m^2 + a^2)(4m^2 + a^2)}, \\ \psi(z, \bar{z}, m) &= m^2 z + (l_1(m) + il_2(m))z|z|^2, \quad l_1(m) = -\frac{1}{3(4m^2 + a^2)}, \quad l_2(m) = -\frac{a}{6m(4m^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Итак, в рассматриваемых вариантах, когда $m = \pm 2, \pm 3, \dots$, нормальная форма приобретает вид

$$z' = m^2 z + (l_1(m) + il_2(m))z|z|^2. \quad (32)$$

Это уравнение имеет притягивающий цикл

$$z(s) = \rho_0(m) \exp(i\omega_0(m)s + ih), \quad (33)$$

где $\rho_0(m) = \sqrt{3m^2(4m^2 + a^2)}$, $\omega_0(m) = -am/2$, $h \in \mathbb{R}$.

Для краевой задачи (27), (28) можно сформулировать аналогичное теореме 2 утверждение.

Теорема 3. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $b = b_m(1 + \varepsilon)$ краевая задача (27), (28) имеет однопараметрическое семейство периодических решений (цикл $C_m(\varepsilon)$ в ситуации общего положения, если $\sigma_m = am^3 - cm \neq 0$). Для таких решений справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} w(t, x, \varepsilon, m, h) = & \varepsilon^{1/2} \rho_0(m) \left(\exp(i\Theta_m(t, x) + ih) + \exp(-i\Theta_m(t, x) - ih) \right) + \\ & + \varepsilon \rho_0^2(m) \left(\eta_m \exp(2i\Theta_m(t, x) + 2ih) + \bar{\eta}_m \exp(-2i\Theta_m(t, x) - 2ih) \right) + \\ & + \varepsilon^{3/2} \rho_0^3(m) \left(\beta_m \exp(3i\Theta_m(t, x) + 3ih) + \bar{\beta}_m \exp(-3i\Theta_m(t, x) - 3ih) \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (34)$$

где постоянные $\rho_0(m)$, η_m , β_m были указаны ранее, число $h \in \mathbb{R}$ произвольно и

$$\Theta_m(t, x) = (\sigma_m - \varepsilon \frac{a}{2} m + o(\varepsilon))t + mx.$$

В отличие от цикла $C(\varepsilon)$ для краевой задачи (11), (12), полученный в этом разделе цикл $C_m(\varepsilon)$ краевой задачи (27), (28) неустойчив при любом выборе коэффициентов. Последнее утверждение теоремы 3 — следствие того факта, что двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon, m)$ является седловым.

Наконец, краевая задача (3), (4) при условии $b = b_m(1 + \varepsilon)$ имеет уже двумерное инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon, m)$, которое образовано решениями

$$u(t, x, \varepsilon, c, m, h) = c + w(t, x, \varepsilon, m, h).$$

В данном случае, безусловно, все решения, принадлежащие $V_2(\varepsilon, m)$ являются седловыми (неустойчивы). Подчеркнем, что при выводе формулы (34) при произвольном m были использованы равенства (30), (31), (32), (33); в целом он аналогичен выводу формулы (25) в случае $m = 1$.

7. Заключение. В работе дан ответ на ряд вопросов, которые возникают при анализе поведения решений рассмотренной эволюционной краевой задачи. В частности, изучен вопрос о возможности бифуркаций пространственно неоднородных решений при соответствующем выборе параметров краевой задачи. Подчеркнем, что основным управляющим параметром служит коэффициент b , который играет некоторую роль при описании бифурцирующих решений, но эта роль второстепенная. Ответ на вопрос о существовании и устойчивости таких решений зависит только от выбора параметра b . Так, например, при $b = 1 + \varepsilon$ у соответствующей краевой задачи существуют устойчивые периодические по t решения (или одномерное инвариантное многообразие, образованное пространственно неоднородными решениями). При $b = b_m(1 + \varepsilon)$ ($b_m = m^2$), если $m = \pm 2, \pm 3, \dots$, краевая задача (27), (28) имеет циклы, но они неустойчивы, а период их близок к $2\pi/\sigma_m$, $\sigma_m = am^3 - cm$, если $\sigma_m \neq 0$.

От a и c (выбора однородного состояния равновесия у краевой задачи (3), (4)) зависят такие характеристики, как амплитуда волновых решений и частота колебаний. Отметим, что при $a = 0$, $c = 0$ вместо периодических решений получаем не периодические по t решения, а неоднородные по пространству состояния равновесия, а при $a = c$, $a \neq 0$ получаем циклы, но с большим периодом (малой частотой), т.е. медленно осциллирующие решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. — Ярославль: Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, 2003.

4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
5. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
6. Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Петров Б. А. Особенности формирования диссипативных структур, описываемых уравнением Курамото—Сивашинского// Модел. анал. информ. сист. — 2015. — 22, № 1. — С. 105–113.
7. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль, 1976. — С. 114–129.
8. Куликов А. Н. Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — 186. — С. 57–66.
9. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
10. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хилларда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 4. — С. 670–683.
11. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
12. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–370.
13. Guckenheimer J., Holmes P. J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer, 1983.
14. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds// J. Differ. Equations. — 1967. — 3, № 4. — P. 546–570.
15. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in Kuramoto—Sivashinsky equation// Pliska Stud. Math. — 2015. — 25. — P. 101–110.
16. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics// J. Math. Sci. — 2015. — 208, № 2. — P. 211–221.
17. Kulikov A. N., Kulikov D. A. The Kuramoto—Sivashinsky equation. A local attractor filled with unstable periodic solutions// Automat. Control Comput. Sci. — 2018. — 52, № 7. — P. 708–713.
18. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcations and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
19. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New York: Springer, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 80–88
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-80-88

УДК 517.16, 517.165

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© 2023 г. М. В. ПЛЕХАНОВА, Г. Д. БАЙБУЛАТОВА

Аннотация. Рассматривается класс задач стартового управления системами, состояние которых описывается уравнениями в банаховых пространствах, не разрешимыми относительно старшей дробной производной Гerasимова—Капуто и нелинейно зависящими от дробных производных младшего порядка. Получена теорема о существовании оптимального управления. Абстрактные результаты использованы при изучении задачи стартового управления для модифицированного уравнения Соболева дробного порядка по времени.

Ключевые слова: оптимальное управление, стартовое управление, дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Гerasимова—Капуто, нелинейное эволюционное уравнение, вырожденное эволюционное уравнение.

SOLVABILITY OF START CONTROL PROBLEMS FOR A CLASS OF DEGENERATE NONLINEAR EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

© 2023 M. V. PLEKHANOVA, G. D. BAYBULATOVA

ABSTRACT. In this paper, we consider a class of start control problems for systems whose states are described by equations in Banach spaces that are not solvable with respect to the highest Gerasimov–Caputo fractional derivative and depend nonlinearly on lower-order fractional derivatives. A theorem on the existence of an optimal control is obtained. Abstract results are applied to the study of the start control problem for the modified Sobolev equation with a fractional derivative in time.

Keywords and phrases: optimal control, start control, fractional differential equation, Gerasimov–Caputo derivative, nonlinear evolution equation, degenerate evolution equation.

AMS Subject Classification: 26D15

1. Введение. В работе рассматривается задача оптимального управления для операторного уравнения в банаховых пространствах $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$. Пусть заданы линейный непрерывный оператор $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\ker L \neq \{0\}$, линейный замкнутый оператор M с областью определения D_M , плотной в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$ и нелинейный оператор $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, где X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, D_t^β — производные Гerasимова—Капуто при различных $\beta > 0$, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 <$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-90015) и Программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ же (проект НШ-2708.2022.1.1).

$\dots < \alpha_n < \alpha$. Основная цель работы — получение условий разрешимости задачи управления

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)), \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf. \quad (4)$$

Управляющее воздействие осуществляется в задаче посредством задания начальных данных u_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, в (2); подобные задачи называют задачами стартового управления. Ограничения на управления задаются условием (3) принадлежности непустому выпуклому замкнутому подмножеству $\mathcal{U}_\partial$ пространства управлений, в данной постановке являющемуся подпространством пространства $\mathcal{X}^m$.

Уравнение (1) не разрешимо относительно старшей производной в силу условия $\ker L \neq \{0\}$, поэтому многие авторы называют его вырожденным. Однако структура исследуемого уравнения, определяемая условием $(L, 0)$ -ограниченности оператора M , позволяет с помощью использования проектора P задавать начальные условия (2) только для проекции решения на подпространство без вырождения, которые называются обобщенными условиями Шоултера—Сидорова. Вырожденные эволюционные уравнения рассматриваемого типа представляют интерес, поскольку часто встречаются при математическом моделировании различных процессов. Отметим работы, посвященные исследованию вырожденных уравнений или систем уравнений целого порядка: [4–6, 11, 15, 23, 34, 35].

Дробные дифференциальные уравнения в последние десятилетия являются предметом активного изучения. Теория дробного интегро-дифференцирования хорошо зарекомендовала себя при описании систем со сложными свойствами, процессов во фрактальных структурах и др. (см. [13, 36]) и расширила классы исследуемых задач. Различные дробные производные и содержащие их уравнения исследовались многими авторами (см. [3, 10, 14, 16, 20, 24–30]). Среди работ, посвященных исследованию задач оптимального управления для дифференциальных уравнений с дробными производными (см., например, [19, 21, 22, 37]), совсем немногие касаются вырожденных эволюционных уравнений. Исключение составляют работы авторов проекта, например, [1, 8, 9, 31].

Работа состоит из введения и трех разделов. Раздел 2 содержит вспомогательные результаты, используемые далее, в частности, полученные М. В. Плехановой и Г. Д. Байбулатовой условия однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2) в смысле сильных решений (см. [33]). В разделе 3 эти результаты используются для получения условий существования решения задачи стартового управления для соответствующей системы. Под решением задачи управления понимается пара «решение–управление», принадлежащая множеству допустимых пар и минимизирующая целевой функционал. Доказательство существования решения использует [17, теорема 2.4] и по сути сводится к проверке четырех условий: непустоты множества допустимых пар, непрерывности задающих состояние системы управления операторов, условия компактности для нелинейного оператора задачи и коэрцитивности целевого функционала. Полученный абстрактный результат используется при исследовании разрешимости задачи стартового управления для модифицированной нелинейной системы Соболева.

2. Сильное решение нелинейного вырожденного уравнения. Введем следующие обозначения:

$$g_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1} t^{\delta-1}, \quad \tilde{g}_\delta(t) := \Gamma(\delta)^{-1} (t - t_0)^{\delta-1}, \quad J_t^\delta h(t) := \int_{t_0}^t g_\delta(t-s) h(s) ds, \quad \delta > 0, \quad t > 0.$$

Здесь и далее D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Дробная производная Гerasимова—Капуто (см. [2, 20]) функции h определена соотношением

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1}(t) \right), \quad t > t_0.$$

Положим, что $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — банаховы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (т.е. L — линейный непрерывный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — линейный замкнутый оператор с областью

определения D_M , плотной в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$; D_M снабжена нормой графика

$$\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M \cdot\|_{\mathcal{Y}}.$$

Определим L -резольвентное множество

$$\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$$

оператора M и его L -спектр $\sigma^L(M) := \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ и введем обозначения

$$R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_\mu^L := L(\mu L - M)^{-1}.$$

Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

В случае (L, σ) -ограниченности оператора M можно задать проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}),$$

где $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [35, р. 89, 90]). Положим

$$\mathcal{X}^0 := \ker P, \quad \mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P, \quad \mathcal{Y}^0 := \ker Q, \quad \mathcal{Y}^1 := \operatorname{im} Q.$$

Обозначим через L_k и M_k , $k = 0, 1$, сужения операторов L и M на $\mathcal{X}^k$ и $D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{X}^k$ соответственно.

Теорема 1 (см. [35, р. 90, 91]). Пусть оператор M является (L, σ) -ограниченным. Справедливы следующие утверждения.

- (i) $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Пусть $G := M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ оператор M называется (L, p) -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Рассмотрим обобщенную задачу Шоултера—Сидорова для вырожденного полулинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)), \quad (5)$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (6)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $m_k - 1 < \alpha_k \leq m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Сильным решением задачи (5), (6) называется функция $x \in C^{m_n}([t_0, T]; \mathcal{X}) \cap L_q(t_0, T; D_M)$, для которой $Lx \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Y})$, если

$$J_t^{m-\alpha} \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}),$$

выполнены условия (6) и почти всюду на (t_0, T) верно равенство (5).

Лемма 1 (см. [32]). Пусть $l-1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $q > (l-\beta)^{-1}$ при $\beta < l$, $T > t_0$. Тогда

$$\exists C_{q,\beta} > 0 \quad \forall h \in C^l([t_0, t]; \mathcal{Z}) \quad \|D_t^\beta h\|_{L_q(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq C_{q,\beta} \|h\|_{W_q^l(t_0, t; \mathcal{Z})}.$$

Теорема 2 (см. [33]). Пусть $m_n \leq (m-1)/2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, оператор M $(L, 0)$ -ограничен, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ для всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}$ и почти всех $t \in (t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$N(t, z_1, \dots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$$

при некотором отображении $N_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для которого $QN_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$ при всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}^1$ и почти всюду на (t_0, T)

$$\|QN_1(t, z_1, z_2, \dots, z_n)\|_{\mathcal{Y}} \leq a(t) + c \sum_{k=1}^n \|z_k\|_{\mathcal{X}} \quad (7)$$

для некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$, $(I - Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, для решения задачи

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(t) &= L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)), \\ v^{(k)}(t_0) &= x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (8)$$

при $\alpha_k < m_k$ выполняются равенства

$$v^{(m_k+r)}(t_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad r = 0, 1, \dots, m_n - 1. \quad (9)$$

Тогда задача (5), (6) имеет единственное сильное решение.

3. Задачи стартового управления. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$. Рассмотрим задачу стартового управления для вырожденного нелинейного уравнения

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)), \quad t \in (t_0, T), \quad (10)$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (11)$$

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \quad (12)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf, \quad (13)$$

где $\mathcal{U}_\partial$ — множество допустимых управлений (подмножество пространства управлений $\mathbb{U}$), J — целевой функционал. Введём в рассмотрение при $q > 1$ пространство

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) := \left\{ x \in L_q(t_0, T; D_M) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X}) : J_t^{m-\alpha} \left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}) \right\}.$$

Лемма 2 (см. [7]). Пространство $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})} = \|x\|_{L_q(t_0, T; D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})}$$

является банаховым.

Лемма 3 (см. [7]). Пусть $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}_0$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, $q \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ пространство $W_q^m(t_0, T; \mathcal{X}_0)$ компактно вложено в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (10)–(13) будем называть такое множество пар (x, u) , что функция $x \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ является сильным решением задачи (10), (11) с $u \in \mathcal{U}_\partial$. Решением задачи оптимального управления (10)–(13) называется пара $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующая целевой функционал, т.е. $J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x,u) \in \mathfrak{W}} J(x, u)$.

Коэрцитивность функционала J означает, что для любого $R > 0$ множество $\{(x, u) \in \mathfrak{W} : J(x, u) \leq R\}$ ограничено в $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathbb{U}$.

Теорема 3. Пусть $m_n \leq (m-1)/2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ для всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}$ и почти всех $t \in (t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$N(t, z_1, \dots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$$

при некотором отображении $N_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для которого $QN_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$, для всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}^1$ и почти всюду на (t_0, T) выполнено неравенство (7) для некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$, $(I - Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, для решения задачи (8) при $\alpha_k < m_k$ выполняются равенства (9). Предположим, что $\mathcal{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $(\mathcal{X}^1)^m$, $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое непрерывно вложено в пространство $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$; целевой функционал J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times (\mathcal{X}^1)^m$, коэрцитивный на $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times (\mathcal{X}^1)^m$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\partial$ задачи (10)–(13).

Доказательство. По теореме 2 множество $\mathfrak{W}$ непусто. Определим пространства

$$\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}), \quad \mathbb{U} := (\mathcal{X}^1)^m, \quad \mathbb{V} := L_q(t_0, T; \mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m$$

и операторы

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x, u) &:= \left(LD_t^\alpha x - Mx, \gamma_0(Px) - u_0, \gamma_0(Px)^{(1)} - u_1, \dots, \gamma_0(Px)^{(m-1)} - u_{m-1} \right), \\ \mathbb{F}(x(\cdot)) &:= - \left(N(\cdot, D_t^{\alpha_1} x(\cdot), D_t^{\alpha_2} x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x(\cdot)), 0, 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ следует из неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbb{L}(x, u)\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y}) \times \mathcal{X}^m} &\leq C_L \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} + \\ &+ \|\gamma_0(Px)\|_{\mathcal{X}} + \|\gamma_0(Px)^{(1)}\|_{\mathcal{X}} + \dots + \|\gamma_0(Px)^{(m-1)}\|_{\mathcal{X}} + \|u_0\|_{\mathcal{X}} + \dots + \|u_{m-1}\|_{\mathcal{X}} \leq \\ &\leq C_1 \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|x\|_{L_q(t_0, T; D_M)} + C_2 \|x\|_{C^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq \\ &\leq C \left(\|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \right) = C \|(x, u)\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}^m}. \end{aligned}$$

Докажем непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{V}$. Из соотношения

$$\|x_j - x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

равномерной липшицевости оператора N_1 и леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} &\left\| N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x_j(\cdot)) - N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x(\cdot)) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} \leq \\ &\leq l \sum_{k=1}^n \|D_t^{\alpha_k} x_j - D_t^{\alpha_k} x\|_{C([t_0, T]; \mathcal{X}_1)} \leq C_3 n \|x_j - x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Проверим условие компактности из [17, теорема 2.4]. Пространство $\mathbb{Y}_1 := \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0, T; \mathcal{X})$ и поэтому в силу леммы 3 компактно вложено в $\mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{X}_1)$. Для элемента $v^* \in (L_q(t_0, T; \mathcal{Y}))^*$ в силу равномерной липшицевости оператора N_1 и леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} &\left| v^* \left(N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x_j(\cdot)) \right) - N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x(\cdot)) \right| \leq \\ &\leq \|v^*\|_{(L_q(t_0, T; \mathcal{Y}))^*} \left\| N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x_j(\cdot)) - N_1(\cdot, D_t^{\alpha_1} x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x(\cdot)) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} \leq \\ &\leq l \|v^*\|_{(L_q(t_0, T; \mathcal{Y}))^*} \sum_{k=1}^n \|D_t^{\alpha_k} x_j - D_t^{\alpha_k} x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X}_1)} \leq C_4 n \|v^*\|_{(L_q(t_0, T; \mathcal{X}_1))^*} \|x_j - x\|_{W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{X}_1)}. \end{aligned}$$

Это позволяет сделать вывод о непрерывной продолжимости функционала $w(\cdot) = v^*(\mathbb{F}(\cdot))$ из $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ на $\mathbb{Y}_{-1}$. Согласно [17, теорема 2.4] получим существование оптимального управления. $\square$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(x, u) = \|x - x_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})}^{q_1} + \|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})}^{q_2} + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k - u_{dk}\|_{\mathcal{X}}^{q_3} \rightarrow \inf \quad (14)$$

с заданными $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$, $\delta \geq 0$, $x_d \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$, $u_{dk} \in \mathcal{X}$.

Следствие 1. Пусть $m_n \leq (m-1)/2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathcal{X}$ компактно вложено в $\mathcal{X}_1$, оператор M является $(L, 0)$ -ограниченным, $N : [t_0, T] \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ для всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}$ и почти всех $t \in (t_0, T)$ удовлетворяет условию

$$N(t, z_1, \dots, z_n) = N_1(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$$

при некотором отображении $N_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, для которого $QN_1 : [t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$ каратеодориево и равномерно липшицево по $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in (\mathcal{X}^1)^n$, для всех $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{X}^1$ и почти всюду на (t_0, T) выполнено неравенство (7) для некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$,

$(I - Q)N_1 \in C^{m_n}([t_0, T] \times (\mathcal{X}^1)^n; \mathcal{Y})$, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathcal{X}^1$, для решения задачи (8) при $\alpha_k < m_k$ выполняются равенства (9). Предположим, что $\mathcal{U}_\delta$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $(\mathcal{X}^1)^m$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{U}_\delta$ задачи (10)–(12), (14).

Доказательство. Пусть $\mathbb{Y} = \mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$. Выпуклость, непрерывность и ограниченность снизу функционала (14) в пространстве $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X}) \times \mathcal{X}^m$ при $\delta > 0$ или в пространстве $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ при $\delta = 0$ очевидны. В силу равномерной липшицевости оператора N_1 и непрерывности оператора L имеем на множестве $\{(x, u) \in \mathfrak{W} : J(x, u) \leq R\}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} &= \|x\|_{L_q(t_0, T; D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq \\ &\leq C_1 \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + \|Mx\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} + \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq \\ &\leq C_1 \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + \left\| LD_t^\alpha x - N(t, D_t^{\alpha_1} x, D_t^{\alpha_2} x, \dots, D_t^{\alpha_n} x) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} \leq \\ &\leq C_1 \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + C_2 \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} + \\ &\quad + \left\| N(\cdot, D_t^{\alpha_1} x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x(\cdot)) - N(\cdot, D_t^{\alpha_1} x_d(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x_d(\cdot)) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} + \\ &\quad + \left\| N(\cdot, D_t^{\alpha_1} x_d(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} x_d(\cdot)) \right\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{Y})} \leq \\ &\leq C_1 \|x\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + C_2 \|D_t^\alpha x\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u\|_{\mathcal{X}^m} + l \sum_{k=1}^n \|D_t^{\alpha_k} x - D_t^{\alpha_k} x_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + C_3 \leq \\ &\leq C_1 \|x - x_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})} + C_2 \|D_t^\alpha x - D_t^\alpha x_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{X})} + \|u - u_d\|_{\mathcal{X}^m} + C_4 \leq C_5 + C_6 R^{q_1 + q_2 + q_3}. \end{aligned}$$

Отсюда следует коэрцитивность целевого функционала. Осталось сослаться на теорему 3. $\square$

4. Стартовое управление для системы Соболева дробного порядка по времени. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, t_0) = v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (15)$$

$$v_n(x, t) := \sum_{i=1}^3 v_i(x, t) n_i(x) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T), \quad (16)$$

для модифицированной системы Соболева дробного порядка

$$D_t^\alpha v(x, t) = [v(x, t), \bar{\omega}] - r(x, t) + g(D_t^{\alpha_1} v), \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T), \quad (17)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T), \quad (18)$$

где $0 \leq \alpha_1 \leq m_1 \leq (m-1)/2 < m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Эта система описывает при $\alpha = 1$, $g \equiv 0$ динамику малых внутренних движений вращающейся стратифицированной жидкости в равновесном состоянии (см. [12]). Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $n = (n_1, n_2, n_3)$ является вектором внешней нормали к границе, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор скорости частиц жидкости, $r = (r_1, r_2, r_3) = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$ — нестационарный градиент давления, $[\cdot, \bar{\omega}]$ — векторное произведение, где $\bar{\omega} = (0, 0, \omega) \in \mathbb{R}^3$, а ω — двойная угловая скорость вращения, $g = (g_1, g_2, g_3)$,

$$\nabla \cdot v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

v и r — неизвестные вектор-функции.

Введем следующие обозначения: $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^3$, $\mathcal{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$, $\mathbb{H}_\sigma$ — замыкание $\mathcal{L}$ в норме пространства $\mathbb{L}_2$. Имеем гильбертово пространство $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ соответствующий ортопроектор.

Согласно подходу С. Л. Соболева (см. [12]) заменим уравнение несжимаемости (18) и граничное условие (16) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in (t_0, T). \quad (19)$$

Действительно, из плотности множества $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$ в пространстве $\mathbb{H}_\pi$ и равенства

$$\int_{\Omega} \langle v, \nabla\varphi \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \int_{\partial\Omega} v_n \varphi ds - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) \varphi dx$$

для всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ следует, что для $v \in \mathbb{H}^1 := (H^1(\Omega))^3$ совокупность двух условий (16) и (18) эквивалентна включению $v(\cdot, t) \in \mathbb{H}_\sigma$, $t \in (t_0, T)$. Откажемся от ограничения $v \in \mathbb{H}^1$ и получим условие (19).

Очевидно, что оператор $B : v \rightarrow [v, \bar{\omega}]$, $\bar{\omega} = (0, 0, \omega)$, непрерывен из $\mathbb{L}_2$ в $\mathbb{L}_2$, $\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbb{L}_2)} = |\omega|$. Введем обозначение $B_\sigma := B\Sigma$.

Пусть $\Sigma := I - \Pi$, $\mathbb{H}^2 := (H^2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_2 \cap \mathbb{H}_\sigma$, $\mathcal{X} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $\mathcal{Y} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi$. Тогда задача (15), (17), (19) примет вид (5), (6) с операторами

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma B & \mathbb{O} \\ \Pi B & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y}), \quad N(z) = g(v), \quad (20)$$

где $z = (v, r) \in \mathcal{X}$, $v \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r \in \mathbb{H}_\pi$ (см. подробнее [14]). В [14] показано, что

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}).$$

Теорема 4 (см. [18]). *Предположим, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, $g \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, $l > d/2$, отображение F действует по правилу*

$$F(v_1, v_2, \dots, v_d) = g(\cdot, v_1(\cdot), v_2(\cdot), \dots, v_d(\cdot)).$$

Тогда $F \in C^\infty((H^l(\Omega))^d; H^l(\Omega))$.

Теорема 5. *Пусть $0 \leq \alpha_1 \leq m_1 \leq (m-1)/2 < m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, производная g' ограничена на $\mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; если $\alpha_1 < m_1$, то $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. Тогда существует единственное сильное решение задачи (15), (17), (19).*

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{X}^1 = \text{im } P = \{(v, r) \in \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi : r = \Pi B_\sigma v\}$ (см. [14]). Следовательно, условия (15) для функций $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$ эквивалентны обобщенным условиям Шоултера—Сидорова (6) с данными из $\mathcal{X}^1$ для уравнения (10) с операторами (20). Кроме того, для всех $z = (v, r) \in \mathcal{X}$ имеем $Pz = (v, \Pi B_\sigma v)$, $v = P_1 Pz$, где P_1 — проекция $(v, r) \rightarrow v$. Поэтому $N(z) = g(P_1 Pz) := N_1(Pz)$. По теореме 4 получим, что $g(w) \in \mathbb{H}^2$ для всех $w \in \mathbb{H}_\sigma^2 \subset \mathbb{H}^2$, так как $\dim \Omega = 3$, $2 > 3/2$, поэтому $g \in C^\infty(\mathbb{H}^2; \mathbb{H}^2)$. Оператор N является равномерно липшицевым, так как g' ограничена. Условие (7) выполнено в силу непрерывности оператора N , а условия (9) — в силу равенства нулю элементов $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. При этом учитывается, что $2m_1 - 1 < 2m_1 \leq m - 1$. Остается сослаться на лемму 1 из [14], в которой показана $(L, 0)$ -ограниченность оператора M , и теорему 2. $\square$

Теперь перейдем к задаче стартового управления

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, t_0) = u_k(x), \quad x \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Множество допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$ состоит из функций $u_k \in \mathcal{X}$, удовлетворяющих условию

$$\|u_k\|_{\mathcal{X}} \leq R. \quad (21)$$

Пространство $\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathcal{X})$ по определению имеет вид

$$\mathcal{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi) := \left\{ x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi) : \right. \\ \left. J_t^{m-\alpha} \left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi) \right\}.$$

Целевой функционал при заданных $v_d \in Z_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}_\sigma^2)$, $r_d \in Z_{\alpha,q}(t_0, T; \mathbb{H}_\pi)$, $u_{dk} \in \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi$, $q > 1$, $\delta \geq 0$ имеет вид

$$J(v, r, u) = \|v - v_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{H}_\sigma^2)}^2 + \|r - r_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathbb{H}_\pi)}^2 + \|D_t^\alpha v - D_t^\alpha v_d\|_{L_2(t_0, T; \mathbb{H}_\sigma^2)}^2 + \\ + \|D_t^\alpha r - D_t^\alpha r_d\|_{L_2(t_0, T; \mathbb{H}_\pi)}^2 + \delta \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k - u_{dk}\|_{\mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi}^2 \rightarrow \inf. \quad (22)$$

С учетом проведенной редукции из следствия 1 получим следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $0 \leq \alpha_1 \leq m_1 \leq (m-1)/2 < m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, производная g' ограничена на $\mathbb{R}$, $v_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, m-1$; если $\alpha_1 < m_1$, то $v_{m_1+r} = 0$, $r = 0, 1, \dots, m_1 - 1$. Тогда существует единственное решение $(\hat{v}, \hat{r}, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1}) \in Z_{\alpha,q}(t_0, T; H_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi) \times \mathcal{U}$ задачи управления (15), (17), (19), (21), (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байбулатова Г. Д. Задачи стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными // Челябин. физ.-мат. ж. — 2020. — 5, № 3. — С. 271–284.
2. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикл. мат. мех. — 1948. — 12. — С. 529–539.
3. Глушак А. В., Авад Х. К. О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором // Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — 47. — С. 118–32.
4. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
5. Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Наука, 2000.
6. Кожанов А. И. Смешанная задача для одного класса сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка // Докл. РАН. — 2013. — 451, № 5. — С. 492–494.
7. Плеханова М. В. Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Челябин. физ.-мат. ж. — 2017. — 2, № 1. — С. 53–65.
8. Плеханова М. В. Задачи оптимального управления для линейных вырожденных дробных уравнений // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 149. — С. 72–83.
9. Плеханова М. В., Байбулатова Г. Д., Киен Б. Т. Распределенное управление для полулинейных уравнений с производными Герасимова—Капуто // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — 28, № 2. — С. 47–67.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.
12. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18. — С. 3–50.
13. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
14. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Мат. — 2015. — № 1. — С. 71–83.
15. Федоров В. Е., Плеханова М. В. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа // Диффер. уравн. — 2004. — 40, № 11. — С. 1548–1556.
16. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля // Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 1. — С. 171–184.
17. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
18. Хэссад Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.
19. Bahaa G. M., Hamiaz A. Optimal control problem for coupled time-fractional diffusion systems with final observations // J. Taibah Univ. Sci. — 2018. — 13, № 1. — P. 124–135.
20. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph.D. thesis. — Eindhoven: University Press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001.

21. *Baleanu D., Machado J. A. T., Luo A. C. J.* Fractional Dynamics and Control. — London–New York–Dordrecht–Heidelberg: Springer, 2012.
22. *Debbouche A., Torres D. F. M.* Sobolev-type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2015. — 18. — P. 95–121.
23. *Fedorov V. E.* Applications of the theory of degenerate operator semigroups to initial-boundary-value problems// *J. Math. Sci.* — 2005. — № 126. — P. 1658–1663.
24. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., Plekhanova M. V.* Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative// *Differ. Equations.* — 2015. — 51. — P. 1360–1368.
25. *Fedorov V. E., Romanova E. A., Debbouche A.* Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations// *J. Math. Sci.* — 2018. — 228, № 4. — P. 380–394.
26. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam–Boston–Heidelberg: Elsevier, 2006.
27. *Mainardi F., Luchko Y. F., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation// *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2001. — 4, № 2. — P. 153–192.
28. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. — Boston: Academic Press, 1974.
29. *Plekhanova M. V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2016. — 40. — P. 41–44.
30. *Plekhanova M. V.* Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions// *AIP Conf. Proc.* — 2016. — 1759. — 020101.
31. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations// *Proc. Int. Conf. “Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019)”* (Yekaterinburg, Russia, July 08–12, 2019). — Springer, 2019. — P. 501–512.
32. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives// *Proc. Int. Conf. “Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems (NABVP 2018)”* (Santiago de Compostela, Spain, September 4–7, 2019). — Springer, 2019. — P. 81–93.
33. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2021. — 44, № 15. — P. 11810–11819.
34. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic, 2002.
35. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht Boston: VSP, 2003.
36. *Tarasov V. E.* Fractional Dynamics. — Beijing: Higher Education Press, 2010.
37. *Wang J. R., Zhou Y.* A class of fractional evolution equations and optimal controls// *Nonlin. Anal. Real World Appl.* — 2011. — 12, № 1. — P. 262–272.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-31-90015) и Программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ же (проект НШ-2708.2022.1.1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Плеханова Марина Васильевна

Челябинский государственный университет;

Южно-Уральский государственный университет

(национальный исследовательский университет), Челябинск

E-mail: mariner79@mail.ru

Байбулатова Гузель Дамировна

Челябинский государственный университет

E-mail: baybulatova_g_d@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 89–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107

УДК 517.958, 517.956.32

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2023 г. В. С. РЫХЛОВ

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами и смешанной производной, описывающая поперечные колебания конечной струны с закрепленными концами. Введено понятие классического решения начально-граничной задачи, доказана теорема единственности классического решения и получена формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. Дано определение обобщенного решения рассматриваемой задачи и найдены конечные формулы для этого обобщенного решения.

Ключевые слова: уравнение колебаний, гиперболическое уравнение, смешанная производная, начально-граничная задача, классическое решение, обобщенное решение.

ON THE SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY PROBLEM IN A HALF-STRIP FOR A HYPERBOLIC EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE

© 2023 V. S. RYKHLOV

ABSTRACT. An initial-boundary problem for an inhomogeneous second-order hyperbolic equation in a half-strip of a plane with constant coefficients and a mixed derivative is studied. This problem describes transverse oscillations of a finite string with fixed ends. We introduce the notion of a classical solution of the initial-boundary problem, prove a uniqueness theorem for the classical solution, and obtain a formula for the solution in the form of a series whose terms are contour integrals containing the initial data of the problem. A definition of a generalized solution is given and finite formulas for this generalized solution are found.

Keywords and phrases: oscillation equation, hyperbolic equation, mixed derivative, initial boundary value problem, classical solution, generalized solution.

AMS Subject Classification: 35L20

1. Постановка задачи и краткая историческая справка. Рассмотрим следующую начально-граничную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, $\varphi, \psi \in L_1[0, 1]$, $f \in L_1(Q_T)$ при любом фиксированном $T > 0$ (будем далее просто писать, что $f \in L_1(Q_T)$, не поясняя, что $T > 0$ — любое фиксированное число), $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$ при $T > 0$.

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1), т.е. выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение этой задачи в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т.е. на функции φ, ψ, f .

Уравнение (1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Исследование таких уравнений началось около 60 лет назад (см. [36–38]).

Излагаемые в данной статье результаты частично анонсированы в [20–22] и получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [30]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [2, 3, 5, 25–29, 31–33]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова (см. [4]) об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера (см. [35]) о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [6–9]. Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [10–15]. Были предложены и другие задачи для уравнения (1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [16, 17].

Под *классическим решением* (или почти классическим решением, классическим решением почти всюду (п.в.), или, более кратко, решением п.в.) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, удовлетворяющая условиям (2)–(3) и п.в. уравнению (1), которая непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны по x и t , и п.в. в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t). \quad (4)$$

Отметим, что необходимость в условии (4) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tx}(x, t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры (см. [23]).

Для классического решения задачи (1)–(3) необходимо выполняются следующие условия:

- 1) гладкость: $\varphi(x), \varphi'(x), \psi(x)$ абсолютно непрерывны;
- 2) согласование: $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (5)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (6)$$

В случае (5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу (см. [18, с. 66–67]), а в случае (6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (5).

В случае $p_1 = 0$ (или, что то же самое, $\omega_2 = -\omega_1$) получаем начально-граничную задачу (1)–(3) для классического уравнения колебания струны. Как уже выше отмечено, эта задача подробно исследовалась в [2, 3, 5, 25–33]. Решение, полученное в настоящей статье, при $p_1 = 0$ имеет другой вид, не использующий сложных продолжений исходных функций φ, ψ, f на всю вещественную ось.

Отметим, что конкретный вид краевых условий (2) не принципиален. Могут быть рассмотрены и более общие, но регулярные по Биркгофу однородные краевые условия.

2. Спектральная задача, соответствующая начально-граничной задаче. С задачей (1)–(3) тесно связана следующая спектральная задача:

$$L(\lambda)y = 0, \quad (7)$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \quad (8)$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \quad (9)$$

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ (см. [18, с. 26]) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda \omega_1} & e^{\lambda \omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda \omega_2} - e^{\lambda \omega_1};$$

очевидно, его корни равны

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Линеаризуем задачу (7) с учетом (8). Положим $z_1 = y$, $z_2 = \lambda y$. Получим следующую задачу в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$:

$$AZ = \lambda Z, \quad BZ(0) + CZ(1) = 0,$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_x := \frac{d}{dx}. \quad (11)$$

Введем в пространстве вектор-функций оператор

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \{Z := (z_1, z_2)^T : z_1'', z_2' \in L_1[0, 1], BZ(0) + CZ(1) = 0\}. \quad (12)$$

Как показано в [34], собственные значения и производные цепочки (см. [18, с. 28]), построенные по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$, совпадают с собственными значениями и собственными вектор-функциями оператора $\mathcal{L}$; следовательно, двукратное разложение по собственным функциям оператор-функции $L(\lambda)$ есть не что иное, как разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$.

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda \mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор в пространстве вектор-функций. Для этого решим задачу

$$\mathcal{L}Z - \lambda Z = H,$$

где $H = (h_1, h_2)^T$; в подробной записи

$$z_2 - \lambda z_1 = h_1, \quad -\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} z_2' - \lambda z_2 = h_2, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \quad (13)$$

Выразим z_2 из первого уравнения системы (13):

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \quad (14)$$

и подставим во второе уравнение системы (13):

$$-\frac{1}{p_2} z_1'' - \frac{p_1}{p_2} (\lambda z_1' + h_1') - \lambda (\lambda z_1 + h_1) = h_2$$

или

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda,$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \quad (15)$$

Итак, первая компонента резольвенты $\mathcal{R}$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = h_\lambda, \quad z_1(0) = z_1(1) = 0. \quad (16)$$

Пусть R_λ — резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — её функция Грина. Тогда из (16) получим представление

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi, \quad (17)$$

а из (14) найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi + h_1(x). \quad (18)$$

3. Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным вектор-функциям спектральной задачи. Из общей теории линейных операторов следует, что двукратное разложение вектор-функции H в ряд по собственным функциям $L(\lambda)$ или, что то же самое, разложение по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \mathcal{R}_\lambda H d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda. \end{aligned}$$

Найдем условия на компоненты вектор-функции H , при которых имеет место равенство

$$\begin{aligned} h_1(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} (\mathcal{R}_\lambda H)_1 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} z_1(x, \lambda) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} (R_\lambda h_\lambda)(x) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) [p_1 h_1'(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi)] d\xi d\lambda. \end{aligned}$$

Запись $(\dots)_j$ означает, что рассматривается j -я компонента вектора, стоящего внутри скобок. Преобразуя в этом равенстве первое слагаемое в квадратных скобках, интегрируя по частям и учитывая, что $h_1(0) = h_1(1) = 0$, получим, что нужно найти условия на компоненты вектора H , при которых справедливо равенство

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^1 \left((-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda)) h_1(\xi) + p_2 G(x, \xi, \lambda) h_2(\xi) \right) d\xi d\lambda =: I(x). \quad (19)$$

Имеет место следующая теорема о разложении первой компоненты.

Теорема 1. Если $h_1', h_2 \in L_p[0, 1]$ ($p > 1$), $h_1(0) = h_1(1) = 0$, то справедливо равенство (19), причем ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Справедливость теоремы установим не обычным методом контурного интеграла Пуанкаре—Коши (см. [18, с. 91–98]), а более удобным в данном случае методом вычетов.

Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ имеет место следующее представление:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \\ - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right), \quad (20)$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 1$, если $x \geq 0$, и $\chi(x) = 0$, если $x < 0$).

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Справедливы формулы*

$$r_k(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right), \quad (21)$$

$$r_{1k}(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda_k} G_\xi(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(\omega_1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right). \quad (22)$$

Доказательство. Так как $G(x, \xi, \lambda)$ — мероморфная функция по λ и λ_k — ее простой полюс, то из формулы (20) получим

$$r_k(x, \xi) = \\ = \frac{1}{\lambda_k(\omega_2 - \omega_1)\Delta'(\lambda_k)} \left(e^{\lambda_k(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda_k \omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda_k(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - e^{\lambda_k(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right). \quad (23)$$

На основании (10) для знаменателя справедливо представление

$$\lambda_k(\omega_2 - \omega_1)\Delta'(\lambda_k) = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1} (\omega_2 - \omega_1) \left(\omega_2 e^{\lambda_k \omega_2} - \omega_1 e^{\lambda_k \omega_1} \right) = \\ = 2k\pi i e^{\lambda_k \omega_1} \left(\omega_2 e^{\lambda_k(\omega_2 - \omega_1)} - \omega_1 \right) = 2k\pi i e^{\lambda_k \omega_1} \left(\omega_2 e^{\frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}(\omega_2 - \omega_1)} - \omega_1 \right) = 2k\pi i(\omega_2 - \omega_1) e^{\lambda_k \omega_1}.$$

С учетом этого из (23) найдем

$$r_k(x, \xi) = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k(\omega_1(x-1) + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda_k \omega_1(x-\xi)} + e^{\lambda_k(-\omega_1 \xi + \omega_2 x)} - e^{\lambda_k \omega_2(x-\xi)} \right) = \\ = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k(\omega_2 - \omega_1) + \lambda_k(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - e^{\lambda_k \omega_1(x-\xi)} + e^{\lambda_k(\omega_2 x - \omega_1 \xi)} - e^{\lambda_k \omega_2(x-\xi)} \right) = \\ = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - e^{\lambda_k \omega_1(x-\xi)} + e^{\lambda_k(\omega_2 x - \omega_1 \xi)} - e^{\lambda_k(x-\xi)} \right) = \\ = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k \omega_1 x} \left(e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} \right) + e^{\lambda_k \omega_2 x} \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) \right) = \\ = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right).$$

Формула (21) доказана. Формула (22) получается из (21) путем дифференцирования $r_k(x, \xi)$ по ξ .

□

Лемма 2. *Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то справедливы формулы*

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f^*(\xi) d\xi, \quad (24)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f_*(\xi) d\xi, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in \left[0, \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right), \\ f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1}(\xi - 1)\right), & \xi \in \left[\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1\right]; \end{cases} \quad f_*(\xi) = \begin{cases} f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \xi\right), & \xi \in \left[0, \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right), \\ 0, & \xi \in \left[\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1\right]. \end{cases} \quad (26)$$

Доказательство. С учетом формул для λ_k (см. (10)) справедливо представление

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i \frac{\omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} f(\xi) d\xi. \quad (27)$$

Очевидно, $\frac{\omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \in (-1; 0]$. Так как функция $e^{-2k\pi i x}$ является 1-периодичной, то из (27) следует

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 \exp\left\{-2k\pi i \left(\frac{\omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} + 1\right)\right\} f(\xi) d\xi.$$

Сделав в интеграле справа замену

$$\frac{\omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} + 1 = \xi_1 \quad \longleftrightarrow \quad \xi = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1},$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi &= -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_{\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}}^1 e^{-2k\pi i \xi_1} f\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}\right) d\xi_1 = \\ &= -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi_1} f^*(\xi_1) d\xi_1, \end{aligned}$$

т.е. установлена справедливость равенства (24), где функция f^* определяется левой формулой в (26).

Далее, аналогично предыдущему можно получить

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} f(\xi) d\xi &= \int_0^1 \exp\left\{-2k\pi i \frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right\} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^{\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} e^{-2k\pi i \xi_1} f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \xi_1\right) d\xi_1 = \\ &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi_1} f_*(\xi_1) d\xi_1, \end{aligned}$$

т.е. получим формулу (25), где функция f_* определена в (26). □

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.

Рассмотрим выражение $I(x)$, введенное в (19). Справедливо представление

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + p_2 G(x, \xi, \lambda) h_2(\xi) \right) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 \left((-p_1 r_{1k}(x, \xi) + \lambda_k p_2 r_k(x, \xi)) h_1(\xi) + p_2 r_k(x, \xi) h_2(\xi) \right) d\xi. \end{aligned}$$

На основании леммы 1 отсюда получим

$$I(x) = \sum_k (e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x}) \times \\ \times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{p_1 \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \left(\frac{p_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) h_1(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} \int_0^1 (e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi}) h_2(\xi) d\xi \right). \quad (28)$$

Введем обозначение

$$H_2(x) := \int_0^x h_2(\xi) d\xi.$$

Интегрируя по частям второй интеграл справа в (28), учитывая, что

$$e^{-\lambda_k \omega_1} - e^{-\lambda_k \omega_2} = e^{-\lambda_k \omega_2} (e^{\lambda_k (\omega_2 - \omega_1)} - 1) = e^{-\lambda_k \omega_2} (e^{2k\pi i} - 1) = 0, \quad (29)$$

а также используя формулы Виета $p_1 = -(\omega_1 + \omega_2)$ и $p_1 = \omega_1 \omega_2$, из (28) получим

$$I(x) = \sum_k \left(\exp \left\{ 2k\pi i \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} - \exp \left\{ 2k\pi i \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right\} \right) \times \\ \times \left(- \frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} h_1(\xi) d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} h_1(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1^2 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} H_2(\xi) d\xi - \frac{\omega_1 \omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} H_2(\xi) d\xi \right). \quad (30)$$

Затем применим лемму 2. В результате для $I(x)$ получим представление

$$I(x) = \sum_k \left(\exp \left\{ 2k\pi i \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} - \exp \left\{ 2k\pi i \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right\} \right) \times \\ \times \left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_1^*(\xi) d\xi + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_{1*}(\xi) d\xi \right) - \right. \\ \left. - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} (H_2^*(\xi) + H_{2*}(\xi)) d\xi \right). \quad (31)$$

Лемма 3. Если

$$f \in W_p^1[0, 1], \quad p \geq 1, \quad f(0) = f(1) = 0, \quad (32)$$

то

$$f^*, f_* \in W_p^1[0, 1], \quad (33)$$

$$f^*(0) = f^*(1) = f_*(0) = f_*(1) = 0. \quad (34)$$

Доказательство. Введем обозначение $a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$. Из формул (26) видно, что в случае выполнения условий (32) для доказательства (33) достаточно доказать равенства

$$f^*(a + 0) - f^*(a - 0) = 0, \quad f_*(a + 0) - f_*(a - 0) = 0. \quad (35)$$

Из первой формулы в (26) и (32) получим

$$f^*(a+0) - f^*(a-0) = f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} - 1\right)\right) - 0 = f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\right) = f(1) = 0.$$

Аналогично, из второй формулы в (26) найдем

$$f_*(a+0) - f_*(a-0) = 0 - f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right) = -f(1) = 0.$$

Тем самым соотношения (35) установлены, и, следовательно, доказано свойство (33)

Далее, опять с учетом первой формулы в (26) будем иметь

$$f^*(1) = f\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(1 - 1)}{\omega_1}\right) = f(0) = 0, \quad f^*(0) = f(0) = 0.$$

Аналогично, учитывая вторую формулу в (26), получим

$$f_*(0) = f(0) = 0, \quad f_*(1) = 0.$$

Тем самым, соотношения (34) также доказаны. $\square$

Лемма 4. Если $f \in L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, то сумма $F^* + F_*$ принадлежит пространству $W_p^1[0, 1]$, где

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi,$$

и справедливо равенство

$$(F^* + F_*)(0) = (F^* + F_*)(1).$$

Доказательство. Если $f \in L_p[0, 1]$, то $F(x) \in W_p^1[0, 1]$ и для доказательства того, что

$$(F^* + F_*) \in W_p^1[0, 1],$$

достаточно установить непрерывность этой суммы в точке a . На основании (26) справедливы равенства

$$\begin{aligned} (F^*(a+0) + F_*(a+0)) - (F^*(a-0) + F_*(a-0)) &= \\ &= \left(F\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \left(\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} - 1\right)\right) + 0\right) - \left(0 - F\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right)\right) = \\ &= F\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\right) - F(1) = F(1) - F(1) = 0. \end{aligned}$$

Равенство значений суммы $F^* + F_*$ в концах отрезка $[0, 1]$ следует из равенства в точках 0 и 1 каждого слагаемого. В самом деле, на основании (26) имеем

$$F^*(1) - F^*(0) = F(0) - 0 = 0 - 0 = 0, \quad F_*(1) - F_*(0) = 0 - F(0) = 0 - 0 = 0. \quad \square$$

Завершим доказательство теоремы 1.

Согласно следствию 2 из теоремы Зигмунда (см. [1, с. 613]), если $f(x)$ абсолютно непрерывна, $f(0) = f(1)$ и ее производная принадлежит L_p , $p > 1$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней абсолютно, а значит, и равномерно (см. [1, с. 275]).

Используя указанное следствие и учитывая леммы 3 и 4, получим из (31)

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp\left\{2k\pi i \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_1^*(\xi) d\xi + \\ &\quad + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp\left\{2k\pi i \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}\right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_{1*}(\xi) d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp \left\{ 2k\pi i \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(H_2^*(\xi) + H_{2*}(\xi) \right) d\xi - \\
& - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp \left\{ 2k\pi i \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_1^*(\xi) d\xi - \\
& - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp \left\{ 2k\pi i \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} h_{1*}(\xi) d\xi + \\
& + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \exp \left\{ 2k\pi i \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right\} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(H_2^*(\xi) d\xi + H_{2*}(\xi) \right) d\xi = \\
& = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} h_1^* \left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} h_{1*} \left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(H_2^* \left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) - H_{2*} \left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) \right) - \\
& - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} h_1^* \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} h_{1*} \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) + \\
& + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(H_2^* \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) + H_{2*} \left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \right) \right), \quad (36)
\end{aligned}$$

причем сходимость рядов абсолютная и равномерная. Учитывая, что при $x \in [0, 1]$

$$\frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \in \left[0, \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right], \quad \frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} + 1 \in \left[\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, 1 \right],$$

на основании (26) из (36) получим

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} 0 + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} h_1 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(0 + H_2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) \right) - \\
& - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} h_1 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} 0 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(H_2 \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \frac{\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right) + 0 \right) = \\
& = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} h_1(x) - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} H_2(x) - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} h_1(x) + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} H_2(x) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} h_1(x) = h_1(x).
\end{aligned}$$

Итак, доказано, что ряд $I(x)$ сходится абсолютно и равномерно к $h_1(x)$. $\square$

4. Единственность классического решения начально-граничной задачи и формула для решения в виде ряда. Сформулируем и докажем важный для дальнейшего изложения результат. Пусть $R_{1\lambda}$ — интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$.

Теорема 2. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), $f \in L_1(Q_T)$ и дополнительно выполняется условие $u_{tt} \in L_1(Q_T)$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_{\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_{\lambda} \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda; \quad (37)$$

ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Доказательство. Запишем задачу (1)–(3) иначе. Введем обозначения

$$v_1 = u, \quad v_2 = \frac{d}{dt} v_1 = \frac{d}{dt} u; \quad (38)$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v_1 = v_2, \\ \frac{d}{dt}v_2 = -\frac{1}{p_2}d_x^2v_1 - \frac{p_1}{p_2}d_xv_2 + \frac{1}{p_2}f, \end{cases} \quad (39)$$

где, как и раньше, $d_x := d/dx$. Пусть

$$V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_2}f \end{pmatrix}.$$

Используя введенный ранее оператор A (см. (11)), запишем систему (39) в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot, t) = AV(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (40)$$

где по предположению теоремы $V_t, F \in L_1(Q_T)$. Используя оператор $\mathcal{L}$ (см. (12)) и учитывая формулы (40), запишем задачу (1)–(3) в виде

$$\frac{d}{dt}V(\cdot, t) = \mathcal{L}V(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (41)$$

$$V(x, 0) = \Xi(x), \quad (42)$$

где $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$. При этом вектор-функция V удовлетворяет уравнению (41) п.в. в области Q и всюду на $[0, 1]$ удовлетворяет равенству (42).

Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1)–(3), то $V(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 о разложении по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$ для первой компоненты, т.е. имеет место представление

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 d\lambda, \quad (43)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно по переменной $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

По построению для вектор-функции V п.в. выполняется соотношение (41). Подействуем оператором $\mathcal{R}_\lambda$ на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t = \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) + \mathcal{R}_\lambda F. \quad (44)$$

Пусть

$$Y(x, t, \lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t) \quad (45)$$

и $\mathcal{G}$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}$. Из (45) тогда получим представление

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V(\xi, t) d\xi. \quad (46)$$

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, t) d\xi = \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t). \quad (47)$$

Будем рассуждать аналогично [31, с. 287–288].

Так как по построению $V(\xi, t)$ является абсолютно непрерывной функцией переменной t , то из (46) получим

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) V(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) \int_0^t V_t(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (48)$$

Как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и обозначения (38) имеем $V_t(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$. Следовательно, $\mathcal{G}(x, \xi, \lambda)V_t(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$ по переменным ξ и τ . Поэтому по теореме Фубини

$$\int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda)V_t(\xi, \tau) d\xi \in L_1[0, T] \quad \text{по } \tau.$$

Значит, (48) можно представить в виде

$$Y(x, t, \lambda) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda)V(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda)V_t(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что функция $Y(x, t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t и почти при всех t выполняется равенство (47).

Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (44) следующим образом:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{L}V) = \mathcal{R}_\lambda((\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})V) = V + \lambda\mathcal{R}_\lambda V = V + \lambda Y. \quad (49)$$

Из (44), (47), (49) тогда получим, что при фиксированных x и λ вектор-функция $Y(x, t, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Y(x, t, \lambda) - \lambda Y(x, t, \lambda) = V(x, t) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, t). \quad (50)$$

Кроме того, на основании (42)

$$Y(x, 0, \lambda) = \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, 0) = \mathcal{R}_\lambda \Xi. \quad (51)$$

Таким образом, $Y(x, t, \lambda)$ при любых фиксированных x и λ является решением задачи Коши (50)–(51). Общее решение уравнения (50) имеет вид

$$Y_{\text{о.н.}}(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (V(x, \tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau)) d\tau, \quad (52)$$

где $C = (C_1, C_2)^T$ — вектор, не зависящий от переменной t , т.е. $C_j = C_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$. Удовлетворим решение (52) начальному условию (51):

$$Y_{\text{о.н.}}(x, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\lambda \Xi.$$

Отсюда следует, что

$$C_1(x, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1, \quad C_2(x, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2. \quad (53)$$

Используя формулы (52)–(53), получим следующее представление решения задачи Коши (50)–(51):

$$Y(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 \\ e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_2 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (V(x, \tau) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau)) d\tau, \quad (54)$$

причем это решение единственно. Нас интересует только первая компонента равенства (54) (см. формулу (43)), т.е. если $Y(x, t, \lambda) = (y_1(x, t, \lambda), y_2(x, t, \lambda))^T$, то из (54) получим с учетом (45)

$$y_1(x, t, \lambda) = (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 = e^{\lambda t}(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (v_1(x, \tau) + (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1) d\tau. \quad (55)$$

Учитывая, что $u(x, t) = v_1(x, t)$, из формул (43) и (55) получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (u(x, \tau) + (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1) d\tau \right) d\lambda.$$

Так как

$$\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau$$

— целая аналитическая функция по λ , то все интегралы по контурам γ_k от нее равны нулю. В результате получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} (\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (\mathcal{R}_\lambda F(\cdot, \tau))_1 d\tau \right) d\lambda. \quad (56)$$

Запишем эту формулу в другом, более удобном для применения виде, используя следующее представление, которое следует из (17), (18) и (15):

$$\mathcal{R}_\lambda H = \mathcal{R}_\lambda \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2) \\ \lambda R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 f_2) + h_1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

С учетом того, что $\Xi = (\varphi, \psi)^T$, из (57) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 = R_\lambda(-p_1 \varphi' - \lambda p_2 \varphi - p_2 \psi). \quad (58)$$

Учитывая, что $F = \left(0, \frac{1}{p_2} f\right)^T$, из (57) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda F)_1 = R_\lambda(-f(\cdot, \tau)). \quad (59)$$

Тогда из (56), (58), (59) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} e^{\lambda t} R_\lambda(p_1 \varphi' + \lambda p_2 \varphi + p_2 \psi) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (60)$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} R_\lambda \varphi' &= \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi'(\xi) d\xi = G(x, 1, \lambda) \varphi(1) - G(x, 0, \lambda) \varphi(0) - \\ &\quad - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = -R_{1\lambda} \varphi, \end{aligned} \quad (61)$$

так как

$$G(x, 1, \lambda) = G(x, 0, \lambda) = 0,$$

ввиду того, что функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ по ξ удовлетворяет краевым условиям, сопряженным к условиям (9) (см. [18, с. 20–21]).

Учитывая (61) в (60), получим в результате формулу (37) из формулировки доказываемой теоремы, причем ряд в этой формуле сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. Итак, теорема 2 полностью доказана. $\square$

Так как ряд в формуле (37) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$, то этот ряд равен сумме рядов, соответствующих каждому слагаемому суммы, стоящей во внутренних круглых скобках. Ряды в (37), соответствующие первому и второму слагаемым, обозначим $u_{11}(x, t)$ и $u_{12}(x, t)$, соответственно. Пусть $u_1(x, t) = u_{11}(x, t) + u_{12}(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\psi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд, соответствующий третьему слагаемому во внутренних скобках формулы (37), обозначим $u_2(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд в формуле (37), соответствующий четвертому слагаемому, обозначим $u_3(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1)–(3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Следовательно, классическое решение $u(x, t)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t). \quad (62)$$

5. Обобщенное решение и конечная формула для обобщенного решения. Таким образом, установлено, что задача (1)–(3) и ряд в (37) тесно связаны. Аналогично [30] расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (37) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $f(x, t) \in L_1(Q_T)$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является формальным решением задачи (1)–(3), но понимаемой теперь чисто формально. Эту задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $f(x, t) \in L_1(Q_T)$ будем называть *обобщенной начально-граничной задачей*, а ее решение, т.е. ряд справа в (37) — *обобщенным решением задачи* (1)–(3). Найти решение обобщенной начально-граничной задачи — значит найти «сумму» расходящегося ряда в (37) (слово «сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

В [24, с. 19] для расходящихся рядов введены три аксиомы:

$$\begin{aligned} (A) \quad & \sum a_n = s \implies \sum k a_n = k s; \\ (B) \quad & \sum a_n = s, \sum b_n = t \implies \sum (a_n + b_n) = s + t; \\ (C) \quad & \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0. \end{aligned}$$

В дополнение к этим аксиомам А. П. Хромов предложил для расходящихся рядов еще одну аксиому (см. [30]):

$$(D) \quad \int \sum = \sum \int, \text{ где } \int - \text{определенный интеграл.}$$

Используя аксиомы (A) и (B), нетрудно убедиться, что для обобщенного решения (37) справедливо представление (62). Более того, для каждого слагаемого справа в (62) можно найти суммы рядов и получить конечную формулу для обобщенного решения.

5.1. Формула для обобщенного решения в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int_0^1 (-p_1 G_{\xi}(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi)) d\xi \right) d\lambda. \quad (63)$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda t} (-p_1 G_{\xi}(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi)) \right) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 \left(e^{\lambda_k t} (-p_1 r_{1k}(x, \xi) + \lambda_k p_2 r_k(x, \xi)) \varphi(\xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (64)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формулы (30). На основании леммы 1, формул Виета и аксиом (A), (B) из (64) получим

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_k (e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}) \times \\ &\times \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{p_1 \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \left(\frac{p_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) \varphi(\xi) d\xi \right) = \\ &= \sum_k (e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}) \left(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(- \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi \right) + \\
&+ \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi \right). \quad (65)
\end{aligned}$$

Далее применяем лемму 2 и аксиому (A). В результате получим

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) + \\
&+ \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (66)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для нахождения «суммы» ряда (63) надо найти «суммы» тригонометрических рядов функций $\varphi^*(x)$ и $\varphi_*(x)$ или, обобщенно, «сумму» тригонометрического ряда Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$:

$$\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi. \quad (67)$$

Пусть «сумма» ряда (67) при $x \in [0, 1]$ есть какая-либо функция $g(x) \in L_1[0, 1]$ (ограничимся именно такими функциями). Тогда в соответствии с аксиомой (D) имеем

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta. \quad (68)$$

По теореме 3 из [19, с. 277] ряд $\tilde{E}(68)$ сходится при любом $x \in [0, 1]$ и его сумма есть

$$\sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta. \quad (69)$$

Таким образом, из (68) и (69) получим, что

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta.$$

Отсюда следует, что $g(x) = f(x)$ для п.в. $x \in [0, 1]$, т.е. найдена «сумма» $g(x)$ расходящегося ряда (67).

Так как функция $e^{2k\pi i x}$ есть 1-периодическая функция с равными значениями на концах отрезка $[0, 1]$, то с учетом найденной «суммы» ряда (67) получим следующее представление для правой части формулы (66):

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) + \\
&+ \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (70)
\end{aligned}$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\varphi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (5). Тогда функция $u_1(x, t)$, определенная формулой (70), является обобщенным решением задачи (1)–(3) в случае $\psi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$.

5.2. Формула для обобщенного решения в случае $\varphi = 0$ и $f = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int_0^1 p_2 G(x, \xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi \right) d\lambda. \quad (71)$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$u_2(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda t} p_2 G(x, \xi, \lambda) \psi(\xi) \right) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_k t} p_2 r_k(x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (72)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (30) и (65).

На основании леммы 1, формул Виета и аксиомы (A) из (72) получим

$$u_2(x, t) = \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \frac{\omega_1 \omega_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) \psi(\xi) d\xi. \quad (73)$$

Введем обозначение

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(\xi) d\xi$$

и проведем в интеграле справа в (73) один раз интегрирование по частям и учтем равенство (29) и аксиомы (A)–(B). Получим

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\omega_1^2 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda \omega_1 \xi} d\xi - \frac{\omega_1 \omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda \omega_2 \xi} d\xi = \right. \\ &= \frac{\omega_1^2 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi \right) - \\ &\quad - \frac{\omega_1 \omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \Psi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi \right). \quad (74) \end{aligned}$$

Далее применяем лемму 2 и аксиому (A). В результате получим

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(- \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi + \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - \\ &\quad - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (75) \end{aligned}$$

Используя уже найденную «сумму» ряда (67) (в данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x) \in W_1^1[0, 1]$, то ряд (67) сходится для п.в. $x \in [0, 1]$ к функции $f(x)$), получим следующее представление для правой части формулы (75):

$$u_2(x, t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\Psi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \Psi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \right. \\ \left. - \Psi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) + \Psi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right). \quad (76)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $\psi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (5). Тогда функция $u_2(x, t)$, определенная формулой (76), является обобщенным решением задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$.

5.3. Формула для обобщенного решения в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. В данном разделе речь идет о получении конечной формулы для обобщенного решения (см. (62))

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) d\xi d\tau d\lambda. \quad (77)$$

Используя обозначения леммы 1, получим

$$u_3(x, t) = \sum_k \int_0^t \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda(t-\tau)} G(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau = \sum_k \int_0^t \int_0^1 e^{\lambda_k(t-\tau)} r_k(x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (78)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (30), (65) и (74).

На основании леммы 1 из (78) получим

$$u_3(x, t) = \sum_k \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \times \\ \times \int_0^1 \frac{\omega_1\omega_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{-\lambda_k\omega_1\xi} - e^{-\lambda_k\omega_2\xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (79)$$

Введем обозначение

$$F(x) = \int_0^x f(\xi, \tau) d\xi$$

и проведем во внутреннем интеграле справа в (79) один раз интегрирование по частям и учтем равенство (29) и аксиомы (А)–(В). Получим

$$u_3(x, t) = \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \times \\ \times \left(\frac{\omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda\omega_1\xi} d\xi - \frac{\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda\omega_2\xi} d\xi \right) = \\ = \frac{\omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi d\tau - \right. \\ \left. - \sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k\omega_1\xi} d\xi d\tau \right) -$$

$$- \frac{\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k\omega_2\xi} d\xi d\tau - \sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k\omega_2\xi} d\xi d\tau \right).$$

Далее применяем лемму 2 и аксиомы (A) и (D). В результате получим

$$u_3(x, t) = - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi + \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) d\tau. \quad (80)$$

Используя уже найденную «сумму» ряда (67) (в данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x) \in W_1^1[0, 1]$, то ряд (67) сходится для п.в. $x \in [0, 1]$ к функции $f(x)$), получим следующее представление для правой части формулы (80):

$$u_3(x, t) = - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(F^* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) - F^* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) - F_* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) + F_* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) \right) d\tau. \quad (81)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $f \in L_1(Q_T)$ и выполняется условие $\ddot{E}(5)$. Тогда функция $u_3(x, t)$, определенная формулой $\ddot{E}(81)$, является обобщенным решением задачи (1)–(3) в случае $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$.

В заключение данного раздела сформулируем итоговую теорему, в которой дается конечная формула для обобщенного решения задачи (1)–(3).

Теорема 6. Пусть $\varphi, \psi \in L_1[0, 1]$, $f \in L_1(Q_T)$ и выполняется условие (5). Тогда функция $u(x, t)$, определенная формулой

$$u(x, t) = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi^* \left(\left\{ \frac{t+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) - \varphi^* \left(\left\{ \frac{t+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) \right) + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi_* \left(\left\{ \frac{t+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) - \varphi_* \left(\left\{ \frac{t+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) \right) - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\Psi^* \left(\left\{ \frac{t+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) - \Psi^* \left(\left\{ \frac{t+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) - \Psi_* \left(\left\{ \frac{t+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) + \Psi_* \left(\left\{ \frac{t+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\} \right) \right) - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(F^* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) - F^* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) - F_* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_2x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) + F_* \left(\left\{ \frac{t-\tau+\omega_1x}{\omega_2-\omega_1} \right\}, \tau \right) \right) d\tau,$$

является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Справедливость теоремы следует из формулы (5) и уже доказанных теорем 3–5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
2. *Корнев В. В.* О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения // Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3–9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 132–137.
3. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 172. — С. 119–133.
4. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — 20, № 4. — С. 444–456.
6. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
7. *Ломов И. С.* Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения // Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 66–79.
8. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения // Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 178–180.
9. *Ломов И. С.* Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
10. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части // Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — 3. — С. 38–52.
11. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости // Весн. ГрДУ ім. Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. техн. кіраванне.. — 11, № 1. — С. 68–82.
12. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — 1. — С. 18–38.
13. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — 1 (50). — С. 62–73.
14. *Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н.* Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных // Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. Сер. В. Природознавчія науки: мат. фіз. біологія. — 2021. — № 2 (58). — С. 28–55.
15. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй кривой производной в граничном условии // Докл. РАН. — 2014. — 459, № 5. — С. 544.
16. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны // Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485.
17. *Муравей Л. А., Романенков А. М.* Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна // Сб. мат. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (Белгород, 25–29 октября 2021 г.). — Белгород, 2021. — С. 194–196.
18. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
19. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
20. *Рыхлов В. С.* Метод расходящихся рядов решения смешанной задачи для гиперболического уравнения // Сб. мат. Междунар. конф. «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: Полипринт, 2021. — С. 22.

21. Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 252–255.
22. Рыхлов В. С. О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 209–212.
23. Толстов Г. П. О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — 24 (66), № 1. — С. 27–51.
24. Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.
25. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251.
26. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф.. — 19, № 3. — С. 280–288.
27. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXX. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3-9 мая 2019 г.). — Воронеж, 2019. — С. 291–300.
28. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// Мат. 20 Междунар. Саратов. зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439..
29. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача в кн.: Математика. Механика. № 23. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2021. — С. 63–67.
30. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 319–324.
31. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 2. — С. 286–300.
32. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН.. — 27, № 4. — С. 215–238.
33. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных// в кн.: Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 60. — Казань, 2021. — С. 325–328.
34. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. семин. им. И. Г. Петровского — 1983. — № 9. — С. 190–229.
35. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
36. Archibald F. R., Emslie A. G. The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — P. 347–348.
37. Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — P. 145–148.
38. Sack R. A. Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — P. 224–226.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рыхлов Виктор Сергеевич

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: rykhlovvs@yandex.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 108–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-108-119

УДК 519.1

РЕСУРСНЫЕ СЕТИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ПРОХОЖДЕНИЯ ПО ДУГАМ

© 2023 г. В. А. СКОРОХОДОВ, Я. М. ЕРУСАЛИМСКИЙ, Х. АБДУЛРАХМАН

Аннотация. В настоящей работе изучается модель распределения ресурсного потока в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Особенностью таких сетей является зависимость длительностей прохождения по дугам от дискретного времени. Данная особенность существенно влияет на процесс перераспределения ресурсов. Показано, что в рассматриваемых сетях имеет место сохранение суммарного ресурса, при этом, суммарный ресурс может распределяться не только по вершинам, но и по некоторым дугам. Получено соотношение о сохранении суммарного ресурса в сети. Предложен метод нахождения порогового значения в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Показано, что если суммарный ресурс не меньше порогового значения в исходной сети, то в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам существует единственный предельный поток.

Ключевые слова: динамическая сеть, эргодическая ресурсная сеть, ресурсный поток, распределение потока, пороговое значение, начальное состояние ресурсной сети.

RESOURCE NETWORKS WITH DYNAMIC ARC DURATIONS

© 2023 V. A. SKOROKHODOV, Ya. M. ERUSALIMSKIY, H. ABDULRAHMAN

ABSTRACT. In this paper, we study a model for the distribution of a resource flow in a resource network with dynamic durations of passage along arcs. A feature of such networks is the dependence of the duration of passage along arcs on discrete time. This feature significantly affects the process of redistribution of resources. It is shown that in the networks considered, the total resource is preserved, while the total resource can be distributed not only over vertices, but also over some arcs. A relation is obtained for the conservation of the total resource in the network. A method for finding the threshold value in a resource network with dynamic durations of passage along arcs is proposed. It is shown that if the total resource is not less than the threshold value in the original network, then in a network with dynamic durations of passage along arcs, there is a unique limiting flow.

Keywords and phrases: dynamic network, ergodic resource network, resource flow, flow distribution, threshold value, resource network initial state.

AMS Subject Classification: 05C21, 05C50, 90B10

1. Введение. Исследования динамических потоковых моделей ведутся уже довольно продолжительное время. Так, например, в [7, 11, 15–18] исследуются динамические периодические сети и потоковые задачи в таких сетях. В [7] показано, что такие сети подобны графам с нестандартной достижимостью (см. [1, 20]), и предложен подход к решению задач о потоках в таких сетях. Ресурсные сети, являющиеся частным случаем динамических потоковых моделей на графах, предложены в работах О. П. Кузнецовой и Л. Ю. Жиликова (см., например, [2–6, 19]).

Ресурсная сеть представляет собой связный ориентированный граф, для каждой дуги которого заданы пропускная способность и для каждой вершины количество ресурса в этой вершине.

В каждый момент дискретного времени ресурс каждой вершины перераспределяется между соседними вершинами по определенным правилам, удовлетворяющим двум условиям:

- (i) (условие замкнутости сети): ресурс в любой вершине сети не добавляется извне и не исчезает;
- (ii) (условие неразрывности потока): ресурс, выходящий из вершины, вычитается, а входящий в вершину — прибавляется к ресурсу данной вершины.

Таким образом, между каждыми последовательными моментами дискретного времени по дугам сети проходит поток в его классическом понимании. Также в [5, 13, 14] исследованы ресурсные сети с «жадными» вершинами.

Графы с динамическими длительностями прохождения по дугам предложены в [8]. Особенностью потоковых задач в таких сетях является эффект «блокировки» прохождения части потока по некоторым дугам в определённые моменты времени. Таким образом, изменение длительностей прохождения по дуге влияет на пропускную способность, превращая сеть в «скрытую» динамическую сеть. При этом пропускные способности обыкновенной динамической сети меняются в заданные моменты времени, тогда как у «скрытой» динамической сети на пропускную способность дуги в текущий момент влияет суммарная величина потока, начавшего переход по этой дуге в предыдущие моменты времени.

Настоящая работа посвящена изучению процесса перераспределения ресурса в ресурсных сетях с динамическими длительностями прохождения по дугам. Рассмотрен вспомогательный граф (см. [8]), процесс перераспределения ресурса, на котором в точности соответствует аналогичному процессу на исходной сети (см. [12]). Показано, что в такой сети имеет место сохранение суммарного ресурса, однако ресурс может распределяться не только по вершинам, но и по некоторым дугам. Получено соотношение о сохранении суммарного ресурса в сети. Предложен метод нахождения порогового значения в ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Показано, что если суммарный ресурс не меньше порогового значения в исходной сети, то в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам существует единственный предельный поток.

2. Основные понятия. Приведем основные понятия, определения и утверждения необходимые для дальнейшего изложения (см. [1–10, 19]).

Определение 1. Ресурсной сетью называется такой связный ориентированный граф $G(X, U, f)$, что с каждой дугой u такой сети связана величина её пропускной способности r_u , а с каждой вершиной x — величина $q_x(t)$, которая называется количеством ресурса в вершине x в момент времени $t \in Z_+$. Вектор $\mathbf{Q}(t) = (q_{x_1}(t), \dots, q_{x_n}(t))$ называется состоянием сети G в момент t .

Правила функционирования ресурсной сети определяются следующим образом: для каждой вершины $x \in X$

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{u \in [x]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x]^-} F(u, t), \quad (1)$$

где $F(u, t)$ — величина ресурсного потока выходящего по дуге u (положим для определённости $f(u) = (x, y)$) в момент времени t определяется следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u, & q_x(t) > \sum_{v \in [x]^+} r_v; \\ \frac{r_u}{\sum_{v \in [x]^+} r_v} \cdot q_x(t), & q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+} r_v; \end{cases} \quad (2)$$

здесь и далее $[x]^+$ — множество всех дуг, входящих в вершину x , а $[x]^-$ — множество всех дуг, выходящих из вершины x .

Правила функционирования сети (1) и (2) можно записать в сокращенной форме:

$$\mathbf{Q}(t+1) = \mathcal{A}(\mathbf{Q}(t)). \quad (3)$$

Отметим, что оператор $\mathcal{A}$, вообще говоря, не является линейным; он линеен только в том случае, если для каждого момента времени величина потока по каждой дуге определяется только нижней строчкой в (2).

Обозначим через R матрицу пропускных способностей дуг сети G ; при этом считаем, что

$$r_{ij} = \begin{cases} \sum_{u \in [x_i]^+ \cap [y_j]^-} r_u, & \text{если существует хотя бы одна дуга из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j; \\ 0, & \text{если из вершины } x_i \text{ в вершину } x_j \text{ не ведёт ни одной дуги.} \end{cases}$$

Кроме того, обозначим через P стохастическую матрицу сети G , удовлетворяющую условию

$$p_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sum_{k=1}^n r_{ik}} \quad \forall i, j,$$

а через W — величину суммарного ресурса сети:

$$W = \sum_{x \in X} q_x(0).$$

Определение 2. Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если $Q(t) = Q(t+1)$.

Согласно правилам перераспределения ресурса, если $Q(t)$ устойчиво, то для всех натуральных i имеет место равенство $Q(t) = Q(t+i)$.

Определение 3. Состояние $Q^* = (q_{x_1}^*, \dots, q_{x_n}^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для каждого $i \in [1; n]_Z$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такое t_ε , что для всех $t > t_\varepsilon$ имеет место неравенство $|q^* - q_{x_i}(t)| < \varepsilon$.

Определение 4. Состояние Q^* называется предельным, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t , что $Q^* = Q(t)$, либо оно асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Таким образом, зная начальное состояние $Q(0)$ сети G , можно находить любое из состояний $Q(t)$, а также предельное состояние и предельный поток в сети G (см. [3]).

Определим множества вершин $Z^+(t)$ и $Z^-(t)$ следующим образом. Будем говорить, что в момент времени t вершина x лежит в множестве $Z^-(t)$, если $q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+} r_v$; в противном случае

считаем, что $x \in Z^+(t)$. Другими словами, множество $Z^-(t)$ состоит из тех вершин ресурсной сети, которые в момент времени t передают по выходящим дугам весь свой текущий ресурс, т.е. каждая дуга, выходящая из вершины $x \in Z^-(t)$, насыщается ресурсным потоком по второму правилу (вторая строка) в (2). Множество $Z^+(t)$ образуется теми вершинами, для которых при полном насыщении своих выходящих дуг ресурсным потоком — работая по правилу 1 (первая строка в (2)) — передаёт не весь свой текущий ресурс.

Определение 5. Будем говорить, что вершина x переходит в зону Z^- , если найдётся такой момент времени t' , что $x \in Z^-(t)$ для всех $t \geq t'$.

Определение 6. Пороговым значением для ресурсной сети G будем называть такую величину T , что если $W \leq T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^- . В противном случае для каждого момента времени t считаем, что $Z^+(t) \neq \emptyset$.

3. Графы с зависимостью длительностей прохождения по дугам. Кратчайшие пути и максимальный поток. Пусть G — такой орграф, что для каждой его дуги u указан вес $d(u)$ — длительность (количество тактов) прохождения по ней. Графы с такими особенностями рассмотрены в [1, 8]. В [1] показано, что если длительность прохождения по дугам не меняется со временем (т.е. $d(u, t_1) = d(u, t_2)$ для всех $u \in U$ и всех $t_1, t_2 \in Z$), то решение классических графовых задач (например, задачи о кратчайшем пути или о максимальном потоке) на рассматриваемом графе ничем не отличается от решения аналогичных задач на графах без учёта длительностей прохождения по дугам. Будем далее считать, что длительность прохождения каждой дуги u может

меняться со временем и описывается периодической по времени функцией с общим для всех дуг периодом D , т.е. $d(u, t + D) = d(u, t)$ для любого $t \in \mathbb{Z}$.

Для решения задачи о кратчайшем пути на графе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени применяется подход, согласно которому строится вспомогательный граф большего размера таким образом, чтобы задача о кратчайшем пути на графе G сводилась бы к аналогичной классической на вспомогательном графе G' .

Правила построения графа G' :

- (а) каждой вершине x исходного графа G ставится в соответствие D вершин $\{x^0, \dots, x^{D-1}\}$ на вспомогательном графе G' ;
- (б) каждой дуге u (для определённости полагаем $f(u) = (x, y)$) исходного графа G ставится в соответствие D дуг $\{u^0, \dots, u^{D-1}\}$ на вспомогательном графе G' , причем $f'(u^t) = (x^t, y^{t+d(u,t) \pmod{D}})$. Дуге u^t присваивается вес, равный значению $d(u, t)$.

Пусть x — некоторая вершина, а u — дуга исходного графа G . Введём следующие обозначения: $A_x = \{x^0, \dots, x^{D-1}\}$ — множество вершин вспомогательного графа G' , соответствующих вершине x , $B_u = \{u^0, \dots, u^{D-1}\}$ — множество дуг вспомогательной сети G' , соответствующих дуге u .

Определение 7. Множество вершин X' вспомогательного графа G' может быть представлено в виде объединения подмножеств $V_i = \{x_1^i, \dots, x_n^i\}$, которые будем называть i -м уровнем (временным слоем) графа G' .

Справедливы следующие теоремы о связи путей исходного и вспомогательного графов (см. [1]).

Теорема 1. Вершина y достижима из вершины x на исходном графе G тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе G' из множества вершин $A_x = \{x_0, x_1, \dots, x_{D-1}\}$ достижима хотя бы одна вершина множества A_y . Более того, каждому пути μ' на вспомогательном графе однозначно соответствует путь μ на исходном графе и имеет место равенство весов пути μ и пути μ' .

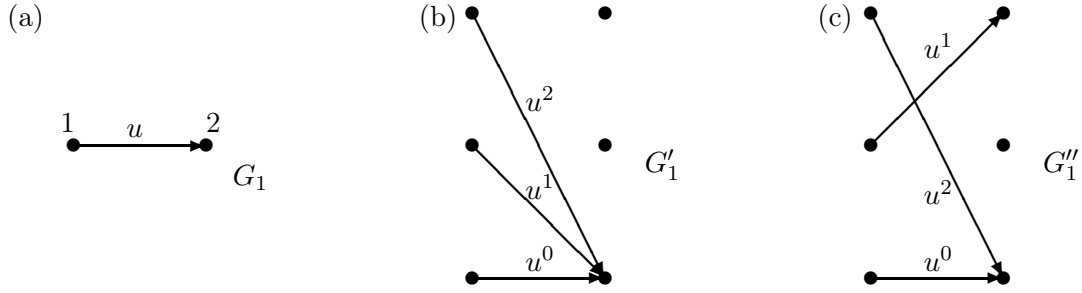
Теорема 2. Кратчайшему пути μ' на вспомогательном графе G' соответствует кратчайший путь μ на исходном графе G , причем время начала движения по пути μ равно номеру уровня, которому принадлежит начальная вершина пути μ' .

Таким образом, задача о кратчайшем пути на исходном графе G_T с меняющейся длительностью прохождения сводится к задаче нахождения кратчайшего пути на вспомогательном графе G' .

Рассмотрим теперь задачу нахождения максимального потока в сети G с меняющимися длительностями прохождения по дугам. Данная задача в сети такого вида имеет существенные сложности для решения. Поскольку для рассматриваемой сети есть возможность осуществлять прохождение потока по дугам в разные моменты времени за разное количество тактов, то в определённые моменты времени в концевую вершину некоторой дуги может приходить суммарный поток, состоящий из потоков, отправленных по ней в различные начальные моменты времени. Покажем такую возможность на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим граф G_1 , изображённый на рис. 1(а); он содержит только одну дугу u ($f(u) = (1, 2)$) пропускной способности $c(u) = 1$. Пусть $D = 3$, а длительности прохождения по дуге u на полном периоде заданы следующим образом: $d(u) = \{3, 2, 1\}$. Вспомогательный граф G'_1 для заданного распределения длительностей прохождения по дуге показан на рис. 1(б).

Отметим, что если в каждый момент времени $t \in [0; 2]_{\mathbb{Z}}$ по дуге u будет начинать переход единичный поток, то в момент времени $t = 3$ конечная вершина 2 получит по дуге u суммарный поток величины 3, состоящий из всех отправленных потоков, что превышает пропускную способность дуги u . Следовательно, величина суммарного потока за полный период не может превышать единицу; при этом распределение такого потока может быть различным. Например, весь единичный поток можно отправить в момент времени t_0 ; на вспомогательном графе такая ситуация соответствует отправке единичного потока по дуге u^0 . Поскольку сеть G'_1 является сетью со связанными дугами (дуги u^0 , u^1 и u^2 связаны общей пропускной способностью; см. [9]), то

Рис. 1. Эффект «переполнения» дуги u сети G_1 .

такая отправка блокирует дуги u^1 и u^2 . Другой вариант распределения — отправка единичного потока по всем дугам в равных долях.

Рассмотрим другой вариант распределения длительностей прохождения по дуге u : $d(u) = \{3, 1, 1\}$. Вспомогательный граф G_1'' для такого распределения длительностей прохождения по дуге показан на рис. 1(с). Для графа G_1'' видно, что дуга u^0 связана с дугами u^1 и u^2 , но u^1 и u^2 не являются связанными между собой дугами. Следовательно, отправка единичного потока по дуге u^1 заблокирует только дугу u^0 и оставит возможность отправки потока по дуге u^2 . Это означает, что при таком распределении длительностей прохождения по дуге u величина максимального суммарного потока в сети G за полный период равна двум. При этом отправка единичного потока по дуге u^0 блокирует все остальные дуги. В последнем случае за полный период можно пропустить только единичный поток.

Таким образом, пример 1 показывает, что в сети с меняющейся длительностью прохождения по дугам прохождение насыщающего потока по некоторой дуге в один из моментов времени может заблокировать эту дугу на некоторое время, что существенно влияет на величину максимального суммарного потока за полный период.

4. Ресурсный поток в сети с зависимостью длительностей прохождения по дугам.

Рассмотрим вопрос распределения ресурса в ресурсных сетях с меняющимися длительностями прохождения. Согласно правилам функционирования ресурсной сети (1)–(2) ресурсный поток в сети G проходит между каждой парой смежных вершин ровно за один такт. Однако для рассматриваемых сетей длительность прохождения по дуге может быть больше единицы. Кроме того, прохождение потока по некоторым дугам в определённые моменты времени может менять пропускные способности этих дуг в последующие моменты времени до полной блокировки. Таким образом, естественным образом получается зависимость пропускной способности каждой дуги $u \in U$ от времени t и величин потоков, выходящих по этой дуге в предыдущие моменты времени:

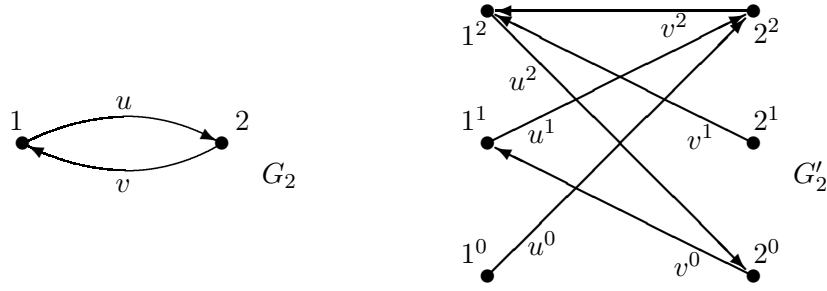
$$r_u(t) = r_u - \sum_{\substack{t_0 \in [0; t-1]_Z \\ t_0 + d(u, t_0) \geq t}} F(u, t_0), \quad (4)$$

где r_u — заданная номинальная пропускная способность дуги u .

Замечание. Поскольку зависимость длительностей прохождения по дугам в сети не превосходит периода D , то при рассмотрении суммы в выражении (4) можно рассматривать только $t_0 \in [t'; t-1]_Z$, где $t' = \max\{0, t-D\}$.

Вместе с переопределением пропускных способностей дуг ресурсной сети появляется необходимость в переопределении правил функционирования сети с учётом меняющихся пропускных способностей:

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{u \in [x]^+} F(u, t) + \sum_{u \in [x]^-} \sum_{\substack{t_0 \in [0; t-1]_Z \\ t_0 + d(u, t_0) = t}} F(u, t_0), \quad (5)$$

Рис. 2. Ресурсная сеть G_2 и вспомогательная сеть G'_2 .

а величины $F(u, t)$ определяются следующим образом:

$$F(u, t) = \begin{cases} r_u(t), & q_x(t) > \sum_{v \in [x]^+} r_v(t); \\ r_u(t) / \sum_{v \in [x]^+} r_v(t) \cdot q_x(t), & q_x(t) \leq \sum_{v \in [x]^+}^n r_v. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим аналогичный процесс перераспределения ресурса между вершинами вспомогательной сети. Состоянием вспомогательной сети будем считать следующий набор (см. [12]):

$$Q'(t') = (q_{x_1^0}(t'), \dots, q_{x_n^0}(t'), \dots, q_{x_1^{D-1}}(t'), \dots, q_{x_n^{D-1}}(t')).$$

Начальное состояние задаётся следующим образом: $Q'(0) = (Q(0), Q(1), \dots, Q(D-1))$.

Таким образом, при переносе процесса перераспределения ресурса с исходной ресурсной сети G на вспомогательную сеть G' правила функционирования последней описываются соотношениями (1) и (6) при учёте меняющихся пропускных способностей в соотношении (4). Другими словами, в последнем слагаемом соотношения (1) для вспомогательной сети G' учитывается двойная сумма из соотношения (5). Далее будем рассматривать процесс перераспределения ресурса между вершинами вспомогательной сети, поскольку он в точности соответствует аналогичному процессу в исходной сети с меняющимися длительностями прохождения по дугам: для каждого момента времени $t \in Z_+$ имеет место соотношение для состояния сети G с динамическими длительностями прохождения по дугам

$$Q(t) = (q_{x_1^i}(t'), \dots, q_{x_n^i}(t')), \quad (7)$$

где $t' = [t/D]$ и $i = t \pmod{D}$; при этом мы будем говорить, что последнее состояние $Q(t)$ также является и состоянием вспомогательной сети в момент времени t . Таким образом, согласно (7) можно считать, что для состояний сетей G и G' рассматриваются одинаковые моменты времени $t \in Z_+$.

Отметим, что правила (1)–(2) классической ресурсной сети удовлетворяют соотношению

$$\sum_{x \in X} q_x(t) = W \quad \forall t \in Z_+,$$

тогда как для правил (5)–(6) функционирования ресурсной сети с динамическими длительностями прохождения по дугам такое соотношение не всегда выполняется. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим граф G_2 на рис. 2, для дуг u ($f(u) = (1, 2)$) и v ($f(v) = (2, 1)$) которого заданы пропускные способности $c(u) = c(v) = 1$. Положим $D = 3$ и будем считать, что длительности прохождения по дугам графа G_2 на полном периоде заданы следующим образом: $d(u) = \{2, 1, 1\}$ и $d(v) = \{1, 1, 3\}$.

Отметим, что во вспомогательной сети G'_2 связаны следующие пары дуг: u^0 и u^1 , v^0 и v^2 , v^1 и v^2 . Суммарные потоки, проходящие по связанным дугам, не могут превышать номинальной пропускной способности соответствующей им дуги.

Рассмотрим начальное распределение ресурса $Q(0) = \{1, 1\}$. В сети G_2 с длительностями прохождения по дугам, равными единице, это состояние является устойчивым. Найдём следующие состояния $Q(1), \dots, Q(5)$ в сети G_2 с указанными длительностями. Для его нахождения будем использовать вспомогательную сеть G'_2 .

Так как $d(u, 0) = 2$ и $d(v, 0) = 1$, получаем $Q(1) = \{1, 0\}$. Для найденного состояния имеет место «недостаток» ресурса, поскольку единичный ресурс в момент времени $t = 1$ всё ещё совершает переход по дуге u (по дуге u^0 в сети G'_2). Состояние $Q(2) = \{1, 1\}$, поскольку насыщенная дуга u^0 блокирует прохождение ресурса по дуге u^1 , следовательно, весь ресурс в вершине 1 сохраняется (переносится из вершины 1_1 в вершину 1_2 на вспомогательном графе), а в вершину 2 приходит единичный ресурс, отправленный в момент времени $t = 0$ по дуге u .

Следующие состояния $Q(3) = Q(4) = \{0, 1\}$, поскольку насыщенная на три следующих такта дуга v^2 блокирует отправку ресурса по дугам v^0 и v^1 . Таким образом, $Q(5) = \{1, 1\}$ и можно заметить, что тройка состояний $(Q(3), Q(4), Q(5))$ является устойчивой на вспомогательном графе G'_2 .

Для дуг вспомогательного графа введём характеристические функции $\chi_u : [0; D - 1]_Z \rightarrow \{0, 1\}$ по следующему правилу: пусть u такова, что $f'(u) = (x_j, y_{j+d(u,j) \bmod D})$; тогда

$$\chi_u(t) = \begin{cases} 1, & t \in (j; j + d(u, j) \bmod D)_Z \text{ и } j < j + d(u, j) \bmod D; \\ 1, & t \in [0; D - 1]_Z \setminus [j; j + d(u, j) \bmod D]_Z \text{ и } j > j + d(u, j) \bmod D; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Для каждого момента времени $t \in Z_+$ рассмотрим подмножество дуг вспомогательной сети $E_t = \{u \in U' \mid \chi_u(t) = 1\}$, активных в момент времени t .

Обозначим через $\hat{F}(u, t)$ величину потока, продолжающего проходить по дуге u (положим для определённости $f'(u) = (x_j, y_{j+d(u,j)})$ в момент времени t :

$$\hat{F}(u, t) = \begin{cases} F(u, j + s \cdot D), & \text{если } \exists s : j + s \cdot D < t < j + d(u, j) + s \cdot D; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеет место следующая теорема о сохранении суммарного ресурса в вершинах и на дугах в каждый момент времени.

Теорема 3 (о сохранении ресурса). Пусть $G'(X', U', f')$ — вспомогательная сеть для эргодической ресурсной сети $G(X, U, f)$ с динамическими длительностями прохождения по дугам. Тогда для каждого момента времени $t \in Z_+$ имеет место равенство

$$\sum_{x \in V_t \pmod{D}} q_x \left(\left\lceil \frac{t}{D} \right\rceil \right) + \sum_{u \in E_t} \hat{F}(u, t) = W. \quad (8)$$

Доказательство вытекает из правил построения вспомогательной сети и правил функционирования (1) и (6).

5. Пороговое значение и предельный поток. Рассмотрим вопрос нахождения порогового значения и предельного состояния в эргодической сети G с меняющимися длительностями прохождения по дугам. Поскольку процессу перераспределения ресурсов в исходной ресурсной сети G соответствует аналогичный процесс на вспомогательной сети G' , следовательно, рассмотрим задачу нахождения порогового значения для вспомогательной сети G' с учётом отношения связности её дуг.

Отметим, что вспомогательная сеть G' может не быть полуэргодической, т.е. связной с единственной невозвратной компонентой сильной связности. Для таких сетей в классическом случае показано (см. [2–4]), что задача нахождения порогового значения не имеет смысла, однако для

периодических динамических сетей в работе [12] показано, что поиск порогового значения может проводиться и в случае, когда вспомогательная не является полуэргодической.

Поскольку в каждый момент времени каждая вершина отдаёт весь находящийся в ней ресурс (работает по правилу, определяемому второй строкой соотношения (6)) и, кроме того, величины ресурсов и потоки по дугам в промежуточной части вспомогательной сети G' через конечное число шагов станут равны нулю (см., например, [11]), заключаем, что для нахождения порогового значения можно рассматривать только невозвратные эргодические компоненты G'_i вспомогательной сети G' . Применим метод нахождения порогового значения эргодической ресурсной сети, предложенный в [10] для каждой компоненты G'_i . Согласно этому методу строится система линейных уравнений следующего вида с неизвестными величинами Q_x и $F(u)$:

$$\begin{cases} F(u) - \frac{r_u}{\sum_{v \in [x]^+} r_v} \cdot Q_x = 0 & \forall x \in X'_i, \forall u \in [x]^+; \\ Q_x - \sum_{v \in [x]^-} F(v) = 0 & \forall x \in X'_i; \\ F(w) = z, \end{cases} \quad (9)$$

где w — произвольная дуга рассматриваемой подсети G'_i . Здесь уравнения, указанные в первой строке (9), описывают правила функционирования ресурсной сети в случае, когда весь ресурс каждой вершины распределяется между выходящими из этой вершины дугам. Уравнения, указанные во второй строке, обеспечивают выполнение условия, что весь ресурс каждой вершины приходит из смежных с ней вершин, другими словами, нет накопления ресурса ни в одной вершине ресурсной сети.

Для эргодической ресурсной сети имеет место следующая теорема.

Теорема 4 (см. [10, теорема 1]). *Решение системы (9) существует и единственно для любого действительного значения z .*

Более того, в [10] показано, что такое решение может быть представлено в виде

$$(F, Q) = z \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta_1, \dots, \zeta_n)^T, \quad (10)$$

где $m = |U|$ и $n = |X|$, причём все величины ξ_i и ζ_j являются положительными и $\xi_i = 1$, если $u_i = w$.

Далее, согласно применяемому подходу необходимо задать величину параметра z таким образом, чтобы все величины потока по дугам не превосходили пропускных способностей этих дуг. Однако сеть G' и рассматриваемые подсети G'_i в общем случае являются сетями со связанными дугами; следовательно, необходимо учитывать суммарные величины потоков по связанным дугам.

Определение 8. Пусть $u \in U$ — дуга исходной сети G . Будем говорить, что дуги $u^i, u^j \in B_u$ вспомогательной сети являются связанными, если $(i; i + d(u, i)) \cap (j; j + d(u, j)) = \emptyset$.

Таким образом, на множестве дуг вспомогательной сети задано отношение связности (см. [9]). Каждой дуге $u \in U'$ поставим в соответствие множество всех связанных с ней дуг C_u .

Поскольку по теореме 3 величина суммарного ресурса вершинах и на дугах для каждого момента времени является постоянной, необходимо рассмотреть задачу максимизации параметра z при учёте всех ограничений следующего вида: для каждой дуги u исходной вспомогательной сети G' должно выполняться двойное неравенство

$$0 \leq F(u) + \sum_{w \in C_u} F(w) \leq r_u. \quad (11)$$

Отметим, что для всех дуг вспомогательной сети, соответствующих одной дуге исходного графа, пропускные способности равны.

Теорема 5. *Величина порогового значения T' в сети G' может быть найдена при помощи следующего алгоритма.*

Шаг 1. Для каждой невозвратной эргодической компоненты $G'_i(X_i, U_i, f_i)$ вспомогательной сети G' решим систему уравнений вида (9), в качестве последнего уравнения рассмотрим уравнение $F(v) = r_v$, где v — произвольная дуга сети G'_i . Обозначим такие решения через $(F, Q)_i$.

Шаг 2. Объединим полученные решения $(F, Q)_i$ на сети G' в общий набор (F, Q) , полагая при этом значения $F(u) = 0$ для каждой дуги $u \in U' \setminus \left(\bigcup_i U'_i\right)$ и $Q_x = 0$ для каждой вершины $x \in X' \setminus \left(\bigcup_i X'_i\right)$.

Шаг 3. Для каждой дуги u сети G' вычислим основную сумму

$$S_u = F(u) + \sum_{w \in C_u} F(w)$$

из ограничений вида (11).

Шаг 4. Найдём величину

$$\beta = \min_{\substack{u \in U' \\ F(u) \neq 0}} \left\{ \frac{r_u}{S_u} \right\}$$

и скорректируем решение (F, Q) системы (9), полученное на шаге 2: $(F, Q) := \beta \cdot (F, Q)$.

Шаг 5. Пороговое значение T' для сети G'_e вычисляем следующим образом:

$$T' = \sum_{x \in V_i} Q_x + \sum_{u \in E_i} \hat{F}(u, i), \quad (12)$$

где $i \in [0; D-1]_Z$ выбирается произвольно.

Доказательство. В результате выполнения первых двух шагов алгоритма на вспомогательной сети для каждой невозвратной эргодической компоненты будет найдено состояние, определяющее пороговое значение этой компоненты в смысле классической ресурсной сети (см. [10]). В таком случае величины потока на дугах определяют максимальный ресурсный поток для функционирования сети таким образом, чтобы все вершины переходили бы в зону Z^- . При этом пока не учитывается отношение связности дуг на вспомогательной сети.

На третьем шаге для каждой дуги u вспомогательной сети G' вычисляется значение S_u , определяющее суммарный поток по дуге u и связанным с ней дугам. Таким образом, для потока на каждой дуге можно определить величину превышения пропускной способности. Следовательно, величина является обратной к доле максимального такого превышения. При этом отметим, что поскольку на шаге одним из уравнений системы вида (9) является уравнение $F(v) = r_v$, значит, $\beta \geq 1$, причём равенство выполняется только в том случае, когда на любом множестве связанных между собой дуг нет нарушения неравенства (11).

Таким образом, на шаге 4 будет получено состояние, элементы которого не превосходят соответствующие элементы состояния, полученного на шаге 2, при этом, для каждой дуги вспомогательной сети удовлетворяется неравенство (11). Следовательно, после выполнения шага 4 на вспомогательной сети будет получено состояние, обеспечивающее максимальный поток с учётом возможности прохождения по связанным дугам, при этом все вершины вспомогательной сети переходят в зону Z^- . Отметим, что данный поток является устойчивым, а значит, предельным. В случае, если суммарный ресурс в сети увеличить, то как минимум на одной из связанных дуг возникнет уменьшение пропускной способности согласно соотношению (4), что приведёт к избытку ресурса в начальной вершине такой дуги, а значит, эта вершина не перейдёт в зону Z^- .

Пороговое значение в такой сети можно искать согласно соотношению (8) о сохранении ресурса в теореме 3, левая часть которого для устойчивого состояния вспомогательной сети совпадает с правой частью равенства (12). $\square$

Из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть G — ресурсная сеть с динамическими длительностями прохождения по дугам, $\tilde{G}$ — это сеть G , у которой длительности прохождения по всем дугам равны единице, и пусть $\tilde{T}$ — пороговое значение в сети G_0 . Тогда имеет место неравенство $T' \leq \tilde{T}$.

Пример 3. Рассмотрим задачу нахождения порогового значения T' для сети G_2 из примера 2. Вспомогательная сеть G'_2 является полуэргодической с единственной невозвратной компонентой G'_2 , порождённой вершинами $\{1^1, 1^2, 2^0, 2^2\}$. Поскольку пропускные способности всех дуг сети G'_2 равны единице, а невозвратная компонента представляет собой простой цикл из четырёх дуг, значит, решение системы (9) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} F(u^1) = F(u^2) = F(v^0) = F(v^2) = 1, \\ Q_{1^1} = Q_{1^2} = Q_{2^0} = Q_{2^2} = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим основные суммы S_u для дуг вспомогательной сети:

$$\begin{cases} S_{u^0} = S_{u^1} = S_{u^2} = S_{v^1} = 1, \\ S_{v^0} = S_{v^2} = 2. \end{cases}$$

Отсюда находим масштабирующий коэффициент $\beta = 0,5$; следовательно, общее решение (F, Q) для всей вспомогательной сети G' , учитывающее прохождение потока по связанным дугам представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} F(u^0) = F(v^1) = 0, \\ Q_{1^0} = Q_{1^1} = 0, \\ F(u^1) = F(u^2) = F(v^0) = F(v^2) = 0,5, \\ Q_{1^1} = Q_{1^2} = Q_{2^0} = Q_{2^2} = 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, пороговое значение в этой сети равно $T' = 1$. При этом, для сети $\widetilde{G}_2$ пороговое значение равно $\widetilde{T} = 2$.

Рассмотрим вопрос о существовании предельного состояния и предельного потока в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам. Отметим, что в классической постановке для любого распределения ресурса величины $W > T$ предельный поток существует, единственен и равен потоку, определяемому как решение системы вида (9) при $W = T$. Однако, не всегда существует единственный предельный поток в сети с динамическими длительностями прохождения по дугам даже в случае, когда $W = T'$. Покажем такую ситуацию на следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим вначале сеть G_2 с указанным в примере 2 распределением длительностей прохождения по дугам при $D = 3$. Рассмотрим произвольное начальное распределение ресурса $Q(0) = (a, b)$ суммарной величины $W = T' = 1$, т.е. $a + b = 1$. Вычислим несколько следующих состояний:

$$\begin{aligned} Q(1) &= (b, 0), & Q(2) &= (0, a + b) = (0, 1), & Q(3) &= (0, 0), & Q(4) &= (0, 0), \\ Q(5) &= (1, 0), & Q(6) &= (0, 1), & Q(7) &= (1, 0), & Q(8) &= (0, 1), & \dots \end{aligned}$$

Таким образом, набор состояний $Q(2), \dots, Q(7)$ повторяется с периодом $D' = 6$ и является единственным для любого набора значений величин a и b . Данный набор состояний определяет единственный предельный поток в сети G'_2 , однако если для сети задать другой вариант распределения длительностей прохождения по дугам, то различные начальные распределения ресурса будут приводить к различным наборам периодически повторяющихся состояний. Рассмотрим следующее распределение длительностей прохождения по дугам u и v сети G_2 :

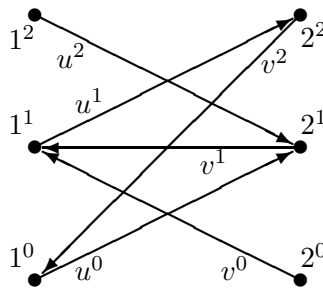
$$d(u) = \{1, 1, 2\}, \quad d(v) = \{1, 3, 1\}.$$

Вспомогательная сеть G''_2 показана на рис. 3. Отметим, что во вспомогательной сети G''_2 связаны следующие пары дуг: u^0 и u^2 , v^0 и v^1 , v^1 и v^2 .

Сеть G''_2 изоморфна сети G'_2 ; следовательно, пороговое значение $T'' = T' = 1$.

Рассмотрим в сети G_2 с новым распределением длительностей прохождения по дугам начальное распределение $Q(0) = (a, b)$, где $a + b = T'' = 1$. Найдём несколько следующих состояний:

$$\begin{aligned} Q(1) &= (b, a), & Q(2) &= (0, b), & Q(3) &= (b, 0), & Q(4) &= (a, b), \\ Q(5) &= (0, a), & Q(6) &= (a, 0), & Q(7) &= (b, a), & \dots \end{aligned}$$

Рис. 3. Вспомогательная сеть G''_2 .

Таким образом, набор состояний $Q(1), \dots, Q(6)$ является устойчивым. При этом, для различных начальных состояний (различных значений величин a и b) получаем различные устойчивые наборы состояний, определяющие различные потоки в сети G''_2 , следовательно, в данном случае не существует единственного предельного потока.

Теорема 7. Пусть G — ресурсная сеть с динамическими длительностями прохода по дугам, $\tilde{G}$ — это сеть G , у которой длительности прохода по всем дугам равны единице. Если $W \geq \tilde{T}$, то в сети G существует единственный предельный поток.

Доказательство. Отметим, что согласно правилам построения развёртки G' для любой вершины $x \in X$ исходной сети каждая невозвратная эргодическая компонента G'_i содержит вершины, соответствующие вершине x . То же самое можно сказать и о дугах. Кроме этого, для каждой компоненты G'_i пороговое значение $T_i \leq \tilde{T}$. Следовательно, вершины такой компоненты будут перераспределять ресурс суммарной величины W_i , не превосходящей значение T_i . Каждая вершина x_i отдаёт смежным вершинам максимум $\sum_{u \in [x]^+} r_u$ ресурса, остальная часть переносится в вершину $x_{i+1 \bmod D}$ согласно правилам (5). При этом учитывается поток, проходящий по связанным дугам.

Таким образом, в сети стабилизируется процесс, для которого полностью «насыщается» как минимум одна из невозвратных эргодических компонент. Отметим, что в общем случае результирующий ресурсный поток на вспомогательной сети не является единственным, однако, учитывая перенос на сеть G , получаем единственный предельный поток в исходной сети G . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ерусалимский Я. М., Скороходов В. А., Кузьминова М. В., Петросян А. Г. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009.
2. Жилиякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автомат. телемех. — 2011. — № 4. — С. 133–143.
3. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. I. Колебания и равновесные состояния при малых ресурсах // Управление большими системами. — 2013. — № 43. — С. 34–54.
4. Жилиякова Л. Ю. Эргодические циклические ресурсные сети. II. Большие ресурсы // Управление большими системами. — 2013. — № 45. — С. 6–29.
5. Жилиякова Л. Ю., Чаплинская Н. В. Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Управление большими системами. — 2021. — № 89. — С. 5–44.
6. Кузнецов О. П., Жилиякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель // Докл. РАН. — 2010. — 433, № 5. — С. 609–612.
7. Кузьминова М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2008. — № 5. — С. 16–20.
8. Скороходов В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохода // Изв. вузов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. — 2011. — № 1. — С. 21–26.
9. Скороходов В. А. Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами // Модел. анал. информ. сист. — 2012. — 19, № 2. — С. 41–52.

10. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети// Управление большими системами. — 2016. — № 63. — С. 6–23.
11. Скороходов В. А., Абдулрахман Х. Динамические ресурсные сети. Случай малого ресурса// Вестн. ВГУ. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 186–194.
12. Скороходов В. А., Свиридкин Д. О. Потоки в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2021. — 31, № 3. — С. 458–470.
13. Чаплинская Н. В. Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами: зона «достаточно большого ресурса»// Управление большими системами. — 2021. — № 90. — С. 49–66.
14. Чаплинская Н. В. Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами// Управление большими системами. — 2021. — № 93. — С. 5–50.
15. Aronson J. E. A survey of dynamic network flows// Ann. Oper. Res. — 1989. — № 20. — P. 1–66.
16. Fonoberova M., Lozovanu D. The maximum flow in dynamic networks// Comp. Sci. J. Moldova. — 2004. — № 3 (36). — P. 387–396.
17. Fonoberova M., Lozovanu D. The minimum cost multicommodity flow problem in dynamic networks and an algorithm for its solving// Comp. Sci. J. Moldova. — 2005. — № 1 (37). — P. 29–36.
18. Ford L. R., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows// Oper. Res. — 1958. — 6. — P. 419–433.
19. Kuznetsov O. P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states// Manag. Product. Eng. Rev. — 2011. — 2, № 3. — P. 33–39.
20. Skorokhodov V. A. Generalization of the reachability problem on directed graphs// Math. Stat. — 2020. — 8, № 6. — P. 699–704.
21. Skorokhodov V. A., Chebotareva A. S. The maximum flow problem in a network with special conditions of flow distribution// J. Appl. Industr. Math. — 2015. — 9, № 3. — P. 435–446.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Скороходов Владимир Александрович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: vaskorohodov@sfedu.ru

Ерусалимский Яков Михайлович
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
E-mail: ymerusalimskiy@sfedu.ru

Абдулрахман Хайдар
Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону
E-mail: abdulrahm.haidar@gmail.com



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 120–126
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-120-126

УДК 517.9

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

© 2023 г. Р. Г. ФАРЗУЛЛАЗАДЕ, Х. Р. МАМЕДОВ

Аннотация. Рассмотрена задача рассеяния для одного класса дифференциальных уравнений второго порядка на полубесконечном интервале с нелинейным спектральным параметром в граничном условии. Определены данные рассеяния задачи и получено фундаментальное уравнение обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: нормализационный многочлен, функция рассеяния, данные рассеяния, фундаментальное уравнение.

SCATTERING PROBLEM FOR ONE NON-SELF-ADJOINT STURM–LIOUVILLE OPERATOR

© 2023 R. G. FARZULLAZADEH, Kh. R. MAMEDOV

ABSTRACT. The scattering problem is considered for a class of second-order differential equations on a semi-infinite interval with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition. The scattering data of the problem are determined and the fundamental equation of the inverse scattering problem is obtained.

Keywords and phrases: normalization polynomial, scattering function, scattering data, fundamental equation.

AMS Subject Classification: 34L25, 34B07, 34B08

1. Введение. На положительной полуоси $[0, \infty)$ рассмотрим краевую задачу

$$-u'' + q(x)u = \eta^2 u, \quad (1)$$

$$(a + b\eta^2)u'(0) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)u(0) = 0, \quad (2)$$

где $q(x)$ — вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty (1+x)|q(x)|dx < \infty, \quad (3)$$

η — спектральный параметр, a, b, c_j ($j = 0, 1, 2$) — вещественные числа, $ac_0 > 0$, $b \geq 0$.

Краевые задачи со спектральным параметром в граничных условиях встречаются как в математических задачах, так и в их приложениях. Физические приложения этих типов краевых задач на полупрямой $[0, \infty)$ приведены в [8, 9, 14, 15].

В данной работе исследуется задача рассеяния для краевой задачи (1)–(3). Отметим, что прямая и обратная задача рассеяния для краевой задачи в случае $b = c_1 = c_2 = 0$ полностью решена в [1, 2, 6]. Также в [4, 5, 10–13, 16] исследована прямая и обратная задача рассеяния для уравнения (1) со спектральным параметром в граничном условии.

В зависимости от спектрального параметра в граничном условии встречаются самосопряженные и несамопряженные случаи. Поэтому при решении задачи необходимо использовать разные методы.

Обозначим через $e(x, \eta)$ решение уравнения (1), обладающее асимптотикой

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\eta x} e(x, \eta) = 1, \quad \text{Im } \eta \geq 0.$$

Известно (см. [6]), что если выполнено условие (3), то при всех $\text{Im } \eta \geq 0$ существует единственное решение $e(x, \eta)$, регулярное по η в полуплоскости $\text{Im } \eta > 0$ и непрерывное на вещественной оси, которое может быть представлено в виде

$$e(x, \eta) = e^{i\eta x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\eta t} dt. \quad (4)$$

Ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1 \left(\frac{x+t}{2} \right) \right\}, \quad (5)$$

а также условию

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) dt, \quad (6)$$

где

$$\sigma(x) \equiv \int_x^\infty |q(t)| dt, \quad \sigma_1(x) \equiv \int_x^\infty \sigma(t) dt.$$

Функция $e(x, \eta)$ обладает следующими свойствами в области $\text{Im } \eta \geq 0$ (см. [6]):

$$|e(x, \eta)| \leq \exp \{ -\text{Im } \eta x + \sigma_1(x) \}, \quad (7)$$

$$|e(x, \eta) - e^{i\eta x}| \leq \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1 \left(x + \frac{1}{|\eta|} \right) \right\} \exp \{ -\text{Im } \eta x + \sigma_1(x) \}, \quad (8)$$

$$|e'(x, \eta) - i\eta e^{i\eta x}| \leq \sigma(x) \exp \{ -\text{Im } \eta x + \sigma_1(x) \}. \quad (9)$$

Используя указанные выше свойства, можно показать, что для вещественных $\eta \neq 0$ функции $e(x, \eta)$ и $\overline{e(x, \eta)} = e(x, -\eta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а их вронскиан не зависит от переменной x и равен $2i\eta$ (см. [6, с. 168]):

$$W\{e(x, \eta), \overline{e(x, \eta)}\} = e'(x, \eta) \overline{e(x, \eta)} - e(x, \eta) \overline{e'(x, \eta)} = 2i\eta. \quad (10)$$

Обозначим через $\psi(x, \eta)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \eta) = a + b\eta^2, \quad \psi'(0, \eta) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2. \quad (11)$$

Пусть

$$\begin{aligned} E(\eta) &\equiv (a + b\eta^2) e'(0, \eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2) e(0, \eta), \\ E_1(\eta) &\equiv (a + b\eta^2) e'(0, -\eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2) e(0, -\eta). \end{aligned}$$

2. Данные рассеяния. Введем данные рассеяния для краевой задачи (1)–(3).

Лемма 1. Для вещественных $\eta \neq 0$ выполняется неравенство $E(\eta) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $E(\eta_0) = 0$ для $\eta_0 \in \mathbb{R}$, $\eta_0 \neq 0$. Тогда

$$e'(0, \eta_0) = \frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} e(0, \eta_0). \quad (12)$$

Из (10), (12) имеем

$$\begin{aligned} \frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} e(0, \eta_0) \overline{e(0, \eta_0)} - \frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} \overline{e(0, \eta_0)} e(0, \eta_0) &= 2i\eta_0, \\ \left[\frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} - \frac{c_0 + c_1\eta_0 + c_2\eta_0^2}{a + b\eta_0^2} \right] |e(0, \eta_0)|^2 &= 2i\eta_0, \end{aligned}$$

или $0 = 2i\eta_0$; при $\eta_0 \neq 0$ противоречие. $\square$

Лемма 2. Для вещественных $\eta \neq 0$ справедливо тождество

$$\frac{2i\eta\psi(x, \eta)}{E(\eta)} = e(x, -\eta) - S(\eta)e(x, \eta), \quad (13)$$

где

$$S(\eta) = \frac{E_1(\eta)}{E(\eta)}, \quad |S(\eta)| = 1. \quad (14)$$

Доказательство. Поскольку функции $e(x, \eta)$ и $e(x, -\eta)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) для всех вещественных $\eta \neq 0$, можно записать

$$\psi(x, \eta) = d_1(\eta)e(x, \eta) + d_2(\eta)e(x, -\eta). \quad (15)$$

Используя (10) и (11), получим

$$d_1(\eta) = -\frac{E_1(\eta)}{2i\eta}, \quad d_2(\eta) = \frac{E(\eta)}{2i\eta}.$$

Подставляя эти соотношения в (15) и учитывая неравенство $E(\eta) \neq 0$, $\eta \neq 0$, получаем (13). Здесь $S(\eta)$ выражается формулой (14). Поскольку для вещественных $\eta \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \overline{E(\eta)} &= (a + b\eta^2) \overline{e'(0, \eta)} - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2) \overline{e(0, \eta)} = \\ &= (a + b\eta^2) e'(0, -\eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2) e(0, -\eta) = E_1(\eta), \end{aligned}$$

ясно, что $|S(\eta)| = 1$. $\square$

Функция $S(\eta)$ называется *функцией рассеяния* краевой задачи (1)–(3).

Лемма 3. Функция $E(\eta)$ может иметь только конечное число нулей в полуплоскости $\text{Im } \eta > 0$. Функция $\eta[E(\eta)]^{-1}$ ограничена в окрестности точки $\eta = 0$.

Доказательство. Поскольку $E(\eta) \neq 0$ для $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta \neq 0$, точка $\eta = 0$ является возможным вещественным нулем функции $E(\eta)$. Из аналитичности функции $E(\eta)$ в верхней полуплоскости следует, что ее нули образуют не более чем счетное множество. Покажем, что это множество ограничено. Предположим, что $E(\eta_k) = 0$ и $|\eta_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда получим

$$e'(0, \eta_k) = \frac{c_0 + c_1\eta_k + c_2\eta_k^2}{a + b\eta_k^2} e(0, \eta_k). \quad (16)$$

Для $x = 0$ и $\eta = \eta_k$ из (9) следует, что

$$\left| \frac{c_0 + c_1\eta_k + c_2\eta_k^2}{a + b\eta_k^2} e(0, \eta_k) - i\eta_k \right| \leq \sigma(0) \exp\{\sigma_1(0)\}.$$

Отсюда

$$|\eta_k| \leq \left| \frac{c_0 + c_1\eta_k + c_2\eta_k^2}{a + b\eta_k^2} e(0, \eta_k) \right| + \sigma(0) \exp\{\sigma_1(0)\}.$$

Поскольку $|\eta_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, заключаем из (7) и (8), что $e(0, \eta_k) = 1$ при $k \rightarrow \infty$. Итак, правая часть последнего неравенства имеет конечный предел. Полученное противоречие показывает, что множество $\{\eta_k\}$ ограничено. Следовательно, нули функции $E(\eta)$ образуют не более чем счетное и ограниченное множество, имеющее $\eta = 0$ в качестве возможной предельной точки.

Теперь покажем, что функция $E(\eta)$ может иметь конечное число нулей в полуплоскости $\text{Im } \eta > 0$. Предположим обратное, т.е. $E(\eta)$ имеет бесконечно много нулей $\eta = \eta_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда функции $u_n = u(x, \eta_n)$ удовлетворяют уравнению

$$-u_n'' + q(x)u_n = \eta_n^2 u_n \quad (17)$$

и граничным условиям

$$(a + b\eta_n^2)u_n'(0) - (c_0 + c_1\eta_n + c_2\eta_n^2)u_n(0) = 0. \quad (18)$$

Умножим обе части (17) на $\overline{u_n}$ и проинтегрируем это уравнение по x от 0 до ∞ . В связи с этим, используя (18) и интегрируя по частям, имеем

$$\eta_n^2 - \frac{c_0 + c_1\eta_n + c_2\eta_n^2}{a + b\eta_n^2} |u_n(0)|^2 - L(u_n, u_n) = 0, \quad (19)$$

где

$$L(u_n, u_n) = \int_0^\infty (|u_n'|^2 + q(x)|u_n|^2) dx \equiv \Omega(u_n), \quad \langle u_n, u_n \rangle = 1.$$

Уравнение (19) имеет хотя бы один вещественный корень, а вещественный корень функции $E(\eta)$ может быть только нулем. Поэтому из (19) получаем

$$\frac{c_0}{a} |u_n(0)|^2 = -\Omega(u_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $ac_0 > 0$, имеем $\Omega(u_n) < 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Из асимптотических формул (при $x \rightarrow \infty$) для решений уравнения (1) следует, что система функций $\{u_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) линейно независима (см. [7, с. 327]).

Теперь построим последовательность функций

$$v_j(x) = \alpha_j u_j(x) + \beta_j u_{j+1}(x), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где α_j, β_j ($j = 1, 2, \dots$) — комплексные числа, которые можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $v_j(0) = 0$. В этом случае функции $v_j(x)$ линейно независимы. Таким образом, выполняются соотношения

$$-v_n'' + q(x)v_n = \eta_n v_n, \quad v_n(0) = 0. \quad (20)$$

Обозначим через L_η оператор в пространстве $L_2(0, \infty)$, действующий по правилу $L_\eta u = -u'' + q(x)u$ в области

$$D(L_\eta) = \left\{ u(x) \mid u'(x) \in AC[0, \infty), -u'' + q(x)u \in L_2(0, \infty), u(0) = 0 \right\}.$$

Ясно, что $v_n(x) \in D(L_\eta)$ и $\langle L_\eta v_n, v_n \rangle < 0$. Получаем, что оператор L_η имеет лишь отрицательные собственные значения, а их число бесконечно. Но это невозможно в силу условия (3) на $q(x)$ (см. [6]); противоречие. Отсюда следует, что функция $E(\eta)$ может иметь конечное число нулей в верхней полуплоскости $\text{Im } \eta > 0$.

Аналогично (см. [6, лемма 3.1.6]) получаем, что функция $\eta[E(\eta)]^{-1}$ ограничена в области $\{\eta \mid |\eta| \leq \varepsilon, \text{Im } \eta \geq 0\}$. $\square$

Следствие 1. Нули функций $E(\eta)$ и $E_1(\eta)$ комплексно сопряжены, причем число этих нулей равно.

Доказательство. Согласно 3 функция $E(\eta)$ имеет конечное число нулей η_j , $j = 1, 2, \dots, n$, в верхней полуплоскости $\text{Im } \eta > 0$. Из свойств

$$\overline{e(0, \eta_j)} = e(0, -\overline{\eta_j}), \quad \overline{e'(0, \eta_j)} = e'(0, -\overline{\eta_j})$$

функции $e(x, \eta)$ получаем

$$\overline{E(\eta_j)} = (a + b\overline{\eta_j^2})e'(0, -\overline{\eta_j}) - (c_0 + c_1\overline{\eta_j} + c_2\overline{\eta_j^2})e(0, -\overline{\eta_j}) = E_1(\overline{\eta_j}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, нули функций $E(\eta)$ и $E_1(\eta)$ комплексно сопряжены, и число этих нулей равно. $\square$

Лемма 4. Из свойств функции $E(\eta)$ при $|\eta| \rightarrow \infty$ получаем

$$S(\eta) = -1 + O\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Таким образом, для $\text{Im } \eta \geq 0$ получаем $-1 - S(\eta) \in L_2(-\infty, \infty)$ и, следовательно, функция

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-1 - S(\eta)] e^{i\eta x} d\eta$$

также принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$.

Известно (см. [7, с. 448]), что для любых $\theta > 0$ и $\delta > 0$ уравнение (1) имеет такое решение $\hat{e}(x, \eta)$, что при $x \rightarrow \infty$

$$\hat{e}(x, \eta) = e^{-i\eta x} [1 + o(1)]$$

равномерно в области $\text{Im } \eta \geq \theta$, $|\eta| \geq \delta$. Введем обозначение

$$p_j(x) = i \text{Res}_{\eta=\eta_j} \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e^{i\eta x}, \quad (21)$$

где $\hat{E}(\eta) = (a + b\eta^2)\hat{e}'(0, \eta) - (c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2)\hat{e}(0, \eta)$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Согласно [3] (см. также [7, с. 441]) будем называть многочлен

$$P_j(x) = e^{-i\eta_j x} p_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

степени $k_j - 1$ нормализационным многочленом для краевой задачи (1)–(3), где k_j — кратность числа η_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Множество величин $\{S(\eta); \eta_j; P_j(x) (j = 1, 2, \dots, n)\}$ называется *данными рассеяния* краевой задачи (1)–(3). Обратная задача рассеяния для краевой задачи (1)–(3) состоит в восстановлении коэффициента $q(x)$ по данным рассеяния.

Аналогично, для решений $e(x, \eta)$ и $\hat{e}(x, \eta)$ получим

$$\frac{2i\eta\psi(x, \eta)}{E(\eta)} = \hat{e}(x, \eta) - \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e(x, \eta). \quad (22)$$

3. Фундаментальное уравнение. Фундаментальное уравнение играет важную роль в решении обратной задачи теории рассеяния. Воспользуемся тождеством (13), полученным в лемме 2. Подставляя (4) в (13), перепишем это тождество в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{2i\eta\psi(x, \eta)}{E(\eta)} - e^{i\eta x} - e^{-i\eta x} = \\ = [-1 - S(\eta)] \left\{ e^{i\eta x} + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\eta t} dt \right\} + \int_x^\infty K(x, t) e^{-i\eta t} dt + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\eta t} dt. \end{aligned}$$

Умножая обе части последнего соотношения на $\frac{1}{2\pi} e^{i\eta\tau}$ ($\tau > x$) и интегрируя по η от $-\infty$ до ∞ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \eta) \left[\frac{i\eta}{E(\eta)} - \frac{1}{b\eta} \right] e^{i\eta\tau} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\psi(x, \eta)}{b\eta} - \cos \eta x \right] e^{i\eta\tau} d\eta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-1 - S(\eta)] e^{i\eta(x+\tau)} d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ [-1 - S(\eta)] \int_x^\infty K(x, t) e^{i\eta(t+\tau)} dt \right\} d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_x^\infty K(x, t) e^{-i\eta t} dt \right\} d\eta. \quad (23) \end{aligned}$$

Поскольку $K(x, t) = 0$ при $x > t$, то в правой части (23) получаем

$$F_s(x + \tau) + K(x, \tau) + \int_x^\infty K(x, t)F_s(t + \tau)dt, \quad (24)$$

где

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [-1 - S(\eta)] e^{i\eta x} d\eta.$$

Учитывая (22) в первом интеграле (23), находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(x, \eta) \left[\frac{i\eta}{E(\eta)} - \frac{1}{b\eta} \right] e^{i\eta\tau} d\eta = i \sum_{\operatorname{Im} \eta > 0} \operatorname{Res}_{\eta=\eta_j} \left[\hat{e}(x, \eta) - \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e(x, \eta) - \frac{2i}{b\eta} \psi(x, \eta) \right] e^{i\eta\tau}.$$

Очевидно, что для $\operatorname{Im} \eta > 0$ функция $\hat{e}(x, \eta)$ голоморфна и $\psi(x, \eta)$ — целая функция переменной η . Согласно лемме 3 получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \psi(x, \eta) \left[\frac{i\eta}{E(\eta)} - \frac{1}{b\eta} \right] e^{i\eta\tau} d\eta = \\ = -i \left\{ \sum_{\operatorname{Im} \eta > 0} \operatorname{Res}_{\eta=\eta_j} \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e^{i\eta(x+\tau)} \right\} - i \int_x^\infty K(x, t) \left\{ \operatorname{Res}_{\eta=\eta_j} \frac{\hat{E}(\eta)}{E(\eta)} e^{i\eta(t+\tau)} \right\} dt = \\ = - \sum_{j=1}^n p_j(x + \tau) - \int_x^\infty K(x, t) \sum_{j=1}^n p_j(t + \tau) dt, \quad (25) \end{aligned}$$

где $p_j(x)$ определена формулой (21). Следовательно, учитывая (24) и (25), для $\tau > x$ из (23) получаем соотношение

$$- \sum_{j=1}^n p_j(x + \tau) - \int_x^\infty K(x, t) \sum_{j=1}^n p_j(t + \tau) dt = F_s(x + \tau) + K(x, \tau) + \int_x^\infty K(x, t)F_s(t + \tau)dt.$$

Наконец, получаем фундаментальное уравнение

$$F(x + \tau) + K(x, \tau) + \int_x^\infty K(x, t)F(t + \tau)dt = 0, \quad x < \tau < \infty, \quad (26)$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^n p_j(x) + F_s(x). \quad (27)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Для каждого фиксированного $x \geq 0$ ядро $K(x, t)$ интегрального представления (4) удовлетворяет фундаментальному уравнению (26).

Интегральное уравнение (26) называется фундаментальным уравнением, или уравнением Гельфанда—Левитана—Марченко обратной задачи теории рассеяния для краевой задачи (1)–(3).

Таким образом, в данной работе для одной несамосопряженной краевой задачи определены данные рассеяния и получено фундаментальное уравнение, играющее важную роль при решении обратной задачи рассеяния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б. М. К решению обратной задачи квантовой теории рассеяния// Мат. заметки. — 1975. — 17, № 4. — С. 611–624.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
3. Лянце В. Э. Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора// Мат. сб. — 1967. — 72, № 4. — С. 537–557.
4. Мамедов Х. Р. Единственность решения обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии// Мат. заметки. — 2003. — 74, № 1. — С. 142–146.
5. Мамедов Х. Р., Демирбилек У. Об обратной задаче рассеяния для одного класса операторов Штурма—Лиувилля// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 200. — С. 81–86.
6. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
8. Юрко В. А. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов// Мат. сб. — 2000. — 191, № 10. — С. 137–160.
9. Cohen D. S. An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter// SIAM J. Appl. Math. — 1966. — 14. — P. 1164–1175.
10. Col A., Mamedov Kh. R. On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — 393. — P. 470–478.
11. Mamedov Kh. R. On the inverse problem for Sturm-Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition// J. Korean Math. Soc. — 2009. — 46. — P. 1243–1254.
12. Mamedov Kh. R., Kosar P. A. Inverse scattering problem for Sturm-Liouville operator with a nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition// 2011. — 34, № 2. — P. 231–241.
13. Mamedov Kh. R., Menken H. On the inverse problem of scattering theory for a differential operator of the second order// Funct. Anal. Appl. — 2004. — 197. — P. 185–194.
14. McLaughlin J. R., Polyakov P. L. On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues// J. Differ. Equations. — 1994. — 107. — P. 351–382.
15. Megrabov A. G. Forward and Inverse Problems for Hyperbolic, Elliptic and Mixed Type Equations. — Boston–Utrecht: VSP, 2003.
16. Yang Q., Wang W. Asymptotic behavior of a discontinuous differential operator with transmission conditions// Math. Appl. — 2011. — 24. — P. 15–24.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фарзуллазаде Рамин Галиб оглы

Ленкоранский государственный университет, Ленкорань, Азербайджан

E-mail: fram1992@mail.ru

Мамедов Ханлар Рашид

Igdir University, Igdir, Turkey

E-mail: hanlar.residoglu@igdir.edu.tr



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 127–137
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-127-137

УДК 517.95, 517.986.7

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГЕРАСИМОВА—КАПУТО. СЕКТОРИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

© 2023 г. В. Е. ФЕДОРОВ, Т. А. ЗАХАРОВА

Аннотация. Исследуются начальные задачи для квазилинейных уравнений с дробными производными Гerasимова—Капуто в банаховых пространствах с линейной частью, обладающей аналитическим в секторе разрешающим семейством операторов. Нелинейный оператор предполагается локально липшицевым. Рассмотрены как уравнения, разрешенные относительно старшей производной, так и уравнения, содержащие вырожденный линейный оператор при ней. Полученная теорема об однозначной разрешимости задачи Коши использована для исследования однозначной разрешимости задачи Шоултера—Сидорова для вырожденных уравнений. Абстрактные результаты использованы при рассмотрении начально-краевой задачи для уравнения в частных производных, не разрешимого относительно старшей производной дробного порядка по времени.

Ключевые слова: квазилинейное уравнение, дробная производная Гerasимова—Капуто, секториальный оператор, задача Коши, начально-краевая задача.

QUASILINEAR EQUATIONS WITH FRACTIONAL GERASIMOV—CAPUTO DERIVATIVE. SECTORIAL CASE

© 2023 V. E. FEDOROV, T. A. ZAKHAROVA

ABSTRACT. We study initial-value problems for quasilinear equations with Gerasimov–Caputo fractional derivatives in Banach spaces whose linear part has an analytic resolving family of operators in the sector. The nonlinear operator is assumed to be a locally Lipschitz operator. We consider equations that are solved with respect to the highest derivative and equations containing a degenerate linear operator acting on the highest derivative. The theorem on the unique solvability of the Cauchy problem proved in the paper is used for the study of the unique solvability of the Showalter–Sidorov problem for degenerate equations. Abstract results are applied to the initial-boundary-value problem for partial differential equations that are not solvable with respect to the highest fractional derivative in time.

Keywords and phrases: quasilinear equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, sectorial operator, Cauchy problem, initial boundary value problem.

AMS Subject Classification: 35R11, 34G20, 34A08

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 21-51-54003) и Вьетнамской Академии науки и технологии (проект QTRU 01-01/21-22).

1. Введение. С середины XX в. уравнения, не разрешимые относительно старшей производной, привлекают повышенный интерес исследователей (см. [2, 3, 7, 14, 16, 17, 26–28]). Помимо работ о вырожденных (т.е. имеющих вырожденный линейный оператор при старшей производной) уравнений целых порядков в последние годы появляется большое количество работ, касающихся вырожденных уравнений с дробными производными (см. работы [5, 21] и библиографию в них). Отметим работы, в которых исследуются вырожденные линейные [4, 9–11] и квазилинейные [6, 22, 23] уравнения с дробными производными Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля, в которых спектр пары линейных операторов ограничен. Более широким является класс вырожденных уравнений, в которых пара линейных операторов секториальна (см. [1, 8, 12, 13]). В этом случае квазилинейное уравнение рассматривалось только в специальном случае, когда целая часть порядков младших дробных производных совпадает с целой частью порядка старшей производной Римана—Лиувилля (см. [18, 19]).

В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)), \quad (1)$$

с произвольными, в том числе отрицательными α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^β — производная Римана—Лиувилля при $\beta > 0$ и интеграл Римана—Лиувилля при $\beta < 0$. Предполагается, что пара линейных замкнутых операторов (L, M) , действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, порождает аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов соответствующего линейного однородного уравнения (см. [12, 13]; для краткости такая пара иногда называется секториальной), $\ker L \neq \{0\}$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$. Для уравнения (1) исследована однозначная разрешимость задачи Шоултера—Сидорова

$$D_t^{\alpha-m+k} Lx(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1.$$

В разделе 2 приведены предварительные результаты, используемые в работе далее. В разделе 3 получена теорема об однозначной разрешимости задачи Коши для невырожденного уравнения, т.е. для уравнения (1) в случае, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $L = I$, M порождает разрешающее семейство операторов невырожденного линейного уравнения. Раздел 4 начинается с изложения полученных ранее результатов о секториальных парах операторов (см. [12, 13]), после чего доказаны четыре варианта теоремы об однозначной разрешимости задачи Шоултера—Сидорова для вырожденного уравнения (1). В первых двух вариантах нелинейный оператор действует в подпространство без вырождения, при этом используются различные условия на линейные операторы. В третьем и четвертом вариантах не содержится ограничений на образ нелинейного оператора, но предполагается его зависимость только от элементов подпространства без вырождения. В этом разделе также отмечено, что аналогичным образом может быть исследована разрешимость задачи Коши, но в отличие от задачи Шоултера—Сидорова, она является переопределенной, и условия ее разрешимости будут содержать условия согласования начальных данных с правой частью уравнения. В последнем разделе 5 начально-краевая задача для вырожденного квазилинейного уравнения в частных производных с дробными производными по времени редуцирована к задаче Шоултера—Сидорова для абстрактного уравнения (1).

2. Невырожденное линейное уравнение. Обозначим при $\beta > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$J_t^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \quad t > t_0.$$

Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Герасимова — Капуто:

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right).$$

Для $\beta < 0$ введем обозначение $D_t^\beta h(t) := J_t^{-\beta} h(t)$.

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство; обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ банахово пространство всех линейных операторов на $\mathcal{Z}$, а через $\mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, действующих в $\mathcal{Z}$. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$ нормой графика

$$\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A \cdot\|_{\mathcal{Z}}.$$

В силу замкнутости A множество D_A с такой нормой является банаховым пространством.

Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &:= \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad S_{\theta_0, a_0} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a_0)| < \theta_0, \lambda \neq a_0\}, \\ \Sigma_\varphi &:= \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \varphi, \tau \neq 0\}, \end{aligned}$$

$R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A .

При $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$ обозначим через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ класс операторов $A \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется условие $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;
- (ii) для каждого $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $a > a_0$ найдется такая константа $K(\theta, a) > 0$, что

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}$$

для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$.

Здесь и далее под дробной степенью комплексного числа λ^α подразумевается значение главной ветви степенной функции.

Замечание 1. В [15, 25] было показано, что линейный замкнутый плотно определенный оператор принадлежит классу $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если и только если он порождает аналитическое в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ разрешающее семейство операторов уравнения $D_t^\alpha z(t) = Az(t)$.

Лемма 1 (см. [8]). Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$Z_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{\alpha-1-\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0,$$

$$\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}, \quad \Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$$

при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$. Тогда семейство $\{Z_\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$ и при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ найдется такое $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что для всех $t \in \Sigma_{\theta - \pi/2}$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a\Re t} (|t|^{-1} + a)^{-\beta}, \quad \beta \leq 0, \quad (2)$$

$$\|Z_\beta(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a\Re t} |t|^\beta, \quad \beta > 0. \quad (3)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T], \quad (4)$$

с заданной функцией $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5)$$

для уравнения (4) называется такая функция $z \in C((t_0, T]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, что $D_t^\alpha z \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$, выполняются условия (5) и при всех $t \in (t_0, T]$ — равенство (4).

Теорема 1 (см. [8]). Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $f \in C([t_0, T]; D_A)$. Тогда при любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t - t_0) z_k + \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1}(t - s) f(s) ds$$

является единственным решением задачи (4), (5).

3. Невырожденное квазилинейное уравнение. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : Z \rightarrow \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Решением задачи Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (6)$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \quad (7)$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть такую функцию $z \in C((t_0, t_1]; D_A) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, что

$$D_t^\alpha z \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}), \quad D_t^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

выполняются условия (6), при $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включения

$$(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \in Z$$

и равенство (7).

Отметим, что на знаки α_k , $k = 1, 2, \dots, n$, ограничений не предполагается, при $\alpha_k < 0$ нелинейный оператор зависит от дробного интеграла $J_t^{-\alpha_k} z(t)$.

Введем обозначения

$$\bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{Z}^n, \quad S_\delta(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^n : \|y_l - x_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, \quad l = 1, 2, \dots, n\}.$$

Используя начальные данные $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$, определим

$$\tilde{z}(t) = z_0 + (t - t_0)z_1 + \frac{(t - t_0)^2}{2!}z_2 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}z_{m-1}, \quad \tilde{z}_k = D_t^{\alpha_k} \big|_{t=t_0} \tilde{z}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Отображение $B : Z \rightarrow \mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по $\bar{x}$, если при любом $(t, \bar{x}) \in Z$ существуют такие $\delta > 0$, $q > 0$, что $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x}) \subset Z$, и при всех $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x})$ выполняется неравенство

$$\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{l=1}^n \|y_l - v_l\|_{\mathcal{Z}}.$$

Лемма 2 (см. [24]). Пусть $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое $C > 0$, что при всех $h \in C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ выполняется неравенство

$$\|D_t^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|h\|_{C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}.$$

Лемма 3. Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B \in C(Z; D_A)$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in Z$. При этих условиях функция z является решением задачи (6), (7) на отрезке $[t_0, t_1]$, если и только если $D_t^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется включение

$$(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \in Z$$

и равенство

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t - t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1}(t - s)B(s, D_t^{\alpha_1} z(s), D_t^{\alpha_2} z(s), \dots, D_t^{\alpha_n} z(s))ds. \quad (8)$$

Доказательство. Если z — решение задачи (6), (7), то отображение

$$t \rightarrow B(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \quad (9)$$

непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в пространство D_A . По теореме 1 выполняется равенство (8).

Пусть $D_t^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняется включение $(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \in Z$ и z удовлетворяет уравнению (8). Тогда (9) принадлежит классу $C([t_0, t_1]; D_A)$. Как при доказательстве теоремы 1, можно доказать (см. [8]), что z — решение задачи (6), (7). $\square$

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, Z — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, отображение $B \in C(Z; D_A)$ локально липшицево по $\bar{x}$, $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in Z$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача (6), (7) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (8) имеет единственное решение $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ при некотором $t_1 > t_0$. Здесь использован тот факт, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1$, и поэтому согласно лемме 2 имеем $D_t^{\alpha_k} z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, при $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Выберем такие $\tau > 0$ и $\delta > 0$, что $[t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\bar{z}) \subset Z$, где $\bar{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество таких функций $z \in C^{m-1}([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z})$, что $\|z^{(k)}(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$, где z_k — начальные данные задачи Коши, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Определим на $\mathcal{S}$ метрику

$$d(y, v) := \sum_{k=0}^{m-1} \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|y^{(k)}(t) - v^{(k)}(t)\|_{\mathcal{Z}};$$

тогда $\mathcal{S}$ — полное метрическое пространство. Заметим, что $\tilde{z} \in \mathcal{S}$ при малом $\tau > 0$.

При $z \in \mathcal{S}$ определим оператор

$$G(z)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t - t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1}(t-s)B(s, D_t^{\alpha_1}z(s), D_t^{\alpha_2}z(s), \dots, D_t^{\alpha_n}z(s))ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \tau].$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, получим, что $G(z) \in C^{m-1}([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z})$, $[G(z)]^{(l)}(t_0) = z_l$ для $l = 0, 1, \dots, m-1$. Следовательно, при $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ имеем

$$\|[G(z)]^{(l)}(t) - z_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$$

при малом $\tau > 0$, поэтому $G: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Введем обозначение

$$B^z(t) = B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)).$$

В силу (3) имеем

$$\|Z_{\alpha-1-l}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_{\alpha-1-l}(\theta, a)e^{at}|t|^{\alpha-1-l},$$

поэтому $Z_{\alpha-1-l}(0) = 0$, $l = 0, 1, \dots, m-2$,

$$D_t^l \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1}(t-s)B^z(s)ds = \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1-l}(t-s)B^z(s)ds, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Кроме того, согласно (2) и обобщенному неравенству Бернулли, так как $m - \alpha \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \|Z_{\alpha-m}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} &\leq C_{\alpha-m}(\theta, a)e^{at}(t^{-1} + a)^{m-\alpha} = \\ &= C_{\alpha-m}(\theta, a)e^{at}(1 + at)^{m-\alpha}t^{\alpha-m} \leq C_{\alpha-m}(\theta, a)e^{at}(t^{\alpha-m} + (m-\alpha)at^{\alpha-m+1}). \end{aligned}$$

При $y, v \in \mathcal{S}$, $l = 0, 1, \dots, m-2$ имеем

$$\begin{aligned} \|[G(y)]^{(l)}(t) - [G(v)]^{(l)}(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{\alpha-1-l}(t-s)[B^y(s) - B^v(s)]ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq c_1 \tau^{\alpha-l} e^{a\tau} q \sum_{k=1}^n \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|D_t^{\alpha_k}(y(t) - v(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq c_1 \tau^{\alpha-l} e^{a\tau} q \|y - v\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{d(y, v)}{2m}, \end{aligned}$$

$$\left\| [G(y)]^{(m-1)}(t) - [G(v)]^{(m-1)}(t) \right\|_{\mathcal{Z}} \leq c_2 \tau^{\alpha-m+1} e^{a\tau} q \|y - v\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{d(y, v)}{2m}$$

при достаточно малом $\tau > 0$. При этом использована лемма 2. Таким образом, $d(G(y), G(v)) \leq d(y, v)/2$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}$.

Она и является единственным решением уравнения (8), а значит, и задачи Коши (6), (7) на выбранном отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$. $\square$

4. Вырожденное квазилинейное уравнение. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — банаховы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ банахово пространство всех линейных операторов, непрерывно действующих из $\mathcal{X}$ в пространство $\mathcal{Y}$, а через $\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество всех линейных операторов с плотными в пространстве $\mathcal{X}$ областями определения, действующих в $\mathcal{Y}$. Будем также использовать обозначения

$$R_\mu^L(M) := (\mu L - M)^{-1}L, \quad L_\mu^L(M) := L(\mu L - M)^{-1},$$

$\rho^L(M)$ — множество таких $\mu \in \mathbb{C}$, что отображение $\mu L - M : D_L \cap D_M \rightarrow \mathcal{Y}$ инъективно, при этом $R_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $L_\mu^L(M) \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$.

Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, $T > t_0$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$. Решением на отрезке $[t_0, t_1]$ задачи Шоултера—Сидорова

$$(Lx)^{(k)}(t_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (10)$$

для квазилинейного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + f(t) \quad (11)$$

будем называть такую функцию $x : [t_0, t_1] \rightarrow D_M \cap D_L$, для которой

$$Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Y}), \quad D_t^\alpha Lx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y}), \quad Mx \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Y}),$$

выполняются условия (10), при всех $t \in (t_0, t_1]$ выполняются включения

$$(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) \in X$$

и равенство (11).

Предполагается, что $\ker L \neq \{0\}$, поэтому уравнение (11) будем называть вырожденным эволюционным уравнением. Также отметим, что, как и в предыдущем разделе, некоторые из α_k в уравнении (11) могут быть отрицательными, т.е. нелинейный оператор в уравнении может зависеть от дробных интегралов.

Определение 1 (см. [13]). Пусть $L, M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Будем говорить, что пара (L, M) принадлежит классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, если

- (i) существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ и $a_0 \geq 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho^L(M)$;
- (ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такая постоянная $K = K(\theta, a) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\max \left\{ \|R_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|L_{\lambda^\alpha}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \right\} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda - a)|}.$$

Замечание 2. Если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, то включение $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ выполняется тогда и только тогда, когда $L^{-1}M \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ и $ML^{-1} \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Используя θ_0, a_0 из определения 1, зададим контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$ при $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$, как в лемме 1.

Используя псевдорезольвентное тождество и тот факт, что $\ker R_\mu^L(M)$ и $\ker L_\mu^L(M)$ — псевдорезольвенты, нетрудно показать, что $\ker R_\mu^L(M) = \ker L$, множества $\operatorname{im} R_\mu^L(M)$, $\ker L_\mu^L(M)$, $\operatorname{im} L_\mu^L(M)$ не зависят от $\mu \in \rho^L(M)$. Введем обозначения $\ker R_\mu^L(M) := \mathcal{X}^0$, $\ker L_\mu^L(M) := \mathcal{Y}^0$. Через $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$ обозначим замыкания образов $\operatorname{im} R_\mu^L(M)$ и $\operatorname{im} L_\mu^L(M)$ в норме пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, соответственно, а через L_k и M_k — сужения операторов L и M на $D_{L_k} := D_L \cap \mathcal{X}^k$ и $D_{M_k} := D_M \cap \mathcal{Y}^k$, соответственно, $k = 0, 1$.

Используя начальные данные $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$, определим

$$\tilde{y}(t) = y_0 + \frac{(t - t_0)}{1!}y_1 + \dots + \frac{(t - t_0)^{m-1}}{(m-1)!}y_{m-1}, \quad \tilde{y}_k = D_t^{\alpha_k}|_{t=t_0}\tilde{y}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 3 (см. [13]). Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) проекторы P и Q на подпространства $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{Y}^1$ вдоль $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{Y}^0$ соответственно имеют вид
$$P = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} nR_n^L(M), \quad Q = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} nL_n^L(M);$$
- (iii) $L_0 = 0$, $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_1, M_1 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
- (iv) существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;
- (v) $Px \in D_L$ и $LPx = QLx$ для всех $x \in D_L$;
- (vi) $Px \in D_M$ и $MPx = QMx$ для всех $x \in D_M$;
- (vii) пусть $S := L_1^{-1}M_1 : D_S \rightarrow \mathcal{X}^1$; тогда $D_S := \{x \in D_{M_1} : M_1x \in \text{im } L_1\}$ плотно в $\mathcal{X}$;
- (viii) пусть $T := M_1L_1^{-1} : D_T \rightarrow \mathcal{Y}^1$; тогда $D_T := \{y \in \text{im } L_1 : L_1^{-1}y \in D_{M_1}\}$ плотно в $\mathcal{Y}$;
- (ix) если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то $S \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^1)$; при этом $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$;
- (x) если $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, то $T \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Y}^1)$; при этом $T \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Теорема 4. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \text{im } L$, отображение $L_1^{-1}N \in C(X; D_S)$ локально липшицево по $\bar{x}$, $f : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{Y}^0 + \text{im } L$ при некотором $T > t_0$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$, $L_1^{-1}Qf \in C([t_0, T]; D_S)$, $M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (10), (11) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Положим $x^0(t) := (I - P)x(t)$, $x^1(t) := Px(t)$. По теореме 3 в силу условия $\text{im } N \subset \text{im } L \subset \mathcal{Y}^1$ уравнение (11) может быть редуцировано к системе

$$x^0(t) = -M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad (12)$$

$$D_t^\alpha x^1(t) = Sx^1(t) + L_1^{-1}N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)) + L_1^{-1}Qf(t). \quad (13)$$

Если $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, то по теореме 3(ix) $S \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Теорема 2 влечет существование единственного решения задачи Коши $D_t^k x^1(0) = L_1^{-1}y_k \in D_S$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (13) на некотором отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, отображение

$$(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow L_1^{-1}N(t, x_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, x_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + L_1^{-1}Qf(t)$$

непрерывно в норме графика оператора S и локально липшицево по $x_1, x_2, \dots, x_n$. $\square$

Теорема 5. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, X — открытое множество в $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}^1$, $N \in C(X; D_T)$ локально липшицево по $\bar{x}$, $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Y})$ при некотором $T > t_0$, $Qf \in C([t_0, T]; D_T)$, $M_0^{-1}(I - Q)f \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{X})$, $y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1 - D_t^{\alpha_1}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), L_1^{-1}\tilde{y}_2 - D_t^{\alpha_2}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0), \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n - D_t^{\alpha_n}M_0^{-1}(I - Q)f(t_0)) \in X.$$

Тогда существует единственное решение задачи (10), (11) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 \in (t_0, T]$.

Доказательство. Вместо уравнения (13) получим теперь эквивалентное ему уравнение

$$D_t^\alpha y^1(t) = Ty^1(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t)), \dots, D_t^{\alpha_n}(L_1^{-1}y^1(t) - M_0^{-1}(I - Q)f(t))) + Qf(t),$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$. По теореме 3(x) $T \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, поэтому согласно теореме 2 существует единственное решение задачи Коши $D_t^k y^1(0) = y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для этого уравнения на отрезке $[t_0, t_1]$. Действительно, в силу условия $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, непрерывности в норме графика оператора T и локальной липшицевости отображения

$$(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow N(t, L_1^{-1} z_1 - D_t^{\alpha_1} M_0^{-1}(I - Q)f(t), \dots, L_1^{-1} z_n - D_t^{\alpha_n} M_0^{-1}(I - Q)f(t)) + Qf(t)$$

нелинейный оператор в рассматриваемом уравнении удовлетворяет условиям теоремы 2. $\square$

Замечание 3. Задача Коши $x^{(k)}(0) = x_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения (11) может быть исследована аналогичным образом. Но при этом уравнение (12) влечет необходимые для разрешимости условия согласования

$$(I - P)x_k = -D_t^k|_{t=t_0} M_0^{-1}(I - Q)f(t), \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

начальных данных и функции f .

Рассмотрим прежнюю задачу для вырожденного уравнения, не используя условие $\text{im } N \subset \mathcal{X}^1$. При этом будет предполагаться, что оператор N не зависит от элементов подпространства $\mathcal{X}^0$. В этом случае без потери общности можно считать $f \equiv 0$:

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} x(t), D_t^{\alpha_2} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)). \quad (14)$$

Обозначим $V := X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$.

Теорема 6. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, множество V открыто в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$ при некотором $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $\text{im } QN_1 \subset \text{im } L$, $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; D_S)$ локально липшицево по $\bar{x}$, $y_k \in L[D_S]$ при $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (10), (14) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 4, получаем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} x^0(t) &= -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D_t^{\alpha_1} x^1(t), D_t^{\alpha_2} x^1(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x^1(t)), \\ D_t^\alpha x^1(t) &= Sx^1(t) + L_1^{-1}QN_1(t, D_t^{\alpha_1} x^1(t), D_t^{\alpha_2} x^1(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x^1(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

используем теоремы 3(ix) и 2. $\square$

Определим отображение $QN_1 \circ L_1^{-1} : \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n \rightarrow \mathcal{Y}$, которое на элементы $(t, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times (\mathcal{Y}^1)^n$ действует по правилу

$$QN_1 \circ L_1^{-1}(t, z_1, z_2, \dots, z_n) := QN_1(t, L_1^{-1}z_1, L_1^{-1}z_2, \dots, L_1^{-1}z_n).$$

Теорема 7. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, V — открытое множество в $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, таких, что $(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n) \in V$, выполняется $N(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = N_1(t, Px_1, Px_2, \dots, Px_n)$, где $N_1 \in C(V; \mathcal{X})$, $QN_1 \in C(V; D_T)$ локально липшицево по $\bar{x}$, $y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $(t_0, L_1^{-1}\tilde{y}_1, L_1^{-1}\tilde{y}_2, \dots, L_1^{-1}\tilde{y}_n) \in V$. Тогда существует единственное решение задачи (10), (14) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Вместо уравнения (15) в данном случае получаем задачу Коши $D_t^k y^1(0) = y_k \in D_T$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, для уравнения

$$D_t^\alpha y^1(t) = Ty^1(t) + QN_1(t, D_t^{\alpha_1} L_1^{-1} y^1(t), D_t^{\alpha_2} L_1^{-1} y^1(t), \dots, D_t^{\alpha_n} L_1^{-1} y^1(t)),$$

где $y^1(t) = L_1 x^1(t)$, как при доказательстве теоремы 5. $\square$

5. Пример. При $\alpha \in (1, 2)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s, t_0) = v_0(s), \quad D_t^1 \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s, t_0) = v_1(s), \quad s \in (0, \pi), \quad (16)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(\pi, t) = 0, \quad t > t_0, \quad (17)$$

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s, t) = \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s, t) + \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F\left(s, D_t^{-1/3} v(s, t), D_t^{1/2} v(s, t)\right) \quad (18)$$

для $s \in (0, \pi)$, $t > t_0$. Здесь $\beta, a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, 2$, $F : (0, \pi) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 8. Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $F \in C^\infty((0, \pi) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $\beta = -k_1^2$ при некотором $k_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 > 0$,

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \neq 0, \quad v_k = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) w_k,$$

$w_k \in \{x \in H^4(0, \pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, \quad l = 0, 1\}$, $k = 0, 1$. Тогда задача (16)–(18) имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{X} := \{x \in H^2(0, \pi) : x(0) = x(\pi) = 0\}, \quad \mathcal{Y} = L_2(0, \pi),$$

$$D_M := \{x \in H^4(0, \pi) : x^{(2l)}(0) = x^{(2l)}(\pi) = 0, \quad l = 0, 1\},$$

$$L := \beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad M := \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l}}{\partial s^{2l}} : D_M \rightarrow \mathcal{Y},$$

$$N(x_1(s), x_2(s)) = \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) F(s, x_1(s), x_2(s)).$$

Согласно [13, теорема 7] имеем $\ker L = \mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \text{Span}\{\sin k_1 s\}$, $\mathcal{X}^1$ есть замыкание $\text{Span}\{\sin ks : k \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}\}$ в $\mathcal{X}$, а $\mathcal{Y}^1$ — замыкание того же подпространства в норме $\mathcal{Y}$, оператор $L_1 : \mathcal{X}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^1$ является гомеоморфизмом и при $\alpha \in (1, 2)$ $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$ для некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Из вида оператора N следует, что $\text{im } N \subset \mathcal{Y}^1$.

В силу [20, приложение Б, предложение 1] отображение $(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) \rightarrow F(\cdot, x_1(\cdot), x_2(\cdot))$ принадлежит классу $C^\infty((H^2(0, \pi))^2; H^2(0, \pi))$; следовательно, оператор $N : X = \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ локально липшицев, при этом непрерывен оператор $ML_1^{-1}N : X = \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{Y}$, а значит, $N \in C(X; D_T)$, где $T = ML_1^{-1}$. По теореме 5 получим требуемое. $\square$

С помощью теоремы 6 или 7 аналогичным образом может быть рассмотрена задача (16), (17) для уравнения

$$D_t^\alpha \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) v(s, t) = \sum_{l=0}^2 a_l \frac{\partial^{2l} v}{\partial s^{2l}}(s, t) + F\left(s, \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) D_t^{-1/3} v(s, t), \left(\beta - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) D_t^{1/2} v(s, t)\right).$$

6. Заключение. В работе исследованы вопросы однозначной локальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно старшей дробной производной Герасимова—Капуто, с локально липшицевым нелинейным оператором, непрерывным в норме графика замкнутого оператора из линейной части уравнения. Полученные результаты использованы при исследовании аналогичных уравнений с вырожденным линейным оператором при старшей производной. Особенностью работы является тот факт, что порядки младших производных, от которых зависит нелинейный оператор, произвольны и не согласованы с порядком старшей производной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авилевич А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е. Вопросы однозначной разрешимости и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гильбертовой правой частью// Челябин. физ.-мат. ж. — 2020. — 60, № 2. — С. 461–477.
2. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. Костич М., Федоров В. Е. Вырожденные дробные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах с сигма-регулярной парой операторов// Уфим. мат. ж. — 2016. — 8, № 4. — С. 100–113.
5. Костич М., Федоров В. Е. Разделенные гиперциклические и разделенные топологически перемешивающие свойства вырожденных дробных дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2018. — 7. — С. 36–53.
6. Плеханова М. В. Сильные решения нелинейного вырожденного эволюционного уравнения дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — 16, № 3. — С. 61–74.
7. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — 18. — С. 3–50.
8. Федоров В. Е., Авилевич А. С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана—Лиувилля в секториальном случае// Сиб. мат. ж. — 2019. — 60, № 2. — С. 461–477.
9. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М. Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени// Изв. вузов. Мат. — 2015. — 1. — С. 71–83.
10. Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М. В. Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной// Диффер. уравн. — 2015. — 51, № 10. — С. 1367–1375.
11. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р. Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана—Лиувилля// Сиб. мат. ж. — 2018. — 59, № 1. — С. 171–184.
12. Федоров В. Е., Романова Е. А. Неоднородное эволюционное уравнение дробного порядка в секториальном случае// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — 149. — С. 103–112.
13. Федоров В. Е., Романова Е. А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2016. — 16, № 2. — С. 93–107.
14. Чистяков В. Ф. Алгебраически-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996.
15. Bajlekova E. G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. — Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., 2001.
16. Caroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy Problems. — New York–San Francisco–London: Academic Press, 1976.
17. Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. — New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.
18. Fedorov V. E., Avilovich A. S. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case// Complex Var. Ellipt. Equations. — 2021. — 66, № 6–7. — P. 1108–1121.
19. Fedorov V. E., Avilovich A. S., Borel L. V. Initial problems for semilinear degenerate evolution equations of fractional order in the sectorial case// Springer Proc. Math. Stat. — 2019. — 292. — P. 41–62.
20. Hassard B. D., Kazarinoff N. D., Wan Y. H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
21. Kostić M. Abstract Volterra Integro-Differential Equations. — Boca Raton: CRC Press, 2015.
22. Plekhanova M. V. Sobolev type equations of time-fractional order with periodical boundary conditions// AIP Conf. Proc. — 2016. — 1759. — 020101.
23. Plekhanova M. V. Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative// Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. — 40, № 17. — P. 6138–6146.
24. Plekhanova M. V., Baybulatova G. D. Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives// Springer Proc. Math. Stat. — 2019. — 292. — P. 81–93.
25. Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Springer, 1993.

26. *Pyatkov S. G.* Operator Theory. Nonclassical Problems. — Utrecht–Boston–Colonia–Tokyo: VSP, 2002.
27. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
28. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht–Boston: VSP, 2003.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (проект НШ-2708.2022.1.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 21-51-54003) и Вьетнамской Академии науки и технологии (проект QTRU 01-01/21-22).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Федоров Владимир Евгеньевич

Челябинский государственный университет

E-mail: kar@csu.ru

Захарова Татьяна Анатольевна

Челябинский государственный университет

E-mail: tanya_1997_smirnova@mail.ru



ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕЧЕТКИЕ СРЕДНИЕ В ЗАДАЧЕ АГРЕГИРОВАНИЯ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

© 2023 г. В. Л. ХАЦКЕВИЧ

Аннотация. Для параметрических систем нечетких чисел введен и изучен класс интегральных операторов осреднения для реализации задачи агрегирования нечеткой информации.

Ключевые слова: нечеткая функция, нечеткий интегральный оператор осреднения, агрегирование нечеткой информации.

INTEGRAL FUZZY MEANS IN THE AGGREGATION PROBLEM FOR FUZZY INFORMATION

© 2023 V. L. KHATSKEVICH

ABSTRACT. For parametric systems of fuzzy numbers, we introduce and examine a class of aggregation integral operators for aggregation of fuzzy information.

Keywords and phrases: fuzzy function, fuzzy averaging integral operator, aggregation of fuzzy information.

AMS Subject Classification: 62A86

1. Введение. Пусть I — отрезок расширенной числовой прямой. Под n -мерной агрегирующей функцией (агрегатором) обычно понимают функцию $A : I^n \rightarrow I$, которая векторной оценке объекта $X = (x_1, \dots, x_n)$ ставит в соответствие обобщенную скалярную оценку $A(X)$. При этом обычно предполагают (см., например, [3, 15, 17]), что она обладает следующими свойствами:

- (i) $A(x, \dots, x) = x$ (идемпотентность);
- (ii) для любой пары векторных оценок $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, \dots, y_n)$, удовлетворяющих условию $x_i \leq y_i$ $i = 1, \dots, n$, выполняется неравенство $A(X) \leq A(Y)$ (монотонность);
- (iii) функция $A(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна (непрерывность);
- (iv) $\inf_{X \in I^n} A(X) = \inf I$, $\sup_{X \in I^n} A(X) = \sup I$ (граничные условия).

Эти свойства отражают естественные требования к операции агрегирования. А именно, идемпотентность означает, что при равенстве всех параметров обобщенная оценка совпадает с общим значением параметра. Монотонность означает, что увеличение любого из параметров может только увеличить значение обобщенной оценки. Непрерывность отражает тот факт, что малому изменению параметров соответствует малое изменение обобщенной оценки. Граничное условие соответствует пониманию среднего числового множества (при любом определении) как промежуточного значения между наименьшим и наибольшим.

Часто (см. [9]) в качестве агрегирующих функций рассматриваются средние: средняя арифметическая M , средняя показательная M_p , средняя геометрическая M_G , средняя гармоническая M_H :

$$M(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad M_p(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p},$$

$$M_G(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}, \quad M_H(x_1, \dots, x_n) = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1}.$$

Все они обладают при $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) перечисленными свойствами (i)–(iv). Средняя арифметическая имеет дополнительные свойства: аддитивность, однородность, а также экстремальное свойство. Она является решением следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 \rightarrow \min \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Рассматриваются также взвешенные средние.

С другой стороны, известен классический подход к оценке параметрической информации. Это непрерывное взвешенное среднее (см. [2, гл. I]) с заданной функцией частот (весов). Обозначим функцию частот $p(x)$, $p(x) > 0$. Тогда взвешенная средняя арифметическая A , взвешенная средняя степенная A_m , взвешенная средняя геометрическая G и взвешенная средняя гармоническая H определяются формулами

$$A = \int_a^b xp(x)dx / \int_a^b p(x)dx; \quad A_m = \left(\int_a^b x^m p(x)dx / \int_a^b p(x)dx \right)^{1/m};$$

$$G = \exp \left\{ \int_a^b \ln(x)p(x)dx / \int_a^b p(x)dx \right\}; \quad H = \int_a^b p(x)dx / \int_a^b (p(x)/x)dx.$$

В работе рассматривается задача агрегирования нечеткой информации, заданной параметрическим (непрерывным) семейством нечетких чисел. Она понимается как оценка такой информации с помощью нечеткого числа, отражающего тенденцию данной (параметрической) нечеткой совокупности.

Для решения задачи агрегирования на основе интервального подхода в настоящей работе вводятся интегральные нечеткие средние (линейные и нелинейные) и устанавливаются их свойства, являющиеся модификациями свойств агрегирующих функций. Это обеспечивает адекватность применения интегральных нечетких средних в задаче агрегирования параметрической нечеткой информации.

Таким образом, новизна данной работы состоит в развитии подхода агрегирующих функций на непрерывный (параметрический) случай, причем, для нечеткой информации. Отметим отличие нашего подхода от известного (нечеткого) интеграла Шоке (см., например, [12, 18]), где агрегируются функции принадлежности.

Ниже под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве $\mathbb{R}$, будем понимать (см. [4, гл. 2]) совокупность упорядоченных пар $(\mu_{\tilde{z}}(x), x)$, где $\mu_{\tilde{z}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ — функция принадлежности, определяющая степень принадлежности произвольного $x \in \mathbb{R}$ множеству $\tilde{z}$. Нечеткое число $\tilde{z}$ порождает α -уровни Z_α , определяемые для любого $\alpha \in [0, 1]$ равенством

$$Z_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad Z_0 = \text{cl}\{x \mid \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где символ cl означает замыкание множества.

Будем считать, что множества α -уровня — замкнутые интервалы, так что $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Функции $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа. Будем считать, что они измеримы и ограничены на $[0, 1]$. Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать J .

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих индексов (при всех $\alpha \in [0, 1]$).

На множестве нечетких чисел рассмотрим метрику, задаваемую для $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$ равенством

$$d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ |z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha)|, |z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha)| \right\} \quad (1)$$

(см. [14]). Ниже используется следующее определение сравнения (ранжирования) нечетких чисел, заданных в интервальной форме. Для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{w}$ будем писать $\tilde{z} \prec \tilde{w}$, если одновременно

$$z^-(\alpha) \leq w^-(\alpha), \quad z^+(\alpha) \leq w^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1] \quad (2)$$

(см. [5, гл. 5]). Отметим, что (2) задает соотношение частичного порядка на множестве J .

2. Интегральные нечеткие средние параметрических систем нечетких чисел. Пусть Ω — измеримое по Лебегу числовое множество. Пусть $\tilde{z}(\omega)$ — измеримая нечеткая функция, а именно, $\tilde{z} : \Omega \rightarrow J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(\omega)}(x)$. Рассмотрим α -уровни

$$Z_\alpha(\omega) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(\omega)}(x) \geq \alpha\}.$$

Интервал $Z_\alpha(\omega)$ представим в виде $Z_\alpha(\omega) = [z^-(\omega, \alpha), z^+(\omega, \alpha)]$. Будем считать, что индексы $z^-(\omega, \alpha)$, $z^+(\omega, \alpha)$ являются функциями, квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0, 1]$. Класс таких нечетких функций обозначим J_ω .

Для функции $\tilde{z}(\omega)$ обозначим через $p(\omega)$ функцию весов (частот). Будем считать, что $p(\omega)$ квадратично суммируема на Ω и $p(\omega) > 0$ при п.в. $\omega \in \Omega$.

Определим с помощью интеграла Лебега функции

$$z_p^-(\alpha) = \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} z^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega, \quad z_p^+(\alpha) = \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} z^+(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega, \quad (3)$$

где

$$p_0 = \int_{\Omega} p(\omega) d\omega.$$

Введем в рассмотрение нечеткое число $M_p(\tilde{z}(\omega))$, индексы которого задаются формулами (3). Назовем его нечетким интегральным взвешенным средним (коротко — нечетким средним) от нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$. Его индексы будем обозначать $[M_p(\tilde{z}(\omega))]^\pm(\alpha)$. Это аналог интеграла от нечеткой функции, введенного в [13]. Он соответствует интегралу Ауманна для многозначных функций (см. [8]). Величину $M_p(\tilde{z}(\omega))$ можно понимать как оператор нечеткого осреднения. С другой стороны, это нечеткий аналог непрерывной средней арифметической (см. [2, гл. I]).

Рассмотрим на множестве J метрику, задаваемую для нечетких чисел $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ равенством

$$r(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int_0^1 \left((z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha))^2 + (z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha))^2 \right) d\alpha \right)^{1/2} \quad (4)$$

(см. [10]), а на множестве J_ω -нечетких функций — метрику, задаваемую для нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)$ равенством

$$\rho(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)) = \left(\int_0^1 \int_{\Omega} \left((z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha))^2 + (z_1^+(\omega, \alpha) - z_2^+(\omega, \alpha))^2 \right) d\omega d\alpha \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Определенное формулой (3) интегральное нечеткое среднее обладает свойствами, являющимися модификациями свойств агрегирующих функций.

Теорема 1. *Интегральное нечеткое среднее, определяемое формулой (3), удовлетворяет следующим условиям регулярности:*

(i) *идемпотентность*: если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ для п.в. $\omega \in \Omega$, то

$$M_p(\tilde{z}(\omega)) = \tilde{z};$$

(ii) *монотонность*: если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega) \in J_\omega$ выполнено условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ для п.в. $\omega \in \Omega$, то

$$M_p(\tilde{z}_1(\omega)) \prec M_p(\tilde{z}_2(\omega));$$

(iii) *непрерывность*: оператор осреднения $M_p : J_\omega \rightarrow J$ непрерывен.

Доказательство. (i) По определению и на основании (3) можем записать

$$[M_p(\tilde{z})]^- (\alpha) = \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} z^-(\alpha) p(\omega) d\omega = z^-(\alpha) \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} p(\omega) d\omega = z^-(\alpha).$$

Аналогично, $[M_p(\tilde{z})]^+ (\alpha) = z^+(\alpha)$.

(ii) Условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ согласно (2) означает, что для каждого фиксированного $\alpha \in (0, 1]$ и почти любого $\omega \in \Omega$ выполнены соотношения

$$z_1^-(\omega, \alpha) \leq z_2^-(\omega, \alpha), \quad z_1^+(\omega, \alpha) \leq z_2^+(\omega, \alpha).$$

Умножим эти неравенства на весовую функцию $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем полученные неравенства по области Ω . Далее, используя свойство монотонности интеграла Лебега и определение мажорантности (2), получим высказанное утверждение.

(iii) Согласно определениям (3), (4)

$$\begin{aligned} r^2(M_p(\tilde{z}_1(\omega)), M_p(\tilde{z}_2(\omega))) &= \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} (z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \right)^2 + \left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} (z_1^+(\omega, \alpha) - z_2^+(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \right)^2 \right] d\alpha. \end{aligned}$$

При этом

$$\left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} (z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \right)^2 \leq \frac{\|p\|^2}{p_0^2} \int_{\Omega} (z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha))^2 d\omega,$$

где

$$\|p\| = \left(\int_{\Omega} p^2(\omega) d\omega \right)^{1/2},$$

и аналогично для индексов с плюсом. Таким образом, на основании (5), имеет место соотношение

$$r^2(M_p(\tilde{z}_1(\omega)), M_p(\tilde{z}_2(\omega))) \leq \frac{\|p\|^2}{p_0^2} \rho^2(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)),$$

которое влечет непрерывность M_p как отображения из J_ω с метрикой (5) в J с метрикой (4). $\square$

Дополнительно к свойствам (i)–(iii) теоремы 1 для нечеткого интегрального оператора M_p выполнено следующее свойство (эффективность).

Предложение 1. Если $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega), \tilde{z}_3(\omega) \in J_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то

$$M_p(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)) \prec M_p(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)).$$

Действительно, по условию и согласно (2)

$$\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega).$$

Тогда высказанное утверждение следует из свойства (ii) теоремы 1.

Это свойство ранее не рассматривалось для функций агрегаторов. Для интегральных нечетких функционалов специального вида оно обсуждается в [5, гл. 5].

Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ с индексами $z^-(\omega, \alpha)$ и $z^+(\omega, \alpha)$ (которые будем считать ограниченными по $\omega \in \Omega$ при любом $\alpha \in (0, 1)$ функциями) определим величины

$$z_{\inf}^{\pm}(\alpha) = \inf_{\omega \in \Omega} z^{\pm}(\omega, \alpha), \quad z_{\sup}^{\pm}(\alpha) = \sup_{\omega \in \Omega} z^{\pm}(\omega, \alpha). \quad (6)$$

Предложение 2. Для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_{\omega}$ с индексами, ограниченными по $\omega \in \Omega$ при любом $\alpha \in (0, 1)$, справедливо соотношение

$$z_{\inf}^{\pm}(\alpha) \leq M_p^{\pm}(\tilde{z}(\omega))(\alpha) \leq z_{\sup}^{\pm}(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Действительно, рассмотрим случай левых индексов. По определению (6) имеем

$$z_{\inf}^-(\alpha) \leq z^-(\omega, \alpha) \leq z_{\sup}^-(\alpha).$$

Умножим это неравенство на весовую функцию $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем по области Ω . Тогда

$$z_{\inf}^-(\alpha) \int_{\Omega} p(\omega) d\omega \leq \int_{\Omega} z^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega \leq z_{\sup}^-(\alpha) \int_{\Omega} p(\omega) d\omega.$$

Отсюда согласно (3) получим требуемое. Аналогично для индексов с плюсом.

Так, в данном случае выполняется условие промежуточности, характерное для средних (граничное условие (iv)). Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Оператор осреднения $M_p : J_{\omega} \rightarrow J$ является аддитивным и однородным.

Доказательство. Покажем аддитивность. Пусть $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)$ — две нечеткие функции из J_{ω} . Фиксируем $\alpha \in [0, 1]$ и $\omega \in \Omega$. По определению левый индекс суммы нечетких чисел $\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_2(\omega)$ равен

$$[\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_2(\omega)]^-(\alpha) = z_1^-(\omega, \alpha) + z_2^-(\omega, \alpha).$$

Умножим это соотношение на $p(\omega)$ и проинтегрируем по области Ω . Используя аддитивность интеграла Лебега, получим

$$\begin{aligned} [M_p(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_2(\omega))]^-(\alpha) &= \int_{\Omega} (z_1^-(\omega, \alpha) + z_2^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega = \\ &= \int_{\Omega} z_1^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega + \int_{\Omega} z_2^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega = [M_p(\tilde{z}_1(\omega)) + M_p(\tilde{z}_2(\omega))]^-(\alpha); \end{aligned}$$

аналогично для правых индексов. Это влечет аддитивность оператора осреднения M_p .

Проверим однородность. Пусть k — положительное число. По определению умножения на нечеткое число левый индекс нечеткого числа $k\tilde{z}(\omega)$ равен $kz^-(\omega, \alpha)$, а правый — $kz^+(\omega, \alpha)$. Умножая эти выражения на $p(\omega)$, интегрируя по области Ω и используя однородность интеграла Лебега, получим равенство левых и правых индексов нечетких чисел $M_p(k\tilde{z}(\omega))$ и $kM_p(\tilde{z}(\omega))$. Тогда $M_p(k\tilde{z}(\omega)) = kM_p(\tilde{z}(\omega))$.

В случае $k < 0$ получим, что левый индекс нечеткого числа $k\tilde{z}(\omega)$ равен $kz^+(\omega, \alpha)$, а правый — $kz^-(\omega, \alpha)$. Умножим эти выражения на $p(\omega)$, а затем проинтегрируем по области Ω . Полученные результаты совпадут соответственно с левым и правым индексами нечеткого числа $M_p(k\tilde{z}(\omega))$, а в силу однородности интеграла Лебега с левым и правым индексами нечеткого числа $kM_p(\tilde{z}(\omega))$. $\square$

Отметим, что линейным среднее M_p назвать нельзя, поскольку множество J не обладает линейной структурой.

Для фиксированной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_{\omega}$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\int_0^1 \int_{\Omega} ((z^-(\omega, \alpha) - v^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - v^+(\alpha))^2) p(\omega) d\omega d\alpha \rightarrow \min \quad \forall \tilde{v} \in J. \quad (7)$$

Здесь $z^{\pm}(\omega, \alpha)$ и $v^{\pm}(\alpha)$ — индексы нечетких чисел $\tilde{z}(\omega)$ и $\tilde{v}$.

Теорема 3. Решение задачи (7) дает нечеткое число $M_p(\tilde{z}(\omega))$.

Доказательство. Покажем, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\Omega} \left((z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - z_p^+(\alpha))^2 \right) p(\omega) d\omega d\alpha &\leq \\ &\leq \int_0^1 \int_{\Omega} \left((z^-(\omega, \alpha) - v^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - v^+(\alpha))^2 \right) p(\omega) d\omega d\alpha \quad \forall \tilde{v} \in J, \end{aligned} \quad (8)$$

где $z_p^{\pm}(\alpha)$ определяются формулами (3).

Фиксируем произвольное нечеткое число $\tilde{v} \in J$ и преобразуем подынтегральное выражение в правой части (8):

$$\begin{aligned} &\left(z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha) + z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha) \right)^2 + \left(z^+(\omega, \alpha) - z_p^+(\alpha) + z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha) \right)^2 = \\ &= \left(z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha) \right)^2 + \left(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha) \right)^2 + \left(z^+(\omega, \alpha) - z_p^+(\alpha) \right)^2 + \left(z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha) \right)^2 + \\ &\quad + 2(z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha))(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)) + 2(z^+(\omega, \alpha) - z_p^+(\alpha))(z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha)). \end{aligned}$$

Умножим обе части полученного равенства на $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем по области Ω . Заметим, что

$$\int_{\Omega} (z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha))(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha))p(\omega)d\omega = (z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha)) \int_{\Omega} (z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha))p(\omega)d\omega = 0$$

по определению (3) индекса $z_p^-(\alpha)$. Аналогично для индексов с плюсом. Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left((z^-(\omega, \alpha) - v^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - v^+(\alpha))^2 \right) p(\omega) d\omega = \\ &= \int_{\Omega} \left((z^-(\omega, \alpha) - z_p^-(\alpha))^2 + (z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha))^2 + (z^+(\omega, \alpha) - z_p^+(\alpha))^2 + (z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha))^2 \right) p(\omega) d\omega + \\ &\quad + p_0(z_p^-(\alpha) - v^-(\alpha))^2 + p_0(z_p^+(\alpha) - v^+(\alpha))^2. \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по α от 0 до 1, получим требуемое неравенство (8), а значит, утверждение теоремы. $\square$

Теорема 3 обобщает экстремальное свойство числового среднего арифметического вещественных чисел (см. [2, гл. I]). Она характеризует некоторую равномерность приближения параметрического семейства нечетких чисел $\tilde{z}(\omega)$ посредством нечеткого интегрального среднего $M_p(\tilde{z}(\omega))$. В дискретном случае такого рода результат содержится в работе автора [7].

Пример 1. Пусть при каждом $\omega \in \Omega$ нечеткое число $\tilde{z}(\omega)$ имеет треугольный вид $(a(\omega), b(\omega), c(\omega))$, где $a(\omega)$, $b(\omega)$, $c(\omega)$ — квадратично суммируемые числовые функции. Иными словами, его функция принадлежности при любом $\omega \in \Omega$ описывается формулой

$$\mu_{\tilde{z}(\omega)}(x) = \begin{cases} \frac{x - a(\omega)}{b(\omega) - a(\omega)}, & \text{если } x \in [a(\omega), b(\omega)]; \\ \frac{x - c(\omega)}{b(\omega) - c(\omega)}, & \text{если } x \in [b(\omega), c(\omega)]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае

$$z^-(\omega, \alpha) = (1 - \alpha)a(\omega) + \alpha b(\omega), \quad z^+(\omega, \alpha) = (1 - \alpha)c(\omega) + \alpha b(\omega).$$

Тогда интегральное нечеткое среднее $M_p(\tilde{z}(\omega))$ описывается формулами

$$\begin{aligned} [M_p(\tilde{z}(\omega))]^-(\alpha) &= \frac{(1-\alpha)}{p_0} \int_{\Omega} a(\omega)p(\omega)d\omega + \frac{\alpha}{p_0} \int_{\Omega} b(\omega)p(\omega)d\omega, \\ [M_p(\tilde{z}(\omega))]^+(\alpha) &= \frac{(1-\alpha)}{p_0} \int_{\Omega} c(\omega)p(\omega)d\omega + \frac{\alpha}{p_0} \int_{\Omega} b(\omega)p(\omega)d\omega. \end{aligned}$$

3. Нелинейные нечеткие интегральные средние. Пусть $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная строго монотонная функция. Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ с индексами $z^\pm(\omega, \alpha)$ положим

$$z_{\phi,p}^-(\alpha) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} (\phi(z^-(\omega, \alpha)))p(\omega)d\omega \right), \quad z_{\phi,p}^+(\alpha) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} (\phi(z^+(\omega, \alpha)))p(\omega)d\omega \right). \quad (9)$$

Ниже будем рассматривать положительные нечеткие функции $\tilde{z}(\omega)$, для которых $z^-(\omega, \alpha) > 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$ и всех $\alpha \in [0, 1]$.

Нечеткое число с индексами, задаваемыми формулами (9), назовем нелинейным нечетким средним, ассоциированным с определяющей функцией ϕ , и обозначим $M_{\phi,p}(\tilde{z}(\omega))$. Его индексы обозначим $[M_{\phi,p}(\tilde{z}(\omega))]^\pm(\alpha)$. Ниже индекс p , подчеркивающий роль весовой функции $p(x)$, будем опускать и писать $M_\phi(\tilde{z}(\omega))$.

В случае определяющей функции $\phi_m(x) = x^m$, $m > 1$, в (9) получим нечеткий аналог непрерывного среднего степенного (ср. [2, гл. 1]), в случае $\phi_G(x) = \ln(x)$ — аналог непрерывного среднего геометрического, в случае $\phi_H(x) = 1/x$ — нечеткий аналог непрерывного среднего гармонического.

Определим понятие функции от нечеткого числа, используя интервальный подход. Пусть задана непрерывная монотонно возрастающая (монотонно убывающая) вещественная функция $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Приведем в удобном для нас виде формулировку результата из [16].

Лемма 1. Если $\tilde{z}$ — нечеткое число с левым и правым индексами $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ и $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то $\phi(z^-(\alpha))$ и $\phi(z^+(\alpha))$ суть левый и правый индексы нечеткого числа $\phi(\tilde{z})$ соответственно. Если $\phi(x)$ — непрерывная монотонно убывающая функция, то $\phi(z^+(\alpha))$ и $\phi(z^-(\alpha))$ — левый и правый индексы $\phi(\tilde{z})$ соответственно.

Из леммы 1 вытекает следующий факт.

Лемма 2. Нелинейное нечеткое интегральное среднее, определяемое формулой (9), можно представить в виде

$$M_\phi(\tilde{z}(\omega)) = \phi^{-1}(M_p(\phi(\tilde{z}(\omega)))).$$

Обозначим через $\tilde{C}$ класс нечетких чисел, индексы которых непрерывны. Метрику на нем зададим формулой (1). Введем в рассмотрение множество $\tilde{C}_\omega$ нечетких функций вида $\tilde{z}(\omega)$ с непрерывными на $[0, 1] \times \Omega$ индексами $z^\pm(\omega, \alpha)$. На множестве $\tilde{C}_\omega$ будем рассматривать метрику, определяемую для $\tilde{z}_1(\omega)$ и $\tilde{z}_2(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ равенством

$$d(\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega)) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max_{\omega \in \Omega} \left\{ |z_1^+(\omega, \alpha) - z_2^+(\omega, \alpha)|, |z_1^-(\omega, \alpha) - z_2^-(\omega, \alpha)| \right\}. \quad (10)$$

Теорема 4. Нелинейное нечеткое интегральное среднее, характеризуемое формулой (9), обладает следующими свойствами регулярности:

(i) *идемпотентность*: если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то

$$M_\phi(\tilde{z}(\omega)) = \tilde{z};$$

(ii) *монотонность*: если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ при почти всех $\omega \in \Omega$ выполнены условия $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$, то

$$M_\phi(\tilde{z}_1(\omega)) \prec M_\phi(\tilde{z}_2(\omega));$$

- (iii) непрерывность: нелинейный нечеткий интегральный усредняющий оператор $M_\phi : \tilde{C}_\omega \rightarrow \tilde{C}$ непрерывен;
- (iv) эффективность: если $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega), \tilde{z}_3(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то
- $$M_\phi(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)) \prec M_\phi(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)).$$

Доказательство. Рассмотрим случай монотонного возрастания функции ϕ . Свойство (i) вытекает из определения (9), поскольку

$$\begin{aligned} [M_\phi(\tilde{z})]^{-}(\alpha) &= \phi^{-1} \left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} \phi(z^{-}(\alpha)) p(\omega) d\omega \right) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{p_0} \phi(z^{-}(\alpha)) \int_{\Omega} p(\omega) d\omega \right) = \\ &= \phi^{-1}(\phi(z^{-}(\alpha))) = z^{-}(\alpha). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$[M_\phi(\tilde{z})]^{+}(\alpha) = \phi^{-1} \left(\frac{1}{p_0} \int_{\Omega} \phi(z^{+}(\alpha)) p(\omega) d\omega \right) = z^{+}(\alpha).$$

- (ii) Рассмотрим случай монотонного возрастания функции ϕ . По условию

$$z_1^{-}(\omega, \alpha) \leq z_2^{-}(\omega, \alpha), \quad z_1^{+}(\omega, \alpha) \leq z_2^{+}(\omega, \alpha)$$

для всех $\alpha \in (0, 1]$ и почти всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$\phi(z_1^{-}(\omega, \alpha)) \leq \phi(z_2^{-}(\omega, \alpha)).$$

Умножим обе части полученного неравенства на $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем полученное неравенство по области Ω . Тогда

$$\int_{\Omega} p(\omega) \phi(z_1^{-}(\omega, \alpha)) d\omega \leq \int_{\Omega} p(\omega) \phi(z_2^{-}(\omega, \alpha)) d\omega.$$

Поскольку ϕ^{-1} возрастает вместе с ϕ , то

$$[M_\phi(\tilde{z}_1(\omega))]^{-}(\alpha) \leq [M_\phi(\tilde{z}_2(\omega))]^{-}(\alpha);$$

аналогично для индексов с плюсом. Отсюда вытекает свойство монотонности в случае монотонного возрастания функции ϕ . Случай монотонного убывания функции ϕ рассматривается аналогично.

Доказательство свойства (iii) с учетом определения метрик (1) и (10) проводится отдельно для индексов M_ϕ^{-} и M_ϕ^{+} стандартными для скалярных функций методами и обеспечивается непрерывностью функции ϕ .

Свойство (iv) вытекает из свойства (iii), поскольку соотношение $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ в силу (2) влечет

$$\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega). \quad \square$$

Экстремальное свойство для нелинейного нечеткого среднего M_ϕ имеет следующий вид.

Предложение 3. Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ из $\tilde{C}_\omega$ нечеткое число $\phi(M_\phi(\tilde{z}(\omega)))$ является решением следующей экстремальной задачи:

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \left((\phi(z^{-}(\omega, \alpha)) - v^{-}(\alpha))^2 + (\phi(z^{+}(\omega, \alpha)) - v^{+}(\alpha))^2 \right) p(\omega) d\omega d\alpha \rightarrow \min \quad \forall \tilde{v} \in J.$$

Это утверждение следует из определения (9) величины M_ϕ , леммы 2 и теоремы 3.

Граничное условие, аналогичное предложению 2, выполняется в следующей форме.

Предложение 4. Пусть $\tilde{z}(\omega)$ — нечеткая функция из $\tilde{C}_\omega$, индексы которой ограничены по ω при каждом $\alpha \in [0, 1]$. Тогда нелинейное нечеткое интегральное среднее M_ϕ , определенное формулой (9), удовлетворяет соотношению

$$z_{\inf}^{\pm}(\alpha) \leq [M_\phi(\tilde{z}(\omega))]^{\pm}(\alpha) \leq z_{\sup}^{\pm}(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

где использованы обозначения из (6).

Доказательство. Действительно, пусть функция ϕ строго монотонно возрастает. Рассмотрим случай левых индексов. По определению (6) имеем

$$z_{\inf}^-(\alpha) \leq z^-(\omega, \alpha) \leq z_{\sup}^-(\alpha).$$

В силу монотонного возрастания функции ϕ

$$\phi(z_{\inf}^-(\alpha)) \leq \phi(z^-(\omega, \alpha)) \leq \phi(z_{\sup}^-(\alpha)).$$

Умножим это неравенство на весовую функцию $p(\omega) > 0$ и проинтегрируем по области Ω . Тогда

$$\phi(z_{\inf}^-(\alpha)) \int_{\Omega} p(\omega) d\omega \leq \int_{\Omega} \phi(z^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \leq \phi(z_{\sup}^-(\alpha)) \int_{\Omega} p(\omega) d\omega.$$

Отсюда

$$\phi(z_{\inf}^-(\alpha)) \leq \frac{1}{p_0} \int_{\Omega} \phi(z^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \leq \phi(z_{\sup}^-(\alpha)).$$

Учитывая, что ϕ^{-1} монотонно возрастает вместе с ϕ , получим требуемое. Аналогично для индексов с плюсом. В случае строгого монотонного убывания функции ϕ доказательство проводится близкими рассуждениями. $\square$

Рассмотрим соотношение доминирования между $M_{\phi}(\tilde{z}(\omega))$ и $M_p(\tilde{z}(\omega))$ для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ при различных определяющих функциях ϕ .

Теорема 5. Пусть $\phi(x)$ — выпуклая вниз (вогнутая) непрерывная возрастающая функция либо выпуклая вверх непрерывная убывающая функция. Тогда для $\tilde{z}(\omega) \in \tilde{C}_{\omega}$ справедливо соотношение

$$M_p(\tilde{z}(\omega)) \prec M_{\phi}(\tilde{z}(\omega)).$$

Если $\phi(x)$ — непрерывная выпуклая вниз строго убывающая функция либо выпуклая вверх строго возрастающая функция, то

$$M_{\phi}(\tilde{z}(\omega)) \prec M_p(\tilde{z}(\omega)).$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай. Требуется показать, что

$$z_p^-(\alpha) \leq z_{\phi}^-(\alpha), \quad z_p^+(\alpha) \leq z_{\phi}^+(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1], \quad (11)$$

где $z^{\pm}(\alpha)$ определяются формулами (3), а $z_{\phi}^{\pm}(\alpha)$ — формулами (9).

Приведем рассуждения для левых индексов. Зафиксируем $\alpha \in (0, 1]$. В силу выпуклости вверх функции ϕ согласно неравенству Иенсена (см. [6, гл. III]) имеем

$$\int_{\Omega} \phi(z^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \leq \phi \left(\int_{\Omega} (z^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega) \right).$$

Так как согласно предположению функция ϕ строго монотонно возрастает, такой же будет и обратная ϕ^{-1} . Тогда предыдущее неравенство влечет

$$\phi^{-1} \left(\int_{\Omega} \phi(z^-(\omega, \alpha)) p(\omega) d\omega \right) \leq \int_{\Omega} z^-(\omega, \alpha) p(\omega) d\omega \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

т.е. левую часть формулы (11). Аналогично для индексов с плюсом. $\square$

В случае, если $\phi(x) = \ln(x)$ (при $x > 0$ — выпуклая вверх строго монотонно возрастающая функция), теорема 5 дает аналог известного неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (см. [6, гл. II]). Если $\phi(x) = 1/x$ (при $x > 0$ — выпуклая вниз строго монотонно убывающая функция), получаем аналог неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим, а если $\phi(x) = x^p$, $p > 1$ (при $x > 0$ — выпуклая вниз, строго возрастающая функция) — имеем аналог неравенства между средним арифметическим и средним степенным.

4. Дефазификация нечеткого интегрального среднего. Как известно, среднее нечеткого числа при интервальном подходе определяется равенством (см. [11])

$$z_{cp} = \frac{1}{2} \int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha)) d\alpha.$$

В связи с этим определим усредняющий функционал для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_\omega$ формулой

$$l_p(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([M_p(\tilde{z}(\omega))]^-(\alpha) + [M_p(\tilde{z}(\omega))]^+(\alpha) \right) d\alpha, \quad (12)$$

где $M_p^\pm(\alpha)$ — индексы нечеткого интегрального среднего $M_p(\tilde{z}(\omega))$, задаваемые формулой (3).

Теорема 6. Усредняющий функционал $l_p : J_\omega \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой (12), обладает следующими свойствами регулярности:

(i) *идемпотентность*: если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то

$$l_p(\tilde{z}(\omega)) = z_{cp};$$

(ii) *монотонность*: если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega) \in J_\omega$ выполнено условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то

$$l_p(\tilde{z}_1(\omega)) \leq l_p(\tilde{z}_2(\omega));$$

(iii) *непрерывность*: функционал $l_p : J_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен;

(iv) *эффективность*: если $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega), \tilde{z}_3(\omega) \in J_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то

$$l_p(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)) \prec l_p(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)).$$

Доказательство следует из теоремы 1 с учетом определения (12).

Граничное условие (iv) в случае (12) понимается так. Определим для заданной ограниченной на $\Omega \times [0, 1]$ нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ числа

$$z_{\inf}^\pm = \inf_{\substack{\omega \in \Omega \\ \alpha \in [0, 1]}} z^\pm(\omega, \alpha), \quad z_{\sup}^\pm = \sup_{\substack{\omega \in \Omega \\ \alpha \in [0, 1]}} z^\pm(\omega, \alpha).$$

Предложение 5. Для заданной измеримой и ограниченной на $\Omega \times [0, 1]$ нечеткой функции $\tilde{z}(\omega)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}(z_{\inf}^- + z_{\inf}^+) \leq l_p(\tilde{z}(\omega)) \leq \frac{1}{2}(z_{\sup}^- + z_{\sup}^+).$$

Предложение 6. Усредняющий функционал $l_p : J_\omega \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой (12), аддитивен и однороден.

Это утверждение является следствием теоремы 2 и определения (12) усредняющего функционала l_p .

Экстремальное свойство для функционала (12) принимает следующий вид.

Предложение 7. Для заданной нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in J_\omega$ число $l_p(\tilde{z}(\omega))$ является решением следующей экстремальной задачи:

$$\delta_{\tilde{z}}(y) = \int_0^1 \int_\Omega \left((z^-(\omega, \alpha) - y)^2 + (z^+(\omega, \alpha) - y)^2 \right) p(\omega) d\omega d\alpha \rightarrow \min \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Доказательство следует из достаточного признака минимума дифференцируемой функции $\delta_{\tilde{z}}(y)$ с учетом определения $l_p(\tilde{z}(\omega))$.

Пример 2. В условиях примера 1 значение функционала $l_p(\tilde{z}(\omega))$ имеет вид

$$l_p(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{4p_0} \left(\int_\Omega (a(\omega) + c(\omega)) p(\omega) d\omega + 2 \int_\Omega b(\omega) p(\omega) d\omega \right).$$

Определим нелинейный усредняющий функционал для нечеткой функции $\tilde{z}(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ и заданной строго монотонной непрерывной функции $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$f_\phi(\tilde{z}(\omega)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([M_\phi(\tilde{z}(\omega))]^-(\alpha) + [M_\phi(\tilde{z}(\omega))]^+(\alpha) \right) d\alpha, \quad (13)$$

где $M_\phi^\pm$ определяются выражениями (9).

Теорема 7. *Нелинейный усредняющий функционал $f_\phi : \tilde{C}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$, определяемый формулой (13), удовлетворяет следующим условиям регулярности:*

(i) *идемпотентность: если $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то*

$$f_\phi(\tilde{z}(\omega)) = z_{cr};$$

(ii) *монотонность: если для двух нечетких функций $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ выполнено условие $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$ при почти всех $\omega \in \Omega$, то*

$$f_\phi(\tilde{z}_1(\omega)) \leq f_\phi(\tilde{z}_2(\omega));$$

(iii) *непрерывность: функционал $f_\phi : \tilde{C}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен;*

(iv) *эффективность: если $\tilde{z}_1(\omega), \tilde{z}_2(\omega), \tilde{z}_3(\omega) \in \tilde{C}_\omega$ и $\tilde{z}_1(\omega) \prec \tilde{z}_2(\omega)$, то*

$$f_\phi(\tilde{z}_1(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)) \prec f_\phi(\tilde{z}_2(\omega) + \tilde{z}_3(\omega)).$$

Доказательство следует из теоремы 4 с учетом определения нелинейного нечеткого усредняющего функционала (13).

Пример 3 (см. [1, гл. 4]). Пусть нечеткая функция $\tilde{y}(t)$ характеризует плотность непрерывного денежного потока $\tilde{x}(t)$ в том смысле, что

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t \tilde{y}(\tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части означает нечеткое число с α -индексами $\int_0^t y^-(\alpha, \tau) d\tau, \int_0^t y^+(\alpha, \tau) d\tau$, где y^- и y^+ — α -индексы нечеткой функции $\tilde{y}$. Пусть δ — сила роста при непрерывном начислении процентов. Тогда к моменту времени t накопленная сумма составит величину

$$\tilde{s}(t) = \int_0^t \tilde{y}(\tau) e^{\delta(t-\tau)} d\tau.$$

Соответственно, текущая стоимость потока платежей за промежуток времени $[0, T]$ составит величину

$$\tilde{p} = e^{-\delta T} \int_0^T \tilde{y}(\tau) e^{\delta(T-\tau)} d\tau = \int_0^T \tilde{y}(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau.$$

Пусть при всех $\tau \in [0, 1]$ величина $\tilde{y}(t)$ представляет собой треугольное нечеткое число $(y_1(\tau), y_2(\tau), y_3(\tau))$. Тогда $\tilde{p}$ — тоже треугольное число, причем его нечеткое интегральное среднее с весовой функцией $e^{-\delta\tau}$ согласно примеру 1 имеет вид

$$p^-(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\gamma} \int_0^T y_1(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^T y_2(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau,$$

$$p^+(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\gamma} \int_0^T y_3(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau + \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^T y_2(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau,$$

где

$$\gamma = \int_0^T e^{\delta t} dt = \frac{1}{\delta}(1 - e^{\delta T}).$$

Согласно примеру 2 дефазификация величины $\tilde{p}$ дает вещественное число

$$\frac{1}{4\gamma} \left(\int_0^T (y_1(\tau) + y_2(\tau)) e^{-\delta\tau} d\tau + 2 \int_0^T y_2(\tau) e^{-\delta\tau} d\tau \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волкова Е. С., Гусин В. Б. Нечеткие множества и мягкие вычисления в экономике и финансах. — М.: КНОРУС, 2019.
2. Джини К. Средние величины. — Статистика, 1970.
3. Леденева Т. М., Подвальный С. Л. Агрегирование информации в оценочных системах// Вестн. ВГУ. Сер. Сист. анал. информ. технол. — 2016. — № 4. — С. 155–164.
4. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. — М.: Бином, 2015.
5. Смоляк С. А. Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. — М.: Наука, 2002.
6. Харди Г., Поля Д., Литтлвуд Д. Неравенства. — М.: МНЦНМО, 2008.
7. Хацкевич В. Л. О средних значениях нечетких чисел и их систем// Нечеткие системы и мягкие вычисления. — 2021. — 16, № 1. — С. 5–20.
8. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions// J. Math. Anal. Appl. — 1965. — 12, № 1. — P. 1–12.
9. Beliakov G., Bustince H., Calvo T. A Practical Guide to Averaging Functions. — Cham: Springer, 2016.
10. Diamond P., Kloeden P. Metric spaces of fuzzy sets// Fuzzy Sets Syst. — 1990. — 35, № 2. — P. 241–249.
11. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — 24, № 3. — P. 279–300.
12. Kwak K., Pedrycz W. Face recognition: A study in information fusion using fuzzy integral// Patt. Recog. Lett. — 2005. — 26. — P. 719–733.
13. Kaleva O. Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst.. — 24, № 3. — P. 301–317.
14. Kaleva O., Seikkala S. On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — 12. — P. 215–229.
15. Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornikova M. A review of aggregation functions// Stud. Fuzz. Soft Comput. — 2008. — 220. — P. 121–144.
16. Nguyen H. T. A note on the extension principle for fuzzy sets// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — 64. — P. 369–380.
17. Roldin A. F. L., Bustince H., Fernandez J., Rodriguez I., Fardoun H., Lafuente J. Affine construction methodology of aggregation functions// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — 414. — P. 146–164.
18. Svistula M. A note on the Choquet integral as a set function on a locally compact space// Fuzzy Sets Syst. — 2022. — 430. — P. 69–78.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: vlkhats@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 150–164
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-150-164

УДК 517.977.1, 517.928

РОБАСТНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. О. Б. ЦЕХАН

Аннотация. Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с малым параметром при части старших производных исследуется свойство равномерной наблюдаемости, характеризующее возможность однозначного определения состояния системы в любой момент времени t по значениям выходной функции и ее производных до определенного порядка только в точке t , а также свойство аппроксимативной наблюдаемости, состоящее в возможности с помощью δ -последовательностей сколь угодно точно оценить текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система, нестационарная система, равномерная наблюдаемость, аппроксимативная наблюдаемость, расщепляющее преобразование, робастные достаточные условия.

ROBUST SUFFICIENT CONDITIONS FOR UNIFORM OBSERVABILITY OF A LINEAR NONSTATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

© 2023 О. В. TSEKHAN

ABSTRACT. For a linear nonstationary singularly perturbed system with small coefficients of higher derivatives, we examine the property of uniform observability, which characterizes the possibility of uniquely determining the state of the system at any time t by the values of the output function and its derivatives up to a certain order only at the point t , as well as the property of approximative observability, which means the possibility of accurate estimating the current state of the system without differentiating the output function using δ -sequences.

Keywords and phrases: singularly perturbed system, nonstationary system, uniform observability, approximate observability, splitting transformation, robust sufficient conditions.

AMS Subject Classification: 34Kxx

1. Введение. Наблюдаемость наряду с устойчивостью, управляемостью, стабилизируемостью является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении возможности однозначного восстановления текущих (или начальных) состояний системы по данным наблюдений, что равносильно взаимно однозначному соответствию между выходами и порождающими их состояниями системы. При этом важно понимать, какая информация о выходе используется для восстановления состояния, с помощью каких операций происходит восстановление (алгебраические методы, разрешающие операции, наблюдатели).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

В отличие от стационарных, для нестационарных систем различают целый ряд понятий наблюдаемости (см. [9] и ссылки в этой работе): полная, дифференциальная, равномерная, равномерно полная, аппроксимативная, равномерно точечная, наблюдаемость с помощью разрешающих операций, наблюдаемость в классе систем функций Чебышева, хессенбергова и др. Для стационарных систем условия полной, дифференциальной, равномерной наблюдаемости совпадают, для нестационарных систем это не так. Полная наблюдаемость стационарной системы гарантирует существование для нее асимптотического эстиматора (см. [26]).

Для проверки наблюдаемости используются разные условия, которые могут быть сформулированы с использованием фундаментальной матрицы (неявные условия наблюдаемости; см. [11]), в терминах грамиана наблюдаемости, вронскиана, системы функций Чебышева (см. [5]). Так как получить в явном виде фундаментальную матрицу для нестационарной системы удастся лишь в исключительных случаях, то важной является задача исследования проблемы наблюдаемости без использования явного вида фундаментальной матрицы. Выразить условия наблюдаемости непосредственно через параметры исходной системы наблюдения при определенных условиях удастся с помощью матрицы наблюдаемости $S(t)$ (см. [16, 17, 28]), построенной для достаточно гладких параметров системы наблюдения. Понятие равномерной наблюдаемости впервые было введено в [28] в терминах матрицы наблюдаемости $S(t)$, удовлетворяющей требованию невырожденности при всех t . В [27] невырожденность матрицы наблюдаемости использована как чисто техническое средство, позволяющее строить канонические формы систем управления и систем наблюдения.

В [6] равномерная наблюдаемость определяется в терминах отображения «состояние $x(t) \rightarrow$ вектор $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ », где $y(t)$ — выходной сигнал, что отражает возможность в любой момент времени t алгебраическим путем определять текущее состояние системы $x(t)$ по значениям только в этот момент времени t выходного сигнала и его производных. Это важно, так как при конструировании систем регулирования, как правило, регулятор строится в виде функции текущего состояния системы $x(t)$. В [2–4, 6–8, 12, 13] равномерная наблюдаемость исследована систематически исходя из определения в терминах выходных функций.

Впервые матрица наблюдаемости введена в [28] для систем с определенными требованиями на гладкость параметров системы. Вместе с тем эти требования по существу наложены для обеспечения требуемой гладкости только выходной функции, поэтому в общем случае они могут быть ослаблены. Это сделано в [13], где для произвольного целого $k > 0$ введено понятие систем наблюдения класса k . С помощью этого понятия установлены точные, в общем случае более слабые, чем ранее известные (см., например, [17]), требования на гладкость параметров системы, обеспечивающие принадлежность выходной функции $y(t)$ классу C^k , сформулированы необходимые и достаточные условия равномерной наблюдаемости в терминах матрицы наблюдаемости. Установлено, что множество $\mathcal{R}$ равномерно наблюдаемых систем устойчиво относительно группы линейных преобразований с гладкими коэффициентами, дано полное описание множества $\mathcal{R}$.

В [9] показано, что условия равномерной наблюдаемости совпадают с условиями аппроксимативной наблюдаемости, т.е. возможности с помощью δ -последовательностей сколь угодно точно оценить текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции.

Сингулярно возмущенные системы являются математическими моделями динамических систем, в которых реализуются одновременно несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами (см. обзорные работы [10, 14, 22, 24] и ссылки в них). Высокая размерность моделей и наличие разнотемповых переменных обуславливают проблемы вычислительной жесткости, повышения порядка динамических уравнений, что вызывает трудности при численном исследовании таких систем. Заметим, что для сингулярно возмущенных систем исследуют условия наличия структурных свойств при всех достаточно малых значениях параметра.

Для решения проблем большой размерности и жесткости сингулярно возмущенных систем, исследования их структурных свойств и построения способов управления и наблюдения прибегают к процедурам декомпозиции. Известен подход (см. [20, 21]) к исследованию структурных свойств сингулярно возмущенных систем, состоящий в том, что к системе применяется невырожденное расщепляющее преобразование, эквивалентным образом сводящее исходную двухтемповую систему к разделенным по темпам системам меньшей размерности, асимптотически (по малому параметру) близким к подсистемам, не зависящим от малого параметра. Такая декомпозиция позволяет выводить суждения о структурных свойствах сингулярно возмущенных систем при всех достаточно малых значениях параметра по наличию аналогичных свойств у связанных с

ней не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности. Доказательство такого рода суждений может быть основано на исследовании зависимости от малого параметра свойств объектов (матриц, спектров и т. п.), в терминах которых формулируются условия. Проблема применения декомпозиционного подхода заключается в том, чтобы установить условия на параметры исходной системы, при которых возможна декомпозиция сингулярно возмущенных систем, а также справедливы суждения о связи структурных свойств исходной сингулярно возмущенной системы и асимптотически близких к ней подсистем. Например, для стационарных систем при малых возмущениях параметров системы полнота ранга матриц из условий наличия структурных свойств сохраняется. На этом свойстве основывается утверждение (см. [23, с. 100]) о том, что управляемая стационарная система сохраняет управляемость при малых аддитивных возмущениях матриц системы, что в силу принципа двойственности справедливо и для наблюдаемости стационарных систем. Для нестационарных систем аналогичные утверждения справедливы лишь при выполнении некоторых дополнительных требований. Так, в отличие от стационарных систем, при применении критериев, использующих матрицу наблюдаемости, требуется установление условий принадлежности системы классу $n - 1$ для всех достаточно малых значений параметра, и условий, обеспечивающих асимптотическую близость матриц наблюдаемости исследуемой системы и связанных с ней не зависящих от параметра вырожденной системы и системы погранслоя.

В настоящей работе для линейной нестационарной двухтемповой сингулярно возмущенной системы исследуются условия равномерной наблюдаемости, аппроксимативной наблюдаемости в терминах принадлежности нестационарной системы наблюдения классу k и полноты ранга матрицы наблюдаемости. Получены не зависящие от малого параметра условия принадлежности линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы классу k , обеспечивающие существование матрицы наблюдаемости системы при любом положительном значении параметра, исследованы свойства зависящей от малого параметра матрицы наблюдаемости системы, установлена связь между матрицами наблюдаемости исходной системы и не зависящих от малого параметра медленной и быстрых подсистем, построенных по исследуемой системе и имеющих размерность меньше исходной.

На основе полной декомпозиции системы по темпам изменения переменных состояния, выполненной с помощью линейной невырожденной замены переменных, доказаны эффективные с конструктивной точки зрения ранговые, не зависящие от параметра и справедливые для всех его достаточно малых значений достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. Условия выражены через матричные коэффициенты медленной и быстрых подсистем в терминах матриц наблюдаемости этих подсистем. Аналогичный результат для свойства равномерно полной наблюдаемости получен в [25, следствие 2].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана исследуемая система, введены основные понятия, определены цели исследования. В разделе 3 установлены зависящие от параметра критерии равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. В разделе 4 введены связанные с системой не зависящие от параметра вырожденная система и система погранслоя, получены критерии их равномерной наблюдаемости. В разделе 5 исследована структура матрицы наблюдаемости системы и доказана лемма о принадлежности системы классу k независимо от малого параметра. В разделе 6 доказан основной результат: робастные по малому параметру и не зависящие от него достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости системы. В заключение приведен пример, иллюстрирующий применение результатов, сделаны выводы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), & x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), & y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \\ v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $x(t)$ — медленная переменная, $y(t)$ — быстрая переменная, $v(t)$ — выход системы, $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, — непрерывные на T матричные функции соответствующих размеров, $c_j(t)$, $j = 1, 2$, — непрерывные на T вектор-строки функции. Здесь и далее при $i = 0, 1, 2, \dots$ для произвольной матричной функции будем говорить, что она i раз непрерывно дифференцируема, если все ее элементы i раз непрерывно дифференцируемы.

Обозначим $n = n_1 + n_2$, $z' = (x', y')$, $z'_0 = (x'_0, y'_0)$, $'$ — символ транспонирования. Определим по параметрам системы вектор-функцию $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t)/\mu & A_4(t)/\mu \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Тогда систему (1) можно представить в пространстве состояний в эквивалентном виде

$$(A(\mu), c) : \begin{cases} \dot{z}(t) = A(t, \mu)z(t), & z \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \\ v(t) = c(t)z(t), & v \in \mathbb{R}, \quad t \in T, \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (3)$$

Для удобства изложения отождествим систему (1) с парой $(A(\mu), c)$, состоящей из функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$, а совокупность всех таких пар с непрерывными на T компонентами обозначим Σ .

Следуя [12, с. 166–168], при фиксированном $\mu > 0$ определим оператор $L : \Sigma \rightarrow \Sigma$, действующий по правилу

$$L(A(\mu), c) = (A(\mu), cA(\mu) + \dot{c}). \quad (4)$$

Область его определения $\mathcal{D}$ состоит из таких пар $(A(\mu), c)$, у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема. Если элементы n -вектор-функции

$$s(t, \mu) = c(t)A(t, \mu) + \dot{c}(t)$$

принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$, то на паре $(A(\mu), c)$ определен оператор L^2 , для которого

$$L^2(A(\mu), c) = L(L(A(\mu), c)) = L(A(\mu), s), \quad s(t, \mu) = c(t)A(t, \mu) + \dot{c}(t).$$

По индукции можно найти любую степень L^k оператора L , область определения которой обозначим через $\mathcal{D}_k$. Для $k = 0$ полагаем

$$L^0(A(\mu), c) = (A(\mu), c), \quad \mathcal{D}_0 = \Sigma.$$

Каждая система $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_k$ называется системой класса k (см. [6]).

Замечание 1 (см. [6]). Если элементы матрицы $A(t, \mu)$ и строки $c(t)$ принадлежат пространствам $C^{k-1}(T, \mathbb{R})$ и $C^k(T, \mathbb{R})$ соответственно, то $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_k$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть в линейной нестационарной сингулярно возмущенной системе реализовалось некоторое фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ и для $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$ реализовалось некоторое начальное состояние $z_0 = z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, что породило процесс $z(t, \mu) = z(t, z_0, \mu)$, $t \in T$, и выходную функцию $v(t, \mu) = v(t, z_0, \mu)$, $t \in T$.

Определим n -вектор-столбец

$$V(t, \mu) = (v(t, \mu), v^{(1)}(t, \mu), \dots, v^{(n-1)}(t, \mu))'.$$

Определение 1 (ср. [6]). При любом фиксированном $\mu > 0$ система (1) класса $n - 1$ называется *равномерно наблюдаемой на отрезке T* , если при любом $z_0 \in \mathbb{R}^n$ отображение $z(t, \mu) \rightarrow V(t, \mu)$ инъективно для каждого $t \in T$.

Если при некотором $\mu^* \in (0, \mu^0]$ система (1) равномерно наблюдаема на T для всех $\mu \in (0, \mu^*]$, будем говорить, что она *равномерно наблюдаема на отрезке T робастно относительно μ* .

Пусть известна выходная функция $v(t, \mu) = v(t, \mu, z_0)$ системы (1), реализовавшаяся при некотором неизвестном z_0 и известном фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$.

Пусть задана некоторая δ -последовательность (см. [1]) $\{\delta_m(t)\}_{m=1}^\infty$. Определим величины

$$v_m^{(j)}(t, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t - \tau, \mu) \delta_m^{(j)}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1,$$

и составим вектор-столбец $V_m(t, \mu)$ с компонентами $v_m(t, \mu)$, $v_m^{(1)}(t, \mu)$, $\dots$, $v_m^{(n-1)}(t, \mu)$. Каждая последовательность $\{v_m^{(j)}(t, \mu)\}_{m=1}^\infty$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, почти равномерно на T сходится к j -й производной $v^{(j)}(t, \mu)$.

Определение 2. При любом фиксированном $\mu > 0$ система (1) класса $n-1$ называется *аппроксимативно наблюдаемой в классе δ -последовательностей*, если при любом $z_0 \in R^n$ функция $v(t, \mu)$ принадлежит классу C^{n-1} и существует такая непрерывная, не зависящая от z_0 , обратимая при любом $v \in T$ матрица $M(t, \mu)$ размера $(n \times n)$, что для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m(z_0, t, \delta)$, обладающий свойством

$$\|z(t, \mu, z_0) - M(t, \mu)v_m(t, \mu)\| < \epsilon \quad (5)$$

при $m \geq m_0$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$.

Если неравенство (5) выполняется при всех достаточно малых $\mu > 0$, то систему назовем *аппроксимативно наблюдаемой в классе δ -последовательностей робастно относительно μ* .

Замечание 2. В отличие от равномерной наблюдаемости, обеспечивающей возможность точного восстановления текущего состояния системы, аппроксимативная наблюдаемость гарантирует лишь возможность оценить текущее состояние с любой заданной точностью.

Обозначим символом $O(\mu)$ вектор-функцию $f(t, \mu)$ (размерность следует из контекста) на интервале $[t_1, t_2]$, элементы $f_i(t, \mu)$ которой таковы, что существуют такие постоянные $\mu^* > 0$, $c > 0$, что евклидова норма $|f(t, \mu)|$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, \mu)| \leq c\mu \quad \forall \mu \in (0, \mu^*], \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Задача. Найти условия на матричные параметры системы (1), при которых система (1) равномерно аппроксимативно наблюдаема для всех достаточно малых значений $\mu > 0$, т.е. робастно относительно μ .

3. Наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем. При фиксированном $\mu > 0$ для $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$ по параметрам $A(t, \mu)$, $c(t)$ системы (3) определим n -вектор-строки $s_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, по формулам

$$s_0(t, \mu) = c(t), \quad s_j(t, \mu) = s_{j-1}(t, \mu)A(t, \mu) + \dot{s}_{j-1}(t, \mu), \quad (6)$$

и составим из них $(n \times n)$ -матрицу

$$S_{A(\mu), c}(t, \mu) = (s_j(t, \mu))_{j=\overline{0, n-1}}, \quad t \in T. \quad (7)$$

Матрица $S_{A(\mu), c}(t, \mu)$ называется *матрицей наблюдаемости* пары $(A(\mu), c)$.

Из результатов [6], определений системы класса k , степени L^j оператора L (см. (4)), строк $s_j(t)$ (см. (6)) и матрицы наблюдаемости (7) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. При любом фиксированном $\mu > 0$ следующие утверждения эквивалентны:

- (i) система $(A(\mu), c)$ имеет класс $n-1$;
- (ii) для любого $j = \overline{0, n-1}$ определены степени L^j оператора L (см. (4)) с областью определения $\mathcal{D}_j$;
- (iii) $(A(\mu), c) \in \mathcal{D}_{n-1}$;
- (iv) всякая выходная функция $v(t, \mu) = v(t, \mu, x_0)$ принадлежит множеству $C^{n-1}(T, \mathbb{R}^n)$;
- (v) матрица наблюдаемости $S_{A(\mu), c}(t, \mu)$ (см. (7)) системы $(A(\mu), c)$ определена для любого $t \in T$ и её элементы являются непрерывными на T функциями.

Следствие 1. Любая система класса n является также системой класса k , $k \leq n$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Применяя к системе (3) при фиксированном $\mu > 0$ теоремы из [6], убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. Пара $(A(\mu), c) \in \Sigma$ равномерно наблюдаема на T при фиксированном $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда при этом значении μ она имеет класс $n-1$ и $\text{rank } S_{A(\mu), c}(t, \mu) = n$ для любого $t \in T$.

Теорема 2. При фиксированном $\mu > 0$ система (1) аппроксимативно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда она равномерно наблюдаема на T при этом фиксированном $\mu > 0$.

4. Подсистемы линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем и их наблюдаемость.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$.

С системой (1) связаны не зависящие от параметра μ вырожденная система и система пограничного слоя, которые получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$ (см. [20]). Так, вырожденная система (медленная подсистема) формально получается из системы (1), если в ней положить $\mu = 0$, при условии $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, выразить из уравнения быстрой переменной

$$y_s(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t)x_s(t)$$

и исключить переменную y_s из уравнения для медленной переменной x . Вырожденная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A_s(t)\bar{x}(t), \\ \bar{x}(0) = x_0, \\ v_s(t) = c_s(t)\bar{x}(t), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad c_s(t) \triangleq c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t),$$

и является нестационарной n_1 -мерной системой. Отождествим ее с парой $(A_s, c_s) \triangleq (A_s(t), c_s(t))$.

Соответствующая система пограничного слоя (быстрая подсистема) формально выводится из (1) следующим образом:

- (i) заменить независимую переменную («растянуть» шкалу времени: $\tau = (t - t_0)/\mu$, $t = t_0 + \mu\tau$);
- (ii) подставить $\mu = 0$ в правой части первого уравнения для $x(\tau)$;
- (iii) «заморозить» медленную переменную x в уравнении для быстрой переменной y ;
- (iv) ввести новые переменные состояния $\tilde{y}$ и выходную функцию (на «растянутой» шкале времени):

$$\tilde{y}(\tau) := y(\mu\tau + t_0), \quad \tilde{v}(\tau) := v(\mu\tau + t_0);$$

- (v) члены, содержащие переменную медленного состояния x , удалить из второго уравнения (1).

В результате система пограничного слоя примет вид линейной стационарной n_2 -мерной системы

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)\tilde{y}(\tau), & \tau = \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right], \\ v_f(\tau) = c_2(t_0)\tilde{y}(\tau), \\ \tilde{y}(\tau) = y(t) - y_s(t), \\ \tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0 \triangleq y_0 - \bar{y}(t_0) = y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0. \end{cases} \quad (9)$$

Отождествим ее с парой $(A_4, c_2) \triangleq (A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Для вырожденной системы (8) и системы пограничного слоя (9) понятия равномерной наблюдаемости вводятся, как в [6].

Определение 3. Вырожденная система (8) называется *равномерно наблюдаемой на отрезке* T , если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ функция $v_s(t) = v_s(t, x_0)$ является $(n_1 - 1)$ раз непрерывно дифференцируемой на T (т.е. $(A_s, c_s) \in \mathcal{D}_{n_1-1}$) и отображение

$$x_s(t) \rightarrow (v_s(t), v_s^{(1)}(t), \dots, v_s^{(n_1-1)}(t)), \quad v_s(t) = v_s(t, x_0)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

Определение 4. Система пограничного слоя (9) называется *равномерно наблюдаемой на T_μ* , если при любом $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ отображение

$$\tilde{y}(\tau) \rightarrow (v_f(\tau), v_f^{(1)}(\tau), \dots, v_f^{(n_2-1)}(\tau)), \quad v_f(\tau) = v_f(\tau, \tilde{y}_0)$$

инъективно для каждого $\tau \in T_\mu$.

Наряду со стационарной системой пограничного слоя (9) введем семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ вида (9) с $A_4(t)$ и $c_2(t)$ вместо $A_4(t_0)$ и $c_2(t_0)$, где $t \in T$ — фиксированное значение, рассматриваемое как параметр семейства. Система пограничного слоя (9) выделяется из семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ при $t = t_0$.

Определение 5. Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ называется *равномерно наблюдаемым на T_μ* , если любая подсистема из семейства ($t \in T$) равномерно наблюдаема.

Пусть $(A_s, c_s) \in \mathcal{D}_{n_1-1}$. Определим следующие матрицы: $(n_1 \times n_1)$ -матрицу наблюдаемости вырожденной системы (A_s, c_s) :

$$S_s(t) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) \\ s_{s1}(t) \\ \dots \\ s_{s, n_1-1}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (10)$$

где n_1 -вектор-строки $s_{sj}(t)$, $j = 1, 2, \dots$, определяются по формулам

$$s_{sj}(t) = s_{s, j-1}(t)A_s(t) + \dot{s}_{s, j-1}(t), \quad s_{s0}(t) = c_s(t), \quad (11)$$

и $(n_2 \times n_2)$ -матрицу наблюдаемости семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$, $t \in T$:

$$S_f(t) = \begin{pmatrix} s_{f0}(t) \\ s_{f1}(t) \\ \dots \\ s_{f, n_2-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где n_2 -вектор-строки $s_{f0}(t)$, $s_{f1}(t)$, $\dots$ определяются по формулам

$$s_{fj}(t) = s_{f, j-1}(t)A_4(t), \quad s_{f0}(t) = c_2(t). \quad (13)$$

Заметим, что $S_f(t_0)$ совпадает с матрицей наблюдаемости стационарной системы пограничного слоя (9).

Применяя к вырожденной системе (8) и системе пограничного слоя (9) условия из [5, стр.89], получаем следующее утверждение.

Теорема 3 (условия равномерной наблюдаемости). *Вырожденная система равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда она имеет класс $(n_1 - 1)$ и $\text{rank } S_s(t) = n_1$ для любого $t \in T$. Система пограничного слоя (9) равномерно наблюдаема тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_f(t_0) = n_2$.*

Теорема 4 (условия равномерной наблюдаемости семейства быстрых подсистем). *Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ равномерно наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\text{rank } S_f(t) = n_2$ для всех $t \in T$.*

5. Линейные нестационарные сингулярно возмущенные системы класса k . При исследовании сингулярно возмущенных систем важно иметь не зависящие от малого параметра условия, при которых система обладает некоторым свойством при *всех достаточно малых значениях параметра*. Прежде всего получим такие условия для свойства принадлежности системы классу k . Для этого представим матрицу $A(t, \mu)$ (см. (2)) в виде

$$A(t, \mu) = A^1(t) + \frac{1}{\mu}A^2(t), \quad A^1(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Согласно (14) поставим в соответствие n -мерной системе $(A(\mu), c)$ (см. (1)) тройку $(A^1(t), A^2(t), \{c(t), 0_{1 \times (n-1)}\})$. Определим n -вектор-функции $s_0^0(t) = c(t)$, $s_0^m(t) = 0_{1 \times n}$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, и положим

$$\Gamma^0(t) = \{s_0^m(t), m = 0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Множество всех троек $(A^1(t), A^2(t), \Gamma(t))$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n^2}$, с непрерывными на T компонентами обозначим $\Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$. На тройке $(A^1(t), A^2(t), \Gamma^0(t)) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$ определим оператор

$$\Lambda : \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma(t))} \rightarrow \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}, \quad \Lambda(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \Gamma^1),$$

где $\Gamma^1(t) = \{s_1^0(t), s_1^1(t), \dots, s_1^{n-1}(t)\} \in \mathbb{R}^{n^2}$, компоненты $s_1^m(t)$, $m = 0, 1$, вычислены по формулам

$$s_1^0(t) = s_0^0(t)A^1(t) + \dot{s}_0^0(t), \quad s_1^1(t) = s_0^0(t)A^2(t), \quad s_1^m(t) = 0_{1 \times n}, \quad m = 2, 3, \dots, n-1.$$

Область определения D оператора Λ состоит из таких троек $(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \{c, 0_{1 \times (n-1)n}\}) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$, у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема.

При условии достаточной гладкости матриц системы для $j = 0, 1, 2, \dots$ определим n -вектор-функции $s_j^m(t)$ рекуррентными соотношениями

$$s_j^m(t) = \begin{cases} s_0^0(t) = c(t), \\ s_j^m(t) = 0, \\ s_{j-1}^m(t)A^1(t) + s_{j-1}^{m-1}(t)A^2(t) + \dot{s}_{j-1}^m(t), \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{если } m > j \text{ или } m < 0, \\ \text{если } m = \overline{1, j-1}. \end{array} \quad (15)$$

Если компоненты элементов множества $\Gamma^1(t)$ принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$, то на тройке $(A^1, A^2, \Gamma^1) \in \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma)}$ определен оператор Λ^2 , для которого

$$\Lambda^2(A^1, A^2, \Gamma^0) = \Lambda(\Lambda(A^1, A^2, \Gamma^0)) = \Lambda(A^1, A^2, \Gamma^1) = (A^1, A^2, \Gamma^2),$$

где $\Gamma^2(t) = \{s_2^m(t), m = \overline{0, n-1}\} \in \mathbb{R}^{n^2}$, а $s_2^m(t)$, $m = \overline{0, n-1}$, вычислены по формулам (15).

Область определения D_2 оператора Λ^2 состоит из троек $(A^1, A^2, \{c, 0_{1 \times (n-1)n}\})$, для которых компоненты элементов множества $\Gamma^1(t)$ принадлежат множеству $C^1(T, \mathbb{R})$.

По индукции можно найти любую степень Λ^k оператора Λ , область определения которой обозначим через D_k . Для $k = 0$ полагаем

$$\Lambda^0(A^1, A^2, \Gamma^0) = (A^1, A^2, \Gamma^0), \quad D_0 = \Sigma_{(A^1, A^2, \Gamma^0)}.$$

Лемма 1 (о структуре матрицы наблюдаемости). *Если $(A^1, A^2, \Gamma^0) \in D_{n-1}$, то строки $s_j(t, \mu)$ (см. (6)) матрицы наблюдаемости (7) представимы в виде*

$$s_j(t, \mu) = \sum_{m=0}^j \frac{1}{\mu^m} s_j^m(t), \quad (16)$$

где $s_j^m(t)$ определяются по формуле (15).

Доказательство. Используем метод математической индукции. Для $j = 0$ справедливость (16) следует непосредственно из (6), (15). Пусть (16) верно для $j = \overline{0, k-1}$. Согласно (6) и (14) имеем:

$$\begin{aligned} s_k(t, \mu) &= s_{k-1}(t, \mu) \left(A^1(t) + \frac{1}{\mu} A^2(t) \right) + \dot{s}_{k-1}(t, \mu) \stackrel{(16)}{=} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{\mu} (s_{k-1}^m(t)A^1 + \dot{s}_{k-1}^m(t)) + \sum_{m=1}^k \frac{1}{\mu} s_{k-1}^{m-1}(t)A^2 \stackrel{(15)}{=} \sum_{m=0}^k \frac{1}{\mu^m} s_k^m(t). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2 (о принадлежности системы классу $n-1$). *Пусть $n \geq 2$. Если для любого $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$, матричные функции (15) дифференцируемы, $s_j^m(t) \in C^1(T, \mathbb{R}^n)$, то для любого $\mu > 0$ система $(A(\mu), c)$ является системой класса $n-1$.*

Доказательство. Если верны предположения леммы, то $(A^1, A^2, \Gamma^0) \in D_{n-1}$ и определены вектор-строки $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$ (см. (15)), а значит, и $s_j(t, \mu)$ (см. (16)) для всех $\mu > 0$. Следовательно, определена матрица наблюдаемости (7), что согласно предложению 1 (п. (i), (v)) доказывает лемму. $\square$

6. Основной результат. Пусть $\lambda(A(t))$ — собственные значения матрицы $A(t)$.

Теорема 5 (условия равномерной наблюдаемости). Пусть выполнены следующие условия:

- (i) $\Re \lambda(A_4(t)) \leq -\alpha < 0$ для всех $t \in T$;
- (ii) матричные функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, непрерывно дифференцируемы на T ;
- (iii) если $n \geq 2$, то матричные функции $s_j^m(t)$, $j = \overline{0, n-2}$, $m = \overline{0, j}$ (см. (15)) непрерывно дифференцируемы на T ;
- (iv) матричные функции $A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $A_2(t)A_4^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T ;
- (v) векторные функции $s_{sj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$ (см. (11)) ограничены на T ;
- (vi) вырожденная система (A_s, c_s) (см. (8)) равномерно наблюдаема на T , семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ равномерно наблюдаемо на T .

Тогда найдется такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что система (1) равномерно наблюдаема на T при любом фиксированном $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно μ .

Доказательство. Заметим прежде всего, что из предположения (i) следует, что $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Далее, при условиях (i), (ii) существует невырожденное линейное нестационарное преобразование $K(t, \mu)$ (см. [18])

$$K(t, \mu) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu H(t, \mu) \\ -L(t, \mu) & E_{n_2} - \mu L(t, \mu)H(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad \det K(t, \mu) \neq 0 \quad \forall \mu > 0, \quad t \in T, \quad (17)$$

где $L(t, \mu)$, $H(t, \mu)$ — ограниченные на T непрерывно дифференцируемые матричные функции с ограниченными на T производными. При этом справедливо представление

$$\begin{aligned} L(t, \mu) &= L_0(t) + \mu R_L(t, \mu), & L_0(t) &= A_4^{-1}(t)A_3(t), \\ H(t, \mu) &= H_0(t) + \mu R_H(t, \mu), & H_0(t) &= A_2(t)A_4^{-1}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где при выполнении условия (iv) матричные функции $R_L(t, \mu)$, $R_H(t, \mu)$ являются ограниченными на T (см. [20, с. 211]). Поэтому при выполнении условий (i), (ii) справедливы аппроксимации

$$L(t, \mu) = L_0(t) + O(\mu), \quad H(t, \mu) = H_0(t) + O(\mu). \quad (19)$$

В результате замены переменных

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = K^{-1}(t, \mu) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

линейная нестационарная сингулярно возмущенная система (1) преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями:

$$(A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}) : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_{\xi}(t, \mu)\xi(t), & \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu \dot{\eta}(t) = A_{\eta}(t, \mu)\eta(t), & \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T, \\ v(t) = c_{\xi\eta}(\mu, t)(\xi(t), \eta(t))', & t \in T, \end{cases} \quad (20)$$

где, с учетом (8), (17), (18), (19),

$$\begin{aligned} A_{\xi}(t, \mu) &\triangleq A_1(t) - A_2(t)L(t, \mu) = A_s(t) + \mu A_2 R_L(t, \mu) = A_s(t) + O(\mu), \\ A_{\eta}(t, \mu) &\triangleq A_4(t) + \mu L(t, \mu)A_2(t) = A_4(t) + O(\mu), \\ c_{\xi\eta}(\mu, t) &= (c_{\xi}(\mu, t) \quad c_{\eta}(\mu, t)), \\ c_{\xi}(\mu) &\triangleq c_1(t) - c_2(t)L(\mu, t) = c_s(t) - \mu c_2 R_L(t, \mu) = c_s(t) + O(\mu), \\ c_{\eta}(\mu, t) &\triangleq c_2(t) + \mu c_1(t)H(\mu, t) - \mu c_2(t)L(\mu, t)H(\mu, t) = c_2(t) + O(\mu). \end{aligned} \quad (21)$$

Известно (см. [2, лемма 1]), что свойство равномерной наблюдаемости системы (1) инвариантно относительно действия группы обратимых линейных нестационарных преобразований на пространстве R^n с гладкими коэффициентами. Значит, исходная (1) и расщепленная (20) системы одновременно являются равномерно наблюдаемыми или нет.

Из предположения (iii) согласно лемме 2 следует, что $(A(\mu), c)$ является системой класса $n - 1$ для любого $\mu > 0$. Так как для любого $k > 0$ множество $\mathcal{D}_k$ систем класса k инвариантно относительно действия невырожденных преобразований (см. [5, теорема 1.1.1, с. 17]), то расщепленная система (20)

$$(A_{\xi\eta}(t, \mu), c), \quad A_{\xi\eta}(t, \mu) = \text{diag} \left\{ A_{\xi}(t, \mu), \frac{A_{\eta}(t, \mu)}{\mu} \right\},$$

также является системой класса $n - 1$. Из предложения 1 (пп. (i) и (v)) следует, что для нее определена матрица наблюдаемости

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = \begin{pmatrix} S_{\xi\eta 0}(t, \mu) \\ S_{\xi\eta 1}(t, \mu) \\ \dots \\ S_{\xi\eta, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (22)$$

составленная из n -вектор-строк $s_{\xi\eta j}(t, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, определенных по формулам

$$s_{\xi\eta j}(t, \mu) = s_{\xi\eta, j-1}(t, \mu)A_{\xi\eta}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi\eta, j-1}(t, \mu), \quad s_{\xi\eta 0}(t, \mu) = c_{\xi\eta}(t, \mu), \quad (23)$$

и к ней применим критерий равномерной наблюдаемости из Теоремы 1: $\text{rank } S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = n$.

В силу диагональной структуры матрицы $A_{\xi\eta}(t, \mu)$ матрица наблюдаемости (22) расщепленной системы (20) имеет блочную структуру:

$$S_{\xi\eta}(t, \mu) = (S_{\xi}(t, \mu) \mid S_{\eta}(t, \mu)),$$

где

$$\begin{aligned} S_{\xi}(t, \mu) &= \begin{pmatrix} s_{\xi 0}(t, \mu) \\ s_{\xi 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\xi, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \quad S_{\eta}(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{\eta 0}(t, \mu) \\ s_{\eta 1}(t, \mu) \\ \dots \\ s_{\eta, n-1}(t, \mu) \end{pmatrix}, \\ s_{\xi j}(t, \mu) &= s_{\xi, j-1}(t, \mu)A_{\xi}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, j-1}(t, \mu), \quad s_{\xi 0}(t, \mu) = c_{\xi}(t, \mu), \\ s_{\eta j}(t, \mu) &= s_{\eta, j-1}(t, \mu)\frac{A_{\eta}(t, \mu)}{\mu} + \dot{s}_{\eta, j-1}(t, \mu), \quad s_{\eta 0}(t, \mu) = c_{\eta}(t, \mu). \end{aligned} \quad (24)$$

Докажем, что для матрицы наблюдаемости (22) расщепленной системы (20) справедливо представление

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) + O(\mu) & s_{f0}(t) + O(\mu) \\ s_{s1}(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu}(s_{f1}(t) + O(\mu)) \\ \dots & \dots \\ s_{s, n-1}(t) + O(\mu) & \frac{1}{\mu^{n-1}}(s_{f, n-1}(t) + O(\mu)) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $S_{sj}(t)$, $S_{fj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, вычисляются по формулам (11), (13).

Для этого методом математической индукции докажем представления

$$s_{\xi j}(t, \mu) = \sum_{m=0}^{j+1} \mu^m f_j^m(t, \mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (26)$$

где ограниченные на T функции $f_j^m(t, \mu)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} f_j^m(t, \mu) &= f_{j-1}^m(t, \mu)A_s(t) + f_{j-1}^{m-1}(t, \mu)A_2(t)R_L(t, \mu) + \dot{f}_{j-1}^m(t, \mu), \\ f_0^0(t, \mu) &= c_s(t), \quad f_0^1(t, \mu) = -c_2(t)R_L(t, \mu), \\ f_j^m(t, \mu) &= 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j + 1, \end{aligned} \quad (27)$$

а также представления

$$s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(\sum_{m=0}^{j+1} \mu^m g_j^m(t, \mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (28)$$

где ограниченные на T функции $g_j^m(t, \mu)$ определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} g_j^m(t, \mu) &= g_{j-1}^m(t, \mu)A_4(t) + g_{j-1}^{m-1}(t, \mu)L(t, \mu)A_2(t) + \dot{g}_{j-1}^{m-1}(t, \mu), \quad j = 1, 2, \dots, \\ g_0^0(t, \mu) &= c_2(t), \quad g_0^1(t, \mu) = c_1(t)H(t, \mu) + c_2L(t, \mu)H(t, \mu), \\ g_j^m(t, \mu) &= 0, \quad m < 0 \text{ или } m > j + 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Справедливость (26) для $j = 0$ следует сразу из (24), (21), (27).

Пусть (26) верно для $j \leq k - 1$. Докажем (26) для $j = k$. Действительно, из (24) имеем:

$$\begin{aligned} s_{\xi k}(t, \mu) &= s_{\xi, k-1}(t, \mu)A_{\xi}(t, \mu) + \dot{s}_{\xi, k-1}(t, \mu) \stackrel{(26), (21)}{=} \\ &= \sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu) \left(A_s(t) + \mu A_2 R_L(t, \mu) \right) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{k-1}^m(t, \mu) = \\ &= \sum_{m=0}^k \mu^m f_{k-1}^m(t, \mu) A_s(t) + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m f_{k-1}^{m-1}(t, \mu) A_2 R_L(t, \mu) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{f}_{j-1}^m(t, \mu) \stackrel{(27)}{=} \sum_{m=0}^k \mu^m f_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Аналогично докажем (28). Справедливость (28) для $j = 0$ следует сразу из (24), (21), (29).

Пусть (28) верно для $j \leq k - 1$. Докажем (28) для $j = k$. Действительно, из (24) имеем:

$$\begin{aligned} s_{\eta k}(t, \mu) &= s_{\eta, k-1}(t, \mu) \frac{1}{\mu} A_{\eta}(t, \mu) + \dot{s}_{\eta, k-1}(t, \mu) = \\ &= \frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_{j-1}^m(t, \mu) \left(A_4(t) + \frac{1}{\mu^{k-1}} L(t, \mu) A_2(t) \right) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{g}_{k-1}^m(t, \mu) \stackrel{(28), (21)}{=} \\ &= \frac{1}{\mu^k} \left(\sum_{m=0}^k \mu^m g_{k-1}^m(t, \mu) A_4(t) + \sum_{m=1}^{k+1} \mu^m g_{k-1}^{m-1}(t, \mu) L(t, \mu) A_2(t) + \sum_{m=0}^k \mu^m \dot{g}_{k-1}^m(t, \mu) \right) = \\ &= \frac{1}{\mu^k} \sum_{m=0}^k \mu^m g_k^m(t, \mu). \end{aligned}$$

Таким образом, равенства (26), (28) доказаны. Из (26), (28) с учетом (27), (29) легко получить

$$s_{\xi j}(t, \mu) = s_{sj}(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m f_j^{m+1}(t, \mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (30)$$

$$s_{\eta j}(t, \mu) = \frac{1}{\mu^j} \left(c_2(t) A_4^j(t) + \mu \sum_{m=0}^j \mu^m g_j^{m+1}(t, \mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (31)$$

При выполнении условий (iii) для любого $j = \overline{0, n-1}$ верно $s_{\xi \eta, j} \in C(T, \mathbb{R}^n)$; это следует из $\Sigma_{\xi \eta} \in \mathcal{D}_{n-1}$ и предложения 1(i), (v). При выполнении условий (v) функции $s_{\xi j}(t) - s_{sj}(t)$, $j = \overline{0, n-1}$, $\mu^j s_{\eta j}(t) - c_2(t) A_4^j(t)$ ограничены на T , поэтому из (30), (31) следует

$$\begin{aligned} s_{\xi j}(t, \mu) &= s_{sj}(t) + O(\mu), \quad j = \overline{0, n-1}, \\ s_{\eta j}(t, \mu) &= \frac{1}{\mu^j} \left(c_2(t) A_4^j(t) + O(\mu) \right), \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned}$$

т.е. справедливо (25). Умножим $S_{A_{\xi \eta}(\mu), c_{\xi \eta}}(t, \mu)$ (см. (25)) слева на невырожденную матрицу $\text{diag} \{E_{n_1}, \mu^{n_1}, \dots, \mu^{n_1+n_2-1}\}$. В результате получим блочную матрицу вида

$$\bar{S}_{\xi \eta}(t, \mu) = \left(\begin{array}{c|c} S_s(t) + O(\mu) & * \\ \hline O(\mu)* & S_f(t) A_4^{n_1} + O(\mu)* \end{array} \right), \quad (32)$$

где $S_s(t)$, $S_f(t)$ определены в (10), (12), а $*$, $O(\mu)*$ — некоторые матрицы подходящих размеров, при этом элементы матриц $O(\mu)*$ являются бесконечно малыми величинами порядка малости μ

при любом $t \in T$. Ранг матрицы $\bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu)$ (см. (32)) равен рангу матрицы $S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu)$ (см. (25)) для всех $t \in T$.

Рассмотрим матрицу

$$S_{sf}(t) = \left(\begin{array}{c|c} S_s(t) & * \\ \hline 0 & S_f(t) \end{array} \right), \quad (33)$$

которая получается из матрицы $\bar{S}_{\xi\eta}(t)$ (см. (32)) умножением её справа на невырожденную (в силу $\det A_4(t) \neq 0$) матрицу $\text{diag} \{E_{n_1}, (A_4^{n_1})^{-1}\}$ и отбрасыванием членов $O(\mu)$.

При выполнении условий (vi) с учетом теоремы 3 верхний левый блок $S_s(t)$ этой матрицы имеет полный ранг по столбцам для всех $t \in T$: $\text{rank } S_s(t) = n_1$, и нижний правый блок этой матрицы тоже имеет полный ранг по столбцам при всех $t \in T$: $\text{rank } S_f(t) = n_2$. Поскольку оба диагональных блока $S_s(t)$ и $S_f(t)$ матрицы $S_{sf}(t)$ (см. (33)) имеют полный ранг по столбцам, то матрица $S_{sf}(t)$ также имеет полный ранг по столбцам при всех $t \in T$. Действительно, если это не так, то существует такой $n_1 + n_2$ -вектор-столбец $(g'_1, g'_2)'$, $g_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $g_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\|g_1\| + \|g_2\| \neq 0$, что $S_{sf}(t)(g'_1, g'_2)' = 0$; это равносильно

$$S_s(t)g_1 + *g_2 = 0, \quad S_f(t)g_2 = 0.$$

Из последнего равенства в силу полноты ранга матрицы $S_f(t)$ следует $g_2 = 0$; тогда из первого равенства имеем $S_s(t)g_1 = 0$, $g_1 \neq 0$, что противоречит полноте ранга $S_s(t)$. Таким образом, $\text{rank } S_{sf}(t) = n$ для всех $t \in T$.

С учетом сохранения полноты ранга при малых аддитивных возмущениях матрицы, при достаточно малых $\mu > 0$ справедливо равенство

$$\text{rank } \bar{S}_{\xi\eta}(t, \mu) = \text{rank } S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = n \quad \text{для любого } t \in T,$$

откуда с учетом связи между матрицами наблюдаемости исходной системы (1) и расщепленной системы (20):

$$S_{A_{\xi\eta}(\mu), c_{\xi\eta}}(t, \mu) = S_{A(\mu), c}(t, \mu)K(t, \mu),$$

следует, что

$$\text{rank } S_{A(\mu), c}(t, \mu) = n \quad \text{для любого } t \in T$$

для всех достаточно малых $\mu > 0$, что согласно теореме 1 завершает доказательство равномерной наблюдаемости системы (1) робастно относительно μ . $\square$

Из теорем 5 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6 (условия аппроксимативной наблюдаемости). Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда найдется такое $\mu^* \in (0, \mu^0]$, что система (1) аппроксимативно наблюдаема на отрезке T при любом фиксированном $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно μ .

7. Пример. Рассмотрим на $T = [0, 5; 2]$ систему (1):

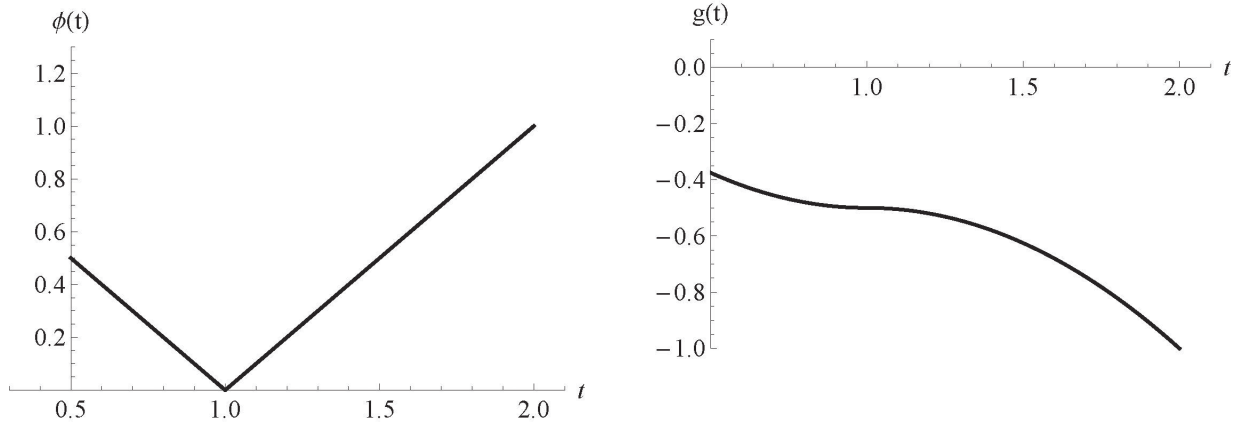
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \phi(t)x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + \phi(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) + \phi(t)x_3(t), \\ \mu \dot{y}(t) = x_3(t) + g(t)x_3(t), \\ v(t) = y(t), \end{cases} \quad (34)$$

где функция $\phi(t)$ не является дифференцируемой на T , но ограничена и интегрируема на T от t_0 до t , $g(t)$ — такая первообразная для $\phi(t)$, что $g(t) \neq 0$, $t \in T$ (например, $\phi(t) = |t - 1|$,

$$g(t) = - \int_0^t \phi(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t - 1)|t - 1|;$$

см. рис. 1) с параметрами $n_1 = 3$, $n_2 = m = 1$, $t_0 = 0,5$, $t_1 = 2$ и матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad A_3 = (0 \quad 0 \quad 1), \quad A_4 = (g(t)), \quad C_1 = (0 \quad 0 \quad 0), \quad C_2 = (1).$$

Рис. 1. Графики функций $\phi(t)$ и $g(t)$ на $T = [0.5, 2]$

Несложно убедиться, что для системы (34) выполнены условия (i)–(iv) теоремы 5.

Вырожденная система (8) для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы (34) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = -\frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_1(t) - \frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \dot{\bar{x}}_3(t) = \bar{x}_2(t) - \frac{\phi(t)}{g(t)}\bar{x}_3(t), \\ \bar{v}_s(t) = -\frac{1}{g(t)}x_{s3}(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (35)$$

то есть

$$A_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \\ 1 & 0 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \\ 0 & 1 & -\frac{\phi(t)}{g(t)} \end{pmatrix}, \quad C_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{g(t)} \end{pmatrix}$$

, а семейство быстрых подсистем для системы (34) имеет вид

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = g(t)\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad t \in T. \quad (36)$$

Для вырожденной системы (35) матричная функция $A_s(t)$ не является непрерывно дифференцируемой, но для системы (35) выполнены условия (v) и определена матрица наблюдаемости:

$$S_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{g(t)} \\ 0 & -\frac{1}{g(t)} & 0 \\ -\frac{1}{g(t)} & -\frac{\phi}{g^2(t)} & \frac{\phi}{g^2(t)} \end{pmatrix},$$

поэтому вырожденная система (35) является системой класса $n_1 - 1 = 2$ и теорема 3 применима к ней.

Так как $\text{rank } S_s(t) = 3 = n_1$ и $\text{rank } S_f(t) = \text{rank}(g(t)) = 1 = n_2$ для всех $t \in T$, то согласно теоремам 3, 4 вырожденная система (35) и семейство быстрых подсистем (36) для (34) равномерно наблюдаемы. Значит, выполнены и условия (vi) теоремы 5, поэтому в соответствии с теоремами 5, 6 существует такое $\mu^* > 0$, что система (34) равномерно и аппроксимативно наблюдаема для всех $\mu \in (0, \mu^*]$, т.е. робастно относительно $\mu > 0$.

8. Заключение. На основе декомпозиции, выполненной с помощью линейной невырожденной замены переменных, доказаны эффективные с конструктивной точки зрения ранговые, не зависящие от малого параметра и справедливые для всех его достаточно малых значений достаточные условия равномерной и аппроксимативной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы. Условия выражены через матричные коэффициенты медленной и быстрых подсистем системы в терминах их матриц наблюдаемости.

Результаты работы применимы для нахождения преобразований, приводящих систему к каноническим формам, получения робастных условий полной, равномерной и тотальной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с помощью конечно-параметрических разрешающих операций, с помощью многочленов системы функций Чебышева, решения задач наблюдаемости нестационарных СВС с помощью динамического фильтра (см. [3]), построения композитных управлений типа обратной связи, экспоненциальных оценщиков состояния системы (см. [29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. — М.: Мир, 1976.
2. Астровский А. И. Равномерно точечная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Докл. НАН Беларуси. — 1999. — 43, № 3. — С. 9–12.
3. Астровский А. И. Обобщенная матрица Грама и ее применение к проблеме наблюдаемости линейных нестационарных систем // Мат. заметки. — 2001. — 69, № 2. — С. 163–170.
4. Астровский А. И. Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 4. — С. 439–442.
5. Астровский А. И. Наблюдаемость линейных нестационарных систем. — Минск: МИУ, 2007.
6. Астровский А. И., Гайшун И. В. Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем // Автомат. телемех. — 1998. — № 7. — С. 3–13.
7. Астровский А. И., Гайшун И. В. Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем // Диффер. уравн. — 2009. — 45, № 11. — С. 1567–1576.
8. Астровский А. И., Гайшун И. В. Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. — Минск: Беларус. навука, 2013.
9. Астровский А. И., Гайшун И. В. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 3. — С. 370–379.
10. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — 20. — С. 3–77.
11. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.
12. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 1999.
13. Гайшун И. В., Астровский А. И. Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем // Докл. АН Беларуси. — 1996. — 40, № 5. — С. 5–8.
14. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
15. Копейкина Т. Б., Цехан О. Б. Наблюдаемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем в пространстве состояний // Прикл. мат. мех. — 1993. — 57, № 6. — С. 22–32.
16. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
17. Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — 10, № 5. — P. 112–113.
18. Chang K. Singular perturbations of a general boundary value problem // SIAM J. Math. Anal. — 1972. — 3, № 3. — P. 520–526.
19. Glizer V. V. Observability of singularly perturbed linear time-dependent systems with small delay // J. Dynam. Control Syst. — 2004. — 10, № 3. — P. 329–363.
20. Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1999.

21. *Kopeikina T. B.* Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems// Syst. Sci. — 1995. — 21, № 1. — P. 17–36.
22. *Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu Desineni S.* Discrete singularly perturbed control problems: A survey// Dynam. Contin. Discr. Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2017. — 24. — P. 335–370.
23. *Lee E. B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. — New York: Wiley, 1967.
24. *Naidu D. S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview// Dynam. Contin. Discr. Impuls. Syst. Ser. B. Appl. Algorithms. — 2002. — № 9. — P. 233–278.
25. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems// Int. J. Control. — 1979. — 30, № 5. — P. 745–756.
26. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. — London: Academic Press, 1983.
27. *Silverman L. M.* Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form// IEEE Trans. Automat. Control. — 1966. — AC-11, № 2. — P. 300–303.
28. *Silverman L. M., Meadows H. E.* Controllability and observability in time-variable linear systems// SIAM J. Control. — 1967. — 5, № 1. — P. 64–73.
29. *Wolovich W. A.* On state estimation of observable systems// Preprint NASA Electron. Res. Center. Cambridge. — 1968. — № 6. — P. 210–220.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф22-050).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Цехан Ольга Борисовна

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

E-mail: tsekhan@grsu.by



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 165–169
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-165-169

УДК 519.62

ДОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© 2023 г. В. А. ШИШКИН

Аннотация. Рассматривается приближённое решение задачи Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Если решение задачи существует, то вычислительный эксперимент позволяет доказать разрешимость и получить гарантированную оценку нормы погрешности приближённого решения.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, оценка погрешности, доказательный вычислительный эксперимент.

EVIDENCE-BASED COMPUTATIONAL EXPERIMENT IN THE STUDY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH A DEVIATING ARGUMENT

© 2023 V. A. SHISHKIN

ABSTRACT. An approximate solution of the Cauchy problem for a differential equation with a deviating argument is considered. If a solution of the problem exists, then the computational experiment makes it possible to prove the solvability and obtain a guaranteed estimate of the norm of the error for approximate solutions.

Keywords and phrases: Cauchy problem, differential equation with a deviating argument, error estimate, evidence-based computational experiment.

AMS Subject Classification: 65Q20

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$x'(t) - \sum_{i=1}^{N_1} p_i(t)z(h_i(t)) - \sum_{i=1}^{N_2} \int_{a_i}^{b_i} P_i(t,s)z(s) ds = f(t), \quad x(a) = x_a, \quad t \in [a, b], \quad (1a)$$

где функция $z(t)$ имеет вид

$$z(t) = \begin{cases} q_l(t), & t < a, \\ x(t), & a \leq t \leq b, \\ q_u(t), & t > b, \end{cases} \quad (1b)$$

В (1a) функции p_i , $i = 1, \dots, N_1$, P_i , $i = 1, \dots, N_2$, f , q_l и q_u — это функции, интегрируемые с квадратом на соответствующих областях (элементы соответствующего пространства L_2); h_i , $i = 1, \dots, N_1$, — дифференцируемые кусочно монотонные на $[a, b]$ функции.

Функцию q_l в (1b) можно рассматривать как предысторию процесса x (а точнее, память о ней, хранящуюся в системе). Также она может быть интерпретирована как некоторая информация из прошлого, которая влияет на $x(t)$ — состояние исследуемой системы в момент времени t .

Функцию q_u в (1b) нельзя интерпретировать как постысторию x : будущее ещё не наступило и поэтому не может влиять на настоящее. Однако q_u может быть некоторым прогнозом, предположением, ожиданием, надеждой и т. п. — субъективным мнением исследователя о будущем. Именно поэтому в (1a) используется обозначение z вместо x : при $t < a$ и $t > b$ сама исследуемая система, состояние которой описывается с помощью x , может ещё или уже не существовать.

Проинтегрировав обе части (1a) от a до t , получим интегральное уравнение

$$x(t) - \sum_{i=1}^{N_1} \int_a^t p_i(s) z(h_i(s)) ds - \sum_{i=1}^{N_2} \int_a^t \int_{a_i}^{b_i} P_i(s, \hat{s}) z(\hat{s}) d\hat{s} ds = x_a + \int_a^t f(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

По определению, h_i — кусочно монотонная функция. Введём на $[a, b]$ такую сетку

$$a = t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \dots < t_{n_i}^{(i)} = b,$$

чтобы внутри каждого подынтервала $[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}]$, $j = 1, \dots, n_i$, функция h_i была монотонна и непрерывна. Тогда после замены переменной $s = h_{i,j}^{-1}(\hat{s})$ для $t_{j-1}^{(i)} \leq s \leq t_j^{(i)}$ получаем

$$\begin{aligned} \int_a^t p_i(s) z(h_i(s)) ds &= \sum_{j=1}^{n_i} \int_{[t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \cap [a, t]} p_i(s) z(h_i(s)) ds = \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \int_{h_{i,j}^{-1}([t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \cap [a, t])} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) z(\hat{s}) d\hat{s}. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} T_{j,l}^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}([t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \cap [a, t]) \cap (-\infty, a], \\ T_{j,u}^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}([t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \cap [a, t]) \cap [b, \infty), \\ T_j^{(i)}(t) &= h_{i,j}^{-1}([t_{j-1}^{(i)}, t_j^{(i)}] \cap [a, t]) \cap [a, b], \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \int_a^t p_i(s) z(h_i(s)) ds &= \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_{T_{j,l}^{(i)}(t)} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) q_l(\hat{s}) d\hat{s} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_{j,u}^{(i)}(t)} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) q_u(\hat{s}) d\hat{s} + \int_{T_j^{(i)}(t)} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) x(\hat{s}) d\hat{s} \right). \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле в (2) даёт

$$\int_a^t \int_{a_i}^{b_i} P_i(s, \hat{s}) z(\hat{s}) d\hat{s} ds = \int_{a_i}^{b_i} \left(\int_a^t P_i(s, \hat{s}) ds \right) z(\hat{s}) d\hat{s} = \int_{a_i}^{b_i} \tilde{P}_i(t, s) z(s) ds$$

Введя обозначения

$$S_l^{(i)} = [a_i, b_i] \cap (-\infty, a], \quad S_u^{(i)} = [a_i, b_i] \cap [b, \infty), \quad S^{(i)} = [a_i, b_i] \cap [a, b],$$

запишем

$$\int_{a_i}^{b_i} \tilde{P}_i(t, s) z(s) ds = \int_{S_l^{(i)}} \tilde{P}_i(t, s) q_l(s) ds + \int_{S_u^{(i)}} \tilde{P}_i(t, s) q_u(s) ds + \int_{S^{(i)}} \tilde{P}_i(t, s) x(s) ds.$$

Таким образом, (2) может быть представлено в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) - \int_a^b K(t, s) x(s) ds = F(t), \quad (3)$$

с ядром

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{n_i} \chi_{T_j^{(i)}(t)}(s) p_i(h_{i,j}^{-1}(s)) h'_{i,j}(s) + \sum_{i=1}^{N_2} \chi_{S^{(i)}}(s) \tilde{P}_i(t, s),$$

где χ_X — характеристическая функция множества X , и правой частью

$$F(t) = x_a + \int_a^t f(s) ds + \sum_{j=1}^{n_i} \left(\int_{T_{j,l}^{(i)}} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) q_l(\hat{s}) d\hat{s} + \int_{T_{j,u}^{(i)}} p_i(h_{i,j}^{-1}(\hat{s})) h'_{i,j}(\hat{s}) q_u(\hat{s}) d\hat{s} \right) + \\ + \sum_{i=1}^{N_2} \left(\int_{S_l^{(i)}} \tilde{P}_i(t, s) q_l(s) ds + \int_{S_u^{(i)}} \tilde{P}_i(t, s) q_u(s) ds \right).$$

Уравнение (3) в операторной форме имеет вид $x - Kx = F$, где интегральный оператор K — элемент линейного пространства операторов, отображающих пространство L_2 интегрируемых с квадратом функций в L_2 .

2. Численное решение. Для приближённого решения уравнения (3) применим стандартный приём использования проекции в конечномерное пространство, заменив ядро $K(t, s)$ близким к нему по норме вырожденным ядром

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_i u_i(t) v_i(s)$$

и сведя задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Введём на $[a, b]$ сетку $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$ и определим на каждом отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, N$, ортогональную на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ систему базисных функций $\{\phi_j^{(i)}\}$. Тогда

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_{\substack{i_1=1, \dots, N \\ j_1=1, \dots, n}} \sum_{\substack{i_2=1, \dots, N \\ j_2=1, \dots, n}} c_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} \hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t) \hat{\phi}_{j_2}^{(i_2)}(s). \quad (4)$$

Здесь $c_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)}$ — соответствующий $\phi_{j_1}^{(i_1)}(t)$ и $\phi_{j_2}^{(i_2)}(s)$ коэффициент разложения $K(t, s)$ в ряд Фурье на области $[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}] \times [\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}]$; $\hat{\phi}_j^{(i)}(t)$ — обозначение для $\phi_j^{(i)}(t) \chi_{[\tau_{i-1}, \tau_i]}(t)$.

Далее, заменив ядро $K(t, s)$ в (3) на вырожденное ядро (4), получим уравнение $\tilde{x} - \tilde{K} \tilde{x} = F$, решение которого сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$, где

$$A_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} = \delta_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} - c_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} d_{j_1}^{(i_1)}, \quad X_{j_2}^{(i_2)} = \int_a^b \hat{\phi}_{j_2}^{(i_2)}(s) \tilde{x}(s) ds, \quad B_{j_1}^{(i_1)} = \int_a^b \hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t) F(t) dt.$$

Здесь $\delta_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)}$ — расширенный символ Кронекера, равный единице при $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$ и нулю во всех остальных случаях; $d_j^{(i)}$ — квадрат нормы в L_2 базисной функции $\phi_j^{(i)}$ на $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Также

$$B_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{\substack{i_2=1, \dots, N \\ j_2=1, \dots, n}} A_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} X_{j_2}^{(i_2)}.$$

Пусть матрица A обратима и $X = A^{-1}B$. Тогда приближённое решение исходной задачи $\tilde{x} = (I - \tilde{K})^{-1}F$ можно представить в виде $\tilde{x} = F + \tilde{R}F$, где $\tilde{R}$ — резольвентный оператор с ядром

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{\substack{i_1=1, \dots, N \\ j_1=1, \dots, n}} \hat{\phi}_{j_1}^{(i_1)}(t) \sum_{\substack{i_2=1, \dots, N \\ j_2=1, \dots, n}} c_{j_1 j_2}^{(i_1 i_2)} \sum_{\substack{i_3=1, \dots, N \\ j_3=1, \dots, n}} (A^{-1})_{j_3 j_2}^{(i_3 i_2)} \hat{\phi}_{j_3}^{(i_3)}(s).$$

3. Доказательный вычислительный эксперимент. Заметим, что существование решения приближённого уравнения $\tilde{x} - \tilde{K}\tilde{x} = F$ ещё не означает разрешимости уравнения (3) и, следовательно, задачи (1a)–(1b). *Доказательный вычислительный эксперимент* (см. [1, гл. VI]) позволяет в случае существования решения задачи (1a)–(1b) *доказать* её разрешимость, а также получить *гарантированную* оценку погрешности найденного приближённого решения $\tilde{x}$. Одним из способов добиться этого является использование рациональной арифметики, при которой вычисления выполняются точно. Альтернатива — применение интервальной арифметики с направленным округлением результата.

Обозначим через $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ множество машинно-представимых рациональных чисел $x = x_1/x_2$, где $x_1 \in \mathbb{Z}$ (целое), $x_2 \in \mathbb{N}$ (натуральное), а длина x_1 и x_2 позволяет им умещаться в памяти вычислительного устройства. Функции и операции, отображающие $\mathbb{Q}_{\text{комп}}^m$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ назовём машинно-вычислимыми (см. [3, разд. 1.3.2]).

Для проведения доказательного вычислительного эксперимента заменим (3) приближённым уравнением

$$\tilde{x}(t) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{K}(t, s) \tilde{x}(s) ds = \tilde{F}(t), \quad (5)$$

где $\tilde{a} = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N = \tilde{b}$ — элементы $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ ($\tilde{a} \leq a, b \leq \tilde{b}$); в качестве базисных функций ϕ_j^i будем использовать функции, отображающие $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, например, ортогональные многочлены Лежандра после соответствующего преобразования аргумента; ядро $K(t, s)$ и правая часть $F(t)$ уравнения (3) заменяются на машинно-вычисляемые функции $\tilde{K}(t, s)$, аналогичную (4), и $\tilde{F}(t)$.

Так как по построению все числа в уравнении (5) — элементы множества $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, а функции отображают $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$ в $\mathbb{Q}_{\text{комп}}$, то элементы матрицы A и вектора B , а также решение системы линейных алгебраических уравнений вычисляются *точно*. Решение $\tilde{x} = \tilde{F} + \tilde{R}\tilde{F}$ — *точное* решение уравнения (5).

Всегда можно построить обратимый оператор $I - \tilde{K}$. Если при этом выполняется неравенство

$$\|K - \tilde{K}\| < 1/\|(I - \tilde{K})^{-1}\|, \quad (6)$$

то оператор $I - K$ также обратим (см. [2, с. 207, теорема 4]): обратимость — *грубое* свойство.

Заметим, что данный подход не позволяет, вообще говоря, доказать отсутствие решения уравнения (3). Как бы ни были близки операторы K и $\tilde{K}$, всегда остаётся вероятность, что при повышении точности аппроксимации неравенство (6) будет выполнено.

Неравенство

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{\|(I - \tilde{K})^{-1}\| (\|K - \tilde{K}\| \cdot \|\tilde{x}\| + \|F - \tilde{F}\|)}{1 - \|(I - \tilde{K})^{-1}\| \|K - \tilde{K}\|}. \quad (7)$$

даёт оценку радиуса окрестности с центром в точке $\tilde{x}$, в которой (*гарантированно!*) находится решение исходной задачи x (см. [3, с. 47]).

При проверке неравенства (6) и оценке радиуса окрестности (7) нормы вычисляются точно ($\|\tilde{x}\|$) или заменяются *гарантированными* оценками сверху:

- (а) норма обратного оператора $(I - \tilde{K})^{-1}$ заменяется оценкой сверху

$$\|(I - \tilde{K})^{-1}\| = \|I + \tilde{R}\| \leq 1 + \|\tilde{R}\|,$$

причём $\|\tilde{R}\|^2$ вычисляется точно, так как $\tilde{R}$ — комбинация машинно-вычислимых функций;

- (б) значения норм разностей $K - \tilde{K}$ и $F - \tilde{F}$ заменяются их оценками сверху (возможно, довольно грубыми)

$$\|K - \tilde{K}\|^2 \leq \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \max_{\substack{\tau_{i_1-1} \leq t \leq \tau_{i_1} \\ \tau_{i_2-1} \leq s \leq \tau_{i_2}}} (K(t, s) - \tilde{K}(t, s))^2 (\tau_{i_1} - \tau_{i_1-1})(\tau_{i_2} - \tau_{i_2-1}),$$

$$\|F - \tilde{F}\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \max_{\tau_{i-1} \leq t \leq \tau_i} (F(t) - \tilde{F}(t))^2 (\tau_i - \tau_{i-1}).$$

В программной реализации на языке C++ можно использовать библиотеку GNU MP (арифметика произвольной точности); при использовании C# — определённую в пространстве имён `System.Numerics` структуру `BigInteger`. Существенно ускорить вычисления позволяет применение распараллеливания вычислений (OpenMP и т. п.) на процессорах с соответствующей архитектурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — М.: Ин-т компьют. исслед., 2002.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
3. Шишкин В. А. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании вариационных задач для квадратичных функционалов / Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Пермь: Перм. гос. ун-т, 2009.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шишкин Владимир Андреевич

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: vsh1791@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 170–174
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-170-174

УДК 517.968.73

О ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

© 2023 г. А. В. ЮЛДАШЕВА

Аннотация. Доказаны единственность и существование решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с линейной перидинамической моделью механики твёрдого тела, обладающего нелинейными свойствами эластичности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, перидинамика, сингулярное ядро.

ON THE PROBLEM ASSOCIATED WITH THE LINEAR PERIDYNAMIC MODEL

© 2023 A. V. YULDASHEVA

ABSTRACT. The uniqueness and existence of a solution to the Cauchy problem for an integro-differential equation associated with a linear peridynamic model in the mechanics of a rigid body with nonlinear elastic properties are proved.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Cauchy problem, peridynamics, singular kernel.

AMS Subject Classification: 45K05, 47G20

1. Введение. Нелокальные теории в механике твёрдого тела, учитывающие эффекты далекодействующих взаимодействий, такие как перидинамическое моделирование, введенное Силлингом (см. [3]), очень актуальны. Перидинамическая теория основана на интегро-дифференциальных уравнениях без какой-либо пространственной производной и может быть описана следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} + \int_D K(x, y)[u(x, t) - u(y, t)]dy = f(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ — область с кусочно гладкой границей, $a > 0$ — числовой параметр, $n \geq 3$. В данной работе предполагается, что неизвестная функция $u : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, ядро $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ и внешняя сила $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Интегральный оператор уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, которое вблизи диагонали $x = y$ имеет вид

$$K(x, y) = \frac{c_n}{|x - y|^n} + \gamma(x, y), \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект № F-FA-2021-424).

где $\gamma(x, y)$ — интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x, y) = 0, \quad x \in \partial D, \quad y \in D. \quad (4)$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ — внешняя нормаль к границе ∂D области D в точке $x \in \partial D$.

Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in D, \quad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \partial D, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для любого $\beta \geq 0$ введём гильбертово пространство $H^\beta(D) = D((I - \Delta)^{\beta/2})$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2. \quad (6)$$

Для произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\{[0, T] \rightarrow B\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0, T]$ в B (здесь $T > 0$).

Решением задачи (1)–(2) из класса $H^\beta(D)$ назовём функцию $u \in C^2\{[0, T] \rightarrow H^\beta(D)\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2).

Основной результат данной работы заключается в следующем.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < \alpha/n$. Для любого $T > 0$ и любых $\varphi \in W_2^\alpha(D)$, $\psi \in W_2^\alpha(D)$ и $f \in C\{[0, T] \rightarrow W_2^\alpha(D)\}$ существует единственное решение задачи (1)–(2) из класса $C^2\{[0, T] \rightarrow H^\beta(D)\}$.

Задача Коши для уравнения (1) без младшей производной по времени была исследована в [1]; задача (1)–(2) на периодической структуре рассматривалась в [5].

2. Преобразование ядра уравнения. Введём невозрастающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условию

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leq 1/2, \\ 0, & \text{если } r \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$ и для любой точки $x \in D$ положим

$$R = R(x) = \min\{\delta, \text{dist}(x, \partial D)\}, \quad (8)$$

где символом $\text{dist}(x, \partial D)$ обозначено расстояние от точки x до границы ∂D . Введём в рассмотрение следующую функцию (напомним, что $n \geq 3$):

$$L_0(x, y) = \alpha |x - y|^{2-n} \ln \frac{1}{|x - y|} \cdot \chi\left(\frac{|x - y|}{R}\right), \quad x \in D, \quad y \in D, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right).$$

Считая x параметром, найдем коэффициенты Фурье функции $L(x, y)$:

$$a_k(x) = \int_D L_0(x, y) v_k(y) dy = \alpha \int_{|x-y| \leq R} |x - y|^{2-n} \ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \chi\left(\frac{|x - y|}{R}\right) \cdot v_k(y) dy.$$

Перейдя к сферическим координатам с центром в точке x и применив формулу среднего значения (см. [4]), получим

$$a_k(x) = v_k(x) \cdot \alpha \frac{(2\pi)^{n/2}}{\lambda_k} \int_0^{R\sqrt{\lambda_k}} \left(\ln \frac{\sqrt{\lambda_k}}{t} \right) \chi\left(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}}\right) J_{n/2-1}(t) t^{2-n/2} dt, \quad (10)$$

где $t = r\sqrt{\lambda_k}$. Подставляя асимптотические представления, полученные в [1], получим следующее равенство:

$$a_k(x) = v_k(x) \left[\frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} + \frac{\gamma}{\lambda_k} + O_x(\lambda_k^{-N}) \right].$$

Отсюда и из равенства (10) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Разложение функции (9) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (5) имеет вид*

$$L_0(x, y) = \sum_{\lambda_k > 0} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} v_k(x) v_k(y) + \gamma \sum_{\lambda_k > 0} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) v_k(x) v_k(y), \quad (11)$$

где коэффициенты $c_k(x)$ для любого номера N удовлетворяют условию

$$|c_k(x)| \leq \frac{C_N(x)}{(1 + \lambda_k)^N}, \quad (12)$$

а величины $C_N(x)$ ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области D .

Обозначим через $G(x, y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (5):

$$G(x, y) = \sum_{\lambda_k > 0} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k};$$

пусть

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) v_k(x) v_k(y).$$

Из оценки (12) следует, что функция $R(x, y)$ бесконечно дифференцируема в области $D \times D$. Введём функцию

$$L(x, y) = L_0(x, y) - \gamma G(x, y) - R(x, y). \quad (13)$$

Лемма 2. *Ряд Фурье функции $L(x, y)$, определённой равенством (13), имеет вид*

$$L(x, y) = \sum_{\lambda_k > 0} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} v_k(x) v_k(y).$$

Функция $L(x, y)$ бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$ и равномерно на каждом компакте $K \subset D$ её производные удовлетворяют условию

$$|D^\beta L(x, y)| \leq \text{const} \frac{|\ln |x - y||}{|x - y|^{n-2+\beta}}, \quad x \in K, \quad y \in D.$$

3. Преобразование рассматриваемого уравнения. Введём оператор

$$Bv(x) = \int_D K(x, y)[v(y) - v(x)]dy.$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в следующей форме:

$$u(x, t) + 2a \int_0^t u(x, s)ds - \int_0^t (t-s)Bu(x, s)ds = F(x, t), \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (14)$$

где

$$F(x, t) = (2at + 1)\varphi(x) + t\psi(x) + \int_0^t (t-s)f(x, s)ds.$$

Будем рассматривать уравнение (14) в гильбертовом пространстве $H_0 = L_2(D)$.

Рассмотрим оператор

$$Av(x) = -2a \int_0^t v(s)ds + \int_0^t (t-s)Bv(s)ds.$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$u(t) = Au(t) + F(t) \quad (15)$$

Методом последовательных приближений, определим последовательность

$$w_0(t) = F(t), \quad w_{k+1}(t) = Aw_k(t) = A^k F(t).$$

Необходимо доказать сходимость ряда Неймана

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) \quad (16)$$

и показать, что сумма этого ряда будет решением уравнения (15).

Легко установить справедливость следующей леммы (см. [2]).

Лемма 3. Пусть $F \in C[\mathbb{R}^+ \rightarrow H_m]$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$, $M > 0$ верно неравенство

$$\|A^k F\|_{m,t} \leq \frac{(k+m)!}{\mu^{k+m}} e^{\mu-1} \|F\|_{W_2^\mu, t} \sum_{i=0}^k C_k^i |a|^{k-i} M^i \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}. \quad (17)$$

Положим $C = \max(|a|, M)$.

Лемма 4. Пусть $\mu > 0$ и $0 \leq T \leq \sqrt{\mu/C}$, где постоянная M определяется из неравенства (17). Тогда для любой функции $F \in C[R^+ \rightarrow W_2^\mu(D)]$ и любого $t \in \mathbb{N}$ ряд Неймана (16) сходится в норме гильбертова пространства H_m равномерно на интервале $0 \leq t \leq T$ и его сумма удовлетворяет оценке

$$\|u\|_m \leq D_m(\mu) \frac{(m+1)!}{(1 - Ct^2/\mu)^{(m+2)}}, \quad (18)$$

где

$$D_m(\mu) = e^{\mu-1} \frac{(m+1)!}{\mu^m}.$$

Доказательство. Перепишем (16) в виде

$$u(t) = F(t) + \sum_{k=0}^{\infty} A^k F(t), \quad t \geq 0.$$

Согласно лемме 3, можем записать

$$\|u\|_m \leq \frac{e^{\mu-1}}{\mu^m} \|F\|_{W_2^\mu, t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{\mu^k} \sum_{i=0}^k C_k^i |a|^{k-i} M^i \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+m)!}{\mu^k} C^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Отсюда получим

$$\|u\|_m \leq D_m(\mu) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{m+1} \left(\frac{Ct^2}{\mu} \right)^k \leq D_m(\mu) \frac{(m+1)!}{(1 - \frac{t^2}{\mu})^{(m+2)}}.$$

Таким образом, ряд (16) сходится равномерно на интервале $0 \leq t \leq T$ для любого положительного $T \leq \sqrt{\mu/C}$, а его сумма удовлетворяет уравнению (14). $\square$

Доказательство теоремы 1.

1. *Существование.* Согласно лемме 4 ряд Неймана (16) сходится в норме H_m равномерно по $t \in [0, T]$, а его сумма $u(x, t)$ является решением уравнения (14). Поскольку уравнение (14) эквивалентно задаче Коши (1)–(2), то эта функция $u(x, t)$ также является решением задачи (1)–(2). Ясно, что это решение принадлежит H_∞ .

2. *Единственность.* Предположим, что существует два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1)–(2). Тогда их разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является решением однородного уравнения (14) и соответствующего однородного уравнения (15): $v = Av$. Из этого уравнения следует, что коэффициенты Фурье $v(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{v}_k(t) = \Phi(k) \int_0^t (t-s) \hat{v}_k(s) ds,$$

где $\Phi(k)$ непрерывная функция, зависящая от k .

Интегральный оператор Вольтерра в правой части квазинильпотентен, поэтому это уравнение имеет только тривиальное решение $\hat{v}_k(t) \equiv 0$. Следовательно, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш. А., Юлдашева А. В. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром // Диффер. уравн. — 2021. — 57, № 3. — С. 375–386.
2. Alimov Sh. A., Sheraliev Sh. On the solvability of the singular equation of peridynamics // Compl. Var. Ellipt. Equations. — 2019. — 5, № 64. — P. 873–887.
3. Silling S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. — 2000. — 48, № 1. — P. 175–209.
4. Titchmarsh E. C. Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. — Oxford: at the Clarendon Press, 1958.
5. Yuldasheva A. V. The linear peridynamic model in elasticity theory // Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 1. — P. 137–141.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект № F-FA-2021-424).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Юлдашева Асал Викторовна

Фиалиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте

E-mail: yuasv86@mail.ru



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 175–182
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-175-182

УДК 005

ТАБЛИЦЫ СООТВЕТСТВИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
НОМЕНКЛАТУРЫ НАУЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВАК РФ
И РУБРИКАЦИОННЫХ КОДОВ УДК И ГРНТИ

© 2023 г. Е. Е. БУКЖАЛЕВ, А. В. ОВЧИННИКОВ, А. А. ШИРОНИН

Аннотация. Приведены рубрики УДК и ГРНТИ, соответствующие направлениям исследований в рамках научных специальностей, определённых Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации.

Ключевые слова: универсальная десятичная классификация, рубрикатор, соответствие, научная специальность.

TABLES OF CORRESPONDENCE
OF MATHEMATICAL SPECIALTIES
FROM THE NOMENCLATURE OF SCIENTIFIC SPECIALTIES
OF THE HIGHER ATTESTATION COMMISSION
AND RUBRICATION CODES UDC AND SRSTI

© 2023 Е. Е. BUKZHALEV, A. V. OVCHINNIKOV, A. A. SHIRONIN

ABSTRACT. The UDC and SRSTI codes corresponding to the areas of research within the framework of scientific specialties determined by the Higher Attestation Commission under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation are presented.

Keywords and phrases: universal decimal classification, rubricator, correspondence, scientific specialty.

AMS Subject Classification: 00A35

Введение. Согласно недавним нововведениям, в Российской Федерации действует обновленная номенклатура научных специальностей, введённая Приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 24 февраля 2021 г. № 118 (см. [1]). Документ призван усовершенствовать подготовку кадров в сфере науки. Главное изменение в классификаторе специальностей состоит в том, что он стал более сжатым (перечень групп научных специальностей сокращён с 52 до 34, а количество специальностей — с 430 до 351) и в новом варианте более полно отвечает существующим научным реалиям: в перечень добавлено 4 новых группы и 21 новая, ранее отсутствующая научная специальность.

Номенклатура позволяет выявить общие характеристики научных специальностей и рационально упорядочить их. Она дает возможность выделять объективную специализацию ученых, создавать узкопрофильные диссертационные советы и контролировать уровень качества печатных изданий ВАК. Для облегчения поиска необходимой научной литературы Отделом научной

информации по фундаментальной и прикладной математике ВИНТИ РАН была построена таблица соответствия направлений исследований и кодов рубрикаторов Универсальной десятичной классификации (УДК; см. [2]) и Государственного рубрикатора научно-технической литературы (ГРНТИ; см. [3]) в области математических наук. Таблица охватывает научные специальности с кодами 1.1.1–1.1.6, занимающие в Номенклатуре следующее место:

Область науки: 1. Естественные науки.

Группа научных специальностей: 1.1. Математика и механика.

Наименование отрасли науки, по которой присуждаются ученые степени: Физико-математические.

Для каждой из указанных научных специальностей приведён перечень направлений исследований в соответствии с паспортом научной специальности согласно [1], снабжённых рубрикационными кодами, а также список смежных специальностей.

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения	517.2/.3	27.23.17
2	Метрическая теория функций, в которой на основе понятий меры и интеграла исследуются свойства функций и их производных, изучаются функциональные (в т.ч. ортогональные) ряды и их приложения	517.518	27.25.17
3	Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях	517.982	27.39.15
4	Теория приближения функций	517.518.8	27.25.19
5	Комплексный анализ, аналитические функции одного и многих комплексных переменных и их свойства, аналитическое продолжение, граничные свойства аналитических функций	517.53/.57	27.27
6	Различные классы и пространства аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.)	517.52	27.23.23
7	Геометрическая теория функций одного и многих комплексных переменных, конформные отображения и их обобщения (квазиконформные, биголоморфные и т. п.)	517.54	27.27.17
8	Краевые задачи для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексная теория потенциала, в т. ч. субгармонические и плюрисубгармонические функции	517.927	27.29.19
9	Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы)	517.98	27.39

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
10	Теория векторных пространств, геометрия нормированных пространств, интегрирование и меры в функциональных пространствах, интегральные представления и преобразования	517.982	27.39.15
11	Теория операторов, в т. ч. теория дифференциальных операторов	517.984	27.39.21
12	Теория возмущений операторов	517.983.28	27.39.19
13	Специальные функции и интегральные преобразования	517.58	27.23.25
14	Теория рассеяния	517.98	27.39
15	Теория банаховых алгебр	517.986	27.39.23
16	Бесконечномерные представления групп, алгебр и алгебр Ли	517.986	27.39.23
17	Теория обобщенных функций	517.982.4	27.39.17
18	Вариационное исчисление	517.972./974	27.37.15

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.3. Геометрия и топология

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений	517.91/.93; 517.95	27.29.29; 27.29.31
2	Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений	517.927	27.29.19
3	Спектральные задачи для дифференциальных операторов	517.984	27.39.21
4	Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений	517.925/.926.4+ 517.938/.938.5	27.29.17
5	Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях	517.938	27.29.17
6	Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений	517.957	27.31.21
7	Дифференциальные уравнения с запаздыванием	517.929	27.29.25
8	Аналитическая теория дифференциальных уравнений	517.925.7	27.29.21
9	Теория псевдодифференциальных операторов	517.983.37	27.39.19
10	Теория дифференциально-операторных уравнений	517.983	27.39.19

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
11	Теория функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных краевых задач	517.929	27.29.25
12	Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем	517.928	27.29.23
13	Теория дифференциальных включений и вариационных неравенств	517.911.7	27.29.15
14	Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления	517.97	27.29.37
15	Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью	517.977	27.29.37
16	Математические проблемы механики частиц и систем	517.958:531.12	27.35.30
17	Математические проблемы механики сплошной среды	517.958:539.3	27.35.31
18	Математические проблемы оптики и электродинамики	517.958: [535+537.812]	27.35.33
19	Математические проблемы квантовой теории	517.958:530.145	27.35.37
20	Математические проблемы термодинамики, кинетики и статистической физики	517.958: [531-142.6+536]	27.35.49
21	Математические проблемы теории относительности, гравитации и астрофизики	517.958:[531.123.6+ 521.12+523.11]	27.35.39

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1.1.3. Геометрия и топология

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

1.1.3. Геометрия и топология

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Выпуклая, дискретная и комбинаторная геометрия	514.17	27.21.15
2	Метрическая геометрия и геометрическая теория меры	515.124	27.19.15
3	Дифференциальная геометрия	514.7	27.21.19
4	Геометрический анализ	514.1	27.21.15
5	Комплексная геометрия	514.74	27.21.17
6	Симплектическая, пуассонова и контактная геометрия	514.15	27.21.15
7	Алгебраическая геометрия (топологические аспекты)	512.7	27.17.33

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
8	Некоммутативная геометрия и топология	517.986	27.39.23
9	Общая (теоретико-множественная) топология	515.12	27.19.15
10	Маломерная топология, включая теорию узлов	515.162	27.19.19
11	Комбинаторная топология	515.16	27.19.19
12	Геометрическая топология	515.16	27.19.19
13	Алгебраическая топология	515.14	27.19.17
14	Теория гомотопий	515.142.25	27.19.17
15	Топология многообразий	515.16	27.19.19
16	Геометрия и топология пространств отображений и пространств модулей геометрических структур	515.17	27.19.21
17	Геометрия и топология действий групп	512.816	27.17.35
18	Топологическая динамика	517.987.5	27.39.25
19	Геометрия и топология в теоретической и математической физике	514.8	27.21.21
20	Вычислительная геометрия	514.74	27.21.17
21	Топологический анализ данных	004.93:004.6:004.8	28.23.15

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Основания теории вероятностей	519.211	27.43.15
2	Теория вероятностей на алгебраических и топологических структурах	519.212	27.43.15
3	Комбинаторная теория вероятностей	519.1	27.45
4	Геометрическая вероятность и стохастическая геометрия	519.21	27.43.15
5	Теория распределений	519.213	27.43.15
6	Предельные теоремы	519.214	27.43.15
7	Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и другие)	519.216	27.43.15
8	Стохастический анализ и стохастическая оптимизация	519.216	27.43.15
9	Стохастические дифференциальные уравнения	519.216	27.43.15
10	Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели	519.217	27.43.15
11	Стационарные случайные процессы и поля	519.218	27.43.15

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
12	Теория восстановления и теория массового обслуживания	519.24	27.43.17
13	Теория случайных матриц	519.21	27.43.15
14	Некоммутативная теория вероятностей и математическая статистика	519.21	27.43.15
15	Методы статистического моделирования	519.21	27.43.15
16	Основания математической статистики	519.22	27.43.17
17	Оценивание параметров распределений. Проверка статистических гипотез	519.233	27.43.17
18	Непараметрическая статистика	519.234	27.43.17
19	Многомерный анализ	519.237	27.43.17
20	Линейные модели, регрессия	519.226	27.43.17
21	Планирование экспериментов	519.242	27.43.17
22	Последовательный анализ	519.244	27.43.17
23	Статистика случайных процессов и полей	519.246	27.43.17
24	Анализ статистических данных	519.25	27.43.51

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Теория алгебраических структур (полугрупп, групп, колец, полей, модулей и т. д.)	512.5	27.17.21
2	Алгебраическая геометрия	512.7	27.17.33
3	Группы и алгебры Ли	512.81	27.17.35
4	Теория представлений	512.815	27.17.35
5	Гомологическая алгебра и К-теория	512.66	27.17.31
6	Теория категорий и функторов	512.58	27.17.25
7	Теория множеств и нестандартный анализ	510.3	27.03.33
8	Теория моделей	510.8	27.03.66
9	Теория доказательств и конструктивная математика	510.7	27.03.55
10	Неклассические логики	510.29	27.03.02
11	Теория алгоритмов и вычислимых функций	510.5	27.03.45
12	Алгоритмическая теория информации и теория сложности	519.72	27.47.17
13	Теория дискретных функций и автоматов, теория управляемых систем	519.71	27.47.15
14	Теория графов и комбинаторика	519.1	27.45

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
15	Теория кодирования (алгебраические и комбинаторные вопросы)	519.72	27.47.17
16	Алгебраическая теория чисел	511.2	27.15.25
17	Аналитическая теория чисел	511.3	27.15.19
18	Диофантовы приближения и трансцендентные числа	511.4	27.15.21
19	Диофантовы уравнения	511.5	27.15.23
20	Комбинаторная теория чисел	519.10	27.45.15
21	Алгоритмическая теория чисел	511.9	27.15.27

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
- 1.1.3. Геометрия и топология
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика
- 1.1.6. Вычислительная математика
- 1.2.1. Искусственный интеллект и машинное обучение
- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
- 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика
- 1.2.4. Кибербезопасность
- 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации
- 5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике

1.1.6. Вычислительная математика

№	Направления исследований	УДК	ГРНТИ
1	Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники	519.6; 519.7	27.41; 27.47
2	Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности	519.6; 519.7	27.41; 27.47
3	Особенности численных методов и связанных с ними программных комплексов, отражающие рост производительности современных вычислительных систем и способствующие повышению эффективности вычислений	519.6; 519.7	27.41; 27.47
4	Создание и реализация новых численных методов для решения прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач	519.6; 519.7	27.41; 27.47

Смежные специальности (в т.ч. в рамках группы научной специальности):

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
- 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы
- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
- 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика
- 2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 24 февраля 2021 года № 118 «Об утверждении номенклатуры научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, и внесении изменения в положение о Совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, утвержденное Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 ноября 2017 г. № 1093. — <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202104060043>.
2. УДК классификатор онлайн. — <https://perviy-vestnik.ru/udc/>.
3. Государственный рубрикатор научно-технической информации. — <https://grnti.ru/>.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Букжалев Евгений Евгеньевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва

E-mail: bukzhalev@mail.ru

Овчинников Алексей Витальевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва

E-mail: ovchinnikov@viniti.ru

Широнин Александр Алексеевич

Всероссийский институт научной и технической информации

Российской академии наук (ВИНИТИ РАН), Москва

E-mail: a.a.shironin@list.ru

CONTENTS

Boundary control of some distributed inhomogeneous oscillatory system with intermediate conditions (<i>V. R. Barseghyan, S. V. Solodusha</i>)	3
Normalization and quantization of Hamiltonian systems using computer algebra (<i>I. N. Belyaeva, I. K. Kirichenko, N. N. Chekanova</i>)	16
On canonical first-type almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the Riemann tensor (<i>V. E. Berezovskii, S. V. Leshchenko, J. Mikeš</i>)	23
On the discrete Dirichlet problem in a quarter plane (<i>V. B. Vasilyev, A. A. Khodyreva</i>)	34
Boundary-value problems with shift and conjugation and corresponding systems of singular integral equations for bianalytic functions (<i>A. M. Volodchenkov, A. V. Yudenkov</i>)	47
On the application of generalized Bers powers for constructing solutions to the Dirac equation for the motion of a particle in a centrally symmetric field of a nucleus (<i>Yu. A. Gladyshev, E. A. Loshkareva</i>)	54
Uniqueness criterion for solutions of inverse problems for abstract singular differential equations (<i>A. V. Glushak</i>)	61
Invariant manifolds and attractors of a periodic boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation with allowance for dispersion (<i>A. N. Kulikov, D. A. Kulikov</i>)	69
Solvability of start control problems for a class of degenerate nonlinear equations with fractional derivatives (<i>M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova</i>)	80
On the solution of the initial-boundary problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative (<i>V. S. Rykhlov</i>)	89
Resource networks with dynamic arc durations (<i>V. A. Skorokhodov, Ia. M. Erusalimskiy, H. Abdulrahman</i>)	108
Scattering problem for one non-self-adjoint Sturm–Liouville operator (<i>R. G. Farzullazadeh, Kh. R. Mamedov</i>)	120
Quasilinear equations with fractional Gerasimov–Caputo derivative. Sectorial case (<i>V. E. Fedorov, T. A. Zakharova</i>)	127
Integral fuzzy means in the aggregation problem for fuzzy information (<i>V. L. Khatskevich</i>)	138
Robust sufficient conditions for uniform observability of a linear nonstationary singularly perturbed system (<i>O. B. Tsekhan</i>)	150
Evidence-based computational experiment in the study of the Cauchy problem for a differential equation with a deviating argument (<i>V. A. Shishkin</i>)	165
On the problem associated with the linear peridynamic model (<i>A. V. Yuldasheva</i>)	170
Tables of correspondence of mathematical specialties from the Nomenclature of scientific specialties of the Higher Attestation Commission and rubrication codes UDC and SRSTI (<i>E. E. Bukzhalev, A. V. Ovchinnikov, A. A. Shironin</i>)	175

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Отдел научной информации по математике ВИНИТИ, начиная с 1962 г., в рамках научно-информационной серии «Итоги науки и техники» издает фундаментальную энциклопедию обзорных работ по математике. Научный редактор и составитель — академик РАН Р. В. Гамкрелидзе. В качестве авторов приглашаются известные специалисты в различных областях чистой и прикладной математики, в том числе и зарубежные ученые. Как показала практика, издание пользуется большим авторитетом в нашей стране и за рубежом.

Издание в полном объеме переводится на английский язык издательством Springer Nature в журнале «Journal of Mathematical Sciences», который реферируется в базе данных SCOPUS.

Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры» издается с 1995 года. Начиная с 2016 года издание выходит в свет в электронной сетевой форме.

Рукописи статей и сопроводительные материалы следует направлять в редакцию по электронной почте math@viniti.ru

Необходимый комплект документов состоит из файлов статьи (*.tex и *.pdf, а также файлы с иллюстрациями, если таковые имеются). Бумажный вариант рукописи представлять не требуется.

После предварительного рассмотрения рукописи редколлегией на предмет соответствия текста тематике журнала и соблюдения формальных правил оформления все рукописи проходят процедуру рецензирования по схеме double-blind peer review (авторы и рецензенты анонимны друг для друга) ведущими отечественными и зарубежными экспертами. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к публикации. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией.

В соответствии с правилами этики научных публикаций редакция проводит проверку представленных авторами материалов на предмет соблюдения прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Если авторами нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отклонено редакцией.

Обязательно указание конфликта интересов — любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (в случае отсутствия конфликта интересов требуется явное указание этого факта). Авторы могут указать информацию о грантах и любых других источниках финансовой поддержки. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
информационных изданий ВИНИТИ РАН по математике

Главный редактор: Гамкрелидзе Реваз Валерианович,
академик РАН, профессор (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН)
Заместитель главного редактора: Овчинников Алексей Витальевич,
канд. физ.-мат. наук (МГУ им. М. В. Ломоносова; ВИНИТИ РАН)
Учёный секретарь редколлегии: Кругова Елена Павловна,
канд. физ.-мат. наук (ВИНИТИ РАН)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Аграчёв Андрей Александрович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова, SISSA)

Акбаров Сергей Саидмузафарович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»,
ВИНИТИ РАН)

Архипова Наталия Александровна,
к.ф.-м.н. (ВИНИТИ РАН)

Асеев Сергей Миронович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Букжалёв Евгений Евгеньевич,
к.ф.-м.-н., доцент (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Бухштабер Виктор Матвеевич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Воблый Виталий Антониевич,
д.ф.-м.-н. (ВИНИТИ РАН)

Гусева Надежда Ивановна,
к.ф.-м.-н., профессор (Московский педагогический
государственный университет, ВИНТИ РАН)

Зеликин Михаил Ильич,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Корпусов Максим Олегович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Маслов Виктор Павлович,
академик РАН, профессор
(НИУ «Высшая школа экономики»)

Орлов Дмитрий Олегович,
академик РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова)

Пентус Мати Рейнович,
д.ф.-м.-н., профессор (МГУ им. М. В. Ломоносова)

Попов Владимир Леонидович,
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.-н., профессор
(МИРАН им. В. А. Стеклова,
НИУ «Высшая школа экономики»)

Сарычев Андрей Васильевич,
д.ф.-м.-н., профессор
(Университет Флоренции)

Степанов Сергей Евгеньевич,
д.ф.-м.-н., профессор (Финансовый университет
при Правительстве РФ, ВИНТИ РАН)

Туганбаев Аскар Аканович,
д.ф.-м.-н., профессор
(НИУ «Московский энергетический институт»,
МГУ им. М. В. Ломоносова)

Шамолин Максим Владимирович,
д.ф.-м.-н., профессор
(МГУ им. М. В. Ломоносова)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ
серии «Современная математика и её приложения. Тематические обзоры»

Аграчёв Андрей Александрович
Акбаров Сергей Саидмузафарович
Корпусов Максим Олегович
Овчинников Алексей Витальевич

Попов Владимир Леонидович
Степанов Сергей Евгеньевич
Туганбаев Аскар Аканович
Шамолин Максим Владимирович