



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 90–112
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-90-112

УДК 519.714, 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ.
ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД.
I. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

© 2025 г. В. И. ШИРЯЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются задачи синтеза позиционного управления линейными динамическими системами, когда необходимо гарантированное достижение цели управления, а возмущения, действующие на динамическую систему, и помехи в информационных каналах системы известны с точностью до множеств, из которых они могут принимать любые значения. Построены множества информационных множества и множества прогнозов, гарантированно содержащие вектор состояния. Задачи управления решены для случая задания требований к системе в виде множеств в фазовом пространстве, которым должен принадлежать вектор состояния с учетом ограничений на управление, либо при требованиях в виде квадратичного функционала. Показано применение функций Ляпунова для синтеза управления. Первая часть работы посвящена алгоритмам оценивания.

Ключевые слова: динамическая система, управление, оценивание, неопределенность возмущения, помеха, информационное множество, прогноз, функция Ляпунова.

CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS
UNDER INFORMATION DEFICIT.
GUARANTEED APPROACH.
I. ESTIMATION ALGORITHMS

© 2025 V. I. SHIRYAEV

ABSTRACT. In this paper, we consider the problems of synthesis of positional control for linear dynamic systems in the case where it is necessary to guarantee the achievement of the control goal, and the disturbances acting on the dynamic system and the interference in the information channels of the system are known with an accuracy of sets in which they can take any values. We construct information sets and forecast sets that contain the state vector. Control problems are solved for the case of specifying requirements for the system in the form of sets in the phase space to which the state vector must belong, taking into account the constraints on control, or with requirements in the form of a quadratic functional. The application of Lyapunov functions for control synthesis is shown. The first part of this work is devoted to evaluation algorithms.

Keywords and phrases: dynamic system, control, estimation, disturbance uncertainty, noise, information set, forecast, Lyapunov function.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	91
1. Алгоритмы оценивания	93
1.1. Построение информационного множества. Общий случай	94
1.2. Использование особенностей математической модели динамической системы	95
1.3. Адаптация к помехам и возмущениям	98
1.4. Минимаксный алгоритм фильтрации	99
1.5. Алгоритмы оценивания при неполной информации	102
1.6. Адаптивный фильтр Калмана	103
1.7. Гарантированный аналог фильтра Калмана	104
1.8. Интервальные наблюдатели	105
1.9. Адаптивный минимаксный алгоритм фильтрации	107
Список литературы	109

ВВЕДЕНИЕ

Задача синтеза управления динамическими системами в ситуациях с высоким уровнем неопределенности как возмущений, действующих на динамическую систему, так и помех в информационных каналах является актуальной, что характерно для ряда приложений и конфликтных ситуаций. Во многих случаях неопределенность не имеет стохастическую природу и возникает как из-за действия различных внешних возмущающих факторов, неконтролируемых изменений свойств объекта, так и из-за возникновения отказов, сбоев. Относительно всех неопределенных величин и процессов предполагается только то, что для них известны ограниченные множественные оценки (см. [3, 5, 6, 11, 15, 16, 19, 21, 32–36, 43–46]). При гарантированном подходе расчеты выполняются для наихудшего случая неопределенных величин и процессов.

Гарантированный подход к управлению динамическими системами стал возможен (см. [74, 76, 78]) вскоре после публикации в 1960 г. работы [76] Р. Калмана о фильтре. Применение гарантированного подхода к управлению, несмотря на предупреждения самого Р. Калмана об ограничениях на применения фильтра Калмана (см. [20]), сдерживается излишним пессимизмом гарантированных оценок и большими (по сравнению с фильтром Калмана) вычислительными ресурсами, необходимыми для реализации. Поэтому актуальными являются подходы, направленные на снижение указанных недостатков гарантированного подхода к управлению и оцениванию. Различные аспекты задач управления и оценивания при неполноте информации отражены в работах многих авторов; назовем лишь некоторых из них: Р. Калман, Н. Н. Красовский, А. А. Красовский, А. Б. Куржанский, И. Я. Кац, В. М. Кунцевич, Ф. Л. Черноусько, Н. Б. Филимонов, И. П. Гридасов, Б. Т. Поляк, В. М. Хлебников, Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кирилова, А. И. Матасов, А. Ф. Шориков, F. C. Schweppe, D. P. Bertsecas и др. (см. [1, 3, 5, 6, 9, 12–16, 21–24, 26–36, 39, 43–46, 48, 49, 52, 53, 55–57, 60, 74, 78]).

В работе используются определяющие соотношения минимаксной фильтрации (см., например, [8, 21, 34, 60, 78]), а неопределенность начального состояния, возмущений и помех, следуя В. М. Кунцевичу, задана множествами в виде выпуклых многогранников (см. [34]). Отметим, что информационное множество как результат решения задачи оценивания в этом случае будет также многогранником, что не происходит при задании эллипсоидами, зонотопами, множеств неопределенных величин и не приводит к снижению точности оценивания.

Так, несмотря на то, что в настоящее время считается обоснованным (см., например, [10]) применение обобщенного фильтра Калмана для интеграции бортовых навигационных систем (НС; см. [42]), эффективность применения обобщенного фильтра Калмана существенно зависит от адекватности математических моделей ошибок НС реальным процессам. Нарушение адекватности приводит к расходимости обобщенного фильтра Калмана (см. [10, 20, 50]). Поэтому развитие прикладной теории калмановской фильтрации связано с развитием методов защиты обобщенного

фильтра Калмана от расходимости: от адаптивных к робастным, к гарантирующим модификациям фильтра Калмана, что достигается интеграцией различных подходов к защите обобщенного фильтра Калмана от расходимости (см. [10]).

В работе рассматривается построение алгоритмов оценивания, когда необходима высокая точность оценивания. В силу особенностей задач статистическая информация о возмущениях, помехах либо отсутствует, либо недоступна, а точность оценок необходима в каждой реализации процесса, то делается выбор гарантированного подхода к оцениванию (см. [1, 30, 33, 60, 74, 78]), который, как известно, обладает и достоинствами, и недостатками.

Среди достоинств — минимальная информация о неопределенных факторах (начальном состоянии, о возмущениях и помехах; см. [33, 36, 44, 74, 78]) в виде множеств, из которых они могут принимать любое значение, а оценка вектора состояния находится также в виде информационного множества, которому гарантированно принадлежит вектор состояния, что является достоинством гарантированного подхода. Множества неопределенных факторов представляются выпуклыми многогранниками (см. [3, 25, 33, 55, 64–69]); в результате информационное множество так же будет многогранником.

Таким образом, при неполной информации в процессе находят применение как стохастический (см. [4, 8]), так и детерминированный подходы к построению фильтров, а также алгоритмы в статистически неопределенных ситуациях (см. [21]). Целесообразной может оказаться и разделение на несколько этапов, уровней обработки информации: первичная, вторичная, третичная. В [27] для первичной обработки сигналов датчиков в условиях неполной информации циклически подбираются параметры модели и циклического фильтра Калмана, который становится адаптивным. При неполноте информации алгоритма оценивания строятся и как банки фильтров (см. [37]), где каждый фильтр соответствует определенной модели процесса из заданного множества моделей. Эффективным является по существу «комплексирование» нескольких алгоритмов, построенных на разных информационных до определениях неопределенных факторов.

В работе ставится задача в разработке на основе гарантированного подхода адаптивного трехуровневого алгоритма, состоящего из нескольких фильтров на каждом уровне. Множества неопределенных факторов заданы многогранниками. Фильтры построены либо исходя из стохастического, либо из детерминированного подходов. Все уровни охвачены контурами обратной связи, что позволяет производить подстройку априори заданных параметров. В результате алгоритм оценивания приобретает свойство адаптивности.

Оценки возмущений для синтеза управления, также позволят повысить точность управления в условиях неопределенности (см. [2, 41, 47, 52, 59]). Современная теория управления многомерными динамическими системами находится в стадии развития, по отношению к результатам классической теории управления одномерными объектами с инженерными требованиями к точности, запасов устойчивости (по модулю и фазе) и времени регулирования. В настоящее время в теории управления прочное место заняли такие техники, как H_2 , H_∞ , l_1 и μ -синтез, которые весьма косвенно учитывают инженерные требования, преобладающие в классической теории автоматического управления (см. [24, 51, 54, 61]), что делает актуальной задачу сближения современной и классических теорий управления.

Таким образом, в результате решения задачи оценивания известно информационное множество, которому принадлежит вектор состояния динамической системы. В этих условиях задача синтеза управления рассматривается как задача управления будущими значениями вектора состояния: множествами прогнозов, если требования к динамической системе заданы в виде множеств в пространстве состояния системы (см., например, применение обобщенных множеств достижимости, [38]). В случае задания требований к системе в виде квадратичного функционала управление на каждом шаге находится как результат решения задачи квадратичного программирования. Синтез управления с помощью функций Ляпунова приводит к аналогичным экстремальным задачам.

Иной подход к оцениванию и управлению в условиях неопределенности рассматривается в [1, 6–9, 12, 13, 15, 16, 39, 43, 46, 48, 49, 57, 58, 70–73]. Работа примыкает к [27–31] и продолжает исследования [55, 63–69].

В разделе 1 рассмотрены алгоритмы гарантированного оценивания при различных априорных данных о неопределенных факторах. Приведены алгоритмы построения информационных множеств как для общего случая, так и с учетом особенностей математической модели процессов.

Путем оценки реализующихся помех, возмущений рассмотрена возможность адаптации алгоритма оценивания при неполноте априорной информации. Для этого рассмотрены существующие подходы к адаптации фильтра Калмана, а также фильтр Калмана, оценки которого гарантирующие. Интервальные наблюдатели при меньших вычислительных затратах также дают гарантированные оценки, точность которых может оказаться приемлемой.

Предложен адаптивный алгоритм, содержащий три этапа обработки, на каждом из которых может быть несколько параллельно работающих фильтров, построенных исходя либо из детерминированного, либо из стохастического подходов. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Раздел 2 посвящен синтезу управления, когда состояние системы известно с точностью до информационного множества. Требования к системе заданы в виде обобщенных множеств достижимости, либо с помощью множества, принадлежность которому вектора состояния необходимо обеспечить. Задача решается с учетом ограничений на вектор управления.

Рассмотрены синтез управления для квадратичного критерия качества и с помощью функций Ляпунова. Приводятся примеры.

1. АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad (1.2)$$

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_{k+1} \in V, \quad (1.3)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $w_k \in \mathbb{R}^p$, $y_k \in \mathbb{R}^r$, $v_k \in \mathbb{R}^r$ — векторы состояния, управления, возмущения, измерения, ошибок измерения соответствующей размерности. Матрицы в системе (1.1), (1.2) и вектор управления u_k предполагаются известными, а система управляема и наблюдаема. Далее в разделе 1 данной работы полагаем управление u_k известным и в целях упрощения записи иногда $u_k \equiv 0$.

При гарантированном или минимаксном подходе к решению задачи оценивания в условиях неопределенности априорная информация о начальном состоянии системы x_0 , возмущениях w_k и ошибках измерений v_k задается в виде выпуклых многогранников, из которых они могут принимать любые значения (см. [21, 33, 34]):

$$x_0 \in X_0 = \{x_0 : A_0 x_0 \leq b_0\}, \quad w_k \in W = \{w_k : A_w w_k \leq b_w\}, \quad v_k \in V = \{v_k : A_v v_k \leq b_v\}. \quad (1.4)$$

Искомая оценка вектора состояния x_{k+1} формируется в виде информационного множества \bar{X}_{k+1} (см. [21, 33, 34, 60, 78]), рекуррентные соотношения для которого имеют вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}, \quad \bar{X}_{k+1} &= X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\bar{X}_k + Bu_k + \Gamma W, \quad X[y_{k+1}] = \{x \in \mathbb{R}^n : Gx + Hv = y_{k+1} \forall v \in V\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $X_{k+1/k}$ — множество прогнозов; $X[y_{k+1}]$ — множество, совместное с измерениями.

Сумма множеств в $X_{k+1/k}$ понимается в смысле Минковского (см. [8]), и реализация этой операции является наиболее вычислительно затратной. Подчеркнем, что информационное множество \bar{X}_{k+1} является оценкой вектора состояния x_{k+1} системы (1.1)–(1.3) в виде множества $\bar{X}_{k+1} \ni x_{k+1}$ возможных значений вектора x_{k+1} , соответствующих реализовавшейся последовательности измерений y_i , $i = 1, \dots, k+1$, и априорной информации в виде математической модели (1.1)–(1.3) о динамической системе.

При необходимости за точечную оценку вектора x_{k+1} множеств может быть взят чебышевский центр $z_{k+1} \in \bar{X}_{k+1}$ (см. [21]), при этом ошибка $e_{k+1} = x_{k+1} - z_{k+1}$ оценки z_{k+1} будет минимальной в наихудшем случае реализации неконтролируемых факторов $x_0 \in X_0$, $w_i \in W$, $v_{i+1} \in V$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, что соответствует минимаксному подходу — расчету на наихудший случай.

Геометрической интерпретацией оценки z_{k+1} вектора состояния x_{k+1} в виде чебышевского центра z_{k+1} множества \overline{X}_{k+1} является центр z_{k+1} сферы минимального радиуса r_{k+1} , описывающей сверху множество \overline{X}_{k+1} . Это свойство оценки z_{k+1} — являться центром описанной сферы минимального радиуса r_{k+1} — позволяет построить вычислительный алгоритм для нахождения оценки z_{k+1} , а радиус r_{k+1} , равный модулю ошибки e_{k+1} в наихудшем случае или $d_{k+1} = 2r_{k+1}$ — диаметр информационного множества (см. [33, 34]) можно рассматривать как критерий качества алгоритма оценивания (1.5).

1.1. Построение информационного множества. Общий случай. В настоящее время применяются два подхода к построению информационного множества \overline{X}_{k+1} и множества прогнозов $X_{k+1/k}$. Первый оперирует с вершинами (угловыми точками) многогранников $X_0, W, V, X_{1/0}, \overline{X}_1, \dots, X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ (см., например, [73]) и может оказаться эффективным в задачах управления динамической системой невысокой размерности. По ходу процесса с ростом k число угловых точек у множеств $X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ увеличивается, что ограничивает применение этого подхода ростом размерности динамической системы для построения множества $X_{k+1/k}$ в (1.5), где основная вычислительная операция — нахождение суммы множеств $A\overline{X}_k, \Gamma W$ в смысле Минковского. Пусть, например, заданы множества $A_0 \subset \mathbb{R}^n, B_0 \subset \mathbb{R}^n$; тогда их сумма $C_0 = A_0 + B_0$ в смысле Минковского, как известно, равна

$$C_0 = \{c \in \mathbb{R}^n : c = a + b \ \forall a \in A_0, \ \forall b \in B_0\}.$$

Второй подход (см. [33, 34, 64–69]) использует представление многогранников $X_0, W, V, X_{1/0}, \overline{X}_1, \dots, X_{k+1/k}, \overline{X}_{k+1}$ системами линейных неравенств (1.4). Тогда для $k = 0$ из (1.1)–(1.4) получим

$$\begin{aligned} x_{k+1} + Ax_k + \Gamma w_k &= -Bu_k, \quad k = 0; \\ Gx_{k+1} + Hv_{k+1} &= y_{k+1}; \\ x_0 \in X_0, \quad w_0 \in W, \quad v_1 \in V_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Систему линейных уравнений и неравенств (далее для краткости пишем «система линейных неравенств») будем рассматривать как информационное множество \overline{X}_1 , заданное неявно. Для явного задания многогранника \overline{X}_1 надо найти уравнения всех его граней; тогда получим

$$\overline{X}_1 = \{x_1 : A_1 x_1 \leq b_1\}, \quad (1.7)$$

либо найти все вершины множества \overline{X}_1 , используя лишь систему (1.6). В рамках второго подхода переход от неявного (1.6) к явному (1.7) заданию множества \overline{X}_1 будем рассматривать как задачу аппроксимации многогранника сверху многогранником $\overline{X}_{a1} \supset \overline{X}_1$ с меньшим числом граней (см., например, [25, 68]).

Пусть теперь $k = 1$. Присоединив к системе (1.6) аналогичную систему для $k = 0$, т.е. систему (1.1)–(1.4) для $k = 1$, получим

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_i \in V, \quad i = 0, 1; \\ Gx_{i+1} + Hv_{i+1} &= y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + Ax_i + \Gamma w_i &= -Bu_i. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для $k = 2$ к системе (1.8) присоединим систему (1.1)–(1.4). В результате для $k = N - 1$ из (1.1)–(1.4) получим неявное задание множества $\overline{X}_i, i = 1, \dots, N$, в виде системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_{i+1} \in V, \quad i = 0, \dots, k - 1; \\ Gx_{i+1} + Hv_{i+1} &= y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + Ax_i + \Gamma w_i &= -Bu_i, \end{aligned} \quad (1.9)$$

а в результате решения задачи аппроксимации множества $\overline{X}_i \subset \overline{X}_{ai}, i = 1, \dots, N$ (см. [68]), где явно задано множество \overline{X}_{ai} , аппроксимирующее информационное множество \overline{X}_i :

$$\overline{X}_{ai} = \{x : A_{ai}x \leq b_{ai}\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Сделаем несколько замечаний.

1. При нехватке вычислительных ресурсов размерность системы линейных неравенств (1.9) можно уменьшить, отбрасывая неравенства, соответствующие началу процесса, и вести обработку на скользящем «окне» шириной L , т.е. в (1.9) $i = k_1, \dots, k_2$, $k_2 - k_1 = L$, \overline{X}_{k_1} задано. В крайнем по отношению к (1.9) случае имеем $L = 1$, и приходим к системе линейных неравенств вида (1.6).

2. Система линейных неравенств (1.9) позволяет решать задачи сглаживания, т.е. находить $\overline{X}_{i/k}$, в том числе и задачу $\overline{X}_{0/N}$, имеющую важные приложения (см. [1]).

3. Из системы (1.9) можно найти оценки \overline{W}_i , \overline{V}_{i+1} для возмущений w_i и помех v_{i+1} и использовать их для адаптации алгоритма фильтрации (1.5), (1.6), (1.9).

4. Система неравенств (1.9) позволяет решать задачи прогнозирования, построения множеств достижимости, управления, сменив оптимизационную парадигму (см. [51–54]), в том числе и терминального управления, с использованием принципа «гибких кинематических траекторий» и при задании ограничений, как на управление u_i , так и на вектор состояния x_{k+1} .

Если требования к динамике системы (1.1)–(1.3) заданы в виде выпуклого множества $\tau_d \subset \mathbb{R}^n$ в фазовом пространстве системы, то поскольку вектор состояния x_{k+1} системы (1.1)–(1.3) известен с точностью до принадлежности к информационному множеству \overline{X}_{k+1} , то задача синтеза позиционного управления при наличии ограничений в виде множеств X_{k+1} , U_k на вектор состояния $x_{k+1} \in X_{k+1}$ и управление $u_k \in U_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сводится к нахождению последовательности u_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, при которых система линейных неравенств

$$x_{k+1} \in X_{k+1}, \quad x_{k+1} \in \tau_d, \quad x_{k+1} \in \overline{X}_{k+1}, \quad u_k \in U_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

была бы совместной. Здесь множество \overline{X}_{k+1} представлено либо множественно-множественными отображениями (1.5), либо системой неравенств (1.9).

5. Система неравенств (1.9) позволяет находить и оценки параметров динамической системы (1.1). Пусть, например, для некоторых элементов a_{ij} матрицы A из (1.1) известно только то, что $a_{ij} \in [a_{ij}^I, a_{ij}^{II}]$. В результате получаем более сложную, нелинейную систему неравенств, в решении которой получим оценки векторов состояния x_k , возмущений w_k , помех v_k , параметров a_{ij} .

6. В случае нелинейной модели динамической системы

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

$$y_{k+1} = \varphi(x_{k+1}, v_{k+1}), \quad (1.12)$$

решение задачи оценивания сводится к решению системы нелинейных неравенств, аналогичных (1.9):

$$\begin{aligned} x_0 \in X_0, \quad w_i \in W, \quad v_i \in V, \quad i = 0, 1, \dots, k; \\ \varphi(x_{i+1}, v_{i+1}) = y_{i+1}; \\ -x_{i+1} + f(x_i, u_i, w_i) = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2. Использование особенностей математической модели динамической системы. Рассмотрим линейную дискретную систему (см. [44])

$$x_{k+1} = Ax_k + D_1 w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

$$y_k = Gx_k + D_2 w_k, \quad (1.15)$$

$$\|w_k\| \leq 1, \quad (1.16)$$

где $\|\dots\|$ — евклидова норма вектора.

Помехи измерениям v_k в динамической системе (1.1)–(1.3) равны возмущениям $v_k = w_k$ в (1.14)–(1.16), $D_1 D_2^T = 0$ и не задано множество $X_0 \ni x_0$. На этом различия в динамических системах (1.1)–(1.3) и (1.14)–(1.16) заканчиваются. В работах [44, 56, 57] на основе метода инвариантных эллипсоидов построен фильтр, уравнения которого имеют вид

$$\check{x}_{k+1} = A\check{x}_k + L(y_k - G\check{x}_k), \quad \check{x}_0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

$$x_k \in E_k = \{x : (x - \check{x}_k)^T P^{-1}(x - \check{x}_k) \leq 1\}, \quad (1.18)$$

где постоянные матрицы L, P отыскиваются с помощью аппарата линейных матричных неравенств. Достоинство фильтра (1.17), (1.18) заключается в гарантированной оценке, т.е. \check{x}_k гарантированно принадлежит инвариантному эллипсоиду (1.18): если $x_0 - \check{x}_0 \in E_0$ (малые отклонения), то и $x_k - \check{x}_k \in E_k$, а из условия $x_0 - \check{x}_0 \notin E_0$ (большие отклонения) следует $x_k - \check{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} E_k$. В фильтре (1.5) $d_{k+1} \in [0, dV]$, d_{k+1} (диаметр информационного множества) зависит от измерений y_{k+1} . В фильтре (1.17), (1.18) $d_{k+1} = \text{const}$.

Для динамической системы (1.14)–(1.16) возможны три ситуации.

1. Из модели процесса (1.14) можно найти

$$w_k = D_1^{-1}x_{k+1} - D_2^{-1}(Ax_k + Bu_k) \quad (1.19)$$

и, подставляя w_k в уравнение измерения (1.15), получить модель динамической системы с уравнением измерения

$$y_{k+1} = G_1x_{k+1} + G_2x_k + B_2u_k \quad (1.20)$$

без ошибок измерения, что приведет к повышению точности оценивания алгоритма (1.5). В уравнении (1.20) матрицы имеют вид

$$G_1 = G - D_2D_1^{-1}, \quad G_2 = -D_2D_1^{-1}, \quad B_2 = -D_2D_1^{-1}B. \quad (1.21)$$

2. Из уравнения измерения (1.15) можно найти

$$w_k = D_2^{-1}(y_k - Gx_k). \quad (1.22)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.14), получим модель динамической системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_1x_k + Bu_k + Dy_k, & y_{k+1} &= Gx_{k+1} + D_2w_k, & k &= 0, 1, 2, \dots, \\ A_1 &= A - D_1D_2^{-1}G, \end{aligned} \quad (1.23)$$

в которой неопределенные факторы только $x_0 \in X_0$, а множество прогнозов

$$X_{k+1/k} = A_1\bar{X}_k + Bu_k + Dy_k$$

не содержит операции суммирования множеств. В этом случае $w_k \in W = [w_{1k}, w_{2k}]$ и из (1.11)–(1.13) получим систему неравенств вида

$$\begin{aligned} b_{1k} &\leq -x_{k+1} + Ax_k \leq b_{2k}; \\ y_{1i} &\leq Gx_{i+1} \leq y_{2i}, \quad i = k, k+1; \\ x_k &\in \bar{X}_k, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где множество \bar{X}_k и значения $b_{jk}, y_{ji}, j = 1, 2, i = k, k+1$, известны:

$$b_{jk} = -Bu_k + D_1w_{jk}, \quad y_{ji} = y_i + D_2w_{ji-1}.$$

Система неравенств (1.24) является частным случаем системы (1.9), и для ее решения могут быть разработаны более эффективные методы построения информационного множества \bar{X}_{k+1} по сравнению с более общим случаем динамической системы вида (1.1)–(1.3).

3. Случай

$$w_{k+1} \approx w_k, \quad v_k \approx N(0, \delta_v^2), \quad y_k = x_k^1 + v_k, \quad x_k = (x_k^I, x_k^{II}) \quad (1.25)$$

и установлено, что событие $x_i \notin E_i, i = k, k+1$, невозможно, E_k – доверительный эллипсоид фильтра Калмана. Выражения для оценки \check{x}_k и доверительного эллипсоида фильтра Калмана имеют вид (см. [33, 50, 55])

$$\check{x}_{k+1} = A\check{x}_k + Bu_k + K_{k+1}[y_{k+1} - G(A\check{x}_k + Bu_k)], \quad K_{k+1} = P_{k+1}G^T R^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

$$E_{k+1} = \{x : (x - \check{x}_{k+1})P_{k+1}^{-1}(x - \check{x}_{k+1}) \leq l^2\}, \quad (1.27)$$

где P_{k+1} – ковариационная матрица ошибок оценивания. Вероятность выполнения условия $x_{k+1} \in E_{k+1}$ равна 0,989 при оптимальных оценках \check{x}_{k+1} , для $x_{k+1} \in \mathbb{R}^2$ и $l = 3$.

Введем множество $X_{2k+1} = \text{Conv}\{E_k \cup E_{k+1}\}$ ($\text{Conv}\{\dots\}$ – выпуклая оболочка множества), для которого $x_{k+1} \in X_{2k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$, будем называть, по аналогии с минимаксным фильтром

(ММФ) информационным множеством фильтра Калмана. Это позволяет применить к динамической системе (1.1)–(1.3) оба фильтра. Для этого динамическую систему (1.1)–(1.3) представим в виде

$$\begin{aligned} x_{k+1}^1 &= A_1^1 x_k^1 + A_1^2 x_k^2 + \Gamma_1 w_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ y_{k+1} &= x_{k+1}^1 + v_{k+1}, \\ x_{k+1}^2 &= A_1^2 x_k^1 + A_2^2 x_k^2 + \Gamma_2 w_k. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тогда с учетом уравнения (1.28) для минимаксного фильтра получим

$$\begin{aligned} \bar{X}_{k+1}^1 &= X_{k+1/k}^1 \cap (y_{k+1} - V), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k}^1 &= A_1^1 \bar{X}_k^1 + \Gamma_2 W + A_2^2 \check{x}_k^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Реализация фильтра (1.29) проще из-за меньшей размерности вектора x_k^1 . Кроме того, возможно повышение точности оценок, если объединить оценки минимаксного фильтра и фильтра Калмана:

$$X_{k+1/k}^1 = \bar{X}_{k+1}^1 \cap X_{2k+1}^1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

Такое объединение можно сделать и для всего вектора x_{k+1} , используя разный уровень интеграции двух фильтров. Совместное применение двух фильтров целесообразно и тогда, когда только по части координат вектора требуется гарантированная оценка в виде информационного множества. Тогда, представив $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$, где x_k^1 – вектор, для которого необходима гарантированная оценка, приходим к модели процесса вида (1.28) с уравнением измерения

$$y_{k+1} = G_1 x_{k+1}^1 + v_{k+1} + d_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $d_{k+1} = G_2 \check{x}_{k+1}^2$ известна.

Пример 1.1. Воспользуемся особенностями матриц A , G , D_1 , D_2 модели (1.14), (1.15), которая описывает линеаризованную модель динамики вертолета Bell201A-1 (см. [56]), для получения гарантированной оценки вектора состояния x_k . Соответствующие матрицы системы в уравнениях (1.14), (1.15) имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -0,005 & 0,004 & 0,326 & -0,004 & -0,402 & -0,073 & -9,81 & 0 \\ -0,198 & -0,567 & 0,357 & -0,038 & -0,215 & 0,568 & 0 & 0 \\ 0,004 & -0,003 & -0,295 & 0,007 & 0,227 & 0,015 & 0 & 0 \\ 0,013 & -0,001 & -0,407 & -0,065 & -0,409 & 0,267 & 0 & 9,81 \\ 0,013 & -0,01 & -0,815 & -0,04 & -0,821 & 0,144 & 0 & 0 \\ -0,028 & -0,023 & 0,106 & 0,071 & -0,279 & -0,74 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1^T = (0,068; -1,115; 0,006; -0,017; -0,013; 0,14; 0; 0),$$

$$D_2^T = (0; 0,1; 0; 0; 0; 0; 0,5; 0).$$

Отличные от нуля элементы матрицы G равны $c_{12} = c_{27} = c_{38} = c_{46} = c_{53} = c_{65} = 1$. Векторы x_k , w_k , y_k имеют размерность 8, 1, 6 соответственно.

Для данной в модели динамики вертолета матрицы D_2 найдем выражение для ошибки измерения, например, из уравнения для первой компоненты y_{1k} вектора измерений y_k

$$w_k = 10(y_k - x_k). \quad (1.31)$$

Подставляя w_k (1.31) в (1.14), получим для вертолета модель динамической системы (1.23), реализация для которой алгоритм оценивания требует меньше вычислительных затрат и рассмотрена в разделе 2.2.

Кроме того, данная модель динамики вертолета позволяет найти точное значение всех компонент вектора состояния x_k , а не оценки \bar{X}_k с помощью алгоритма фильтрации. Действительно, из

уравнения измерения (1.15) и матрицы D_2 следует, что $x_{2k} = y_{1k}$, $x_{8k} = y_{2k}$, $x_{6k} = y_{4k}$, $x_{5k} = y_{6k}$. Из модели процесса (1.14) для переменных x_{ik} , $i = 2, 5, 6$, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{21}x_{1k} + a_{24}x_{4k} + d_{21}w_k &= z_{2k}; \\ a_{51}x_{1k} + a_{54}x_{4k} + d_{51}w_k &= z_{5k}; \\ a_{61}x_{1k} + a_{64}x_{4k} + d_{61}w_k &= z_{6k}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$\begin{aligned} d_{i1} &= d_i - 0,05a_{i3}, \quad i = 2, 5, 6, \\ z_{2k} &= y_{1k+1} - a_{22}y_{1k} - a_{23}y_{5k} - a_{25}y_{6k} - a_{26}y_{4k}, \\ z_{5k} &= y_{6k+1} - a_{52}y_{1k} - a_{53}y_{5k} - a_{55}y_{6k} - a_{56}y_{4k}, \\ z_{6k} &= y_{4k+1} - a_{62}y_{1k} - a_{63}y_{5k} - a_{65}y_{6k} - a_{66}y_{4k} \end{aligned}$$

вычисляются по априорным данным и измерениям y_{ik+1} , $i = 1, 4, 6$; y_{jk} , $j = 1, 4, 5, 6$.

Система (1.32) при заданных значениях a_{ij} , d_{1i} , $i = 2, 5, 6$; $j = 1, 2, 3, 4$, имеет единственное решение; таким образом, значения x_{1k} , x_{4k} , w_k вычисляются на $(k+1)$ -м шаге. Знание w_k позволяет непосредственно из уравнения измерения (1.15) найти $x_{3k} = y_{5k} - 0,05w_k$, $x_{7k} = y_{2k} - 0,1w_k$. Следовательно, по уравнениям (1.14), (1.15) и измерениям y_{k+1} найдено значение вектора состояния x_k системы без использования уравнений фильтра (1.5).

Для управления представляет интерес множество прогнозов $X_{k+1/k}$ (1.5). Так, например, для первой и четвертой координат, которые измеряются без ошибок, для диаметров множеств получим

$$dX_{ik+1/k} = d_{i1}dW, \quad dW = 2, \quad dX_{1k+1/k} = 0,136, \quad dX_{4k+1/k} = 0,34.$$

Для системы (1.14), (1.15) для первой и четвертой координат имеем соотношения для диаметров множеств фильтров

$$dE_{x1} = 1,3 > dX_{1k+1/k} = 0,136, \quad dE_{x4} = 0,64 > dX_{4k+1/k} = 0,34,$$

где dE_{x1} и dE_{x4} — диаметры по первой и четвертой координатам фильтра (1.17), (1.18).

Иными словами, точность оценивания гарантирующего фильтра (1.17), (1.18) по 1-й и 4-й координатам для рассмотренных исходных данных [56], хуже точности прогноза в алгоритме (1.5).

1.3. Адаптация к помехам и возмущениям. Диаметр информационного множества \overline{X}_k зависит (см. [68]) от реализовавшихся измерений y_i , $i = 1, \dots, k$, которые, в свою очередь, зависят от реализации неопределенных факторов — помех v_{i+1} и возмущений w_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Множество \overline{X}_i может стягиваться в точку $x_k = \overline{X}_k$ для некоторого $i = k$, а может и не изменяться ($\overline{X}_i \approx \overline{X}_{i+1}$), и в этом случае измерения y_i , y_{i+1} являются неинформативными. Это приводит к необходимости осуществлять адаптацию минимаксного фильтра путем нахождения оценок для помех \hat{V} и возмущений \hat{W} , например, из решения системы линейных неравенств (1.9) и далее при $i > N$ использовать в системе линейных неравенств (1.9). В качестве индикатора того, что $w_i \in \hat{W}_N$, $v_{i+1} \in \hat{V}_{N+1}$, $i > N$, можно взять невязку $l_i = y_i - GA\hat{x}_{i-1}$ и условие $l_i \in Q_N = \text{Conv}\{l_1, \dots, l_N\}$, $i > N$, где \hat{x}_{i-1} — оценка фильтра Калмана для системы (1.1), (1.2).

Найдем оценки возмущений w_i , помех v_{i+1} непосредственно из соотношений (1.5) для случая, когда матрицы Γ и H в (1.1), (1.2) — единичные. Тогда из соотношений (1.5) для найденной оценки \overline{X}_{k+1} имеем

$$\overline{X}_{k+1} = y_{k+1} - \hat{V}_{k+1} \quad \text{или} \quad \hat{V}_{k+1} = y_{k+1} - \overline{X}_{k+1}.$$

Аналогично из (1.5) из выражения для множества $\overline{X}_{k+1/k}$ для оценки \hat{W}_k имеем

$$\overline{X}_{k+1} = A\overline{X}_k + Bu_k + \Gamma\hat{W}_k, \quad \Gamma\hat{W}_k = \overline{X}_{k+1} \setminus A\overline{X}_k - Bu_k,$$

где \setminus — обозначение геометрической разности множеств. С учетом априорной информации о помехах и возмущениях $w_k \in W$ получим апостериорные оценки

$$\overline{V}_k = \hat{V}_{k+1} \cap V, \quad \Gamma\overline{W}_k = \Gamma\hat{W}_k \cap \Gamma W. \quad (1.33)$$

Большие возможности для адаптации создаются при совместном использовании нескольких параллельно работающих фильтров, построенных исходя из разных информационных доопределений неопределенных факторов модели процесса.

1.4. Минимаксный алгоритм фильтрации. Для оценки вектора состояния x_k системы (1.1)–(1.3) применим три фильтра (минимаксный фильтр, гарантирующий фильтр, фильтр Калмана), для которых $x_k \in X_{kj}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где $X_{k1} = \bar{X}_k$ – информационное множество минимаксного фильтра (1.5), $X_{k2} = E_k$ – инвариантный эллипсоид (1.15), $X_{k3} = \text{Cov} X_k$, $X_k = E_{k-1} \cup E_k$, где E_k – доверительный эллипсоид фильтра Калмана (1.24). Рассматривается случай, когда для любых двух смежных моментов времени $k - 1$, k хотя бы один раз $x_i \in E_j$, $i = k - 1, k$.

Предлагается алгоритм минимаксной фильтрации, в котором осуществляется одновременное применение трех параллельно работающих фильтров: минимаксного, гарантирующего и фильтра Калмана, так что получаем множество

$$X_k = \bigcap_{j=1,2,3} X_{kj}, \quad x_k \in X_{kj}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.34)$$

которое будем называть информационным множеством алгоритма минимаксной фильтрации, по аналогии с информационным множеством \bar{X}_k минимаксного фильтра, а также с множеством X_{k3} фильтра Калмана. Множество прогнозов определяется как $X_{k+1/k} = AX_k + Bu_k + \Gamma W$. Отметим, что рассматриваются последовательности множеств в системе (1.1)–(1.3), для которых $x_k \in X_{kj}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots$. В качестве гарантирующего фильтра можно взять любой фильтр, использующий эллипсоиды, зонотопы (см. [5, 11, 44, 48, 56, 57]), обеспечивающий повышение точности и реализуемый при располагаемых вычислительных ресурсах.

Если чебышевский радиус множества X_{k3} , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет заданным требованием по точности оценивания вектора x_k , то фильтр Калмана позволяет в этом случае получать гарантированные множественные оценки в виде множеств X_{k3} , $k = 1, 2, \dots$, и его можно применить без привлечения минимаксного и гарантирующего фильтров. Кроме того, наряду с применением в (1.34) трех фильтров, исходя из требований по точности, может оказаться достаточным использование любых двух из трех фильтров. Если в составе двух фильтров будет применяться минимаксный фильтр, то при удовлетворении требований по точности информационное множество X_{k1} нужно положить равным либо множеству $X[y_{k+1}]$, либо множеству прогнозов $X_{k+1/k}$.

Для снижения вычислительных затрат необходимо исключить в алгоритме минимаксного фильтра операции суммирования множеств. В тех случаях, когда для возмущений w_k в динамической системе (1.1)–(1.3) возможно построение математической модели (см. [28]), исключаем операцию суммирования множеств, расширяя вектор состояния x_k . К исключению операции суммирования множеств приводит и неявное задание информационных множеств системой линейных неравенств (1.8), (1.9).

Использование особенностей модели динамической системы (1.1)–(1.3) для представления в виде (1.23), где нет операции примирования множеств. Так же в модели процесса (1.23) при матрице $\Gamma_1 = 0$ применение двух фильтров позволяет исключить операцию суммирования множеств. Из (1.23) получим оценку для ошибок измерений

$$\hat{V}_{k+1} = y_{k+1} - \bar{X}_{k+1},$$

для которой найдем аппроксимирующий сверху эллипсоид $E_k \supset \hat{V}_k$ с матрицей \hat{R}_k , которую можно рассматривать как оценку либо ковариационной матрицы ошибок измерений фильтра Калмана, либо соответствующей матрицы гарантирующего фильтра.

Кроме того, если множество X_k (1.34) аппроксимировать сверху эллипсоидом с матрицей P_k , то ее можно использовать для коррекции фильтра Калмана и гарантирующего фильтра, что будет приводить к адаптации трех параллельно работающих фильтров: минимаксного, гарантирующего и фильтра Калмана.

Пример 1.2 (см. [57]). Рассмотрим систему (1.1)–(1.3) с вектором состояния $x_k = (x_{1k}, x_{2k})^T$, управлением $u_k = 0,98$, возмущениями $w_k = (w_{1k}, w_{2k})^T$, измерениями $y_k \in \mathbb{R}^1$, ошибками $v_k \in \mathbb{R}^1$

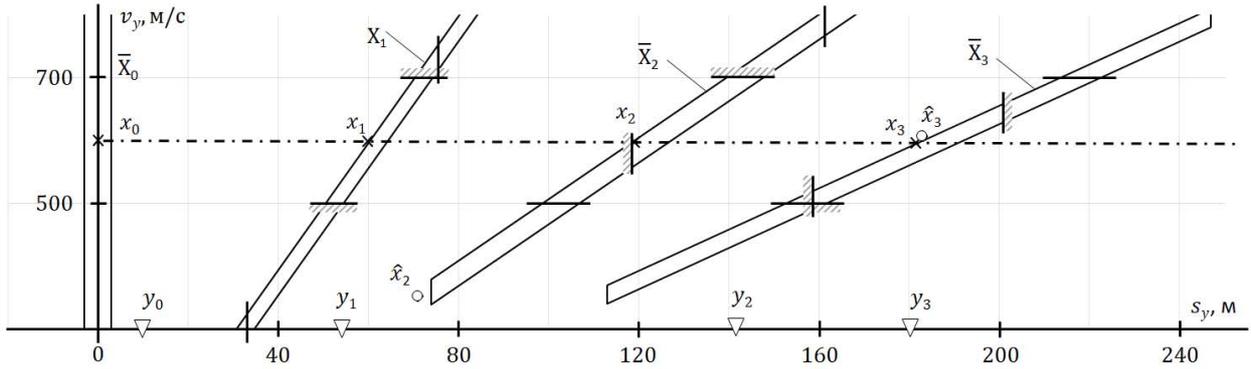


Рис. 1.1. Динамика множеств X_k , \bar{X}_k , оценок \hat{x}_k , измерения y_k , траектория движения — пунктирная линия, проходящая через точки x_k , для начального участка траектории при $k = 0, 1, 2, 3$ на фазовой плоскости.

и с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad B = (0, 1)^T, \quad G = (0, 1), \quad \Gamma = I \text{ (единичная матрица)},$$

которая описывает движение снаряда в вертикальной плоскости. В системе (1.1): $x_{1k} = s_y(k)$, $x_{2k} = v_y(k)$ — проекции координаты и скорости снаряда на ось y , $b = 10^{-4}$ — коэффициент сопротивления воздуха, $[k, k+1] = 0,1$ с — интервал времени между измерениями. Возмущения w_k и ошибки измерения v_k (м) распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q = \text{diag}\{\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2\}$, $\sigma_{w1}^2 = 0,1$ м², $\sigma_{w2}^2 = 0,1$ м²/с² и дисперсией $\sigma_v^2 = 500$ м².

Сравним результаты расчета трех алгоритмов фильтрации: информационные множества \bar{X}_k (1.5), инвариантные эллипсоиды E_k (1.18) и доверительные эллипсоиды фильтра Калмана (1.27) — и найдем оценку X_k (1.29) вектора состояния x_k , воспользовавшись результатами расчета (см. [57]) для гарантирующего фильтра, фильтра Калмана с начальными значениями оценок для ГА, фильтра Калмана $\check{x}_0 = \hat{x}_0 = 0$, $P_0 = \text{diag}\{\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2\}$, $\sigma_{x1}^2 = 0,1$ м², $\sigma_{x2}^2 = 10^5$ м²/с². Для минимаксного фильтра, в соответствии с данными для фильтра Калмана, взяты множества (1.4)

$$X_0 = \{x_0 : |x_{i0}| \leq 3\sigma_{xi}, i = 1, 2\}, \quad W = \{w_k : |w_{ki}| \leq 3\sigma_{wi}, i = 1, 2\}, \quad V = \{v_k : |v_{ki}| \leq 3\sigma_v\}.$$

Согласно [55, 64, 68] информационные множества X_{k1} , X_k строятся в виде многогранников (рис. 1.1). Для этого E_k фильтра Калмана аппроксимируются сверху многогранником (рис. 1.2), и поскольку $x_k \in E_k$ при $k = 0, 1, 2, 3, 70, 71, 72, 73$, то для упрощения построения множество X_{k3} состоит из одного эллипса E_k .

Из результатов расчета (см. рис. 1.1, рис. 1.2) множеств X_k алгоритма минимаксной фильтрации (1.32) для двух участков траектории следует, что множества X_k , $k = 1, 71, 72, 73$, формировались только двумя фильтрами, минимаксным и фильтром Калмана, для рассматриваемых исходных данных. Поскольку размеры множеств X_{k2} ГА и X_{k3} фильтра Калмана значительно больше, чем у информационного множества $X_{k1} = \bar{X}_k$ минимаксного фильтра, и, учитывая их расположение на фазовой плоскости, можно отметить, что множество X_1 (рис. 1.1) образовано лишь пересечением двух множеств X_{11} и X_{13} минимаксного фильтра и фильтра Калмана.

Для второго участка траектории (рис. 1.2) размеры множества X_{k3} уменьшились, и оно пересекается со множеством $X_{k1} = \bar{X}_k$, что и приводит к повышению точности оценивания, так как $X_1 = X_{k1} \cap X_{k3}$.

Отметим, что оценки $X_{k1} = X_k$ минимаксного фильтра, а значит, и оценки X_k алгоритма минимаксного фильтра зависят от реализовавшихся возмущений и ошибок измерений, так же как и от множеств X_0 , W , V . В данном примере $X_{01} \supset \mathcal{E}_{l0}$ — весьма грубая оценка второй компоненты x_{20} вектора x_k (см. [57]). Более реалистические оценки второй компоненты $x_{20} \in [500; 700]$ и

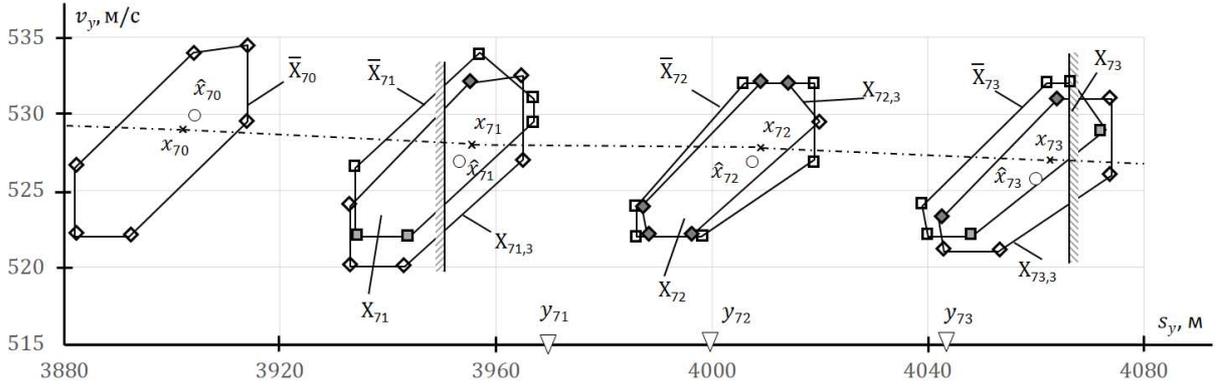


Рис. 1.2. Динамика множества X_k , \bar{X}_k , X_{k3} , оценок \hat{x}_k , измерения y_k , траектория движения — пунктирная линия, проходящая через точки x_k для участка траектории при $k = 70, 71, 72, 73$ на фазовой плоскости.

ошибок измерений $V = \{v_k : |v_k| \leq \delta_v\}$ приводят, как следует из расчетов (рис. 1.1), к уменьшению размеров множества \bar{X}_k , а значит, и к повышению точности оценивания. Так (рис. 1.1) возникает дополнительное ограничение для $k = 0, 1$, $x_{2k} \in [500; 700]$; $k = 2$, $x_{12} \leq 120$; $k = 3$, $x_{13} \in [160; 200]$; для $k = 71$, $x_{171} \geq 3951$ (рис. 1.2); $k = 73$, $x_{173} \leq 4066$. На рис. 1.2 вершины множеств \bar{V}_k , X_{k3} , образующие множество $X_k = \bar{X}_k \cap \bar{X}_{k3}$, затенены.

Множество X_{k2} ГА значительно больше множества X_{k3} фильтра Калмана для $k = 76$, отношение больших осей эллипсов ГА и фильтра Калмана более 6, и поэтому отсутствует в X_k алгоритме минимаксной фильтрации в данном примере.

Пример 1.3. Рассмотрим вновь задачу оценивания вектора x_k , описывающего движение снаряда в вертикальной плоскости (см. [57, 65]):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + Bu_k + v_{k+1}, \quad (1.35)$$

где $x_k = (s_y(k), v_y(k))^T$ — вектор состояния, компоненты которого — проекции координаты и скорости снаряда на вертикальную ось, $u_k = -g\Delta t$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ — интервал дискретизации. В уравнении (1.15) будем пренебрегать сопротивлением воздуха, а матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (0, 1)^T, \quad G = (1, 0), \quad \Gamma = I \text{ (единичная матрица)}.$$

Возмущения w_k и ошибки измерения v_k (м) распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q = \text{diag}\{\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2\}$, $\sigma_{w1}^2 = 0,1 \text{ м}^2$, $\sigma_{w2}^2 = 0,1 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и дисперсией $\sigma_v^2 = 500 \text{ м}^2$.

Найдем оценку X_k вектора состояния x_k , воспользовавшись результатами расчета (см. [57]) для фильтра Калмана с начальными значениями оценок для фильтра Калмана $\check{x}_0 = \hat{x}_0 = 0$, $P_0 = \text{diag}\{\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2\}$, $\sigma_{x1}^2 = 0,1 \text{ м}^2$, $\sigma_{x2}^2 = 10^5 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Для минимаксного фильтра, в соответствии с данными для фильтра Калмана, взяты множества

$$X_0 = \{x_0 : |x_{10}| \in [0; 3], |x_{20}| \in [500; 700]\}, \quad W = \{w : |w_{ki}| \leq 1, i = 1, 2\}, \quad V = \{v : |v_k| \leq 67\}$$

и вектор $x_0 = (0; 600)^T \in X_0$.

Обозначим через $x_k = (x_k^1, x_k^2)^T$ компоненты вектора $x_k \in \mathbb{R}^2$; тогда для оценок имеем

$$\begin{aligned} \bar{X}_{k+1} &= X_{k+1/k}^1 \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k}^1 &= \bar{X}_k^1 + 0,1\hat{x}_k^2 + W, \quad X[y_{k+1}] = y_{k+1} - V, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где \hat{x}_k^2 — оценка фильтра Калмана. Оценки \hat{x}_k^2 для малых k могут оказаться грубыми, и поэтому возможно, что $x_k^1 \notin X_{k+1/k}$. Для исключения такой ситуации, в данном примере для $k \leq 2$, уравнение для множества прогнозов возьмем в виде

$$X_{k+1/k}^1 = \bar{X}_k^1 + 0,1X_{k+1/k}^2 + W^1, \quad X_{k+1/k}^2 = \bar{X}_k^2 + u_{k-1} + W^2. \quad (1.37)$$

В результате расчета для $k = 1, 2$ получим:

$$\bar{X}_1^1 = X_{1/0}^1 = [52; 74], \quad \bar{X}_2^1 = X_{2/1}^1 = [101; 145].$$

Для $k = 3$ расчет проведем по уравнению (см. далее): $\bar{X}_3^1 = X_{3/2}^1 = [135; 181, 3]$. Если найти

$$\hat{V}_k = y_e - X_k^1, \quad \hat{V} = U\hat{V}_k = [-21; 45], \quad d\hat{V} = 66, \quad d\bar{X}_3^1 = 18,$$

то возьмем $\tilde{V} = [-6; 22]$; тогда $\bar{X}_3^1 = [168; 186]$.

Для $k = 4$ получим:

$$X_4^1 = [227; 242], \quad x_4^1 = 239, \quad \hat{x}_4^1 = 241, \quad \hat{V}_4 = 236 - X_4^1 = [-6; 0] \subset \hat{V}_3 \subset \tilde{V}.$$

Для $k = 5, \dots, 10$ получены следующие результаты:

$$\bar{X}_5^1 = [295; 303]; \quad \bar{X}_6^1 = [353; 363]; \quad e_6 < 0; \quad \bar{X}_7^1 = [413; 425], \quad e_7 > 0; \quad \bar{X}_8^1 = [477; 480],$$

знаки e_5, e_8 не определены. Сравнивая $d\bar{X}_k^1$ с расчетами (см. [65]0, получаем, например, для $k = 3$: $d\bar{X}_3^1 = 18$ против 40 в [65], следовательно, ошибки оценивания уменьшены более чем в два раза.

1.5. Алгоритмы оценивания при неполной информации. Адаптивные фильтры Калмана с подстройкой матриц ковариаций возмущений и шумов измерений. При совместном использовании нескольких алгоритмов фильтрации в условиях неполной информации будем применять адаптивный алгоритм фильтра Калмана в линейной нестационарной системе с неизвестными матрицами ковариаций возмущений и шумов измерений. Специфика прикладной задачи может подсказать наиболее подходящую математическую модель процесса и возможности информационного доопределения по ходу процесса оценивания для уменьшения неопределенности в информации, что и является основой либо для выбора алгоритма адаптации, либо для его построения.

Возможными приложениями адаптивных фильтров (см. [8, 10, 40]) являются задачи навигации, управления и слежения за движущимися объектами, движение которых описывается линейной моделью (1.1)–(1.3):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Gamma w_k, \quad (1.38)$$

$$y_{k+1} = Gx_{k+1} + Hv_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.39)$$

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad (1.40)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.1)–(1.3). Пусть вместо (1.3) заданы априорное гауссовское распределение начального состояния $x_0 = Nx(0; P_0)$ с матрицей ковариации P_0 и последовательность измерений $y^0 = (y_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Необходимо найти оценку вектора состояния x_T и характеристику точности этой оценки.

Последовательность y^0 получена как результат реализации набора векторов $\xi = \text{Cov}(w_t, v_t)$, $t = 1, 2, \dots$, являющегося белым гауссовским шумом с нулевым средним и с матрицей ковариации

$$Q = \begin{pmatrix} Q_w & Q_{wv} \\ Q_{vw} & Q_v \end{pmatrix}.$$

На коротком промежутке времени, например, по десяти последним измерениям $y^0 = (y_t)$, $M = 10$, оценка матрицы ковариаций Q_n вычисляется по формуле

$$Q_n = \gamma Q_{n-1} + (1 - \gamma) \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \xi_{n,k} \xi_{n,k}^T,$$

где $(\xi_{n,k})$, $k = 1, 2, \dots$, — оценки возмущений и шумов на этом n -м отрезке, $\gamma = 0,2$ — параметр, обеспечивающий невырожденность случайных матриц Q_n (см. [3]).

Более общо, для отрезка $n = 1, \dots, N$ вычисляется средний коэффициент усиления фильтра K_n , оценки \hat{x}_t , $t = 1, \dots, M$, и ошибки прогноза измерений $\xi_k = y_k - Cx_{k/k-1}$, а также эмпирические матрицы ковариаций ошибок оценивания и прогнозирования измерений:

$$P_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M (x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^T, \quad R_n = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M \xi_t^2.$$

1.6. Адаптивный фильтр Калмана. Как пример комплексирования алгоритмов в условиях неполной информации, когда характеристики возмущений и ошибок измерений точно неизвестны и могут быть аномально большие негауссовские ошибки, отметим алгоритм, в котором совместно используется адаптивный фильтр Калмана и обобщенный метод наименьших модулей для модели линейной нестационарной динамической системы (1.1), (1.2) (см. [40]). Для случая, когда w_k , v_k — векторы нормально распределенных величин, $\text{Cov } w_k = Q_k$, $\text{Cov } v_{k+1} = R_k$, в [40] приведена оценка матриц Q и R осреднением на скользящем окне ширины N :

$$\hat{R}_k \cong \frac{1}{N} \sum_{j=i-N+1}^k v_j v_j - GM_i G^T, \quad \hat{Q}_k \cong \frac{1}{N} \sum_{j=i-N+1}^k (K_j v_j v_j^T K_j^T + M_j - AP_{j-1} A^t),$$

где

$$v_j = y_j - GA\hat{x}_{j-1}, \quad M_j = AP_{j-1} A^t + \hat{Q}_{j-1}, \quad P_j = M_j G^T (GM_j G^T + R_j)^{-1}.$$

В нестационарной системе осреднения на скользящем окне можно использовать L -фильтр:

$$\begin{aligned} \hat{R}_k &= (1 - L)\hat{R}_{k-1} + L(v_k v_k^T - GM_k G^T), \\ \hat{Q}_k &= (1 - L)\hat{Q}_{k-1} + L(K_k v_k v_k^T K_k^T + D_k - AP_{k-1} A^T), \end{aligned}$$

где $L < 1$ — настраиваемый коэффициент.

В [1] рассмотрен подход к задаче оценивания динамических систем, который не требует априорной информации о неопределенных факторах как необходимой для применения фильтра Калмана или гарантированного подхода к оцениванию (см. [57, 69]). Следовательно, при возникновении подобной ситуации такой алгоритм, используемый совместно с минимаксным фильтром (1.5), минимаксным алгоритмом фильтрации (см. [69]) может привести к повышению эффективности фильтрации:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gq_k + g_k, \quad z_k = Hx_k + r_k, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad (1.41)$$

где q_k , r_k — неизвестные векторы; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в (1.1), (1.2), все матрицы известны и могут быть переменными. Имеется априорная информация \bar{x}_0 о начальном состоянии системы $\bar{x}_0 = x(0) + r(0)$.

Характерные значения возмущений (погрешностей в динамике) q_k , ошибок (шумов) r_k в измерениях, в априорной информации известны и заданы положительными величинами R_j , Q_j , Π_j , соответственно:

$$\begin{aligned} r_j(k) &\cong R_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, K; \\ q_j(k) &\cong Q_j, \quad j = 1, \dots, l, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1; \\ \bar{r}_j(k) &\cong \Pi_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Кроме того, в редкие моменты времени ошибки измерений могут быть аномально большими, превышающими Π_j , R_j , Q_j , а погрешности в динамике могут приводить к скачкообразным изменениями компонент фазового вектора.

Предположений о вероятностных свойствах шумов не делается. Оценка векторов состояния динамической системы решается как вариационная задача l_1 -аппроксимации:

$$\bar{L}(x, q) = \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x_0)\|_{l_1} + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q_k\|_{l_1} + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}(y_k - Hx_k)\|_{l_1} \rightarrow \text{img}_{(x,q)} \quad (1.42)$$

при ограничениях

$$x_{k+1} - Fx_k - Gq_k - g_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1.$$

Здесь введены обозначения

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (x, q) = (x_0, x_1, \dots, x_k, q_0, q_1, \dots, q_{k-1}),$$

$$\Pi^{-1} = \text{diag} \{ \Pi_1^{-1}, \dots, \Pi_n^{-1} \}, \quad Q^{-1} = \text{diag} \{ Q_1^{-1}, \dots, Q_n^{-1} \}, \quad R^{-1} = \text{diag} \{ R_1^{-1}, \dots, R_n^{-1} \}.$$

Ее решение опирается на квадратичную задачу сглаживания

$$J(x, q) = \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x_0)\|_{L_2} + \left(\sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q_k\|_{L_2}^2 + \|R^{-1}(y_k - Gx_k)\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \rightarrow \min_{(x, q)}$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i/N} &= \hat{x}_i - C_i(\bar{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+1/N}), \quad \hat{x}_{N/N} \cong \hat{x}_N, \quad \hat{w}_{i/N} = \bar{w}_i - B_i(\bar{x}_{i+1} - \hat{x}_{i+1/N}), \\ P_{i/N} &= P_i - P_i A^T \Lambda_i A P_i, \quad Q_{i/N} = Q - Q \Gamma^T \Lambda_i \Gamma Q, \quad C_i = P_i A M_{i+1}^{-1}, \quad B_i = Q \Gamma M_{i+1}^{-1}, \end{aligned}$$

где \bar{x}_i , \hat{x}_i — прогноз и оценка вектора состояния x_i алгоритма, уравнения которого совпадают с уравнениями фильтра Калмана для системы (1.41), с матрицами $P_0 = \Pi$, Q и R из критерия (1.35); $\hat{x}_{i/N}$, $\hat{w}_{i/N}$ — сглаженные оценки, $P_{i/N}$, $Q_{i/N}$ — матрицы, аналогичные соответствующим ковариационным матрицам фильтра Калмана.

1.7. Гарантированный аналог фильтра Калмана. Приведем основные результаты (см. [71]) по эллипсоидальному гарантированному оцениванию для линейной динамической системы:

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad y = Gx + v, \quad w \in E(0, W(t)), \quad v \in E(0, V(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.43)$$

где смысл обозначений тот же, что и в [57, 60], система (1.43) может быть и не стационарной, $E(x, \theta)$ — эллипсоид с центром в заданном векторе x и симметрической положительно определенной матрицей θ , т.е.

$$E(\kappa, \theta) = \{ l \in \mathbb{R}^1 : \theta^{-1}(l - \kappa, l - \kappa) \leq 1 \}.$$

Матрицы $W(t)$, $V(t)$ известны.

В [71] построен фильтр в форме нестационарной линейной системы

$$\dot{\rho} = F(t)\rho + K(t)y, \quad \rho \in \mathbb{R}^n, \quad \rho(0) = x(0), \quad (1.44)$$

где вектор $\rho(t)$ — искомая оценка вектора $x(t)$, а $F(t)$, $K(t)$ — некоторые неизвестные матрицы. Под $x(0)$ понимается центр эллипсоида при $t = 0$. Для вектора $e(t) = x(t) - \rho(t)$ ошибок фильтра также введен эллипсоид

$$e(t) \in E(f(t), \Sigma(t)), \quad \Sigma(0) = \Sigma_0.$$

Матрицы $F(t)$, $K(t)$ фильтра (1.35) находятся в результате решения экстремальной задачи

$$J = \text{Tr}(L(T)\Sigma(t)) \rightarrow \min$$

при условиях $f(t) \equiv 0$, (1.1)–(1.3), и уравнения фильтра (1.35) могут быть получены в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= A\rho + \Sigma H^T V^{-1}(y - G\rho), & \rho(0) &= x(0), \\ \dot{\Sigma} &= A\Sigma + \Sigma A - \Sigma H^T V^{-1} H \Sigma + B W B^T, & \Sigma(0) &= \Sigma_0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

которые совпадают с уравнениями фильтра Калмана для стохастической системы, если вместо матриц V и W эллипсоидов подставить ковариационные матрицы соответствующих белых шумов.

Повторная фильтрация. Если оценку $\rho(t)$ рассматривать как новое наблюдение (измерение), то в [72] поставлена снова задача фильтрации в динамической системе с новыми наблюдениями:

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad \rho = x - e. \quad (1.46)$$

Обозначая x^1 новую оценку вектора x для ошибки, получим:

$$\begin{aligned} e &= x - x^1, & e &\in E(0, D(t)), \quad D(0) = \Sigma, \\ \dot{x}^1 &= A_s x^1 + D \Sigma_y^{-1} (\rho - x^1), & x^1(0) &= \rho(0), \\ \dot{D} &= A_s D + D A_s^T - D \Sigma_s^{-1} D + B W_s B^T, & D(0) &= \Sigma_0, \\ A_s(t) &= A + \frac{1}{2q_s(t)} I_n, & W_s(t) &= q_s(t)(1 + L_s(t)^{-1})W(t), \\ \Sigma_s(t) &= q_s(t)(1 + L_s(t))\Sigma(t), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $L_s(t) \geq 0$ и $q_s(t) \geq 0$ при $t \geq 0$ — произвольные скалярные функции, I_n — единичная матрица порядка n .

В [72] отмечается, что, построив оценку x^1 с помощью фильтра (1.47), ее можно взять за новое наблюдение и использовать ее аналогично для построения следующей эллипсоидальной оценки. Сравнение интервального и эллипсоидальной оценивание в [35] показана целесообразность двухэтапной процедуры построения эллипсоидальных систем, когда на первом этапе определяются интервальные оценки минимального объема с дальнейшей аппроксимацией, а на втором этапе — эллипсоид минимального объема.

1.8. Интервальные наблюдатели. При построении наблюдателей актуальной является проблема (см. [15, 16, 19, 32, 57]) неопределенности в модели процесса (неизвестные параметры модели, начального состояния или/и внешних возмущений и шумов измерения), что в значительной степени решается использованием интервальных наблюдателей (ИН), которые определяют оценку множества допустимых значений всего вектора состояния (информационного множества), как и оценку только для заданной линейной функции вектора состояния или для части его координат.

Соответствующий ИН может оказаться проще наблюдателя полной размерности и расширится класс систем, для которых он может быть построен.

Отметим, что ИН, как и минимаксный фильтр в гарантированном подходе, дает интервальную оценку вектора состояния и оценку ошибки оценивания в детерминированных системах, подобно фильтру Калмана в стохастических системах.

Пример 1.4 (см. [16]). Рассмотрим пример нагруженного электропривода, управляющего одной степенью подвижности многосвязного манипулятора, описанную уравнениями

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u + L\rho, \quad y = Hx + v, \quad (1.48)$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $\rho \in \mathbb{R}^1$, где x_1 — угол поворота выходного вала редуктора, x_2 — скорость вращения ротора, x_3 — ток якоря. Матрицы в (1.48) имеют вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad H^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \equiv 0.$$

Переходя в (1.48) к дискретному времени, получим:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & r\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 - r\alpha_2 & r\alpha_3 \\ 0 & r\alpha_4 & 1 + r\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad B = rG(t), \quad G = rH,$$

где (см. [16])

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, \quad y_k = x_{3k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ r = 0,5, \quad \alpha_1 &= \frac{1}{i_r} = 10^{-2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_b h^*(kr)}{J + H(kr)} = 27,5, \\ \alpha_3 &= \frac{km}{J} + H^*(t) = 2 \cdot 10^2, \quad \alpha_4 = \frac{km}{I_m} = -80, \quad \alpha_5 = -\frac{R_m}{L_m} = -10^3, \\ g &= \frac{ky}{L_m} = 2 \cdot 10^{-5}, \quad b = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^5 = 1 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (1.49)$$

При расчете принимались следующие значения параметров манипулятора и электропривода: $i_r = 100$, $R_m = 0,50$ м, $L_m = 5 \cdot 10^{-4}$ Гн; $k_y = 100$, $k_m = 0,04$ Н·м/А, $J = 10^{-4}$ кг·м², $k_B = 0,04$ В·с, $H^*(t) = h^*(t) = 10^{-4}$ — известные компоненты, характеризующие, соответственно, степени подвижности манипулятора и кориолисовых и скоростных сил. В [16] синтезирован интервальный наблюдатель оценивания переменной $z = x_2$, т.е. $N = (0; 1; 0)$, $z = Nx$.

Пусть неопределенность X_0 начального состояния x_0 задана в виде $X_0 = X_0^1 x X_0^2 x X_{30}$, где $X_0^1 = [0; 0; 1]$, $X_0^2 = [0; 0; 1]$ — только по первой и второй компоненте вектора $X_0 \in \mathbb{R}^3$. Тогда при $k = 1$ и получении $y_1 = x_{31}$ из уравнений для компонент системы (1.49) находим:

$$x_{20} = \frac{1}{4}(-y_1 + x_{30} + 10^4 u_0), \quad x_{21} = 2,37x_{20} + 10x_{30},$$

и неопределенность остается только в первой компоненте $X_{11/0} = X_0^1 + 5 \cdot 10^{-4} x_{20}$, обусловленная неопределенностью начального состояния X_0^1 первой компоненты. Ситуация с неопределенностью сохраняется и при $k = 2, 3, \dots$. Компонента x_{2k} , начиная с $k = 1, 2, \dots$, оценивается точно.

Пример 1.5 (см. [19]). Рассмотрим модель нагруженного электропривода, отличающуюся от модели примера 1.4 учетом нелинейности сухого трения и матрицей H :

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u + C(t)\Psi(x, u), \quad y = Hx, \quad (1.50)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x, u) = -\gamma_1(t) - \gamma_2(t) \operatorname{sign}\{x_2(t)\}, \quad \gamma_1 = \frac{M_B(t)}{J + H^*(t)}, \quad \gamma_2 = \frac{M_{TP}(t)}{J + H^*(t)}.$$

Здесь $M_B(t)$ — известное переменное моментное воздействие, учитывающее гравитационные силы и эффекты взаимовлияний между всеми степенями подвижности манипулятора в процессе его движения, M_{TP} — величина номинального момента сухого трения, J — момент инерции ротора электродвигателя и вращающихся частей редуктора, приведенный в этому ротору.

В [19] построен скользящий наблюдатель для идентификации появления неучтенного моментного воздействия $\tilde{M}(t)$:

$$\tilde{M}(t) = -\hat{k}_B(t)x_2(t) - \hat{M}_{TP}(t) \operatorname{sign}\{x_2(t)\}, \quad (1.51)$$

где

$$\hat{k}_B(t) = 0,5k_B, \quad \hat{M}_{TP}(t) = 0,5M_{TP}.$$

Появление дефекта моделировалось изменением k_B и M_{TP} на 50% при $t = 3$ с. У синтезированного наблюдателя максимальная ошибка не превышала 35% от величины $M(t)$.

Применяем алгоритм гарантированного оценивания (1.5). При $k = 0$ из (1.49) известны x_{10} , x_{30} . При $k = 1$ известны x_{10} , x_{31} . Из уравнения (1.49) модели находим x_{20} , что позволяет из уравнения для x_{2k+1} вычислить x_{21} . Таким образом, при $k = 1$, зная y_0 , y_1 , получим точное значение вектора состояния x_0 , x_1 и т. д. Тогда, согласно [49], можно получить точное значение $M_{k\tau}$, т.е. решить задачу идентификации без ошибок.

1.9. Адаптивный минимаксный алгоритм фильтрации. Будем рассматривать минимаксный фильтр (см. [69]) как основной базовый фильтр для построения адаптивного алгоритма оценивания, состоящего из совокупности фильтров с организованной на нескольких этапах обработкой. Среди фильтров, вошедших в состав минимаксного алгоритма фильтрации (МАФ), основным является минимаксный фильтр, реализующий следующие множественно-множественные отображения:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &\in \bar{X}_{k+1}, \quad X_{k+1/k} \cap X_k[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\bar{X}_k + Bu_k + \Gamma W, \quad X[y_{k+1}] = b\{x \in \mathbb{R}^n : Gx + Hv = y_{k+1} \forall v \in V\}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где \bar{X}_{k+1} , $X_{k+1/k}$, $X[y_{k+1}]$ — множества, соответственно, информационное, прогнозов и совместное с измерениями.

Для случая, когда множества X_0 , W , V — многогранники, а матрицы A , B зависят от параметра L , решение задачи одновременного определения оценок векторов состояния и параметров для линейной нестационарной системы (1.1)–(1.3) приведено в виде операций над множествами (см. [33]), когда задана априорная гарантированная оценка скорости изменения параметров во времени:

$$\|\Delta\rho_k = \rho_{k+1} - \rho_k\|_\infty \leq \gamma,$$

где ρ_k — вектор параметров системы, γ — заданная константа, относительно которой не принимается предположение о ее малости;

$$\|\dots\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

— норма, x_i — i -я компонента вектора x .

Отметим важное свойство минимаксного фильтра при использовании многогранников: зависимость размеров информационного множества от реализации, возмущений и помех. Если множества неопределенных факторов являются грубыми оценками для реализующихся в ходе процесса, то и информационные множества будут грубыми оценками (см. [6, 14]), вплоть до того, что размеры информационного множества не будут зависеть от текущих измерений. Пессимизм, грубость оценок — известный недостаток гарантированного подхода.

Если множества неопределенных факторов заданы без закругления и возмущения, и помехи принимают значения вблизи границ и на границах множеств, информационные множества значительно уменьшаются при поступлении очередного измерения и даже могут стягиваться в точку — т.е. состоят из одной точки, вектора состояния системы (см. [67–69]). Это делает актуальной задачу построения адаптивного фильтра к реализации неопределенных факторов, к которым будем относить и случай неизвестных параметров объекта управления.

Необходимость адаптации возникает и при использовании фильтра Калмана. Так, в задачах сопровождения (высокоскоростных) аэробаллистических объектов одним из существенных упрощений, закладываемых в фильтр Калмана, является предположение о линейном характере уравнений движения и наблюдения (см. [58]) и нормальное распределение неопределенных факторов, что на практике часто не подтверждается. В [58] для этого случая предлагается использовать ансамблевый фильтр Калмана, который использует множество ансамблей параметров. По сути неопределенность приводит к необходимости использовать банк фильтров (см. [37]).

Как уже отмечалось, равенство $d\bar{X}_k = 0$ означает, что информационное множество «стянулось» в точку $x_k = \bar{X}_k$, несмотря на возмущение w_{k-1} и ошибки измерения v_k , если они принимают значения на границе множеств W и V . Следовательно, в алгоритме фильтрации по ходу процесса должно реализовываться такое уменьшение dW_{k-1} и dV_{k-1} , чтобы $d\bar{X}_k = d\bar{X}_{k+1}$. Для этого в минимаксном алгоритме фильтрации проведем следующие изменения.

Введем этап первичной обработки (см. [9]), на котором можно было бы получить апостериорные оценки для W_k , V_{k+1} . Тогда на следующем этапе вторичной обработки полученные оценки возмущений и ошибок будут использованы в алгоритмах вторичной обработки в виде нескольких параллельно работающих фильтров (банк фильтров), где каждый из фильтров может быть построен, исходя из разных информационных доопределений модели процесса, так как это сделано в МАФ (см. [69]).

Далее, на этапе третичной обработки, имея информационные множества \overline{X}_{ik} от каждого из i -х фильтров этапа вторичной обработки из условия, что $x_k \in \overline{X}_{ik}$ для всех фильтров, на выходе алгоритма (третичной) обработки получим:

$$x_k \in \overline{X}_k = \bigcap_{i=1, \dots, l} X_{ik}, \quad \hat{x}_k \in \overline{X}_k,$$

где \hat{x}_k — точечная оценка, в качестве которой может быть взят чебышевский центр множества \overline{X}_k . Знание \overline{X}_k позволяет согласно (1.28) (см. [69]) найти оценки \hat{W}_{k+1} , \hat{V}_k для фильтров первичной и вторичной обработки, что придает свойство адаптивности алгоритму фильтрации.

Первичная обработка. В качестве фильтров на этапе первичной обработки предлагается использовать фильтр (см. [1]), адаптивный фильтр (см. [28]), полиномиальный или циклический фильтр Калмана (см. [17, 28]) и минимаксный фильтр (1.5). Полиномиальный фильтр Калмана является адаптивным, и его рекомендуется применять в критических режимах работы динамических систем (см. [28]), характерным для которого является неопределенность, в том числе, математической модели объекта управления.

Рассмотрим построение алгоритма первичной обработки из параллельно работающих полиномиального фильтра Калмана первого порядка (см. [17]) и минимаксного фильтра (1.5) для многочлена первой степени, для которого справедлива модель

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad y_k = Gx_k + v_k,$$

где $x_k \cong (x_k, \dot{x}_k)^T$ — вектор состояния, составленный из значения функции $x(t)$ и ее первой производной $\dot{x} = dx/dt$ в точке $t = k$, возмущения w_k , ошибки v_k — случайные некоррелированные последовательности с нулевыми средними и известной ковариационной матрицей Q и дисперсией δ^2 ; матрицы A и G равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = (1 \ 0).$$

Уравнения полиномиального фильтра Калмана имеют вид

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_k + K_k(y_{k+1} - GA\hat{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для уравнений минимаксного фильтра имеем:

$$\begin{aligned} \overline{X}_{k+1} &= X_{k+1/k} \cap X_k[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ X_{k+1/k} &= A\overline{X}_k + W, \quad X[y_{k+1}] = y_{k+1} - V, \end{aligned}$$

где $w_k \in W$, $v_k \in V$, $x_0 \in X_0$; W , V , X_0 заданы (см. [69]). Выходом алгоритма первичной обработки являются:

$$X_k = \overline{X}_k \cap X_{2k}, \quad X_{2k} = E_k \cup E_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и тогда находим оценку для множества ошибок измерений:

$$\check{V}_k = y_k - \overline{X}_k, \quad \check{V}_k = V_k \cap V,$$

и прогноз для $(k+1)$ -го шага множества ошибок таков:

$$\check{V}_{k+1/k} = \check{V}_k + y_{k+1} - y_k,$$

который используем в уравнении минимаксного фильтра. Эффективность первичной обработки повышается, если ввести следующие ограничения (калибровку) на величину измерения y_{k+1} и, тем самым, на ошибки измерения:

$$z_k = \begin{cases} a_k & \forall y_{k+1} < a_k, \\ y_{k+1} & \forall y_{k+1} \in [a_k, b_k], \\ b_k & \forall y_{k+1} > b_k, \end{cases} \quad (1.53)$$

где $a_k < b_k$ — это наименьшее и наибольшее значение первых координат угловых точек информационного множества \overline{X}_k . Откалиброванные измерения z_k необходимо подставлять в уравнения фильтров вместо y_{k+1} .

На этапах вторичной и третичной обработки используем алгоритм МАФ, состоящий из трех фильтров: минимаксного (1.10), гарантирующего (см. [57, 69]) и Калмана. Поскольку необходимо найти гарантированные оценки, то состав фильтров в части второго и третьего может меняться в зависимости от специфики задачи оценивания.

Для повышения точности оценивания в канале с фильтром Калмана можно применить повторную (см. [72]) фильтрацию (1.9), переходя к дискретному времени, а для снижения вычислительных затрат в канале с минимаксным фильтром применять математическую модель процесса в виде (см. [69])

$$\begin{aligned}x_{k+1}^1 &= A_1^1 x_k^1 + A_1^2 \hat{x}_k^2 + \Gamma_1 w_k, & y_{k+1} &= x_{k+1}^1 + v_{k+1}, & k &= 0, 1, 2, \dots, \\x_{k+1}^2 &= A_2^1 x_k^1 + A_2^2 x_k^2 + \Gamma_2 w_k,\end{aligned}$$

и с уравнениями минимаксного фильтра в виде

$$\bar{X}_{k+1}^1 = X_{k+1/k}^1 \cap (y_{k+1} - V), \quad X_{k+1/k}^1 = A_1^1 \bar{X}_k^1 + \Gamma_2 W + A_1^1 \hat{x}_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В ситуации, когда $d\bar{X}_k \geq d_3$ — заданное значение диаметра, определяющее требуемую точность оценивания, совместное использование минимаксного фильтра и фильтра Калмана может повысить точность оценивания. Поскольку $x_k \in \bar{X}_k$, то очевидно требование для оценок фильтра Калмана: $\hat{x}_k \in \bar{X}_k$. В этих целях либо на этапе первичной обработки, либо на данном этапе, используя z_k (1.53) вместо y_k в уравнениях фильтров, получим, что из $\hat{x}_k \in X_k$, $z_{k+1} \in X_k$ следует $\hat{x}_k \in X_{k+1}$.

Поскольку $dX_{k+1,3} < dX_{k,3}$, то и $dX_{k+1} < dX_k$, а так как $x_k \in X_k$, $\hat{x}_k \in X_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то обеспечивается сходимость \hat{x}_{k+1} к x_{k+1} при $k \rightarrow +\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов П. А., Матасов А. И. Итерационный алгоритм для l-аппроксимации в динамических задачах оценивания// Автомат. телемех. — 2015. — № 5. — С. 7–26.
2. Андриевский Б. Р., Фуртат И. Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Ч. 2. Приложение// Автомат. телемех. — 2020. — № 1. — С. 35–91.
3. Антонов М. О., Афансьева К. Е., Коблов А. И., Ширяев В. И. Алгоритмы оценивания и управления беспилотных летательных аппаратов на этапе посадки// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2005. — № 2. — С. 166–173.
4. Антонов М. О., Елсаков С. М., Ширяев В. И. Высокоточная система посадки летательных аппаратов. — М.: Эдитус, 2015.
5. Бакан Г. М., Кузсуль Н. Н. Теоретико-множественная идентификация линейных объектов в классе размытых эллипсоидальных множеств// Автоматика. — 1999. — № 3. — С. 29–40.
6. Бакан Г. М. Оптимизация алгоритмов гарантированного оценивания состояния динамических систем// Автомат. телемех. — 2000. — № 1. — С. 27–36.
7. Баландин Д. В., Федюков А. А. Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2021. — № 5. — С. 5–17.
8. Барабанов А. Е. Линейная фильтрация с адаптивной подстройкой матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения// Автомат. телемех. — 2016. — № 1. — С. 30–49.
9. Бек В. В., Вишняков Ю. С., Махлин А. Р. Интегрированные системы терминального управления. — М.: Наука, 1989.
10. Будкин В. Л., Булгаков С. Л., Михеенков Ю. П., Чернодаров А. В., Патрикеев А. П. Бортовая реализация адаптивно-робастных оценивающих фильтров: практические результаты// Науч. вестн. МГТУ ГА. Сер. Авионика и электротехн. — 2005. — № 89 (7). — С. 59–71.
11. Волосов В. В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления// Пробл. управл. информ. — 1996. — № 4. — С. 37–53.
12. Габасов Р., Дмитриук Н. М., Кириллова Ф. М. О проблеме оптимального управления динамическими системами в реальном времени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз.. — 2020. — 183. — С. 98–112.

13. *Гридасов И. П.* Синтез минимаксных линейных систем управления в условиях неопределенности корреляционных свойств возмущений и помех при моментных ограничениях управления// Изв. АН. Техн. киберн. — 1994. — № 1. — С. 132–140.
14. *Дегтярь В. Г., Шалимов Л. Н.* Синтез управления морских стратегических ракетных комплексов. — М.: Машиностроение, 2014.
15. *Ефимов Д. В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями// Автомат. телемех. — 2016. — № 2. — С. 5–49.
16. *Жиравок А. Н., Зуев А. В., Бобко Е. Ю., Тимошенко А. А.* Построение интервальных наблюдателей для нестационарных систем// Мехатрон. автомат. управл. — 2024. — 25, № 1. — С. 513–519.
17. *Зотиков Б. Д., Нейфельд А. А.* О параметрическом синтезе стационарных полиномиальных фильтров первого порядка// Автомат. телемех. — 1992. — № 6. — С. 56–64.
18. *Зубов П. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016.
19. *Зуев А. В., Жиравок А. Н., Филаретов В. Ф., Проценко А. А.* Идентификация дефектов в нестационарных системах на основе скользящих наблюдателей// Мехатрон. автомат. управл. — 2021. — 22, № 1. — С. 625–632.
20. *Калман Р. Е.* Идентификация систем с шумами// Усп. мат. наук. — 1985. — 40, № 4 (244). — С. 27–41.
21. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях// Автомат. телемех. — 1978. — № 1. — С. 79–87.
22. *Квинто Я. И., Хлебников М. В.* Верхние оценки отклонений траекторий в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями// Пробл. управл. — 2019. — № 3. — С. 16–21.
23. *Коган М. М.* Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных линейных системах при неизвестных ковариациях// Автомат. телемех. — 2015. — № 1. — С. 50–66.
24. *Коган М. М.* Адаптивное H_∞ -оптимальное управление// Автомат. телемех. — 2022. — № 8. — С. 123–139.
25. *Костоусова Е. К.* О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем// Автомат. телемех. — 1997. — № 3. — С. 57–68.
26. *Кошечев А. С., Куржанский А. Б.* Адаптивное оценивание революции многошаговых систем в условиях неопределенности// Изв. АН. Техн. киберн. — 1983. — № 2. — С. 72–93.
27. *Красовский А. А.* Циклическое оценивание при первичной обработке сигналов датчиков// Автомат. телемех. — 1988. — № 6. — С. 52–60.
28. *Красовский А. А.* Адаптивные полиномиальные наблюдатели и идентификация в критических режимах// Автомат. телемех. — 1996. — № 1. — С. 142–155.
29. *Красовский А. А., Наумов А. И.* Аналитическая теория самоорганизующихся систем управления с высоким уровнем интеллекта// Изв. АН. Теор. сист. управл. — 2001. — № 1. — С. 69–75.
30. *Красовский Н. Н.* Управление при дефиците информации// Докл. АН СССР. — 1985. — 280, № 3. — С. 536–540.
31. *Красовский Н. Н.* Задачи управления и стабилизации динамических систем// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 1998. — 60. — С. 24–41.
32. *Кумков С. И., Федотов А. А.* Интервальное оценивание параметров движения самолета в условиях сильного искажения измерений// Автомат. телемех. — 2010. — № 2. — С. 112–127.
33. *Кунцевич В. М.* Определение гарантированных оценок векторов состояния и параметров линейных динамических систем при ограниченных возмущениях// Докл. АН СССР. — 1986. — 288, № 3. — С. 567–570.
34. *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наукова думка, 2006.
35. *Кунцевич В. М., Волосов В. В.* Эллипсоидальные и интервальные оценки вектора состояния семейств линейных и нелинейных дискретных динамических систем// Киберн. сист. анализ. — 2015. — 71, № 1. — С. 73–84.
36. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Физматлит, 1977.
37. *Лайниотис Д. Г.* Разделение — единый метод построения адаптивных систем. I. Оценивание// Тр. ин-та инж. электротехн. радиоэлектр. — 1976. — 64, № 8. — С. 8–27.
38. *Лотов А. В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 250, № 5. — С. 1081–1083.

39. *Лычак М. М.* Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода// Пробл. управл. информ. — 1999. — № 5. — С. 34–41.
40. *Миллер Б. М., Колосов К. С.* Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана// Автомат. телемех. — 2020. — № 1. — С. 72–92.
41. *Никифоров В. О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. I. Объекты с известными параметрами// Автомат. телемех. — 2004. — № 1. — С. 13–24.
42. *Пешехонов В. Г.* Высокоточная навигация без использования информации глобальных навигационных спутниковых систем// Гироскопия и навигация. — 2022. — 30, № 1. — С. 3–11.
43. *Поддубный В. В.* Рестриктивная фильтрация в навигационных системах// Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2002. — № 25. — С. 202–215.
44. *Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов// Докл. РАН. — 2008. — 418, № 6. — С. 749–753.
45. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014.
46. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации// Автомат. телемех. — 2022. — № 3. — С. 7–32.
47. *Рутковский В. Ю., Суханов В. М.* Проблемы нелинейного управления ориентацией деформируемых космических аппаратов. Ч. 2. Идентификация, оценивание и алгоритмы управления в условиях неопределенности модели объекта// Мехатрон. автомат. управл. — 2006. — № 1.. — С. 15–24.
48. *Сальников Н. Н.* Эллипсоидальное оценивание состояний и параметров динамической системы при отсутствии априорной информации// Пробл. управл. информ. — 2014. — № 2. — С. 144–156.
49. *Сальников Н. Н., Губарев В. Ф., Мельничук С. В.* Применение модифицированного эллипсоидального фильтра в комплексированной беспилотной инерциальной системы// Пробл. управл. информ. — 2018. — № 2. — С. 87–102.
50. *Степанов О. А.* Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние// Мехатрон. автомат. управл. — 2010. — № 1. — С. 10–16.
51. *Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.* Синтез следящих систем на основе аппарата линейно-квадратичной оптимизации// Мехатрон. автомат. управл. — 2016. — 17, № 1. — С. 795–801.
52. *Филимонов Н. Б.* Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования// Мехатрон. автомат. управл. — 2003. — № 2. — С. 11–15.
53. *Филимонов Н. Б.* Стохастический и детерминированный подходы в задачах параметрического оценивания// Тр. I Всеросс. науч.-техн. конф. «Механика, автоматизация, управления». — М.: Новые технологии, 2004. — С. 187–190.
54. *Филимонов Н. Б.* Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы// Мехатрон. автомат. управл. — 2010. — № 1. — С. 2–11.
55. *Фокин Л. А., Ширяев В. И., Подивилова Е. О.* Об использовании калмановского и минимаксного алгоритмов оценивания погрешностей интегрированной навигационной системы// Тр. ФГУП «НППЦАП». Системы и приборы управления. — 2013. — № 3. — С. 65–79.
56. *Хлебников М. В.* Разреженная фильтрация при ограниченных внешних возмущениях// Автомат. телемех. — 2022. — № 2. — С. 35–50.
57. *Хлебников М. В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров// Автомат. телемех. — 2023. — № 4. — С. 64–95.
58. *Ходатаев Н. А., Тимошенко А. В., Казанцев А. М., Скосаренко А. Е.* Интеллектуальный алгоритм сопровождения высокодинамических аэробаллистических объектов на основе оценок траектории движения// Изв. вузов. Приборостроение. — 20–2. — 67, № 1.
59. *Цыкунов А. М.* Робастное управление с компенсацией ограниченных возмущений и помех// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 19–6. — № 3.
60. *Черноусько Ф. Л.* Гарантированные оценки неопределенных величин при помощи эллипсоидов// Докл. АН СССР. — 1980. — 251, № 1. — С. 51–54.
61. *Честнов В. Н.* Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H?-оптимизации// Автомат. телемех. — 2019. — № 1. — С. 132–152.
62. *Шалыгин А. С., Лысенко Л. Н., Толтегин О. А.* Методы моделирования ситуационного управления движением беспилотных летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 2012.
63. *Ширяев В. И.* К устойчивости в целом системы третьего порядка со «своими» нелинейностями в одном частном случае// Диффер. уравн. — 1973. — 9, № 1. — С. 2102–2104.

64. *Ширяев В. И.* Синтез управления линейными системами при неполной информации// Изв. РАН. Техн. киберн. — 1994. — № 3. — С. 229–237.
65. *Ширяев В. И.* Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности// Мехатроника. — 2001. — № 8. — С. 2–5.
66. *Ширяев В. И., Коблов А. И., Ленин Е. Ф.* Оценивание параметров движения роботов команды противника при игре в футбол// Мехатроника. — 2002. — № 1. — С. 6–8.
67. *Ширяев В. И.* Управление динамическими системами в условиях неопределенности// Искусств. интеллект. — 2008. — № 3. — С. 224–231.
68. *Ширяев В. И., Подвилова Е. О.* Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности// Мехатрон. автомат. управл. — 2014. — № 7. — С. 10–16.
69. *Ширяев В. И.* Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности. Ч. 1// Мехатрон. автомат. управл. — 2024. — 25, № 6. — С. 279–288.
70. *Шматков А. М.* Сопоставление стохастического и эллипсоидального оценивания неопределённости для динамической системы с возмущениями, ограниченными по величине// Докл. РАН. — 2006. — 411, № 4. — С. 460–463.
71. *Шматков А. М.* Построение аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамической системы// Изв. РАН. Теор. сист. управл. — 2011. — № 5. — С. 33–40.
72. *Шматков А. М.* Сглаживающий фильтр на основе аналога фильтра Калмана для гарантированной оценки состояния динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 4. — С. 98–508.
73. *Шорилов А. Ф.* Алгоритм решения задачи апостериорного минимаксного оценивания состояний дискретных динамических систем. II// Автомат. телемех. — 1996. — № 9. — С. 139–150.
74. *Bertsekas D., Rhodes I.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — 16, № 2. — P. 117–128.
75. *Combastel C., Zhang Q.* Robust fault diagnosis based on adaptive estimation and set-membership computations IFAC Proc. Vol. — 2006. — 39, № 13. — P. 1204–1209.
76. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems// Trans. ASME. J. Basic Eng. — 1960. — № 82. — P. 35–45.
77. *Le V. T. H., Stoica C., Alamo T., Camacho E. C., Dumur D.* Zonotopes: From Guaranteed State-estimation to Control. — Wiley, 2013.
78. *Schwepe F. C.* Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs// IEEE Trans. Automat. Control. — 1968. — 13, № 1. — P. 22–28.
79. *Shamolin M. V.* Foundations of differential and topological diagnostics// J. Math. Sci. — 2003. — 114, № 1. — P. 976–1024.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ширяев Владимир Иванович (Shiryayev Vladimir Ivanovich)
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
(South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)
E-mail: shiriaevvi@susu.ru