ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 81–89
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-81-89

УДК 517.955.8

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВИДА ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2025 г. **Е. А. ЧУНЖУК**

Аннотация. Исследуется решение вида движущегося фронта для двумерного уравнения типа реакция-диффузия с кубической нелинейностью. Представлена методика получения асимптотического приближения движущегося фронта, распространяющегося в среде с разрывными характеристиками, рассмотрены основные особенности, возникающие при решении двумерной задачи.

Ключевые слова: уравнение типа реакция-диффузия, разрывная кубическая нелинейность, движущийся фронт, малый параметр, асимптотическое представление.

FEATURES OF THE MOVING-FRONT SOLUTION FOR A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM WITH A DISCONTINUOUS CUBIC NONLINEARITY

© 2025 **E. A. CHUNZHUK**

Abstract. In this paper, we examine solutions of the moving-front-type for a two-dimensional reaction-diffusion equation with cubic nonlinearity and propose a method for obtaining asymptotic approximations of moving fronts propagating in a medium with discontinuous characteristics is presented. The basic features arising in solving the two-dimensional problem are discussed.

Keywords and phrases: reaction-diffusion type equation, discontinuous cubic nonlinearity, moving front, small parameter, asymptotic approximation.

AMS Subject Classification: 35C20

1. Введение. В работе исследуется двумерное уравнение типа реакция-диффузия с разрывной кубической нелинейностью. Основное внимание уделяется анализу решения вида движущегося фронта; ключевой особенностью исследуемой задачи является наличие разрыва в правой части дифференциального уравнения. Уравнения автоволновой диффузии применяются для описания разнообразных процессов в физике, химии и биологии. Например, они используются в моделях свертываемости крови [13], распространения злокачественных новообразований [11, 16] и инфекционных заболеваний [10,15], а также при описании развития городских агломераций [14] и других автоволновых процессов. Изучение таких уравнений позволяет расширить область их применимости и описать с их помощью новые явления.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Е. А. Чунжук выражает благодарность своему научному руководителю Н. Т. Левашовой за ценные рекомендации при проведении исследования.

Молодой ученый является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

К настоящему моменту имеется много работ по аналитическому исследованию уравнения автоволновой диффузии (см., например, [2, 12]). Часто для получения необходимой информации о решении исследуемой задачи используются асимптотические методы, которые позволяют определить поведение функций при малых значениях параметров, что особенно важно при анализе физических и математических моделей. Для сред с непрерывными характеристиками уже разработаны асимптотические алгоритмы и методы, на основе которых доказано существование решений вида движущегося фронта [3]. Для сред с разрывными характеристиками требуется теоретическое обоснование возможности распространения в такой среде автоволнового фронта, и решение таких задач особенно актуально для описания процессов на границах раздела различных материалов, с естественными или искусственными барьерами. Например, работы [6, 7, 14] посвящены анализу решений параболических задач, в которых присутствуют разрывы, что является актуальной темой исследований в настоящее время.

Так, в [8] была рассмотрена одномерная задача, в которой исследовались распространение автоволнового фронта в среде с барьерами и условия его стабилизации к стационарному решению с большим градиентом на границе раздела сред. В указанной работе был представлен модернизированный алгоритм построения асимптотического приближения решения задачи с разрывом, который базируется на асимптотическом методе А. Б. Васильевой для сингулярно возмущенных задач (см. [4, 5]). Применение этого алгоритма потребовало подробного рассмотрения поведения решения в окрестности точки локализации фронта и точки разрыва сред. В [8] подробно показано построение асимптотического приближения решения, получены выкладки для искомых функций и определены все неизвестные величины. В [1] рассмотрена двумерная задача типа реакция-диффузия в случае, когда правая часть уравнения непрерывна: исследовано решение вида движущегося фронта, построено асимптотическое приближение решения. Во всех упомянутых работах проведено обоснование асимптотики и доказано существование решений исходных задач с использованием метода дифференциальных неравенств (см. [9]).

В настоящей статье рассматривается двумерная задача типа реакция-диффузия в случае, когда автоволновой фронт проходит через границу разрыва сред. Эта работа отличается от упомянутых ранее наличием разрыва характеристик среды, который проходит вдоль гладкой кривой $h_0(x)$, поэтому в данном случае методика построения асимптотического приближения модифицирована с учетом условий задачи. Основная сложность заключается в нахождении связи между локальными координатами, связанными с двумя различными кривыми: кривой локализации фронта и линией раздела сред, а также в сшивании производных функций асимптотического приближения решения. В дальнейшем планируется провести обоснование асимптотики методом дифференциальных неравенств, как это сделано в ранее упомянутых работах.

2. Постановка задачи. Рассматривается следующая двумерная начально-краевая задача:

$$\begin{cases} \varepsilon^2\Delta u - \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t} = \big(u-\varphi^{(-)}(x,y)\big)\big(u-q(x,y)\big)\big(u-\varphi^{(+)}(x,y)\big), & x\in\mathbb{R},\ y\in(0,a),\ t\in(0,T],\\ u_y(x,0,t,\varepsilon)=u_y(x,a,t,\varepsilon)=0, & x\in\mathbb{R},\ t\in[0,T],\\ u(x,y,t,\varepsilon)=u(x+L,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ y\in[0,a],\ t\in[0,T],\\ u(x,y,0,\varepsilon)=u_{\mathrm{init}}(x,y), & x\in\mathbb{R},\ y\in[0,a]. \end{cases} \tag{1}$$

где

$$q(x,y)=\begin{cases} q_l(x,y), & y\leqslant h_0(x), \quad q_l(x,h_0(x))\neq q_r(x,h_0(x)),\\ q_r(x,y), & y>h_0(x), \end{cases}$$

ε — малый параметр, $h_0(x)$ — гладкая кривая, вдоль которой происходит разрыв характеристик среды, $u_{\mathrm{init}}(x,y)$ — непрерывная функция. Обозначим правую часть уравнения через $f(u,x,y)$. Будем считать, что функции $f(u,x,y)$ и $u_{\mathrm{init}}(x,y)$ — L-периодические по переменной x ($L>0$, $L=\mathrm{const}$). Введем обозначения

$$f^{(l)}(u,x,y)=(u-\varphi^{(-)}(x,y))(u-q_l(x,y))(u-\varphi^{(+)}(x,y)),$$
$$f^{(r)}(u,x,y)=(u-\varphi^{(-)}(x,y))(u-q_r(x,y))(u-\varphi^{(+)}(x,y)).$$

Начальная функция $u_{\text{init}}(x,y)$ имеет вид сформировавшегося фронта, возрастающего от значений $\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений $\varphi^{(+)}(x,y)$, локализованного в окрестности кривой $h_{00} \in \{(x,y) : \mathbb{R} \times [0,a]\}$. Будем считать, что для начальной функции выполняются условия согласования с граничными условиями задачи (1).

Условие 1. Пусть корни $\varphi^{(-)}(x,y)$, $q(x,y)$, $\varphi^{(+)}(x,y)$ функции $f(u,x,y)$ — известные функции, упорядоченные следующим образом:

$$\varphi^{(-)}(x,y) < q(x,y) < \varphi^{(+)}(x,y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0,a]. \tag{2}$$

Условие 2. Будем рассматривать случай прохождения фронта через границу раздела сред при движении от границы $y=0$ к границе $y=a$, и для этого потребуем выполнение неравенств

$$\frac{\varphi^{(-)}(x,y)+\varphi^{(+)}(x,y)}{2} < q_l(x,y) < q_r(x,y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0,a].$$

Будем считать, что $y = h(x,t)$ — кривая, описывающая положение фронта. Для описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l,r) (координаты Вишика—Люстерника) с помощью соотношений

$$\begin{gathered} x = l - r\sin\alpha, \quad y = h(l,t) + r\cos\alpha, \\ \sin\alpha = \frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}. \end{gathered} \tag{3}$$

α — угол, отложенный против часовой стрелки от оси y до нормали к кривой $y = h(x,t)$, проведенной в область $y > h(x,t)$ в каждый момент времени t, r — расстояние от этой кривой по нормали к ней, l — x-координата точки на кривой $h(x,t)$, из которой проводится нормаль, и производные функции $h(x,t)$ в выражении (3) берутся при $x = l$.

Разрыв характеристик среды происходит вдоль стационарной гладкой кривой $h_0(x)$. Для описания фронта в окрестности разрыва сделаем переход к локальным координатам (l_0, r_0) аналогично тому, как это сделано ранее:

$$\begin{gathered} x = l_0 - r_0\sin\beta, \quad y = h_0(l_0) + r_0\cos\beta, \\ \sin\beta = \frac{h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0x}^2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+h_{0x}^2}}. \end{gathered}$$

Теперь представим дифференциальные операторы через локальные переменные (l,r). Выпишем оператор $\partial/\partial t$, действующий на функцию $u(x,y,t,\varepsilon)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t,\varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(l,r,t),y(l,r,t),t,\varepsilon) + \big(v,\nabla\big)u(x(l,r,t),y(l,r,t),t,\varepsilon), \quad v = \left\{\frac{\partial x}{\partial t};\ \frac{\partial y}{\partial t}\right\},$$

где $x(l,r,t)$ и $y(l,r,t)$ задаются формулами (3). После преобразований получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t,\varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{rh_{xt} - h_t h_x\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx} - (1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l}\right)u(x(l,r,t),y(l,r,t),t,\varepsilon).$$

Отдельно выпишем оператор ∇:

$$\nabla = \left\{-\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l};\ \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{h_x\sqrt{1+h_x^2}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial l}\right\};$$

тогда для $\Delta u(x,y,t,\varepsilon)$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y,t,\varepsilon) = \Bigg(&\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{h_{xx}}{rh_{xx}-(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial r} + \\ &+ \frac{1+h_x^2}{(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{3/2})^3}\Big(2rh_x h_{xx}^2 + h_x h_{xx}(1+h_x^2)^{3/2} - rh_{xxx}(1+h_x^2)\Big)\frac{\partial}{\partial l} + \\ &+ \frac{(1+h_x^2)^2}{(rh_{xx}-(1+h_x^2)^{3/2})^2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}\Bigg)u\big(x(l,r,t),y(l,r,t),t,\varepsilon\big). \end{aligned}$$

Введем растянутую переменную $\xi = r/\varepsilon$. Итоговый дифференциальный оператор, действующий на функцию $u(x, y, t, \varepsilon)$, представим в следующем виде

$$\left(\varepsilon^2\Delta - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,y,t,\varepsilon) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi} - \right.$$
$$\left. - \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{h_t h_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right) + \sum_{i=2}\varepsilon^i G_i\right)u\big(x(l,r,t), y(l,r,t), t, \varepsilon\big) \quad (4)$$

где G_i — дифференциальные операторы первого или второго порядков по переменным (ξ, l).

3. Методика построения асимптотического приближения решения. Исследуемая задача представима в виде двух подзадач, которые можно интерпретировать как движение фронта до и после разрыва. Асимптотическое приближение решения задачи (1) для случая, когда фронт ещё не прошёл линию разрыва, будем искать в виде

$$U = \begin{cases} U^{l,(-)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y\leqslant h(x,t), \\ U^{l,(+)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ h(x,t)\leqslant y\leqslant h_0(x), \\ U^{r,(+)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ h_0(x)\leqslant y\leqslant a. \end{cases} \quad (5)$$

где

$$U^{l,(-)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{l,(-)}(x,y,\varepsilon) + L^{(-)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{l,(+)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon) + \Pi^l(\rho_-,\varepsilon),$$
$$U^{l,(+)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{l,(+)}(x,y,\varepsilon) + L^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{l,(+)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon),$$
$$U^{r,(+)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{r,(+)}(x,y,\varepsilon) + R^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{r,(+)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon) + \Pi^r(\rho_+,\varepsilon).$$

Асимптотическое приближение решения задачи (1) для случая, когда фронт уже прошёл линию разрыва, будем искать в виде

$$U = \begin{cases} U^{l,(-)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant y\leqslant h_0(x), \\ U^{r,(-)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ h_0(x)\leqslant y\leqslant h(x,t), \\ U^{r,(+)}(x,y,t,\varepsilon), & x\in\mathbb{R},\ h(x,t)\leqslant y\leqslant a. \end{cases} \quad (6)$$

где

$$U^{l,(-)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{l,(-)}(x,y,\varepsilon) + L^{(-)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{l,(-)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon) + \Pi^l(\rho_-,\varepsilon),$$
$$U^{r,(-)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{r,(-)}(x,y,\varepsilon) + R^{(-)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{r,(-)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon),$$
$$U^{r,(+)}(x,y,t,\varepsilon) = \bar{u}^{r,(+)}(x,y,\varepsilon) + R^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon) + Q^{r,(-)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon) + \Pi^r(\rho_+,\varepsilon).$$

Здесь
- $\bar{u}^{l,(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ и $\bar{u}^{r,(\mp)}(x,y,\varepsilon)$ — функции регулярной части,
- $L^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)$ и $R^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)$ — функции переходного слоя в окрестности положения фронта,
- $Q^{l,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)$ и $Q^{r,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)$, зависящие от $\xi_0 = r_0/\varepsilon$, — функции переходного слоя в окрестности разрыва,
- $\Pi^l(\rho_-,\varepsilon)$ и $\Pi^r(\rho_+,\varepsilon)$ — пограничные функции, зависящие от растянутых переменных $\rho_- = y/\varepsilon$ и $\rho_+ = (y-a)/\varepsilon$.

Пограничные функции строятся стандартным образом (см. [4]) и экспоненциально убывают на бесконечности; в настоящей работе они не приводятся.

Функции регулярной части, функции переходного слоя и кривая $h(x,t)$ ищутся в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$\bar{u}^{l,(\mp)}(x,y,\varepsilon) = \bar{u}_0^{l,(\mp)}(x,y) + \varepsilon\bar{u}_1^{l,(\mp)}(x,y) + \varepsilon^2\bar{u}_2^{l,(\mp)}(x,y) + \ldots,$$
$$\bar{u}^{r,(\mp)}(x,y,\varepsilon) = \bar{u}_0^{r,(\mp)}(x,y) + \varepsilon\bar{u}_1^{r,(\mp)}(x,y) + \varepsilon^2\bar{u}_2^{r,(\mp)}(x,y) + \ldots,$$

$$L^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)=L_0^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\varepsilon L_1^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\varepsilon^2L_2^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\ldots,$$
$$R^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)=R_0^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\varepsilon R_1^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\varepsilon^2R_2^{(\mp)}(\xi,l,h(l,t),t)+\ldots,$$

$$Q^{l,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)=\varepsilon Q_1^{l,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0))+\varepsilon^2Q_2^{l,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)+\ldots,$$
$$Q^{r,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)=\varepsilon Q_1^{r,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0))+\varepsilon^2Q_2^{r,(\mp)}(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon)+\ldots,$$

$$h(x,t)=h_0(x,t)+\varepsilon h_1(x,t)+\varepsilon^2h_2(x,t)+\ldots.$$

Согласно методу А. Б. Васильевой уравнения для функций регулярной части получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε в следующих равенствах:

$$\varepsilon^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\bar u^{l,(\mp)}(x,y,\varepsilon)=f^{(l)}(\bar u^{l,(\mp)}(x,y,\varepsilon),x,y),$$
$$\varepsilon^2\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\bar u^{r,(+)}(x,y,\varepsilon)=f^{(r)}(\bar u^{r,(+)}(x,y,\varepsilon),x,y).$$

Уравнения для функций переходного слоя получаются из следующих равенств:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{h_th_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right)+\sum_{i=2}\varepsilon^iG_i\right)L^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)=$$
$$=f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+L^{(+)}\big(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon\big)+$$
$$+Q^{l,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big)-$$
$$-f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+Q^{l,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{h_th_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right)+\sum_{i=2}\varepsilon^iG_i\right)L^{(-)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)=$$
$$=f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(-)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+L^{(-)}\big(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon\big)+$$
$$+Q^{l,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big)-$$
$$-f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(-)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big)-$$
$$-f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+Q^{l,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big)+$$
$$+f^{(l)}\Big(\bar u^{l,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}-\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{h_th_x}{1+h_x^2}\frac{\partial}{\partial l}\right)+\sum_{i=2}\varepsilon^iG_i\right)R^{(+)}(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon)=$$
$$=f^{(r)}\Big(\bar u^{r,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+R^{(+)}\big(\xi,l,h(l,t),t,\varepsilon\big)+$$
$$+Q^{r,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big)-$$
$$-f^{(r)}\Big(\bar u^{r,(+)}\big(l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\big)+Q^{r,(+)}\big(\xi_0,l_0,h_0(l_0),\varepsilon\big),l-\xi\varepsilon\sin\alpha,h(l,t)+\xi\varepsilon\cos\alpha\Big);$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} - \varepsilon \frac{h_{0xx}}{(1+h_{0x}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i\right) Q^{l,(+)}\big(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon\big) =$$
$$= f^{(l)}\Big(\bar{u}^{l,(+)}\big(l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\big) + Q^{l,(+)}\big(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon\big), l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\Big) -$$
$$- f^{(l)}\Big(\bar{u}^{l,(+)}\big(l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\big), l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\Big),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} - \varepsilon \frac{h_{0xx}}{(1+h_{0x}^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \sum_{i=2} \varepsilon^i G_i\right) Q^{r,(+)}(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon) =$$
$$= f^{(r)}\Big(\bar{u}^{r,(+)}\big(l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\big) + Q^{r,(+)}\big(\xi_0, l_0, h_0(l_0), \varepsilon\big), l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\Big) -$$
$$- f^{(r)}\Big(\bar{u}^{r,(+)}\big(l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\big), l_0 - \xi_0\varepsilon\sin\beta, h(l_0) + \xi_0\varepsilon\cos\beta\Big).$$

Потребуем также выполнения условий убывания функций переходного слоя на бесконечности:

$$L_i^{(\mp)}(-\infty, l, h(l,t), t) = 0, \quad R_i^{(+)}(+\infty, l, h(l,t), t) = 0, \quad Q_i^{l,r(+)}(\mp\infty, l_0, h_0(l_0)) = 0.$$

Сшивание функций асимптотического приближения решения будем проводить на кривых $h(x,t)$ и $h_0(x)$:

$$U^{l,(-)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = U^{l,(+)}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = s(x,t), \tag{7}$$
$$U^{l,(+)}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = U^{r,(+)}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = p(x,t) + k(x). \tag{8}$$

Функции $p(x,t)$, $s(x,t)$ и $k(x)$ также представимы в виде разложения по степеням ε:

$$p(x,t) = p_0(x,t) + \varepsilon p_1(x,t) + \varepsilon^2 p_2(x,t) + \ldots,$$
$$s(x,t) = s_0(x,t) + \varepsilon s_1(x,t) + \varepsilon^2 s_2(x,t) + \ldots,$$
$$k(x) = \varepsilon k_1(x) + \varepsilon^2 k_2(x) + \ldots.$$

Здесь функции $p(x,t)$, $s(x,t)$ и $k(x)$ пока не известны, и будут определяться из условий сшивания производных по направлению нормали к кривым $h(x,t)$ и $h_0(x)$:

$$\frac{\partial U^{l,(-)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{l,(+)}}{\partial n}(x, h(x,t), t, \varepsilon), \tag{9}$$
$$\frac{\partial U^{l,(+)}}{\partial n}(x, h_0(x), t, \varepsilon) = \frac{\partial U^{r,(+)}}{\partial n}(x, h_0(x), t, \varepsilon). \tag{10}$$

4. Особенности построения решения двумерной задачи. В [1] для двумерной задачи типа реакция-диффузия с непрерывной правой частью показано, как найти функции регулярной части и переходного слоя. Еще раз отметим, что особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии разрыва характеристик среды, который проходит вдоль гладкой кривой $h_0(x)$, поэтому основная сложность заключается в нахождении связи между локальными координатами (l, r) и (l_0, r_0). Эту связь необходимо учитывать в равенствах сшивания производных (9)–(10) в том случае, когда кривые $h(x,t)$ и $h_0(x)$ настолько близки друг к другу, что пересекаются их малые окрестности, в которых возможен переход к координатам Вишика—Люстерника. В настоящем разделе будут рассмотрены эти особенности задачи.

Для начала покажем, как связаны локальные координаты (l, r) и (l_0, r_0). Вектор нормали к кривой $h(x,t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{n} = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\} = \left\{-\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}};\ \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}\right\}. \tag{11}$$

Переход от декартовых координат (x, y) к локальным криволинейным координатам осуществляется с помощью формул (3), что приводит к формулам

$$x = l - r\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}, \quad y = h(l,t) + r\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}. \tag{12}$$

Напомним, что угол α отложен против часовой стрелки от положительного направления оси OY до вектора нормали к кривой в данной точке, l — это абсцисса точки кривой, из которой проводится нормаль. Все производные функции $y = h(x,t)$ берутся при $x = l$.

Координаты бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ в декартовой системе (x, y) связаны с координатами бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}$ в системе (r, l) матрицей перехода $\boldsymbol{C}$:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя формулы (12), получаем:

$$dx = -\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}}dr + \left(1 - r\frac{h_{xx}(1+h_x^2) - h_{xx}h_x^2}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right)dl, \tag{13}$$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}}dr + \left(h_x - r\frac{h_{xx}h_x}{(1+h_x^2)^{3/2}}\right)dl. \tag{14}$$

Матрица перехода $\boldsymbol{C}$ имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -\dfrac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} & 1 - r\dfrac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} & h_x - r\dfrac{h_{xx}h_x}{(1+h_x^2)^{3/2}} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Аналогично находим матрицу перехода $\boldsymbol{C}_0$ от бесконечно малого вектора $\begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{pmatrix}$ к бесконечно малому вектору $\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}$:

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0x}^2}} & 1 - r_0\dfrac{h_{0xx}}{(1+h_{0x}^2)^{3/2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+h_{0x}^2}} & h_{0x} - r_0\dfrac{h_{0xx}h_{0x}}{(1+h_{0x}^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим матрицу перехода от $\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}$ к $\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}$. Пусть e — декартов базис, e' — базис, связанный с координатами Вишика—Люстерника на кривой $h(x,t)$, e_0' — базис, связанный с координатами Вишика—Люстерника на кривой $h_0(x)$. Покажем их связь, записав следующие выражения:

$$e' = e\boldsymbol{C}, \quad e_0' = e\boldsymbol{C}_0, \quad e = e'\boldsymbol{C}^{-1}, \quad e_0' = e'\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_0.$$

Тогда связь векторов можно выразить равенством

$$\begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_0\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} dr_0 \\ dl_0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}_0$ — матрица перехода:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{\sqrt{1+h_{0x}^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{1+h_xh_{0x}}{1+h_x^2} & g_0\dfrac{(h_{0x}-h_x)}{(1+h_x^2)(1+h_{0x}^2)} \\ \dfrac{h_{0x}-h_x}{g} & -\dfrac{g_0}{g}\dfrac{(1+h_xh_{0x})}{(1+h_{0x}^2)} \end{pmatrix}; \tag{17}$$

для краткости введены обозначения

$$g = rh_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}, \quad g_0 = -r_0 h_{0xx} + (1 + h_{0x}^2)^{3/2}.$$

Теперь рассмотрим особенности сшивания производных функций, входящих в асимптотическое приближение решения. Рассмотрим, например, сшивание производных (10) в порядке ε^{-1}:

$$\left.\frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0}\right|_{(x_0, h_0(x_0))} = \left.\frac{\partial R_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0}\right|_{(x_0, h_0(x_0))},$$

где для краткости указана лишь зависимость функций от параметров (ξ, l). Производные от функций нужно взять по направлению нормали к кривой $h_0(x)$ в точке на этой кривой. Для функции $L_0^{(+)}(\xi, l)$ имеем

$$\left.\frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi_0}\right|_{(x_0, h_0(x_0))} = \left.\frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}\right|_{(x_0, h_0(x_0))} + \left.\frac{\partial L_0^{(+)}(\xi, l)}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial \xi_0}\right|_{(x_0, h_0(x_0))};$$

для $R_0^{(+)}(\xi, l)$ выкладки аналогичны. Производные

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0} = \frac{\partial r}{\partial r_0}, \quad \frac{\partial l}{\partial \xi_0} = \varepsilon \frac{\partial l}{\partial r_0}$$

берутся из равенства (16):

$$\frac{\partial r}{\partial r_0} = \frac{1 + h_x h_{0x}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}\sqrt{1 + h_x^2}}, \quad \frac{\partial l}{\partial r_0} = \frac{\sqrt{1 + h_x^2}}{\sqrt{1 + h_{0x}^2}}\left(\frac{h_{0x} - h_x}{rh_{xx} - (1 + h_x^2)^{3/2}}\right). \tag{18}$$

Остается определить, чему равны (ξ, l) на кривой $h_0(x)$.

Как было сказано ранее, $y = h(l, t)$ — кривая, описывающая положение фронта, и функции переходного слоя зависят от ξ. Проведем нормаль к кривой $h(l, t)$ из точки $(l, h(l, t))$ на кривой $h(l, t)$ до точки $(x_0, h(x_0))$ на кривой $h_0(x)$, эта нормаль будет соответствовать расстоянию r в координатах Вишика—Люстерника (12), и будут справедливы равенства

$$x_0 = l - r\frac{h_x(l, t)}{\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}, \quad h_0(x_0) = h(l, t) + r\frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}. \tag{19}$$

Таким образом, будем полагать, что кривые связаны одним параметром l, т.е. что координата l не меняется, а для ξ из формулы (19) получим следующее выражение, с учетом $\xi = r/\varepsilon$:

$$\xi = \frac{(h_0(x_0) - h(l, t))\sqrt{1 + h_x^2(l, t)}}{\varepsilon}. \tag{20}$$

5. Заключение. В настоящей статье было исследовано двумерное уравнение типа реакция-диффузия с разрывной кубической нелинейностью. Ключевой особенностью работы является прохождение автоволнового фронта через разрыв характеристик среды. Полученные результаты расширяют основы аналитического исследования автоволновых уравнений, а также представляют теоретический и практический интерес для описания физических процессов на границах раздела материалов или при наличии барьеров.

В работе изложена методика построения асимптотического приближения решения с учетом специфики задачи, а именно, наличия разрыва характеристик среды вдоль стационарной кривой $h_0(x)$. Так, одна нестационарная кривая описывает положение фронта, другая гладкая стационарная кривая описывает разрыв характеристик среды. Для описания переходного слоя и фронта в окрестности разрыва были использованы локальные координаты Вишика—Люстерника, затем найдена взаимосвязь между ними. Помимо перехода к локальным координатам, был осуществлен пересчет производных функций переходного слоя для их сшивания в асимптотике. В дальнейших исследовании планируется доказать существование решения вида движущегося фронта двумерной задачи с использованием асимптотического метода дифференциальных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н.* Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия// Модел. анал. информ. сист. — 2017. — *24*, № 3. — С. 259–279.
2. *Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 10. — С. 1594–1607.
3. *Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н.* Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2010. — *50*, № 2. — С. 276–285.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
5. *Васильева А. Б., Плотников А. А.* Асимптотическая теория сингулярно возмущённых задач. — М.: Физ. ф-т МГУ, 2008.
6. *Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н., Николаева О. А.* Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми// Теор. мат. физ. — 2021. — *207*, № 2. — С. 293–309.
7. *Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3 Физ. Астрон. — 2015. — № 5. — С. 12–16.
8. *Левашова Н. Т., Чунжук Е. А., Орлов А. О.* Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками// Теор. мат. физ. — 2024. — *220*, № 1. — С. 93–112.
9. *Нефедов Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 12. — С. 2074–2094.
10. *Ait Mahiout L., Kazmierczak B., Volpert V.* Viral infection spreading and mutation in cell culture// Mathematics. — 2022. — *10*, № 2. — 256.
11. *Colson C., Sanchez-Garduno F., Byrne H. M., Maini P. K., Lorenzi T.* Travelling-wave analysis of a model of tumour invasion with degenerate, cross-dependent diffusion// Proc. Roy. Soc. A. — 2021. — *477*, № 2256. — 20210593.
12. *Fife P. C., McLeod J. B.* The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1977. — *65*. — P. 335-–361.
13. *Galochkina T., Bouchnita A., Kurbatova P., Volpert V.* Reaction-diffusion waves of blood coagulation// Math. Biosci. — 2017. — *288*. — P. 130–139.
14. *Levashova N., Sidorova A., Semina A., Ni M.* A spatio-temporal autowave model of Shanghai territory development// Sustainability. — 2019. — *11*, № 13. — P. 3658.
15. *Moussaoui A., Volpert V.* The impact of immune cell interactions on virus quasi-species formation// Math. Biosci. Eng. — 2024. — *21*, № 11. — P. 7530–7553.
16. *Xu J., Vilanova G., Gomez H.* A mathematical model coupling tumor growth and angiogenesis// PLoS ONE. — 2016. — *11*, № 2. — e0149422.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чунжук Елизавета Анатольевна (Chunzhuk Elizaveta Anatolevna)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: chunzhukea@my.msu.ru