



НОРМАЛЬНОСТЬ В ВЕЩЕСТВЕННЫХ AW^* -АЛГЕБРАХ

© 2025 г. С. А. ЧЕПУХАЛИН, А. А. РАХИМОВ

Аннотация. Исследуется понятие нормальности в вещественных AW^* -алгебрах. Рассмотрен вопрос о том, сохраняется ли нормальность при переходе от комплексной AW^* -алгебры к её вещественной части, доказана нормальность вещественных AW^* -факторов. Установлены условия, при которых вещественная AW^* -алгебра является нормальной, в частности, в случае локальной σ -конечности центра алгебры. Полученные результаты являются вещественными аналогами известных теорем о нормальности в AW^* -алгебрах и развивают теорию операторных алгебр в вещественном контексте.

Ключевые слова: вещественная AW^* -алгебра, нормальность, фактор, монотонная полнота, σ -конечность, аннулятор, проекция.

NORMALITY IN REAL AW^* -ALGEBRAS

© 2025 S. A. CHEPUKHALIN, A. A. RAKHIMOV

ABSTRACT. This paper is devoted to the study of the concept of normality in real AW^* -algebras. The authors examine whether normality is preserved when passing from a complex AW^* -algebra to its real part and prove that all real AW^* -factors are normal. Conditions are established under which a real AW^* -algebra is normal, in particular, when its center is locally σ -finite. The obtained results serve as real analogs of known theorems on normality in AW^* -algebras and contribute to the development of operator algebra theory in the real setting.

Keywords and phrases: real AW^* -algebra, normality, factor, monotone completeness, σ -finiteness, annihilator, projection.

AMS Subject Classification: 46L10, 46K10, 46L05

1. Введение. Известно, что каждая монотонная полная C^* -алгебра является AW^* -алгеброй; для AW^* -алгебр типа I также верно обратное. Однако в общем случае обратное утверждение все еще остается открытым, хотя некоторые попытки решить эту проблему были предприняты. В [6] показано, что AW^* -алгебра является нормальной тогда и только тогда, когда она является AW^* -подалгеброй монотонной полной C^* -алгебры. Из [6] также следует, что все AW^* -алгебры типа I являются нормальными (см. также [7]). Также известно (см. [7]), что конечные AW^* -алгебры являются нормальными. Более того, в [6] показано, что все AW^* -факторы являются нормальными. В этой статье мы рассмотрим вещественный аналог вышеперечисленных результатов, в частности, докажем, что все вещественные AW^* -факторы являются нормальными.

2. Предварительные сведения. Банахова * -алгебра A над полем $\mathbb{C}$ называется C^* -алгеброй, если $\|x^*x\| = \|x\|^2$, для любого $x \in A$. Вещественная банахова * -алгебра R называется *вещественной C^* -алгеброй*, если норму на R можно продолжить на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C^* -алгеброй. Известно, что вещественная банахова * -алгебра R является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R эрмитова

и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$. Эрмитовость алгебры R эквивалентна обратимости элемента $1 + aa^*$, для любого $a \in R$.

Далее, пусть $B(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H . Слабо замкнутая *-подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей называется W^* -алгеброй. Вещественная банахова *-подалгебра $R \subset B(H)$ с единицей называется вещественной W^* -алгеброй, если R слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$ (см. [1, 2, 5]).

Пусть A — кольцо и S — непустое подмножество A . Положим $R(S) = \{x \in A \mid sx = 0 \text{ для всех } s \in S\}$ и назовем $R(S)$ правым аннулятором S . Аналогично, $L(S) = \{x \in A \mid xs = 0 \text{ для всех } s \in S\}$ обозначает левый аннулятор S . Бэрово *-кольцо — это такое кольцо A , что для каждого непустого подмножества S из A выполняется соотношение $R(S) = gA$ для подходящего проектора g . Равенство $L(S) = ((R(S^*))^* = ((hA))^* = Ah$ (для некоторого проектора h) показывает, что это определение также может быть дано через левый аннулятор.

AW*-Алгебра — это C^* -алгебра, которая одновременно является бэровским *-кольцом (см. [3]). Напомним, что если всякое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов AW*-алгебры счетно, то алгебра называется счетно разложимой или σ -конечной (см. [7]). AW*-Алгебра A называется локально счетно разложимой или локально σ -конечной, если для каждого ненулевого проектора $d \in A$, существует такой проектор e , что $0 < e \leq d$ и алгебра eAe счетно разложима (см. [6]). Алгебра A называется монотонно полной, если каждая ограниченная возрастающая сеть самосопряженных элементов имеет точную верхнюю границу. Алгебра A называется нормальной, если для каждой направленной вверх сети (e_λ) проекторов с точной верхней границей e в $P(A)$ проектор e является точной верхней границей (e_λ) в A (другими словами, если $a \in A, a \geq e_\lambda$, для каждого λ , то $a \geq e$).

3. Основные результаты. Сформулируем вспомогательные результаты из [2, 6].

Теорема 1 (см. [6, Theorem 4.8]). *Всякая собственно бесконечная AW*-алгебра, центр которой счетно разложим, является нормальной.*

Лемма 1 (см. [2]). *Пусть R — вещественная W -алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

- (a) R является σ -конечной;
- (b) на R существует точное нормальное состояние;
- (c) $R + iR$ является σ -конечной.

Далее, пусть R — такая вещественная AW*-алгебра, что $A = R + iR$ — AW*-алгебра.

Лемма 2. *Если алгебра R локально σ -конечна, то алгебра $A = R + iR$ также локально σ -конечна.*

Доказательство. Пусть $e \in A$ — произвольный проектор. Если $e \in R$, то по условию существует такой ненулевой проектор $f \in R$, что $e \leq f$ и алгебра fRf является σ -конечной. Тогда ясно, что алгебра fAf также σ -конечна. Следовательно, A — локально σ -конечная алгебра.

Пусть $e \notin R$. Тогда возможны два случая: у проектора e есть вещественный ненулевой подпроектор e_1 или такого подпроектора нет. В первом случае утверждение следует из первой части доказательства. Во втором случае известно, что проекторы e и $\alpha(e)$ являются ортогональными, где α — инволютивный *-антиавтоморфизм, порождающий R . Поэтому элемент $g = 1/2(e + \alpha(e))$ является проектором в R . По условию теоремы 1 существует такой ненулевой проектор $f \in R$, что $f \leq g$ и fRf и fAf — σ -конечные алгебры. Кроме того, можно показать, что проекторы e и g эквивалентны, т.е. существует такой унитарный оператор u , что $e = ugu^*$. Следовательно, для проектора $f_1 = ufu^*$ имеем $0 < f_1 \leq e$ и f_1Af_1 — σ -конечная алгебра. $\square$

Лемма 3. *Если AW*-алгебра $A = R + iR$ нормальна, то вещественная AW*-алгебра R также нормальна.*

Доказательство. Пусть $(e_\lambda) \subset R$ — направленная вверх сеть проекторов и $e = \bigvee_\lambda e_\lambda$. Если для элемента $a \in R$ имеет место соотношение $a \geq e_\lambda$ при каждом λ , то $a \geq e$, так поскольку $a \in A$ и AW*-алгебра A нормальна. $\square$

Теперь докажем основные результаты работы.

Теорема 2. Пусть R — такой вещественный AW^* -фактор, что $A = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Тогда фактор R нормален.

Доказательство. Очевидно, что A также является AW^* -фактором. Согласно [6, следствие 4.7] алгебра A является нормальной. Тогда по лемме 3 алгебра R также нормальна. $\square$

Теорема 3. Пусть R — такая собственно бесконечная вещественная AW^* -алгебра, что $A = R + iR$ является AW^* -алгеброй. Если центр $Z(R)$ алгебры R локально σ -конечен, то алгебра R нормальна.

Доказательство. Так как $Z(R)$ локально σ -конечен, то согласно лемме 2 алгебра $Z(A) = Z(R) + iZ(R)$ также локально σ -конечна. Согласно [1, теорема 4.7.4.] AW^* -алгебра $A = R + iR$ является собственно бесконечной. Тогда по теореме 1 AW^* -алгебра A нормальна, следовательно, по лемме 3 вещественная AW^* -алгебра R также нормальна. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A. Real W^* -Algebras, Actions of Groups and Index Theory for Real Factors. — Bonn–Beau-Bassin: CVDV Publishing House, 2010.
2. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
3. Berberian S. K. Baer * -Rings. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
4. Rakhimov A. A., Nurillaev M. E. On property of injectivity for real W^* -algebras and JW-algebras// Positivity. — 2018. — 22, № 5. — P. 1345–1354.
5. Rakhimov A. A., Nurillaev M. E., Boltaev K. K. Injectivity and nuclearity properties for real C^* -algebras// J. Math. Sci. — 2024. — 278, № 3. — P. 520–529.
6. Saito K., Wright J. D. M. All AW^* -factors are normal// J. London Math. Soc. (2). — 1991. — 44. — P. 143–154.
7. Wright J. D. M. Normal AW^* -algebras// Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. — 1980. — 85. — P. 137–141.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Чепухалин Сергей Анатольевич (Chepukhalin Sergey Anatol'evich)
Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti,
Toshkent, O'zbekiston;
(Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий,
Ташкент, Узбекистан;
Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
Tashkent, Uzbekistan);
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Ташкентский филиал, Ташкент, Узбекистан
(Russian University of Economics named after G. V. Plekhanov,
Tashkent branch, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: sergey_rights@mail.ru

Рахимов Абдугафур Абдумаджидович
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston
(Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
The National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan))
E-mail: rakhimov@ktu.edu.tr