ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 63–77
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-63-77

УДК 517.926

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ НЕЧЕТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И НЕОДНОРОДНОСТЯХ

© 2025 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. Исследованы системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при нечетких начальных данных и неоднородностях. В случае матриц с неотрицательными элементами показано существование сильных решений однородных и неоднородных начальных задач. Особое внимание уделено неотрицательности решений соответствующих линейных задач. Она установлена при дополнительном предположении о неотрицательности нечетких начальных данных и неоднородностей. В качестве примеров приведены системы с нечеткими треугольными начальными данными и неоднородностями. Рассмотрено приложение к динамической модели межотраслевого баланса с нечеткими данными.

Ключевые слова: нечеткое линейное дифференциальное уравнение, положительное решение, нечеткая динамическая модель межотраслевого баланса.

ON NONNEGATIVE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS UNDER FUZZY INITIAL DATA AND INHOMOGENEITIES

© 2025 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. Systems of linear differential equations with variable coefficients with fuzzy initial data and inhomogeneities are examined. In the case of matrices with nonnegative elements, we prove the existence of strong solutions of homogeneous and inhomogeneous initial problems and periodic solutions. The main attention is paid to the nonnegativity of solutions to the corresponding linear problems. It is established under the additional assumption of nonnegativity of fuzzy initial data and heterogeneities. An application to a dynamic model of input-output balance with fuzzy data is considered.

Keywords and phrases: fuzzy linear differential equation, positive solution, fuzzy dynamic model of input-output balance.

AMS Subject Classification: 00A71

1. Введение. Нечеткие дифференциальные уравнения впервые рассмотрены в [19,28]. Их изучение получило дальнейшее развитие в [23, 26, 29] и др. Исследования по нечетким дифференциальным уравнениям опирались на различные определения производных от нечеткозначных функций (см. [16,17]). В настоящей работе используется производная по Сеиккала (см. [29]). Интерес к этой тематике не ослабевает в последнее время в связи с различными приложениями (см., например, [5, 13, 14, 18, 20]).

Как известно, неотрицательные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеют существенное значение в различных динамических моделях. Например, в теории вероятностей (система дифференциальных уравнений Колмогорова [3, гл. 4]), в математической экономике (динамическая модель межотраслевого баланса Леонтьева [7, гл. 1]), математической биологии (динамическая модель в иммунологии [9, гл. 2]) и других областях.

В настоящей работе изучены неотрицательные решения систем линейных дифференциальных уравнений с вещественными неотрицательными переменными коэффициентами при нечетких начальных данных и нечеткозначных неоднородностях. Основным предположением является неотрицательность коэффициентов матрицы системы. В этом случае установлена формула (аналогичная классической) решения однородной системы дифференциальных уравнений в случае нечеткого начального условия посредством фундаментальной матрицы системы. Кроме того, доказана формула для решения неоднородной системы дифференциальных уравнений (аналогичная классической) в случае нечеткого начального условия и нечеткозначной неоднородности. Показана единственность решений соответствующих задач.

Эти результаты явились базой для изучения неотрицательных решений. А именно, при дополнительном предположении о неотрицательности нечеткого начального условия и нечеткозначной неоднородности установлена неотрицательность решения соответствующей начальной задачи для нечеткой системы дифференциальных уравнений.

Основные теоретические результаты работы иллюстрируются примерами дифференциальных систем с треугольными нечеткими начальными условиями и неоднородностями. Показано, что аналогичный вид будут иметь решения соответствующих систем.

Полученные в данной статье результаты представляют интерес для нового раздела в области нечетких дифференциальных уравнений — теории положительных решений.

В качестве приложения в настоящей работе рассмотрена модификация динамической модели межотраслевого баланса в случае нечетких начальных данных и нечеткозначной неоднородности.

В связи с этим отметим, что при наличии неопределенности в данных балансовой модели Леонтьева исследователи, как правило, используют два подхода: интервальный (см. [21, 22, 25]) и нечеткий (см. [2, 8, 10]). Эти подходы и различны, и близки. При интервальном подходе неопределенность характеризуется границами соответствующих интервалов. При нечетком подходе используется функция принадлежности нечеткого числа (нечеткого интервала) в качестве меры возможности попадания точки в соответствующий интервал — носитель. Таким образом, нечеткий подход содержит больше информации об имеющейся неопределенности, чем интервальный. С другой стороны, нечеткое число можно трактовать как совокупность соответствующих α-интервалов.

Практически в обоих упомянутых подходах используются экспертные оценки — либо для определения границ интервалов, либо для построения функции принадлежности.

Подчеркнем, что в известных работах по учету неопределенности в балансовых моделях Леонтьева [2, 8, 10, 21, 22, 25] рассматриваются модели, в которых входящие величины не меняются с течением времени. Характерная особенность предлагаемой в настоящей статье нечеткой модификации модели Леонтьева заключается в том, что она является динамической, а именно, ее параметры непрерывно зависят от времени. Эта модель является развитием классической динамической модели межотраслевого баланса Леонтьева (см., например, [7, гл. 1], [4]).

Исследование нечеткой динамической модели межотраслевого баланса в настоящей статье опирается на результаты по теории нечетких дифференциальных уравнений, полученные в данной работе.

Отметим, что работы по нечетким динамическим обобщениям балансовой модели Леонтьева (так же, как и динамическим интервальным моделям «затраты-выпуск»), по видимому, ранее не публиковались.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции. Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [1, гл. 5], [11, гл. 2, 3]). Множество таких нечетких чисел обозначим J.

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α-уровня (α-уровни) нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$z_\alpha = \{x|\mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1], \qquad z_0 = \mathrm{cl}\{x|\mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α-интервала через z_α^-, а правую через z_α^+. Таким образом, $z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Выражения z_α^- и z_α^+ называют соответственно левым и правым α-индексами (индексами) нечеткого числа. Множество J характеризуется выполнением следующих условий на индексы нечеткого числа:

(i) $z^-(\alpha) \leqslant z^+(\alpha)$ для всех $\alpha \in [0,1]$;

(ii) функция $z^-(\alpha)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0;

(iii) функция $z^+(\alpha)$ ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0,1]$, для которых выполняются условия (i)–(iii), задают нечеткое число, α-интервал которого имеет вид $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами $z^-(\alpha)$, $z^+(\alpha)$ и $u^-(\alpha)$, $u^+(\alpha)$ понимается нечеткое число с интервалами α-уровня $[z^-(\alpha)+u^-(\alpha),\ z^+(\alpha)+u^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α-уровня $[cz^-(\alpha), cz^+(\alpha)]$, а умножение на отрицательное число c — интервалами α-уровня $[cz^+(\alpha), cz^-(\alpha)]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов при всех $\alpha \in [0,1]$.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a,b,c) при $a<b<c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b,c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае нижняя и верхняя границы α-интервала имеют вид

$$z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, \quad z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c.$$

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояния Хаусдорфа между множествами α-уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α-уровнями z_α и u_α задают метрику (см. [24])

$$\rho(\tilde{z},\tilde{u}) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant1} \max\Big\{\big|z^-(\alpha) - u^-(\alpha)\big|,\ \big|z^+(\alpha) - u^+(\alpha)\big|\Big\}. \tag{1}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ — интервалы α-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{z},\tilde{u}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, данному выше.

Фиксируем промежуток $[0,T]$ числовой оси. Отображение $\tilde{z} : [0,T] \to J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функций $\tilde{z}(t)$ при $t \in [0,T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x,t)$. При фиксированном $\alpha \in (0,1]$ рассмотрим α-интервал

$$z_\alpha(t) = \big\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x,t) \geqslant \alpha\big\}$$

и $z_0(t) = \mathrm{cl}\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}}(x,t) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t) = z^-(t,\alpha)$ и $z_\alpha^+(t) = z^+(t,\alpha)$ соответственно левую и правую границы α-интервала. Таким образом, $z_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1).

Замечание 1. Индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0,1]$.

Пусть α-индексы $z_\alpha^\pm(t)$ нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ интегрируемы (по Риману) на промежутке $[0,T]$ при всех $\alpha \in [0,1]$.

Интегралом (Римана) по промежутку $[0,T]$ от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют (см. [30]) такое нечеткое число

$$\tilde{g} = \int\limits_0^T \tilde{z}(\tau)d\tau,$$

что его интервалы α-уровня при любом $\alpha \in [0,1]$ имеют вид

$$\left(\int\limits_0^T \tilde{z}(t)dt\right)_\alpha = \left[\int\limits_0^T z_\alpha^-(t)dt,\ \int\limits_0^T z_\alpha^+(t)dt\right].$$

В этом случае нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ называют интегрируемой. Как известно (см. [25]), всякая нечеткозначная функция $\tilde{z} : [0,T] \to J$ с интегрируемыми (по Риману) ограниченными на $[0,T]$ α-индексами $z_\alpha^\pm(t)$ является интегрируемой.

Согласно замечанию 1 непрерывная на $[0,T]$ нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ интегрируема.

Утверждение 1 (см. [30])**.** *Операция интегрирования нечеткозначных функций аддитивна и однородна, т.е. для нечеткозначных интегрируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем*

$$\int\limits_0^T \big(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t)\big)dt = \int\limits_0^T \tilde{z}(t)dt + \int\limits_0^T \tilde{w}(t)dt, \quad \int\limits_0^T c\tilde{z}(t)dt = c\int\limits_0^T \tilde{z}(t)dt$$

для любой вещественной постоянной c.

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары: множество C называют разностью Хукухары множеств A и B, если $A = B + C$; обозначение $C = A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : [0,T] \to J$ называют H-дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in (0,T)$ [3], если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют такие разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$, что

$$\lim_{h\to 0^+} \rho\left(\frac{\tilde{z}(t+h)\ominus\tilde{z}(t)}{h},\ \tilde{z}'(t)\right) = \lim_{h\to 0^+} \rho\left(\frac{\tilde{z}(t)\ominus\tilde{z}(t-h)}{h},\ \tilde{z}'(t)\right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H-производной в точке t.

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : [0,T] \to J$ называют S-дифференцируемой или дифференцируемой по Сеиккала в точке $t \in (0,T)$ (см. [29]), если ее α-индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при всех $\alpha \in [0,1]$ образуют нечеткое число с α-интервалом $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Замечание 2 (см. [17])**.** Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ является H-дифференцируемой в точке $t \in (0,T)$. Тогда она S-дифференцируема в точке $t \in (0,T)$, причем H-производная совпадает с S-производной.

Пусть $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала при всех $t \in (0,T)$. Говорят (см. [17]), что выполнено условие непрерывности, если α-индексы производных $(z_\alpha^\pm)'(t)$ непрерывны на $(0,T) \times [0,1]$.

Замечание 3 (см. [17])**.** Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала на $(0,T)$ и выполнено условие непрерывности, то $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Хукухаре на $(0,T)$ и S-производная совпадает с H-производной.

Утверждение 2 (см. [29])**.** *Нечеткая S-производная является аддитивной и положительно однородной, т.е. для нечеткозначных S-дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем*

$$(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t), \quad (c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$$

для любой вещественной постоянной $c \geqslant 0$.

Пример 2. Как известно (см. [16]), нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ — неотрицательная скалярная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ — заданное нечеткое число, будет H-дифференцируемой (а значит, и S-дифференцируемой) в точке t при условии $g'(t) \geqslant 0$. При этом $\tilde{z}'(t) = g'(t)\tilde{r}$.

Ниже будем рассматривать векторные нечеткозначные функции $\tilde{Z}(t) = \big(\tilde{z}_1(t), \ldots, \tilde{z}_n(t)\big)^T$ с нечеткозначными компонентами $\tilde{z}_i(t)$ (^{T} — знак транспонирования). Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость таких функций будем понимать покоординатно.

3. Однородные системы, задача Коши. Рассмотрим на промежутке $(0, T)$ задачу Коши для системы n дифференциальных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \tilde{x}_1'(t) = a_{1,1}(t)\tilde{x}_1 + a_{1,2}(t)\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1,n}(t)\tilde{x}_n; \\ \dotfill \\ \tilde{x}_n'(t) = a_{n,1}(t)\tilde{x}_1 + a_{n,2}(t)\tilde{x}_2 + \cdots + a_{n,n}(t)\tilde{x}_n; \end{cases} \tag{2}$$

$$\tilde{x}_i(0) = \tilde{\xi}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Здесь $a_{i,j}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — заданные вещественные непрерывные функции, $\tilde{\xi}_i$, $i = 1, \ldots, n$, — заданные нечеткие числа, $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — искомые нечеткозначные функции.

Наряду с задачей (2), (3) рассмотрим векторное однородное дифференциальное уравнение

$$X' = A(t)X, \tag{4}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \ldots & a_{1,n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

— матричная и векторная вещественнозначные функции соответственно.

Обозначим через $B(t)$ фундаментальную матрицу векторного уравнения (4), т.е.

$$B'(t) = A(t)B(t), \quad B(0) = E,$$

где E — единичная матрица. Тогда решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $X(0) = X^0$, дается формулой $X(t) = B(t)X^0$. Положим $V(t, s) = B(t)B^{-1}(s)$. Это матрица Коши, которая характеризует сдвиг по траектории системы (4) за промежуток времени от s до t. Таким образом, решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $X(s) = X^0$, дается формулой

$$X(t) = V(t, s)X^0.$$

Замечание 4. В случае постоянной матрицы A имеем

$$B(t) = e^{At}, \quad V(t, s) = e^{A(t-s)};$$

при этом

$$B(\tau) = e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\tau)^k}{k!}.$$

Лемма 1 (см. [6, гл. 1, § 4])**.** *Пусть коэффициенты матрицы $A(t)$ непрерывны и неотрицательны при всех $t \in [0, T]$, т.е.*

$$a_{i,j}(t) \geqslant 0 \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n, \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{5}$$

Тогда фундаментальная матрица $B(t)$ при всех $t \in [0, T]$ и матрица Коши $V(t, s)$ при $t, s \in [0, T]$, $t \geqslant s$, имеют непрерывные неотрицательные коэффициенты.

Отметим, что для матрицы Коши это легко следует из представления

$$V(t,s) = E + \int_s^t A(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_s^t A(\tau_2)\int_s^{\tau_2} A(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \dots +$$

$$+ \int_s^t A(\tau_k)\int_s^{\tau_k} A(\tau_{k-1})\dots\int_s^{\tau_2} A(\tau_1)\,d\tau_1\dots d\tau_k + \dots, \quad t \geqslant s,$$

где E — единичная матрица. Как известно, приведенный выше ряд сходится равномерно по t на промежутке $[s,T]$. Соответствующий ряд в случае $s=0$ характеризует фундаментальную матрицу $B(t) = V(t,0)$.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *производная фундаментальной матрицы* $B'(t)$ *имеет непрерывные неотрицательные коэффициенты, производная матрицы Коши* $V'_t(t,s)$ *при* $t \geqslant s$ *имеет непрерывные неотрицательные коэффициенты.*

Доказательство. В силу леммы 1 это следует из соотношений

$$B'(t) = A(t)B(t), \quad V'_t(t,s) = B'(t)B^{-1}(s) = A(t)B(t)B^{-1}(s) = A(t)V(t,s)$$

с учетом непрерывности и неотрицательности коэффициентов матриц $A(t)$, $B(t)$ и $V(t,s)$ при $t \geqslant s$. □

Задаче (2), (3) поставим в соответствие нечеткую задачу Коши в векторной форме

$$\tilde{X}' = A(t)\tilde{X}, \quad t \in (0,T), \tag{6}$$

$$\tilde{X}(0) = \tilde{\xi}, \tag{7}$$

где $\tilde{X} = (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)^T$, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_n)^T$.

Сильным решением задачи (6), (7) будем называть нечеткозначную векторную функцию $\tilde{X}(t)$, S-дифференцируемую на промежутке $(0,T)$ и удовлетворяющую на $(0,T)$ векторному дифференциальному уравнению (6), а также начальному условию (7).

Теорема 1. *Пусть матрица* $A(t)$ *при всех* $t \in [0,T]$ *имеет вещественные коэффициенты* $a_{i,j}(t)$, $i,j = 1,\dots,n$, *которые непрерывны по* t *на* $[0,T]$ *и неотрицательны, т.е. выполнено условие* (5). *Если* $\tilde{X}(t)$ *— сильное решение задачи* (6), (7), *то его* α*-индексы* $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ *при всех* $\alpha \in [0,1]$ *удовлетворяют соотношениям*

$$(X^{\pm}_{\alpha})'(t) = A(t)X^{\pm}_{\alpha}(t), \quad t \in (0,T), \tag{8}$$

$$X^{\pm}_{\alpha}(0) = \xi^{\pm}_{\alpha}. \tag{9}$$

Здесь $X^{\pm}_{\alpha}(t) = \big(x^{\pm}_{\alpha,1}(t),\dots,x^{\pm}_{\alpha,n}(t)\big)^T$, $\xi^{\pm}_{\alpha} = \big(\xi^{\pm}_{\alpha,1},\dots,\ \xi^{\pm}_{\alpha,n}\big)^T$, *причем* $x^{\pm}_{\alpha,i}(t)$ *и* $\xi^{\pm}_{\alpha,i}$ *—* α*-индексы нечетких чисел* $\tilde{x}_i(t)$ *и* $\tilde{\xi}_i$ *соответственно. При этом*

$$X^{\pm}_{\alpha}(t) = B(t)\xi^{\pm}_{\alpha}, \tag{10}$$

где $B(t)$ *— фундаментальная матрица уравнения* (4).

Обратно, пусть $\tilde{X}(t)$ *—* S*-дифференцируемая векторная нечеткозначная функция и ее индексы* $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ *удовлетворяют соотношениям* (8), (9). *Тогда* $\tilde{X}(t)$ *удовлетворяет соотношениям* (6), (7), *т.е. является сильным решением.*

Доказательство. Пусть $\tilde{X}(t)$ — сильное решение уравнения (6). Тогда на основании интервального признака равенства нечетких чисел имеем

$$(\tilde{X}')^{\pm}_{\alpha}(t) = (A\tilde{X})^{\pm}_{\alpha}(t).$$

При этом по определению S-производной

$$(X^{\pm}_{\alpha})'(t) = (AX)^{\pm}_{\alpha}(t).$$

Кроме того, с учетом неотрицательности коэффициентов $a_{i,j}(t) \geqslant 0$ получим

$$(A\tilde{X})^{\pm}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}\tilde{x}_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}\tilde{x}_j \end{pmatrix}^{\pm}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}\tilde{x}_j\right)^{\pm}_{\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}\tilde{x}_j\right)^{\pm}_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}\left(\tilde{x}_j\right)^{\pm}_{\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}\left(\tilde{x}_j\right)^{\pm}_{\alpha} \end{pmatrix} = AX^{\pm}_{\alpha}.$$

Отсюда следует формула (8).

Соотношение (9) следует из (7) в силу признака равенства нечетких чисел в интервальной форме. Из (8), (9) и определения фундаментальной матрицы получим (10).

Обратное утверждение вытекает из интервального признака равенства нечетких чисел в силу формулы $(A\tilde{X})^{\pm}_{\alpha} = AX^{\pm}_{\alpha}$, установленной выше. □

Важным дополнением к теореме 1 является следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем* $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ — *решения задачи* (8), (9). *Тогда они порождают нечеткозначную функцию* $\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi}$.

Доказательство. По условию $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ представимы формулами $X^{\pm}_{\alpha}(t) = B(t)\xi^{\pm}_{\alpha}$. Следовательно, компоненты $x_{\alpha,i}(t)$ вектора $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ имеют вид

$$x^{\pm}_{\alpha,i}(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\xi^{\pm}_{\alpha,j}.$$

При этом для любого $j = 1,\ldots,n$ выражения $\xi^{\pm}_{\alpha,j}$ являются α-индексами нечеткого числа $\tilde{\xi}_j$, так что для них выполнены условия (i)–(iii) раздела 2. Поскольку $b_{i,j}(t) \geqslant 0$, то при любом $t \in [0,T]$ и $j = 1,\ldots,n$ выражения $b_{i,j}(t)\xi^{\pm}_{\alpha,j}$ также удовлетворяют условиям (i)–(iii) раздела 2 и, следовательно, являются α-индексами нечетких чисел $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Тогда по определению интервального сложения нечетких чисел суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\xi^{\pm}_{\alpha,j}$ определяют α-индексы нечетких чисел $\tilde{x}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$, являющихся компонентами нечеткозначной функции $\tilde{X}(t)$, что и влечет утверждение 3. □

Как показывают примеры (см. [15]), для систем нечетких дифференциальных уравнений с матрицами, элементы которых имеют разные знаки, решения соответствующих систем для α-индексов могут не определять α-индексы каких-либо нечеткозначных функций и, следовательно, не определять решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда векторная нечеткозначная функция*

$$\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} \tag{11}$$

есть сильное решение задачи (6), (7), *причем единственное.*

Доказательство. Покажем сначала дифференцируемость $\tilde{X}(t)$ по Сеиккала. Согласно условию $a_{i,j}(t) \geqslant 0$ и лемме 1 имеем $b_{i,j}(t) \geqslant 0$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$ и всех $t \in [0,T]$. При этом согласно лемме 2 имеем $b'_{i,j}(t) \geqslant 0$ при всех $i,j = 1,\ldots,n$ и всех $t \in [0,T]$. Рассмотрим нечеткозначную функцию $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Как известно (см., пример 2), в предположении, что $b_{i,j}(t) \geqslant 0$ и $b'_{i,j}(t) \geqslant 0$, она непрерывно дифференцируема по Сеиккала. При этом $(b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j)' = b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$.

Рассмотрим компоненту $\tilde{x}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$ векторной функции $\tilde{X}(t)$, определяемой (11). Согласно утверждению 2, она дифференцируема по Сеиккала, причем $\tilde{x}'_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Таким образом, $\tilde{X}(t)$ дифференцируема по Сеиккала. Кроме того $\tilde{X}'(t) = B'(t)\tilde{\xi} = A(t)B(t)\tilde{\xi} = A(t)\tilde{X}(t)$. Поэтому выражение $\tilde{X}(t)$, определяемое формулой (11), есть сильное решение уравнения (6). При этом $\tilde{X}(0) = B(0)\tilde{\xi} = E\tilde{\xi} = \tilde{\xi}$. Следовательно, выполнено (7).

Единственность решения задачи (6), (7) вытекает из теоремы 1 и единственности решения каждой из задач (8), (9). □

Отметим, что (10) вытекает из (11) с учетом интервального признака равенства нечетких чисел и неотрицательности элементов $b_{i,j}(t)$ матрицы $B(t)$. Именно, $X^{\pm}_{\alpha}(t) = (B(t)\tilde{\xi})^{\pm}_{\alpha} = B(t)\xi^{\pm}_{\alpha}$.

Заметим, что дифференцируемость нечеткозначной функции по Сеиккала в точке $t \in (0,T)$, вообще говоря, не влечет непрерывность по метрике (1) в этой точке. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *В условиях теоремы* 1 *нечеткозначная векторная функция* (11) *непрерывна по метрике* (1).

Доказательство. Согласно (11)

$$\tilde{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Согласно лемме 1, $b_{i,j}(t) \geqslant 0$; тогда $[b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j]^{\pm}_{\alpha} = b_{i,j}(t)\xi^{\pm}_{\alpha,j}$.

Кроме того, для всех $t,s \in [0,T]$ можем записать

$$b_{i,j}(t)\xi^{-}_{\alpha,j} - b_{i,j}(s)\xi^{-}_{\alpha,j} = \big(b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s)\big)\xi^{-}_{\alpha,j}.$$

Согласно свойствам нечетких чисел их индексы ограничены по α, т.е. $\left|\xi^{-}_{\alpha,j}\right| \leqslant C_j$ для всех $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$\left|b_{i,j}(t)\xi^{-}_{\alpha,j} - b_{i,j}(s)\xi^{-}_{\alpha,j}\right| \leqslant \left|b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s)\right|\left|\xi^{-}_{\alpha,j}\right| \leqslant C_j\left|b_{i,j}(t) - b_{i,j}(s)\right|.$$

Аналогично для индексов с плюсом.

Поскольку $b_{i,j}(t)$ — непрерывные скалярные функции, то это влечет непрерывность по метрике (1) каждого слагаемого $b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. Отсюда вытекает непрерывность суммы $\tilde{x}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$, $i = 1,\ldots,n$, а следовательно, утверждение 4. □

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *функция* $\tilde{X}'(t)$ *является непрерывной нечеткозначной векторной функцией.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что $\tilde{x}'_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} b'_{i,j}(t)\tilde{\xi}_j$. При этом, согласно лемме 2, каждая из функций $b'_{i,j}(t)$ непрерывна. Тогда в соответствии с утверждением 4 непрерывны и суммы $\tilde{x}'_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, что и доказывает следствие 1. □

Назовем нечеткое число $\tilde{z}$ неотрицательным и будем писать $\tilde{z} \geqslant 0$, если его левые α-индексы $z^{-}_{\alpha} \geqslant 0$ при всех $\alpha \in [0,1]$. Отметим, что, например, треугольное нечеткое число (a,b,c) из примера 1 неотрицательно в предположении $a \geqslant 0$. Нечеткий вектор $\tilde{Z} = \big(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n\big)^T$ назовем неотрицательным и будем писать $\tilde{Z} \geqslant 0$, если таковы все его компоненты $\tilde{z}_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и дополнительно вектор* $\tilde{\xi}$ *неотрицателен. Тогда сильное решение* (11) *также неотрицательно.*

Это вытекает из теоремы 2 и формулы (10).

Лемма 3 (см. [6, гл. 1, § 4])**.** *Пусть все коэффициенты матрицы* $A(t)$ *непрерывны и* $a_{i,j}(t) > 0$ *при всех* $i,j = 1,\ldots,n$ *и всех* $t \in [0,T]$, *а* $B(t)$ — *фундаментальная матрица уравнения* (4). *Тогда* $B(t)X^0 > 0$ *для любого* (*ненулевого*) *вектора* X^0 *с неотрицательными компонентами.*

Здесь положительность вектора понимается покоординатно.

Назовем нечеткое число $\tilde{z}$ положительным, если все его левые α-индексы $z^{-}_{\alpha} > 0$ при всех $\alpha \in [0,1]$. Отметим, в частности, что треугольное нечеткое число (a,b,c) из примера 1 положительно, если $a > 0$.

С учетом леммы 3 устанавливается следующий факт.

Следствие 2. *Пусть вещественные функции $a_{i,j}(t)$ непрерывны и $a_{i,j}(t) > 0$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$ и всех $t \in [0, T]$. Пусть дополнительно начальный вектор $\tilde{\xi}$ неотрицателен, причем не все левые α-индексы его компонент $\tilde{\xi}_i$ равны нулю. Тогда решение* (11) *задачи* (6), (7) *положительно.*

Пример 3. Пусть все компоненты $\tilde{\xi}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ нечеткого вектора $\tilde{\xi}$ имеют треугольную форму $\tilde{\xi}_i \sim (a_i^0, b_i^0, c_i^0)$. Тогда решение (11) есть нечеткозначная векторная функция, каждая компонента которой имеет треугольный вид:

$$\left(B(t)\tilde{\xi}\right)_i \sim \left(\sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)a_j^0,\ \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)b_j^0,\ \sum_{j=1}^n b_{i,j}(t)c_j^0\right).$$

Это следует из представления

$$B(t)\tilde{\xi} = \left(\sum_{j=1}^n b_{1,j}(t)\tilde{\xi}_j,\ \ldots,\ \sum_{j=1}^n b_{n,j}(t)\tilde{\xi}_j\right)^T$$

и неотрицательности функций $b_{i,j}(t)$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$ и всех $t \in [0, T]$.

4. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с нечеткозначными неоднородностями. Ниже, как и в разделе 2, $A(t) = \{a_{i,j}(t)\}_{i,j=1,\ldots,n}$ — матричная функция n-го порядка с вещественными элементами, непрерывными при всех $t \in [0, T]$. Рассмотрим задачу Коши для векторно-матричного неоднородного нечеткого дифференциального уравнения

$$\tilde{X}' = A(t)\tilde{X} + \tilde{F}(t), \quad t \in (0, T), \tag{12}$$

$$\tilde{X}(0) = \tilde{\xi}. \tag{13}$$

Здесь $\tilde{F}(t) = \left(\tilde{f}_1(t), \ldots, \tilde{f}_n(t)\right)^T$ — заданная векторная функция с нечеткозначными компонентами, $\xi = \left(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n\right)^T$ — заданный вектор начальных условий с нечеткозначными компонентами, $\tilde{X}(t) = \left(\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_n(t)\right)^T$ — искомая векторная функция с нечеткозначными компонентами.

Сильным решением задачи (12), (13) будем называть нечеткозначную S-дифференцируемую векторную функцию, удовлетворяющую уравнению (12) на заданном промежутке $(0, T)$, а также начальному условию (13).

Обозначим α-индексы нечеткозначных функций $\tilde{x}_i(t)$ через $x_{\alpha,i}^{\pm}(t)$, α-индексы нечеткозначных функций $\tilde{f}_i(t)$ через $f_{\alpha,i}^{\pm}(t)$ и α-индексы нечетких чисел $\tilde{\xi}_i$ через $\xi_{\alpha,i}^{\pm}$.

Теорема 4. *Пусть $A(t)$ — матричная функция с непрерывными неотрицательными коэффициентами, $\tilde{F}(t)$ — непрерывная векторная нечеткозначная функция. Если $\tilde{X}(t)$ — сильное решение задачи Коши для нечеткого дифференциального уравнения* (12) *на промежутке* $(0, T)$, *удовлетворяющее* (13), *то его α-индексы $X_\alpha^{\pm}(t)$ при всех $\alpha \in [0, 1]$ и всех $t \in (0, T)$ удовлетворяют равенствам*

$$(X_\alpha^{\pm})'(t) = AX_\alpha^{\pm}(t) + F_\alpha^{\pm}(t), \quad t \in (0, T), \tag{14}$$

$$X_\alpha^{\pm}(0) = \tilde{\xi}_\alpha^{\pm}. \tag{15}$$

Здесь $X_\alpha^{\pm}(t) = \left(x_{\alpha,1}^{\pm}(t), \ldots, x_{\alpha,n}^{\pm}(t)\right)^T$, $F_\alpha^{\pm}(t) = \left(f_{\alpha,1}^{\pm}(t), \ldots, f_{\alpha,n}^{\pm}(t)\right)^T$, $\xi_\alpha^{\pm} = \left(\tilde{\xi}_{\alpha,1}^{\pm}, \ldots, \tilde{\xi}_{\alpha,n}^{\pm}\right)^T$.

Обратно, пусть $\tilde{X}(t)$ — S-дифференцируемая векторная нечеткозначная функция и ее индексы $X_\alpha^{\pm}(t)$ удовлетворяет соотношениям (14), (15). *Тогда $\tilde{X}(t)$ удовлетворяет соотношениям* (12), (13), *т.е. является сильным решением.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Как известно, решение задачи (14), (15) дается формулой

$$X_\alpha^{\pm}(t) = B(t)\xi_\alpha^{\pm} + \int_0^t B(t)B^{-1}(\tau)F_\alpha^{\pm}(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

где $B(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы (4), а $B(t)B^{-1}(\tau) = V(t,\tau)$ — матрица Коши, т.е. оператор сдвига по траектории однородной задачи (4) за промежуток времени от τ до t.

Лемма 4. *Пусть $\tilde{f} : [0,T] \to J$ — непрерывная (по метрике (1)) нечеткозначная функция, а $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ — скалярная непрерывная функция, причем $g(\tau) \geqslant 0$ при всех $\tau \in [0,T]$. Тогда нечеткозначная функция $\tilde{\varphi}(\tau) = g(\tau)\tilde{f}(\tau)$ непрерывна на промежутке $[0,T]$ по метрике (1) и, следовательно, интегрируема по Риману.*

Доказательство. Обозначим α-индексы нечеткозначной функции $\tilde{f}(\tau)$ через $f^{\pm}_{\alpha}(\tau)$. Так как $g(\tau) \geqslant 0$, то α-индексы $\varphi^{\pm}_{\alpha}(t)$ нечеткозначной функции $\tilde{\varphi}(t)$ согласно правилу умножения нечетких чисел на положительные скаляры при всех $\tau \in [0,T]$ имеют вид $\varphi^{\pm}_{\alpha}(\tau) = g(\tau)f^{\pm}_{\alpha}(\tau)$. По условию α-индексы $\varphi^{\pm}_{\alpha}(\tau)$ — непрерывные функции при $\tau \in [0,T]$.

Кроме того, по определению α-интервалов имеем

$$f^{-}_{0}(\tau) \leqslant f^{-}_{\alpha}(\tau) \leqslant f^{-}_{1}(\tau), \quad f^{+}_{1}(\tau) \leqslant f^{+}_{\alpha}(\tau) \leqslant f^{+}_{0}(\tau), \quad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Тогда найдется такая постоянная $c_1 > 0$, что

$$\left|f^{\pm}_{\alpha}(\tau)\right| \leqslant \max\left\{\left|f^{\pm}_{0}(\tau)\right|,\ \left|f^{\pm}_{1}(\tau)\right|\right\} \leqslant c_1, \quad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Фиксируем $t_1, t_2 \in [0,T]$ и рассмотрим разность

$$\varphi^{\pm}_{\alpha}(t_1) - \varphi^{\pm}_{\alpha}(t_2) = g(t_1)f^{\pm}_{\alpha}(t_1) - g(t_2)f^{\pm}_{\alpha}(t_2) = g(t_1)\big(f^{\pm}_{\alpha}(t_2) - f^{\pm}_{\alpha}(t_2)\big) + \big(g(t_1) - g(t_2)\big)f^{\pm}_{\alpha}(t_2).$$

Тогда, обозначая через c_2 максимум функции $g(t)$ на $[0,T]$, можем записать

$$\left|\varphi^{\pm}_{\alpha}(t_1) - \varphi^{\pm}_{\alpha}(t_2)\right| \leqslant c_2\left|f^{\pm}_{\alpha}(t_2) - f^{\pm}_{\alpha}(t_2)\right| + c_1\left|g(t_1) - g(t_2)\right|.$$

Отсюда в силу непрерывности $\tilde{f}(t)$ по метрике (1) и непрерывности $g(t)$ на $[0,T]$ и следует утверждение леммы 4. $\square$

В связи с теоремой 4 подчеркнем, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда правые части формулы (16) определяют α-индексы нечеткозначной функции*

$$\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} + \int\limits_0^t B(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Доказательство. По поводу первого слагаемого в правой части (16) см. утверждение 3. Рассмотрим второе слагаемое

$$W^{\pm}_{\alpha}(t) = \int\limits_0^t V(t,\tau)F^{\pm}_{\alpha}(\tau)\,d\tau.$$

Его компоненты $w^{\pm}_{\alpha,i}$ имеют вид

$$w^{\pm}_{\alpha,i}(t) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} v_{ij}(t,\tau)f^{\pm}_{\alpha,j}(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

где $v_{ij}(t,\tau)$ — элементы матричной функции $V(t,\tau)$.

Заметим, что в условиях утверждения 5 функции $v_{ij}(t,\tau)$ и $f^{\pm}_{\alpha,j}(\tau)$ непрерывны по τ в силу леммы 1 и замечания 1 соответственно. Кроме того, $v_{ij}(t,\tau) \geqslant 0$ при всех $\tau \leqslant t$ и всех $i,j = 1,\ldots,n$. Тогда поскольку $f^{\pm}_{\alpha,j}(\tau)$ при всех $\tau \in [0,t]$ и всех $j = 1,\ldots,n$ удовлетворяет условиям (i)–(iii) раздела 2 на α-индексы нечетких чисел, то таковы и $w^{\pm}_{\alpha,i}$. Следовательно, $w^{\pm}_{\alpha,i}(t)$, определенные в (18), порождают при всех $t \in [0,T]$ нечеткие числа $\tilde{w}_i(t)$ по формуле

$$\tilde{w}_i(t) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} v_{ij}(t,\tau)\tilde{f}_j(\tau)\,d\tau, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Отметим, что интеграл в правой части этой формулы корректно определен. Действительно, так как $v_{i,j}(t,\tau) \geqslant 0$ при всех $t,\tau \in [0,T]$, $t \geqslant \tau$, то согласно лемме 4 при фиксированном $t \in [0,T]$ каждая из функций $v_{i,j}(t,\tau)\tilde{f}_j(\tau)$ интегрируема. Тогда в силу утверждения 1 интегрируема их сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} v_{i,j}(t,\tau)\tilde{f}_j(\tau)$.

Таким образом, нечеткозначные функции $\tilde{w}_i(t)$, заданные в (19), являются компонентами векторной нечеткозначной функции

$$\tilde{W}(t) = \int\limits_0^t B(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t V(t,\tau)\tilde{F}(\tau)\,d\tau, \tag{20}$$

что и доказывает формулу (17), а значит и утверждение 5. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, векторная нечеткозначная функция* $\tilde{F}(t)$ *непрерывна. Тогда векторная нечеткозначная функция* $\tilde{X}(t)$, *определяемая формулой* (17), *является сильным решением задачи* (12), (13), *причем единственным.*

Доказательство. Покажем, что нечеткозначная функция $\tilde{w}_i(t)$, определяемая формулой (19), дифференцируема по Сеиккала. Для этого рассмотрим производную от α-индексов $w^{\pm}_{\alpha,i}(t)$. Согласно (18) и правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\left(w^{\pm}_{\alpha,i}\right)'(t) = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}(t,t) f^{\pm}_{\alpha,j}(t) + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} \big(v_{i,j}(t,\tau)\big)'_t f^{\pm}_{\alpha,j}(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

По определению $v_{i,j}(t,t) = 1$ при $i = j$ и $v_{i,j}(t,t) = 0$ при $i \neq j$. Кроме того, согласно лемме 2 выражение $\big(v_{i,j}(t,\tau)\big)'_t$ непрерывно по τ и $\big(v_{i,j}(t,\tau)\big)'_t \geqslant 0$ при $t \geqslant \tau$. Тогда каждое слагаемое в формуле (21) при всех $t \in (0,T)$ представляет собой α-индексы некоторого нечеткого числа, а их сумма определяет α-индексы производной по Сеиккала $\tilde{w}'_i(t)$. Поэтому из (21) следует

$$\tilde{w}'_i(t) = \tilde{f}_i(t) + \int\limits_0^t (V(t,\tau))'_t \tilde{f}_i(\tau) d\tau = \tilde{f}_i(t) + \int\limits_0^t B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{f}_i(\tau)\,d\tau.$$

Тогда векторная нечеткозначная функция $\tilde{W}(t)$, определенная формулой (20), дифференцируема по Сеиккала и

$$\tilde{W}'(t) = \tilde{F}(t) + \int\limits_0^t B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau)d\tau.$$

Отсюда с учетом определения фундаментальной матрицы $B(t)$ получим

$$\tilde{W}'(t) = \tilde{F}(t) + \int\limits_0^t A(t)B'(t)B^{-1}(\tau)\tilde{F}(\tau)\,d\tau = \tilde{F}(t) + A(t)\tilde{W}(t). \tag{22}$$

Таким образом, $\tilde{W}(t)$, а вместе с ним и $\tilde{X}(t) = B(t)\tilde{\xi} + \tilde{W}(t)$ дифференцируемы по Сеиккала, причем $\tilde{X}(t)$ удовлетворяет соотношению (12). Тогда формула (17) дает сильное решение задачи (12), (13).

Единственность сильного решения задачи (12), (13) вытекает из теоремы 4 и единственности решений всех задач (14), (15). □

Замечание 5. Теоремы 4, 5 сохраняют силу, если вместо непрерывности $\tilde{F}(t)$ потребовать интегрируемость и ограниченность на $[0,T]$ всех α-индексов $f^{\pm}_{\alpha,i}(t)$ нечетких компонент $\tilde{f}_i(t)$.

Ниже для доказательства непрерывности решения (17) используется следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес.

Лемма 5. *Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ дифференцируема по Сеиккала на $[0,T]$, а производные ее α-индексов $(z_\alpha^\pm)'(t)$ — ограниченные и интегрируемые по Риману на $[0,T]$ функции. Тогда $\tilde{z}(t)$ непрерывна по метрике (1) на $[0,T]$.*

Доказательство. Для α-индексов $z_\alpha^\pm(t)$ можем записать

$$z_\alpha^\pm(t) = z_\alpha^\pm(0) + \int_0^t (z_\alpha^\pm)'(\tau)\,d\tau.$$

Фиксируем $t_1, t_2 \in [0,T]$; пусть для определенности $t_1 < t_2$. Тогда

$$z_\alpha^\pm(t_2) - z_\alpha^\pm(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (z_\alpha^\pm)'(\tau)\,d\tau.$$

При этом аналогично рассуждениям леммы 4 в соответствии с условиями леммы 5 устанавливается соотношение

$$\left|(z_\alpha^\pm)'(\tau)\right| \leqslant \max\left\{\left|(z_0^\pm)'(\tau)\right|,\ \left|(z_1^\pm)'(\tau)\right|\right\} \equiv r(\tau), \quad \forall\,\alpha \in [0,1].$$

При этом $r(\tau)$ — ограниченная интегрируемая по Риману на $[0,T]$ функция (см. [30]). Тогда

$$\left|z_\alpha^\pm(t_2) - z_\alpha^\pm(t_1)\right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left|(z_\alpha^\pm)'(\tau)\right| d\tau \leqslant \int_{t_1}^{t_2} r(\tau)d\tau, \quad \forall\,\alpha \in [0,1].$$

Это влечет непрерывность в метрике (1) функции $\tilde{z}(t)$. □

Утверждение 6. *В условиях теоремы* 5 *нечеткозначная функция* (17) *непрерывна по t по метрике* (1).

Доказательство. Действительно, с учетом утверждения 4 это следует из формулы (22) в силу леммы 5. □

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и дополнительно начальное условие $\tilde{\xi} \geqslant 0$ и неоднородность $\tilde{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in [0,T]$. Тогда решение* (17) *задачи* (12), (13) *неотрицательно.*

Доказательство. В условиях теоремы 6 матрицы $B(t)$ и $B(t)B^{-1}(\tau) = V(t,\tau)$ при $t \geqslant \tau$ неотрицательны. Тогда в силу предположения $\tilde{\xi} \geqslant 0$ и $\tilde{F}(t) \geqslant 0$ неотрицательны оба слагаемых в правой части формулы (16) (в случае левых индексов). Поэтому решение (17) неотрицательно. □

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, *причем функции $a_{i,j}(t)$ непрерывны и $a_{i,j}(t) > 0$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$ и всех $t \in [0,T]$. Пусть, кроме того, начальный вектор $\tilde{\xi} > 0$, а нечеткозначная векторная функция $\tilde{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in [0,T]$, либо $\tilde{\xi} \geqslant 0$ и $\tilde{F}(t) > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Тогда решение* (17) *положительно.*

Это следует из теорем 4, 5 в силу (16) и леммы 3.

Пример 4. Пусть в условиях теоремы 5 все компоненты $\tilde{\xi}_i$ начального значения и неоднородности $\tilde{f}_i(t)$ при $i = 1, \ldots, n$ и всех $t \in [0,T]$ имеют треугольный вид. Так что $\tilde{\xi}_i \sim (a_i^0, b_i^0, c_i^0)$ и $\tilde{f}_i(t) \sim (\varphi_i(t), \psi_i(t), g_i(t))$, где a_i, b_i, c_i — заданные числа, а $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $g_i(t)$ — заданные непрерывные функции. Тогда каждая компонента решения (17) векторного неоднородного уравнения (12) с начальным условием (13) при всех $t \in [0, T]$ есть нечеткое число треугольного вида

$$\tilde{x}_i(t) \sim \left(\sum_{j=1}^{n} \left(b_{i,j}(t) a_j^0 + \int\limits_0^t v_{i,j}(t,\tau)\varphi_j(\tau) d\tau \right), \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} \left(b_{i,j}(t) b_j^0 + \int\limits_0^t v_{i,j}(t,\tau)\psi_j(\tau) d\tau \right),\ \sum_{j=1}^{n} \left(b_{i,j}(t) c_j^0 + \int\limits_0^t v_{i,j}(t,\tau) g_j(\tau) d\tau \right) \right).$$

5. Динамическая межотраслевая модель Леонтьева с нечеткими данными. Одной из наиболее известных межотраслевых моделей производства является модель, созданная нобелевским лауреатом Василием Леонтьевым в 1950-х гг. (см. [7, гл. 1], [4, гл. 3, § 1]). Динамическая модель Леонтьева является экономической моделью роста валового общественного продукта и национального дохода. Интерес к данной модели у исследователей и практиков сохраняется и в настоящее время (см., например, [12]).

Пусть валовый продукт описывается вектором $X(t)$. Пусть A — неотрицательная квадратная матрица n-го порядка, элементы a_{ij}, которой описывают прямые материальные затраты i-й отрасли ($i = 1, \ldots, n$) в производстве единицы продукции j-й отрасли ($j = 1, \ldots, m$). Матрица B — неотрицательная квадратная матрица n-го порядка, коэффициенты b_{ij} которой описывают затраты продукции i-й отрасли для увеличения выпуска продукции j-й отрасли. Матрица B предполагается невырожденной.

Динамическая модель Леонтьева представляет собой следующее векторное дифференциальное уравнение ($t > 0$):

$$(E - A)X(t) = B\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \tag{23}$$

где E — единичная матрица n-го порядка, $C(t)$ — вектор продукции непроизводственного потребления (включая непроизводственное накопление). Для векторного дифференциального уравнения (23) ставится начальное условие

$$X(0) = X^0. \tag{24}$$

Экономический смысл имеют только такие решения уравнения (23), при которых $X(t) \geqslant 0$.

Предполагается, что матрица A продуктивна. Это означает, что существует и неотрицательна матрица $(E - A)^{-1}$.

Как известно, стационарная модель межотраслевого баланса записывается следующим образом: $X = AX + Y$ или $X = (E - A)^{-1}Y$, где $(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных потребностей в выпуске продукции для получения единиц соответствующих видов конечной продукции.

Уравнение для конечного продукта (национального продукта) $Y(t)$ получается из (23) с учетом равенства $Y(t) = (E - A)X(t)$, а именно,

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt} + C(t), \tag{25}$$

где $B(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полной приростной капиталоемкости, т.е. полных затрат производства накопления на единичные приросты элементов используемого национального дохода.

Подчеркнем, что (25) — уравнение с неотрицательной матрицей $B(E - A)^{-1}$. К нему присоединяется вместо (24) начальное условие

$$Y(0) = Y^0. \tag{26}$$

Предположим, что начальные данные, предложенные экспертами, представляют собой нечеткий начальный вектор $\tilde{Y}^0$ (соответственно $\tilde{X}^0 = (E - A)^{-1}Y^0$) и нечеткий вектор $\tilde{C}(t)$ продукции непроизводственного потребления. Тогда динамическая модель Леонтьева (25), (26) модифицируется как нечеткая динамическая модель относительно нечеткого вектора конечного продукта $\tilde{Y}(t)$:

$$\tilde{Y}(t) = B(E - A)^{-1}\frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} + \tilde{C}(t) \tag{27}$$

при начальном условии

$$\tilde{Y}(0) = \tilde{Y}^0. \tag{28}$$

В силу неотрицательности матрицы $B(E-A)^{-1}$ согласно теореме 4 для индексов $Y_\alpha^\pm(t)$ сильного нечеткого решения задачи (27), (28) при всех $\alpha \in [0,1]$, $t > 0$ имеем

$$Y_\alpha^\pm(t) = B(E-A)^{-1}\frac{dY_\alpha^\pm(t)}{dt} + C_\alpha^\pm(t), \tag{29}$$

где $C_\alpha^\pm(t)$ — α-индексы неоднородности $\tilde{C}(t)$, а также

$$Y_\alpha^\pm(0) = [\tilde{Y}^0]_\alpha^\pm. \tag{30}$$

Таким образом, для каждого α-индекса $Y_\alpha^\pm(t)$ задача (29) при начальном условии (30) представляет собой классическую динамическую модель Леонтьева вида (25), (26) и к ней можно применить известные результаты.

Отметим, что от уравнения (29) можно перейти к каноническому виду

$$\frac{dY_\alpha^\pm(t)}{dt} = (E-A)B^{-1}(Y_\alpha^\pm(t) - C_\alpha^\pm(t)),$$

который иногда более удобен для исследований.

6. Заключение. Результаты настоящей работы представляют собой развитие известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений на случай систем дифференциальных уравнений с переменными вещественными коэффициентами и нечеткими начальными условиями и неоднородностями. Выделение систем с неотрицательными матрицами оказалось полезным для установления явного вида решений соответствующих нечетких задач: задачи Коши для однородной и неоднородной нечетких систем дифференциальных уравнений (формулы (11), (17)). Позволило установить их единственность, а также неотрицательность соответствующих решений в случае неотрицательности соответствующего нечеткого начального условия и нечеткой неоднородности. Кроме того, неотрицательность матрицы системы обеспечивает треугольный вид решения при треугольном начальном условии и неоднородности.

С другой стороны, неотрицательность матрицы системы не является необходимым условием неотрицательности решения. В частности, в работе автора [13] установлен вид ограниченного решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с нечеткозначной правой частью как свертки функции Грина с нечеткозначной неоднородностью. В ряде примеров функция Грина положительна. В этом случае неотрицательность нечеткозначной неоднородности влечет неотрицательность решения.

По поводу нечеткой модификации динамической межотраслевой модели Леонтьева, рассмотренной в настоящей работе, заметим, что в ней «нечеткость» характеризуется нечеткой информацией о конечном спросе в начальный момент времени и о количестве продукции непроизводственного потребления. Динамические нечеткие обобщения модели Леонтьева с нечеткозначной матрицей прямых затрат — предмет дальнейшего исследования автора.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы допускают развитие на случай обобщенных производных нечеткозначных функций различного рода (см., например, [16, 27]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. *Баранова А. О., Павлова В. Н.* Исследование экономики России с использованием моделей с нечеткими параметрами. — Новосибирск: НГУ, 2009.
3. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие. — М.: Юстиция, 2018.
4. *Гранберг А. Г.* Динамические модели народного хозяйства. — М.: Экономика, 1985.
5. *Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Ч. 1. Позиционное управление// Информ. технол. — 2019. — *25*, № 5.
6. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
7. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика. — М.: Экономика, 1997.

8. *Лунева С. Ю., Пантелеев А. В.* Анализ модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе// Информ. телекоммун. технол. — 2019. — *43.* — С. 29–34.
9. *Марчук Г. И.* Избранные труды. Т. 4. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. — М.: РАН, 2018.
10. *Пантелеев А. В., Савельева В. С.* Алгоритмическое и программное обеспечение исследования математической модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе// Модел. анал. данных. — 2019. — *3.* — С. 11–23.
11. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: Лаборатория знаний, 2015.
12. *Тарасова В. В., Тарасов В. Е.* Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева// Эконом. предприним. — 2017. — *2* ч. 1. — С. 913–924.
13. *Хацкевич В. Л.* Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения// Автомат. телемех. — 2023. — *8.* — С. 43–60.
14. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform/ `arXiv:1403.0242v1 [math.GM]`.
15. *Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A.* A new method for solving fuzzy linear differential equations// Soft Comput. — 2011. — *92.* — P. 181–197.
16. *Bede B., Gal S. G.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2005. — *151*, № 3. — P. 581–599.
17. *Buckley J. J., Feuring T.* Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — *110*, № 1. — P. 43–54.
18. *Dai R., Chen M.* On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations// Fuzzy Sets and Systems — 2023. — *453.* — P. 95–114.
19. *Dubois D., Prade H.* Towards fuzzy differential// Fuzzy Sets Syst. — 1982. — *8.* — P. 1–17.
20. *Esmi E., Sanchez D. E., Wasques V. F., de Barros L. C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values// Fuzzy Sets Syst. — 2021. — *419.* — P. 122–140.
21. *Jerrell M.* Applications of interval computations to regional economic input-output models// in: Applications of Interval Computations (*. Kearfott R. B., Kreinovich V.*, eds.). — Kluwer, 1996. — P. 133–143.
22. *Jerrell M.* Interval arithmetic for input-output models with inexact data// Comput. Econ. — 1997. — *10*, № 1. — P. 89–100.
23. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*, № 3. — P. 301–317.
24. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces// Fuzzy Sets Syst. — 1984. — *12.* — P. 215–229.
25. *Lorenzen G., Maas C.* Zur Input-Output Analyse mit Intervalldaten// Jahrb. f. Nationalök. Stat. — 1989. — *206*, № 3. — P. 251–263.
26. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations// Int. J. Math. Math. Sci. — 1999. — *22*, № 2. — P. 271–279.
27. *Pirzada U. M.* paper Generalized Seikkala differentiability and its application to fuzzy initial value problem/ `arXiv:1812.04963v1 [math.GM]`.
28. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — *91.* — P. 552–558.
29. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*, № 3. — P. 319–330.
30. *Wu H.-C.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration// Fuzzy Sets Syst. — 2000. — *110*, № 1. — P. 1–25.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович (Khatskevich Vladimir Lvovich)
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж
(Russian Air Force Military Educational and Scientific Center
of the “N. E. Zhukovskiy and Yu. A. Gagarin Air Force Academy,” Voronezh, Russia)
E-mail: vlkhats@mail.ru