ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 56–62
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-56-62

УДК 517.958

ФОРМИРОВАНИЕ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ

© 2025 г. **А. Р. МАХМУДОВ, А. О. ОРЛОВ, В. Т. ВОЛКОВ**

Аннотация. Рассмотрен процесс формирования решения вида фронта в уравнении реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя (фронта) в окрестности некоторой точки, получены оценки длительности переходного процесса.

Ключевые слова: контрастная структура, движущийся фронт, уравнение реакция-диффузия.

FRONT FORMATION IN THE REACTION-DIFFUSION PROBLEM WITH NONLINEAR DIFFUSION

© 2025 **A. R. MAKHMUDOV, A. O. ORLOV, V. T. VOLKOV**

Abstract. The process of the formation of a front-type solution in the reaction-diffusion equation in the case of spatially inhomogeneous nonlinear diffusion is considered. Sufficient conditions are formulated to ensure the formation of a sharp inner transition layer (front) in a neighborhood of a certain point, and estimates of the duration of the transition process are obtained.

Keywords and phrases: contrasting structure, moving front, reaction-diffusion equation.

AMS Subject Classification: 00A69

1. Введение. Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Такие уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах. В частности, уравнения типа реакция-диффузия и реакция-диффузия-адвекция возникают в качестве математических моделей в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях, где исследуемые процессы характеризуются узкими пограничными областями быстрого изменения параметров процессов либо резкими внутренними слоями различных типов — стационарными (контрастные структуры) или движущимися (фронты). Причиной образования внутренних переходных слоев или движущихся фронтов в сингулярно возмущенных задачах типа реакция-диффузия-адвекция может служить выполнение условия баланса реакции в некоторой точке или на некоторой кривой, лежащей в области рассмотрения, или баланса адвекции, или адвекции и реакции, а также разрыв коэффициентов по пространственной координате.

Математическое описание таких процессов возможно на основе асимптотических методов для нелинейных сингулярно возмущенных задач, исследованию которых посвящена достаточно обширная литература. В частности, описанию движения фронтов в уравнениях указанного типа

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

при различных условиях посвящены работы [1, 2, 6–17], в том числе в задачах с периодическими условиями [6, 11–13, 15–17]. В указанных работах предполагается, что в начальный момент времени переходный слой (фронт) уже сформирован и описывается процесс его эволюции. Однако интерес представляет также и процесс формирования решения типа фронта, т.е. формулировка достаточных условий, при которых из решения начально-краевой задачи формируется резкий переходный слой. Эти вопросы рассматривались, например, в [3–5], где процесс формирования фронта изучен для пространственно одномерного [3, 4] и двумерного [5] уравнения реакция-диффузия.

В настоящей работе рассматривается процесс формирования фронта для уравнения реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя в окрестности некоторой точки, получены оценки длительности переходного процесса.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенную начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(D(u,x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial t} - f(u,x,\varepsilon) = 0, && x \in (-1,1), \quad t \in (0,T], \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = 0, && t \in [0,T], \\ &u(x,0,\varepsilon) = u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon), && x \in [-1,1], \end{aligned} \tag{1}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия.

(A1) Функции $D(u,x,\varepsilon) \geqslant D_0 > 0$ и $f(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими в области $u \in [\underline{u},\overline{u}]$, $x \in [-1,1]$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

(A2) Вырожденное уравнение $f(u,x,0) = 0$ имеет на отрезке $x \in [-1,1]$ ровно три решения $u = \varphi^{(-)}(x)$, $u = \varphi^{(+)}(x)$ и $u = \varphi^{(0)}(x)$, причем

$$\underline{u} < \varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x) < \overline{u}, \quad x \in [-1,1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0) < 0, \quad x \in [-1,1].$$

(A3) Существует такая точка $x_0 \in (-1,1)$, что

$$\begin{aligned} &\underline{u} < u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon) < \varphi^{(0)}(x) \quad \text{при } x \in [-1,x_0), \\ &u_{\mathrm{init}}(x_0,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(x_0), \\ &\varphi^{(0)}(x_0) < u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon) < \overline{u} \quad \text{при } x \in (x_0,1]. \end{aligned}$$

Условие (A3) означает, что график начальной функции имеет единственную точку пересечения с графиком корня $u = \varphi^{(0)}(x)$ вырожденного уравнения.

3. Формирование фронта в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$. Сделаем в (1) замену $t = \varepsilon^2\tau$. Тогда задача (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\overline{u},x,\varepsilon)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right) - \frac{\partial \overline{u}}{\partial \tau} - f(\overline{u},x,\varepsilon) = 0, && x \in (-1,1), \quad \tau \in (0,\varepsilon^{-2}T], \\ &\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(-1,\tau,\varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(1,\tau,\varepsilon) = 0, && \tau \in [0,\varepsilon^{-2}T], \\ &\overline{u}(x,0,\varepsilon) = u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon), && x \in [-1,1], \end{aligned} \tag{2}$$

где $\overline{u}(x,\tau,\varepsilon) = u(x,\varepsilon^2 t,\varepsilon)$.

Положив в (2) $\varepsilon = 0$, получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$-\tilde{u}_\tau = f(\tilde{u},x,0), \quad \tau \in (0,+\infty), \qquad \tilde{u}(x,0) = u_{\mathrm{init}}(x,0), \tag{3}$$

где $x \in [-1,1]$ — параметр и введено обозначение $\tilde{u}(x,\tau) = \bar{u}(x,\tau,0)$.

Из условий (A2) и (A3) следует, что при каждом $x \in [-1,1]$ корни $\varphi^{(-)}(x)$ и $\varphi^{(+)}(x)$ кубической нелинейности являются устойчивыми неподвижными точками этого уравнения, а именно,

$$\lim_{\tau\to\infty}\tilde{u}(x,\tau) = \begin{cases}\varphi^{(-)}(x), & x\in[-1,x_0),\\ \varphi^{(+)}(x), & x\in(x_0,1];\end{cases} \tag{4}$$

$$\tilde{u}(x_0,\tau) = \varphi^{(0)}(x_0), \quad \tau\in[0,+\infty).$$

Фиксируем δ так, чтобы

$$0<\delta<\min(x_0+1,1-x_0). \tag{5}$$

Тогда для любого $\eta>0$ существует такое $\tau_\delta>0$, что при любом $\tau\geqslant\tau_\delta$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(-)}(x)\right|\leqslant\eta, && x\in[-1,x_0-\delta],\\ &\left|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(+)}(x)\right|\leqslant\eta, && x\in[x_0+\delta,1].\end{aligned} \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\min\left\{\min_{x\in[-1,1]} f_u(\varphi^{(-)}(x),x,0),\ \min_{x\in[-1,1]} f_u(\varphi^{(+)}(x),x,0)\right\} = 2m. \tag{7}$$

Заметим, что из условия (A2) следует, что $m>0$. Тогда существует такое $\eta_0>0$, что при любых $x\in[-1,1]$ и всех u, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned}&\left|u-\varphi^{(-)}(x)\right|\leqslant\eta_0, && x\in[-1,x_0-\delta],\\ &\left|u-\varphi^{(+)}(x)\right|\leqslant\eta_0, && x\in[x_0+\delta,1],\end{aligned} \tag{8}$$

выполняется оценка $f_u(u,x,0)\geqslant m$. Поэтому предельный переход в (4) экспоненциальный, а именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть m и η_0 — числа, фиксированные в (7) и (8). Пусть $\delta>0$ соответствует условию (5). Тогда существует такое $\tau_\delta>0$, что при любом $\tau\geqslant\tau_\delta$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(-)}(x)\right|\leqslant\eta_0 e^{-m(\tau-\tau_\delta)}, && x\in[-1,x_0-\delta],\\ &\left|\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(+)}(x)\right|\leqslant\eta_0 e^{-m(\tau-\tau_\delta)}, && x\in[x_0+\delta,1].\end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Пользуясь формулой конечных приращений, запишем правую часть уравнения (3) при $x\in[-1,x_0-\delta]$ в виде

$$f\big(\tilde{u}(x,\tau),x,0\big) = f\big(\varphi^{(-)}(x),x,0\big)+f_u^*(x,\tau)\big(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(-)}(x)\big) = f_u^*(x,\tau)\big(\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(-)}(x)\big),$$

где $f_u^*(x,\tau)=f_u\big(u^*(x,\tau),x,0\big)$, $u^*(x,\tau)\in(\varphi^{(-)}(x),\tilde{u}(x,\tau))$.

Положим $z(x,\tau)=\tilde{u}(x,\tau)-\varphi^{(-)}(x)$ и рассмотрим задачу Коши

$$z_\tau = -f_u^*(x,\tau)z(x,\tau), \quad \tau>\tau_\delta, \qquad z(x,\tau_\delta)=\tilde{u}(x,\tau_\delta)-\varphi^{(-)}(x).$$

Тогда с учетом (4) и (8) для $g(\tau)=\eta_0 e^{-m(\tau-\tau_\delta)}$ имеем

$$g_\tau = -mg(\tau)\geqslant -f_u^*(x,\tau)g(\tau), \quad \tau>\tau_\delta, \qquad g(\tau_\delta)=\eta_0\geqslant z(\tau_\delta),$$

т.е. функция $g(\tau)$ — это верхнее решение задачи для $z(x,\tau)$. Аналогично, функция $-g(\tau)$ есть нижнее решение, что и доказывает лемму. Доказательство для $x\in[x_0+\delta,1]$ проводится аналогично с заменой $\varphi^{(-)}(x)$ на $\varphi^{(+)}(x)$. □

Оценим производные $\tilde{u}(x,\tau)$. Введем обозначение $\tilde{f}_u(x,\tau)=f_u(\tilde{u}(x,\tau),x,0)$. Заметим, что постоянные $\underline{u}$, $\overline{u}$ из условия (A2) являются нижним и верхним решениями задачи (3) соответственно. Для краткости введем обозначение $\tilde{T}=\varepsilon^{-2}T$. Тогда при $x\in[-1,1]$, $\tau\in[0,\tilde{T}]$ имеем $\tilde{u}(x,\tau)\in\big[\underline{u},\overline{u}\big]$. Поэтому для достаточно гладкой функции $f(u,x,\varepsilon)$ существует такое $p>0$, что при любых $(x,\tau)\in[-1,1]\times[0,\tilde{T}]$ имеет место оценка

$$-\tilde{f}_u(x,\tau)\leqslant p. \tag{10}$$

Получим теперь оценки производных функции $\tilde{u}(x,\tau)$б важные для дальшейшего анализа. Дифференцируя (3) по x, получаем задачу для $\tilde{u}_x(x,\tau)$:

$$\begin{aligned}&(\tilde{u}_x)_\tau = -\tilde{f}_u(x,\tau)\tilde{u}_x(x,\tau) - f_x(\tilde{u}(x,\tau),x,0), \quad \tau \in (0,\tilde{T}],\\&\tilde{u}_x(x,0) = (u_{\text{init}})_x(x,0).\end{aligned} \tag{11}$$

Покажем, что функция $h(\tau) = \theta e^{p\tau}$ — ее верхнее решение. Здесь p — константа, определяемая в (10), постоянная θ будет определена ниже:

$$h_\tau = ph(\tau) \geqslant -\tilde{f}_u(x,\tau)h(\tau) - f_x\big(\tilde{u}(x,\tau),x,0\big), \quad \tau \in (0,\tilde{T}],$$
$$h(0) = \theta \geqslant (u_{\text{init}})_x(x,0).$$

Учитывая тот факт, что $u_{\text{init}}(x,0) \in \big[\underline{u}, \overline{u}\big]$, $x \in [-1,1]$, заключаем, что найдется достаточно большая константа θ, обеспечивающая выполнение неравенств. Значит, функция $h(\tau)$ действительно является верхним решением. Выбирая в качестве нижнего решения $-h(\tau)$, получаем окончательную оценку:

$$\big|\tilde{u}_x(x,\tau)\big| \leqslant \theta e^{p\tau}, \quad x \in [-1,1], \quad \tau \in [0,\tilde{T}]. \tag{12}$$

Используя (12), можно аналогично оценить вторую производную:

$$\big|\tilde{u}_{xx}(x,\tau)\big| \leqslant \theta e^{2p\tau}, \quad x \in [-1,1], \quad \tau \in [0,\tilde{T}]. \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть $A \in (0, 1/p)$, где p фиксировано выше. Тогда для решения $\overline{u}(x,\tau,\varepsilon)$ задачи* (2) *справедливо представление*

$$\overline{u}(x,\tau,\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau) + O\left(\varepsilon^{1-pA}\right) \tag{14}$$

при $x \in [-1,1]$, $\tau \in [0,\tau_A]$, $\tau_A = A|\ln\varepsilon|$.

Доказательство. Введем функцию

$$U(x,\tau,\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau) + R(x,\tau,\varepsilon),$$

где

$$R(x,\tau,\varepsilon) = \varepsilon\left[\tilde{u}_x(0,\tau)\sigma(x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) - \tilde{u}_x(1,\tau)\sigma(1-x)\exp\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right)\right], \tag{15}$$

$\sigma(x)$ — срезающая функция, равная 1 при $x \in [0,\delta]$ и 0 при $x \in [2\delta,1]$, δ — сколь угодно малое не зависящее от ε фиксированное число.

Рассмотрим выражение

$$L_\varepsilon U = \varepsilon^2(D(U,x,\varepsilon)U_x)_x - U_\tau - f(U,x,\varepsilon^2\tau). \tag{16}$$

Пользуясь оценками (12) и (13) и гладкостью функций $D(u,x,\varepsilon)$ и $f(u,x,\varepsilon)$, можно получить

$$L_\varepsilon U = O(\varepsilon e^{p\tau}), \quad x \in [-1,1], \quad \tau \in [0,\tau_A]. \tag{17}$$

Сделав в задаче (2) замену

$$\bar{u}(x,\tau,\varepsilon) = U(x,\tau,\varepsilon) + w(x,\tau,\varepsilon)e^{p\tau}, \tag{18}$$

заметим, что

$$U_x(0,\tau,\varepsilon) = U_x(1,\tau,\varepsilon) = 0, \quad U(x,0,\varepsilon) = u_{\text{init}}(x,\varepsilon).$$

После несложных преобразований, использующих формулу конечных приращений, для функции $w(x,\tau,\varepsilon)$ получим задачу

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\big(\bar{D}(x,\tau,\varepsilon)w_x\big)_x + \varepsilon^2 D_u^{**}(x,\tau,\varepsilon)U_x(x,\tau,\varepsilon)w_x - w_\tau -\\&\quad - w\Big(p + f_u^{**}(x,\tau,\varepsilon) - \varepsilon^2\big(D_u^{**}(x,\tau,\varepsilon)U_x(x,\tau,\varepsilon)\big)_x\Big) = -e^{-p\tau}L_\varepsilon U = O(\varepsilon),\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (-1,1), \quad \tau \in (0,\tau_A],\\&w_x(0,\tau,\varepsilon) = w_x(1,\tau,\varepsilon) = 0, \quad \tau \in [0,\tau_A],\\&w(x,0,\varepsilon) = 0, \quad x \in [-1,1].\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь черта означает, что функция вычисляется в точке $(\bar{u}(x,\tau,\varepsilon), x, \varepsilon)$, а верхний индекс $**$ — что функция вычисляется в некоторой промежуточной (не обязательно одной и той же для разных слагаемых) точке $(u^{**}(x,\tau,\varepsilon), x, \varepsilon)$, где $u^{**}(x,\tau,\varepsilon)$ заключено между $\bar{u}(x,\tau,\varepsilon)$ и $U(x,\tau,\varepsilon)$.

При достаточно малом ε имеем:

$$\kappa(x,\tau,\varepsilon) = p + f_u^{**}(x,\tau,\varepsilon) - \varepsilon^2 \big(D_u^{**}(x,\tau,\varepsilon) U_x(x,\tau,\varepsilon)\big)_x > 0; \tag{20}$$

следовательно, для оператора в левой части (19) справедлив принцип сравнения (см. [18]).

Рассмотрим в качестве верхнего решения функцию εC, где C — достаточно большое положительное число. Очевидно, неравенство в начальный момент времени и граничные неравенства выполняются. Действуя дифференциальным оператором задачи (19), получаем

$$-\varepsilon C \kappa(x,\tau,\varepsilon) - O(\varepsilon) \leqslant 0. \tag{21}$$

Аналогично можно показать, что $-\varepsilon C$ — нижнее решение. Поэтому

$$\big|w(x,\tau,\varepsilon)\big| \leqslant \varepsilon C, \quad x \in [-1,1], \quad \tau \in [0,\tau_A]. \tag{22}$$

Таким образом, справедлива следующая оценка для $w(x,\tau,\varepsilon)$:

$$w(x,\tau,\varepsilon) = O(\varepsilon) \quad \text{при } x \in [-1,1],\ \tau \in [0,\tau_A]. \tag{23}$$

Далее, из (18) следует

$$\bar{u}(x,\tau,\varepsilon) = U(x,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p\tau} = U(x,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{1-pA}) \quad \text{при } x \in [-1,1],\ \tau \in [0,\tau_A], \tag{24}$$

и, так как в то же время

$$R(x,\tau,\varepsilon) = O(\varepsilon e^{p\tau}) = O(\varepsilon^{1-pA}), \tag{25}$$

то окончательно имеем

$$U(x,\tau,\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau) + O(\varepsilon^{1-pA}). \tag{26}$$

Сравнивая (24) и (26), получаем требуемое равенство. Лемма доказана. □

Объединяя результаты лемм 1 и 2, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (A1)–(A3)*, где постоянные m и p фиксированы в* (7) *и* (10)*, а δ удовлетворяет* (5)*. Положим*

$$A = \frac{1}{p+m}, \quad r = \frac{m}{p+m}.$$

Тогда при достаточно малых ε для решения $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1) *в момент времени $t = t_A(\varepsilon) = A\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$ справедливы представления*

$$\begin{aligned} u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon) &= \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon^r), \qquad x \in [-1, x_0-\delta], \\ u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon) &= \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon^r), \qquad x \in [x_0+\delta, 1]. \end{aligned} \tag{27}$$

Доказательство. В силу леммы 2

$$u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon) = \bar{u}(x,\tau_A(\varepsilon),\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau_A) + O(\varepsilon^{1-pA}) = \tilde{u}(x,\tau_A) + O(\varepsilon^r),$$

а в силу леммы 1

$$\big|\tilde{u}(x,\tau_A) - \varphi^{(-)}(x)\big| \leqslant \eta_0 e^{-m(\tau_A - \tau_\delta)} = O(\varepsilon^{mA}) = O(\varepsilon^r), \quad x \in [-1, x_0-\delta].$$

Поэтому

$$u(x,t_A(\varepsilon),\varepsilon) = \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon^r), \quad x \in [-1, x_0-\delta].$$

Второе равенство доказывается аналогично. Теорема доказана. □

4. Заключение. Рассмотрен процесс формирования решения вида фронта в уравнении реакция-диффузия в случае пространственно неоднородной нелинейной диффузии. Доказано, что из начальной функции достаточно общего вида за асимптотически малый (порядка $\varepsilon^2|\ln\varepsilon|$) промежуток времени формируется контрастная структура (фронт) с внутренними переходными слоями между уровнями, задаваемыми корнями вырожденного уравнения. Определены точки, в окрестности которых возможно появление внутренних переходных слоев. Сформулированы достаточные условия, обеспечивающие формирование резкого внутреннего переходного слоя, получены оценки длительности переходного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антипов Е. А., Волков В. Т., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н.* Решение вида движущегося фронта двумерной задачи реакция-диффузия// Модел. анал. информ. сист. — 2017. — *24*, № 3. — С. 259–279.
2. *Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефедов Н. Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 10. — С. 1594–1607.
3. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Шнайдер К. Р.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2005. — *1*, № 1. — С. 9–13.
4. *Волков В. Т., Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Нефедов Н. Н.* Формирование и динамика фронта в одной модели реакции-диффузии-адвекции// Мат. модел. — 2010. — *22*, № 8. — С. 109–118.
5. *Волков В. Т., Грачев Н. Е., Нефедов Н. Н., Николаев А. Н.* О формировании резких переходных слоев в двумерных моделях реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2007. — *47*, № 8. — С. 1356–1364.
6. *Волков В. Т., Нефедов Н. Н.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2006. — *46*, № 4. — С. 615–623.
7. *Коцюбинский К. А., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Стабилизация решения вида движущегося фронта в уравнении реакция-диффузия// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2021. — *76*, № 6. — С. 3–11.
8. *Левашова Н. Т., Чунжук Е. А., Орлов А. О.* Стабилизация фронта в среде с разрывными характеристиками// Теор. мат. физ. — 2024. — *220*, № 1. — С. 93–112.
9. *Нефедов Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 12. — С. 2074–2094.
10. *Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О.* Движение фронта в задаче со слабой адвекцией в случае непрерывного источника и источника модульного типа// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 6. — С. 763–776.
11. *Нефедов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 9. — С. 1513–1532.
12. *Нефедов Н. Н., Никулин Е. И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией// Мат. заметки. — 2019. — *106*, № 5. — С. 708–722.
13. *Никулин Е. И.* Движение фронта в задаче реакция-адвекция-диффузия с периодическими коэффициентами// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2022. — *77*, № 5. — С. 70–76.
14. *Орлов А. О.* О движении фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностью// Диффер. уравн. — 2025. — *61*, № 1. — С. 35–49.
15. *Nikulin E. I., Nefedov N. N., Orlov A. O.* Existence and asymptotic stability of solutions for periodic parabolic problems in Tikhonov-type reaction–diffusion–advection systems with KPZ nonlinearities// Russ. J. Math. Phys. — 2024. — *31*, № 3. — P. 504–516.
16. *Nefedov N. N., Nikulin E. I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 2. — P. 215–226.
17. *Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *405*, № 1. — P. 90–103.

18. *Wang J.* Monotone method for diffusion equations with nonlinear diffusion coefficients// Nonlin. Anal. — 1998. — *34*, № 1. — P. 113-142.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Махмудов Артем Русланович (Makhmudov Artem Ruslanovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: makhmudov.ar21@physics.msu.ru

Орлов Андрей Олегович (Orlov Andrei Olegovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Волков Владимир Тарасович (Volkov Vladimir Tarasovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: volkovvt@mail.ru