



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 45–55
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-45-55

УДК 517.957

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В ЗАДАЧЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2025 г. Е. И. НИКУЛИН

Аннотация. Для задачи реакция-диффузия с нелинейным сингулярно возмущенным граничным условием доказано существование и исследована устойчивость периодических решений, обладающих пограничным слоем. Получены условия, при которых эти решения асимптотически устойчивы по Ляпунову. Доказательство основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная параболическая задача, нелинейное граничное условие, периодическая задача, уравнение реакция-диффузия, пограничный слой, асимптотический метод, дифференциальное неравенство.

ON PERIODIC SOLUTIONS WITH BOUNDARY LAYERS IN PROBLEMS WITH NONLINEAR SINGULAR BOUNDARY CONDITIONS

© 2025 Е. I. NIKULIN

ABSTRACT. For a reaction-diffusion problem with nonlinear singularly perturbed boundary conditions, we prove the existence and examine the stability of periodic solutions possessing boundary layers. Conditions of the asymptotic stability of these solutions in the Lyapunov sense are obtained. The proof is based on the asymptotic method of differential inequalities.

Keywords and phrases: singularly perturbed parabolic problem, nonlinear boundary condition, periodic problem, reaction-diffusion equation, boundary layer, asymptotic method, differential inequality.

AMS Subject Classification: 35K60

1. Введение. В последние годы в исследованиях нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных значительное внимание уделяется асимптотическим методам анализа сингулярно возмущенных задач (см. [16] и приведенные в этой работе ссылки). Особый интерес представляют уравнения типа реакция-диффузия, в которых малый параметр стоит при старшей производной. Такие уравнения возникают в различных прикладных областях: оптоэлектронике [23], физике полупроводников [10], химической кинетике [11], теории нелинейных волн [4] и др. Их решения могут содержать области с большими градиентами — так называемые пограничные или внутренние переходные слои (см. [2, 3, 6]).

Численное решение подобных задач сопряжено с трудностями: наличие малого параметра зачастую требует больших вычислительных ресурсов и разработки специализированных алгоритмов

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

(см. ссылки в [14]). В этом контексте асимптотические методы обладают рядом преимуществ: они позволяют исследовать более широкий класс задач, получать качественные характеристики решений, выявлять ключевые закономерности в задаче и устанавливать условия существования и устойчивости решений. Кроме того, результаты асимптотического анализа применяются для создания эффективных численных методов (см. [15, 19, 22]).

Для построения асимптотик решений подобных задач уже несколько десятилетий успешно используется метод А. Б. Васильевой (см. [2]). Особенно плодотворным для доказательства существования решений, равномерно близких к построенной асимптотике, и исследования их устойчивости оказался метод дифференциальных неравенств, разработанный Н. Н. Нефедовым (см. [5]). Современные достижения, полученные на основе этих методов, представлены в обзоре [6].

В приложениях (например, при моделировании задач с большими потоками на границе области) после перехода к безразмерным переменным сингулярное возмущение может проявляться не только в уравнении, но и в граничных условиях (см. [12]); структура пограничного слоя в таких случаях усложняется (см. [7–9, 13, 17]). В [13] для одномерной задачи реакция-диффузия с сингулярно возмущенным условием второго рода и периодическими условиями по времени доказаны существование и асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений с пограничным слоем. В [7, 8] эти результаты распространены на двумерный случай для условий второго и третьего рода. В [17] аналогичный результат получен для интегро-дифференциального уравнения реакция-диффузия с нелокальным источником и сингулярно возмущенным граничным условием второго рода.

Настоящая работа обобщает результаты [8] на новый класс задач — уравнения реакция-диффузия с нелинейными сингулярно возмущенным краевым условием и периодическим условием по времени. Такие задачи возникают, например, при моделировании теплопереноса с излучением по закону Стефана—Больцмана (см. [1, 20]). Основным результатом данной работы является модификация метода пограничных функций Васильевой для построения асимптотики периодических по времени решений с пограничным слоем; развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для обоснования существования решений, равномерно близких к построенной асимптотике в рассматриваемой области; а также доказательство асимптотической устойчивости по Ляпунову таких решений как решений соответствующей начально-краевой задачи.

Структура работы следующая. В разделе 2 представлена постановка краевой задачи с периодическим условием по времени и конкретизирован вид исследуемого решения, сформулированы условия, накладываемые на входные данные задачи. В разделе 3 приведен модифицированный алгоритм построения асимптотики, а также указаны требования, обеспечивающие однозначную разрешимость задач для членов асимптотики. Разделы 4 и 5 посвящены соответственно доказательству теорем существования решения и его асимптотической устойчивости. Результат, сформулированный в этих теоремах, проиллюстрирован на примере, приведенном в разделе 6.

2. Постановка задачи. Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, для которого поставим следующую краевую задачу с периодическим условием по времени:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon u &:= \varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) &\in D_t := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}, \\ B_\Gamma u &:= -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(u, x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial}{\partial n}$ берется по внутренней нормали к достаточно гладкой границе Γ заданной двумерной односвязной области D , а $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Особенностью данной задачи является наличие в краевом условии нелинейности g , а также малого параметра при производной по нормали. Такие граничные условия называются сингулярно возмущенными: пренебрежение малой производной искомого решения на границе области

приводит к существенному изменению структуры решения в пограничном слое. В отличие от стандартного граничного условия без малого параметра, когда пограничный слой слабый (порядка ε), в этом случае возникает пограничный слой порядка единицы; он имеет более сложную структуру, чем в случае граничных условий Дирихле.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

- (A1) Функции $f(u, x, t, \varepsilon)$, $g(u, x, t)$ определены и обладают достаточной степенью гладкости соответственно на множествах $\bar{I}_u \times \bar{D}_t \times [0, \varepsilon_0]$, $\bar{I}_u \times \Gamma \times \mathbb{R}$, где I_u — некоторый интервал, а ε_0 — некоторая достаточно малая положительная постоянная. Пусть, кроме того, функции $f(u, x, t, \varepsilon)$, $g(u, x, t)$ являются T -периодическими по переменной t .
- (A2) Пусть вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ имеет T -периодическое по t решение $u = \varphi(x, t) \in I_u$, $(x, t) \in \bar{D}_t$, причем выполнено неравенство

$$f_u(\varphi(x, t), x, t, 0) > 0, \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Определение 1. Функция $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{D}_t)$ называется T -периодическим классическим решением задачи (1), если она удовлетворяет поточечно дифференциальному уравнению, краевым условиям и условию периодичности в (1).

Основным результатом данной работы является доказательство существования и исследование устойчивости классических T -периодических по t решений у задачи (1), обладающих пограничным слоем. Такие решения для любого момента времени t при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к корню $\varphi(x, t)$ внутри области D и резко изменяются в окрестности кривой Γ , т.е. имеют пограничный слой.

Заметим также, что вырожденное уравнение $f(u, x, t, 0) = 0$ может иметь несколько устойчивых корней, для которых выполнено неравенство (2). В таком случае возможна ситуация, когда существуют решения погранслоного типа, близкие к разным корням. Для каждого из них результат данного раздела останется в силе.

3. Построение асимптотики. Для описания пограничного слоя стандартным образом введем локальную систему координат. Для кривой Γ определим δ -окрестность

$$\Gamma^\delta := \{P \in D : \text{dist}(P, \Gamma) < \delta\}, \quad \delta = \text{const} > 0.$$

Далее, введем в δ -окрестности кривой Γ локальные координаты (r, θ) , где $\theta \in [0, \Theta]$ — это координата точки $M \in \Gamma$, $\text{dist}\{x, \Gamma\} = \text{dist}\{x, M\}$; $r = \text{dist}\{x, \Gamma\}$, $x \in D$. Пусть кривая Γ определена в параметрической форме: $x_i = X_i(\theta)$, $i = 1, 2$, а $\mathbf{n}(\theta) = \{n_1(\theta), n_2(\theta)\}$ — внутренняя нормаль к кривой Γ в точке M . При достаточно малом δ (но конечном и не зависящем от ε) существует взаимно однозначное соответствие между координатами $x = (x_1, x_2)$ и (r, θ) :

$$x_i = X_i(\theta) + rn_i(\theta), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому в дальнейшем у функций, зависящих от аргумента x и определенных при $x \in D$, будем иногда вместо него использовать аргументы r, θ , например: $u(x, t, \varepsilon) = u(r, \theta, t, \varepsilon)$; а для функций определенных при $x \in \Gamma$ — аргумент θ : $g(u, x, t) = g(u, \theta, t)$ и т. п.

Будем искать асимптотику решения задачи (1) в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon), \quad (3)$$

где регулярная часть имеет следующий вид:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n(x, t) + \dots, \quad (4)$$

пограничная часть в окрестности Γ :

$$\Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, \theta, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta, t) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, \theta, t) + \dots, \quad (5)$$

где $\tau = r/\varepsilon$. Такая структура асимптотики стандартна для задач с пограничными слоями и предложена в классических работах А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой (см. [2] и приведенные там ссылки): регулярная часть асимптотики служит для приближения решения внутри области, погранслоная — для приближения решения вблизи границы. Коэффициенты при степенях ε погранслоной части называются пограничными функциями.

Заметим, что хотя формально Π -функции определены для $\tau \geq 0$, фактически они имеют смысл только при $0 \leq \tau \leq \delta/\varepsilon$, т.е. в δ -окрестности, где введены локальные координаты (r, θ) . Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{D}$ используются сглаживающие функции.

Согласно алгоритму Васильевой, функция f представляется в виде

$$f(\bar{u}(\varepsilon\tau, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta, t, \varepsilon), \varepsilon\tau, \theta, t, \varepsilon) - f(\bar{u}(\varepsilon\tau, t, \varepsilon), \varepsilon\tau, \theta, t, \varepsilon) + f(\bar{u}(x, t, \varepsilon), x, t, \varepsilon) \quad (6)$$

(см. [2]). Коэффициенты регулярной части асимптотического приближения определяются стандартно. В частности,

$$\bar{u}_0(x, t) = \varphi(x, t), \quad \bar{u}_1(x, t) = -\frac{\bar{f}_\varepsilon}{\bar{f}_u},$$

где черта над функцией означает, что ее значение берется при аргументе $(\bar{u}_0, 0, \theta, t, 0)$.

Оператор Лапласа в локальных координатах (r, θ) имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + |\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

(см. [2]). Тогда при действии на функции пограничного слоя дифференциальный оператор $D_\varepsilon := \varepsilon^2 (\Delta - \partial/\partial t)$ в переменных (τ, θ, t) приобретает вид

$$D_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \varepsilon s(\varepsilon\tau, \theta) \frac{\partial}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \left(|\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

где $s(r, \theta) := \Delta r(r, \theta)$.

Далее стандартным образом получаем последовательность задач для определения коэффициентов пограничной части представления (3). При этом переменные $\theta \in [0, \Theta]$, $t \in \mathbb{R}$ считаем параметрами.

Член $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ определяется из следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau^2} &= f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t), 0, \theta, t, 0), \quad \tau > 0, \\ -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(0, \theta, t) &= g(\phi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), \theta, t), \\ \Pi_0(+\infty, \theta, t) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Автономное дифференциальное уравнение в (7) может быть исследовано на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, где

$$\tilde{u}(\tau, \theta, t) = \varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t), \quad \tilde{v}(\tau, \theta, t) = \frac{\partial \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau},$$

а θ, t — параметры. В этих переменных уравнение эквивалентно следующей системе, называемой *присоединенной*:

$$\frac{\partial \tilde{u}(\tau, \theta, t)}{\partial \tau} = \tilde{v}(\tau, \theta, t), \quad \frac{\partial \tilde{v}(\tau, \theta, t)}{\partial \tau} = f(\tilde{u}(\tau, \theta, t), 0, \theta, t, 0). \quad (8)$$

Точка $S(\varphi(0, \theta, t), 0)$ — точка покоя типа седло (в силу условия (A2)). Задача (7) будет иметь решение тогда и только тогда, когда на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ какая-либо из сепаратрис, входящая в седло S , пересекает кривую, заданную функцией $\tilde{v} = -g(\tilde{u}, \theta, t)$, при всех значениях параметров $\theta \in [0, \Theta]$, $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем следующее требование.

(A3) Пусть при любых фиксированных $(\theta, t) \in [0, \Theta] \times \mathbb{R}$ уравнение

$$\pm \sqrt{2 \int_{\phi(\theta, t)}^{\tilde{u}} f(u, \theta, t, 0) du} = -g(\tilde{u}, \theta, t), \quad \theta, t \quad (9)$$

имеет решение $\tilde{u} = \tilde{u}_0(\theta, t) \in I_u$, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} & \int_{\phi(\theta, t)}^{\tilde{u}_0(\theta, t)} f(u, \theta, t, 0) du > 0, \quad \tilde{u}_0(\theta, t) \leq \phi(\theta, t), \\ & \left. \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{u}} \right|_{\tau=0} = \frac{f(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t)}{\tilde{v}(0, \theta, t)} < -g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь имеется в виду, что условия выполнены хотя бы при одном знаке: либо везде верхнем, либо везде нижнем.

Уравнение (9) может иметь несколько решений. Пример такой ситуации приведен в разделе 6. На рис. 1(а) точкам A, B соответствуют решения уравнения (9), причем точке B отвечает решение, удовлетворяющее условию (A3). Для решения, отвечающего точке A , не выполнено неравенство (10).

Условие (A3) гарантирует разрешимость задачи (7), а ее решение $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ монотонно зависит от τ и может быть получено в квадратурах:

$$\pm \int_{\tilde{u}_0(\theta, t)}^{\phi(0, \theta, t) + \Pi_0} \left(2 \int_{\phi(\theta, t)}^u f(\eta, \theta, t, 0) d\eta \right)^{-1/2} du = \tau.$$

Известно (см. [3]), что Π_0 удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$|\Pi_0(\tau, \theta, t)| \leq C e^{-\kappa \tau}, \quad (11)$$

где C и κ — некоторые положительные постоянные.

Продолжим построение асимптотики. Функция Π_1 определяется из следующей задачи с краевым условием третьего рода при $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \Pi_1 = r_1, \quad \tau > 0, \\ & -\frac{\partial \Pi_1(0, \theta, t)}{\partial \tau} - g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \Pi_1(0, \theta, t) = B_1(\theta, t), \\ & \Pi_1(\infty, \theta, t) = 0, \\ & r_1(\tau, \theta, t) := -\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau}(\tau, \theta, t) s(0, \theta, t) + \tau \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial r}(0, \theta, t) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \right) + \tilde{u}_1(0, \theta, t) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}, \\ & B_1(\theta, t) := \frac{\partial \varphi(0, \theta, t)}{\partial r} + g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{u}_1(0, \theta, t); \end{aligned} \quad (12)$$

тильда означает, что значение функции берется при аргументе $(\Pi_0(\tau, \theta, t) + \tilde{u}_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)$.

Решение задачи (12) представляется в явном виде:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\tau, t) = \tilde{v}(\tau, \theta, t) & \left\{ \frac{\int_0^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_1(\chi, \theta, t) d\chi - B_1(\theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t)}{g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t) + f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t)} \right. \\ & \left. - \int_0^\tau \frac{1}{\tilde{v}^2(\eta, \theta, t)} \left[\int_\eta^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_1(\chi, \theta, t) d\chi \right] d\eta \right\}, \\ \tilde{v}(\tau, \theta, t) &= \frac{\partial \Pi_0(\tau, \theta, t)}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (13)$$

который имеет смысл в силу условия (A3).

Функции переходного слоя более высоких порядков находятся из задач, аналогичных задачам для функции Π_1 .

4. Обоснование асимптотики. Пусть

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^n (\bar{u}_i(x, t) + \Pi_i(\tau, \theta, t)) \varepsilon^i.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия (A1)–(A3), то при достаточно малых ε для каждого выбранного согласно условию (A3) решения $\Pi_0(\tau, \theta, t)$ задачи (7) существует соответствующее ему решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), обладающее пограничным слоем, причем имеет место оценка*

$$|U_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+1}, \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где постоянная C_n не зависит от x, t, ε .

Доказательство основано на принципе сравнения (см., например, [21]) и асимптотическом методе дифференциальных неравенств (см. [5]). Согласно этому методу, используя построенную формальную асимптотику, в области D_t следует построить достаточно гладкие функции сравнения $\alpha(x, t, \varepsilon)$ и $\beta(x, t, \varepsilon)$ (нижнее и верхнее решения), удовлетворяющие при достаточно малых положительных значениях ε следующей системе неравенств:

- (i) $\alpha(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon)$ при $(x, t) \in \bar{D}_t$ (условие упорядоченности);
- (ii) $N_\varepsilon \beta \leq 0 \leq N_\varepsilon \alpha$, $(x, t) \in D_t$ (неравенства для оператора уравнения),
- (iii) $B_\Gamma \beta \geq 0 \geq B_\Gamma \alpha$, $x \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$ (неравенства для граничного оператора).

В качестве верхнего решения выбирается функция

$$\begin{aligned} \beta_n(x, t, \varepsilon) = & \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^{n+1} \bar{u}_{n+1}(x, t) + \Pi_0(\tau, \theta, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta, t) + \\ & + \dots + \varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1}(\tau, \theta, t) + \varepsilon^{n+1} (\gamma + \Pi_\beta(\tau, \theta, t)), \end{aligned} \quad (14)$$

где функция Π_0 выбирается согласно условию (A3), $\gamma > 0$ — постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства для оператора, функция Π_β необходима для выполнения условия упорядоченности нижнего и верхнего решений в зоне пограничного слоя и выполнения неравенства для граничного оператора и определяется из задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Pi_\beta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \Pi_\beta = r_\beta, \quad \tau > 0, \\ & - \frac{\partial \Pi_\beta(0, \theta, t)}{\partial \tau} - g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \Pi_\beta(0, \theta, t) = \delta, \\ & \Pi_\beta(\infty, \theta, t) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа и

$$r_\beta(\tau, \theta, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} (\Pi_0(\tau, \theta, t) + \bar{u}_0(0, \theta, t), 0, t, 0) - \frac{\partial f}{\partial u} (\varphi, 0, t, 0) \right) \gamma - M \exp(-k\tau). \quad (16)$$

Коэффициент перед γ в выражении (16) имеет экспоненциальную оценку, которая следует из экспоненциальной оценки (11). Следовательно, можно выбрать достаточно большое $M > 0$ и достаточно малое $k > 0$, чтобы $r_\beta(\tau, \theta, t) < 0$.

Задача (15) аналогична задаче (12) и имеет решение

$$\Pi_\beta(\tau, t) = \tilde{v}(\tau, \theta, t) \left\{ \frac{\int_0^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_\beta(\chi, \theta, t) d\chi - \delta \tilde{v}(0, \theta, t)}{g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t) \tilde{v}(0, \theta, t) + f(\varphi(0, \theta, t) + \Pi_0(0, \theta, t), 0, \theta, t, 0)} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t)} - \right. \\ \left. - \int_0^\tau \frac{1}{\tilde{v}^2(\eta, \theta, t)} \left[\int_\eta^\infty \tilde{v}(\chi, \theta, t) r_\beta(\chi, \theta, t) d\chi \right] d\eta \right\}. \quad (17)$$

Как нетрудно видеть, из условия (A3) и представления (17) следует, что $\Pi_\beta(\tau, \theta, t) > 0$, $\tau \in [0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \Theta]$.

Нижнее решение $\alpha_n(x, t, \varepsilon)$ имеет аналогичную структуру, причем $r_\alpha(\tau, \theta, t) > 0$, $\Pi_\alpha(\tau, \theta, t) < 0$, $\tau \in [0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \Theta]$; следовательно, верхнее и нижнее решения являются упорядоченными.

Дифференциальные неравенства для оператора N_ε и неравенства на границе проверяются прямым вычислением. В частности, для верхнего решения имеем

$$N_\varepsilon \beta_n = \varepsilon^2 \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_n - f(\beta_n, x, t, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + M e^{-k\tau} \right) + O(\varepsilon^{n+2}). \quad (18)$$

Следовательно, неравенство (ii) из определения верхнего решения $N_\varepsilon \beta_n < 0$ выполнено. На границе для достаточно малых ε имеем:

$$B_\Gamma \beta_n = -\varepsilon \frac{\partial \beta_n}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(\beta_n(x, t, \varepsilon), x, t) = \varepsilon^{n+1} (\delta - \gamma g_u(\tilde{u}_0(\theta, t), \theta, t)) + \\ + O(\varepsilon^{n+2}) > 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Последнее неравенство, очевидно, выполнено при достаточно малых ε за счет выбора достаточно большого положительного δ . Из теоремы сравнения (см. [21]) следует существование при достаточно малых ε классического решения задачи (1), удовлетворяющего неравенству $\alpha_n(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta_n(x, t, \varepsilon)$, причем, как следует из построения,

$$|\alpha_n(x, t, \varepsilon) - \beta_n(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (20)$$

откуда и получаем утверждение теоремы. $\square$

5. Исследование устойчивости периодического решения. Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полу-бесконечном промежутке времени:

$$\varepsilon^2 \left(\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - f(v, x, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, t) \in D_{t+} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D, 0 < t < \infty\}, \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial n}(x, t, \varepsilon) - g(v, x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \\ v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}. \quad (21)$$

Очевидно, что если $v^0(x, \varepsilon) = u(x, 0, \varepsilon)$, где $u(x, t, \varepsilon)$ — решение периодической задачи (1), существование которого утверждает теорема 1, то и задача (21) имеет решение $v(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon)$. Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств.

Будем искать нижнее и верхнее решения задачи (21) соответственно в виде

$$\alpha(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)), \\ \beta(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) + e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\beta_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)),$$

где функция $\Lambda(\varepsilon) > 0$ будет указана ниже. Упорядоченность α и β очевидна; для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем достаточно показать, что $N_\varepsilon\beta < 0$, $N_\varepsilon\alpha > 0$. Подставляя указанные выше выражения для функций α и β и учитывая, что u является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства. Например, выражение для $N_\varepsilon\beta$ преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций f , f_u , кроме первого, опущены):

$$N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda t} \left\{ \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n \right) - f(\beta_n) \right] + \left[\varepsilon^2 \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u \right) - f(u) \right] + \right. \\ \left. + \left[f(\beta_n) - f(u) - f_u^* \cdot (\beta_n - u) \right] + \varepsilon^2 \Lambda (\beta_n - u) \right\}.$$

Здесь верхний индекс $*$ означает, что значение функции берется при аргументе $u(x, t, \varepsilon) + \theta e^{-\Lambda(\varepsilon)t}(\alpha_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))$, $0 < \theta < 1$. Воспользуемся соотношением (18) и учтем оценки

$$\beta_n - u = O(\varepsilon^{n+1}), \quad f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2}). \quad (22)$$

Выбирая $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0 > 0$, получаем

$$N_\varepsilon\beta = e^{-\Lambda_0 t} \left(-\varepsilon^{n+1} (\bar{f}_u \gamma + M e^{-k\xi}) + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3}) \right) < 0$$

при $n \geq 0$. Аналогично проверяется неравенство $N_\varepsilon\alpha > 0$. Таким образом, каждое из решений, существование которых гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью влияния по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$; ширина этой области составляет величину порядка $O(\varepsilon^1)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A1)–(A3). Тогда при достаточно малых ε каждое решение $u(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), существование которого гарантируется теоремой 1, асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости по крайней мере $[\alpha_0(x, 0, \varepsilon), \beta_0(x, 0, \varepsilon)]$ и, следовательно, $u(x, t, \varepsilon)$ — единственное решение задачи (1) в этой области.

6. Пример задачи теплопереноса с излучением по закону Стефана—Больцмана. Рассмотрим задачу поиска распределения температуры в образце с линейным по u оттоком тепла и излучением по закону Стефана—Больцмана:

$$\varepsilon^2 \left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - (u - h(x, t)) = 0, \\ (x, t) \in D_t := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^3 : x \in D = \left\{ (x_1, x_2) : R := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R_0 \right\}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (23) \\ -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}(0, \theta, t, \varepsilon) = -ku^4(0, \theta, t, \varepsilon) + g_1(\theta, t), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + T, \varepsilon), \quad x \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $h(x, t) \geq 0$ — заданная температура охладителя, $g_1(\theta, t) > 0$ — заданный поток тепла через границу Γ внутрь круга D , член ku^4 соответствуют излучению по закону Стефана—Больцмана (k — положительная константа). Эти функции предполагаются T -периодическими по t . Граничные условия записаны в локальных координатах, введенных вблизи окружности $R = R_0$. Здесь (R, θ) — полярные координаты, введенные на плоскости Ox_1x_2 . Локальная координата r , введенная вблизи окружности Γ , связана с полярной координатой R соотношением $r = R_0 - R$. Локальная координата θ совпадает с угловой полярной координатой всюду в круге $\bar{D}$.

Построим формальную асимптотику решения задачи (23). Очевидно, требования (A1) и (A2) выполнены. Имеем для членов регулярной части асимптотики: $\bar{u}_0 = h(x, t)$, $\bar{u}_1 \equiv 0$, $x \in \bar{D}_t$.

Уравнение (9) примет вид

$$-(\tilde{u} - h(0, \theta, t)) = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t). \quad (24)$$

Из рис. 1(а) видно, что на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$ прямая $\tilde{v} = -(\tilde{u} - h(0, \theta, t))$ пересекает кривую $\tilde{v} = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t)$ в двух точках A и B при любых допустимых функциях g_1 и h и любых параметрах $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in \mathbb{R}$. Условию (A3), очевидно, удовлетворяет точка B , отвечающая положительному решению $\tilde{u}_0(\theta, t)$ уравнения (24).

Используя теорему о неявной функции (см. [18]), можно показать, что отрицательному корню, соответствующему точке A , отвечает решение задачи (23), которое является неустойчивым (см. метод доказательства в [9]), однако этот случай выходит за рамки настоящей работы.

Асимптотика нулевого порядка выглядит следующим образом:

$$U_0(x, \varepsilon) = h(x, t) + (\tilde{u}_0(\theta(x), t) - h(0, \theta(x), t))e^{-(R_0 - R(x))/\varepsilon}. \quad (25)$$

Здесь $R(x), \theta(x)$ — функции, задающие переход от декартовых координат (x_1, x_2) к полярным координатам (R, θ)

Согласно теоремам 1 и 2, существует асимптотически устойчивое решение задачи (23), соответствующее траектории на фазовой плоскости $(\tilde{u}, \tilde{v})$, исходящей из точки B и входящей в седло $(h, 0)$, для которого справедлива равномерная в $\bar{D}_t$ оценка $|u(x, t, \varepsilon) - U_0(x, t, \varepsilon)| < C\varepsilon$. Рисунки 1(b)–(f) иллюстрируют асимптотическую устойчивость этого решения как решения соответствующей начально-краевой задачи вида (21).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. А. О положительном решении эллиптического уравнения с нелинейным интегральным краевым условием типа излучения // Мат. заметки. — 1977. — 22, № 1. — С. 117–128.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундам. прикл. мат. — 1998. — 4, № 3. — С. 799–851.
4. Гуревич А. В., Минц Р. Г. Локализованные волны в неоднородных средах // Усп. физ. наук. — 1984. — 142, № 1. — С. 539–254.
5. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Диффер. уравн. — 1995. — 31, № 7. — С. 1132–1139.
6. Нефедов Н. Н. Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции-диффузии-адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — 61, № 12. — С. 2074–2094.
7. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. Существование и устойчивость периодических решений с пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия в случае сингулярно возмущенных граничных условий второго рода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2020. — № 2. — С. 15–20.
8. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. О периодических решениях с пограничным слоем в задаче реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода // Диффер. уравн. — 2020. — 56, № 12. — С. 1641–1650.
9. Нефедов Н. Н., Никулин Е. И. О неустойчивых решениях с немонотонным пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия // Мат. заметки. — 2021. — 110, № 6. — С. 899–910.
10. Никулин Е. И. Контрастные структуры в задаче реакция-адвекция-диффузия, возникающей в дрейф-диффузионной модели полупроводника, в случае негладкой реакции // Теор. мат. физ. — 2023. — 215, № 3. — С. 360–376.
11. Соболев В. А., Щепаккина Е. А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. — М.: Физматлит, 2010.
12. Barenblatt G., Entov V., Ryzhik V. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1991.
13. Butuzov V., Nefedov N., Recke L., Schneider K. Periodic solutions with a boundary layer of reaction-diffusion equations with singularly perturbed Neumann boundary conditions // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2014. — 24. — 1440019.
14. Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena. — Univ. of Cyprus, 2024.
15. Kopteva N., Stynes M. Stabilized approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semi-linear reaction-diffusion problem // Numer. Math. — 2011. — 119. — P. 787–810.

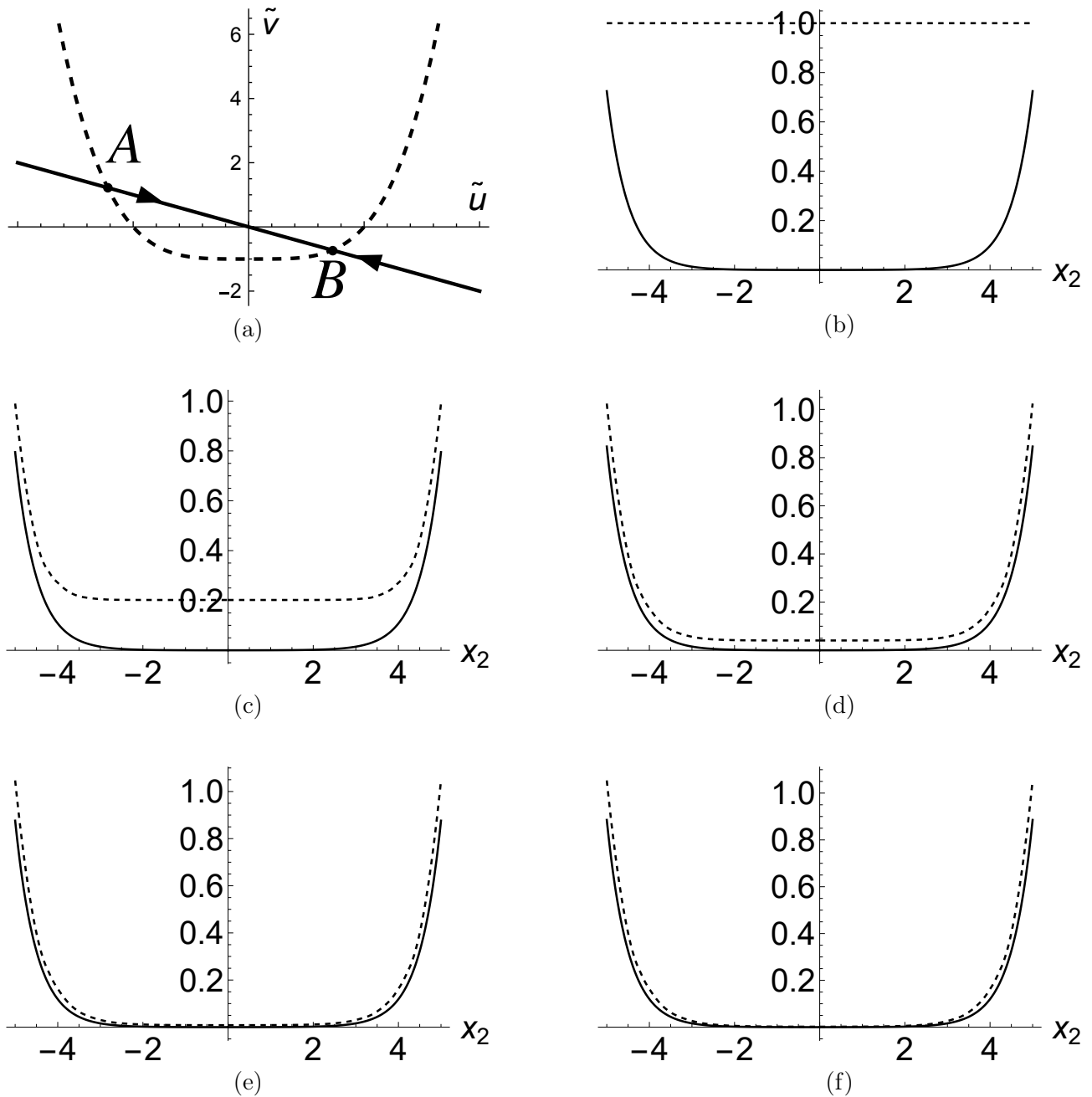


Рис. 1. (а) Фазовая плоскость для присоединенной системы, отвечающей задаче (23). Сплошные кривые — сепаратрисы, входящие в седло $(0,0)$, пунктир — функция, задаваемая формулой $\tilde{v} = -g(\tilde{u}, \theta, t) = k\tilde{u}^4 - g_1(\theta, t)$. (b)–(f) Зависимость асимптотики нулевого порядка для решений периодической задачи (23) (сплошная кривая) и решений соответствующей ей начально-краевой задачи (пунктир) от координаты x_2 при фиксированном $x_1 = 0$ и при t , пробегающих значения от 0 до 1,6 с шагом 0,4. Здесь $v^0 \equiv 1$, $k = 1$, $T = 2\pi$, $h \equiv 0$, $g_1 = 1 + 0,5 \sin t$, $\varepsilon = 0,5$.

16. Min G. G., Hamouda M., Jung C. Y., Temam R. M. Singular Perturbations and Boundary Layers. — Cham: Springer, 2018.
17. Nefedov N. N., Nikitin A. G., Nikulin E. I. Boundary-value problem for singularly perturbed integro-differential equation with singularly perturbed Neumann boundary condition// Russ. J. Math. Phys. — 2023. — 30, № 3. — P. 375–381.

18. *Omel'chenko O. E., Recke L., Butuzov V. F., Nefedov N. N.* Time-periodic boundary layer solutions to singularly perturbed parabolic problems// J. Differ. Equations. — 2017. — 262, № 9. — P. 4823–4862.
19. *O'Riordan E., Quinn J.* Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem// Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2011. — 81. — P. 187–195.
20. *Ovcharov V., Kurennya A., Rudakov V., Prigara V.* Temperature switching waves in a silicon wafer on lamp-based heating// Proc. SPIE 10224 Int. Conf. on Micro- and Nano-Electronics (October 3-7, 2016, Zvenigorod, Russian Federation), 2016. — P. 1022422.
21. *Pao C. V.* Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 234. — P. 695–716.
22. *Quinn J.* A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — 290. — P. 500–515.
23. *Semkin V., Shabanov A., Kapralov K., Kashchenko M., Sobolev A., Mazurenko I., Myltsev V., Mylnikov D., Nikulin E., Chernov A., Kameneva E., Bocharov A., Svintsov D.* Multifunctional 2D infrared photodetectors enabled by asymmetric singular metasurfaces// Adv. Opt. Mater. — 2025. — 13, № 12. — 2403189.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Никулин Егор Игоревич (Nikulin Egor Igorevich)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail: nikulin@physics.msu.ru