ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 38–44
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-38-44

УДК 517.957

ФОРМИРОВАНИЕ ПОГРАНСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

© 2025 г. **Н. Т. ЛЕВАШОВА**

Аннотация. Рассматривается система уравнений, описывающая протекание двухкомпонентной химической реакции в ограниченном объеме. Предполагается, что реакция происходит в растворе, концентрация продуктов реакции в нем со временем увеличивается, затем происходит насыщение, т.е. концентрация продуктов реакции становится максимально возможной при данных условиях, после чего реакция останавливается. С помощью подобной постановки можно описывать микроскопические процессы, происходящие при закачке CO_2 в породу, представляющую собой пористую среду с порами, заполненными водой. Для системы двух уравнений типа «реакция-диффузия» на отрезке показано, что за конечное время из заданной начальной функции формируется решение, близкое к стационарному распределению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при данных условиях.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, уравнение реакция-диффузия, формирование пограслойного решения, метод дифференциальных неравенств, дифференциальное включение.

FORMATION OF A BOUNDARY-LAYER SOLUTION IN A PROBLEM FOR A SYSTEM OF REACTION-DIFFUSION EQUATIONS IN A LIMITED VOLUME

© 2025 **N. T. LEVASHOVA**

Abstract. We consider a system of equations that describes a two-component chemical reaction in a limited volume. The reaction is assumed to occur in a solution, the concentration of reaction products increases in time, then becomes maximal possible under the given conditions (i.e., saturation occurs), and then the reaction terminates. A similar formulation can be used for describing microscopic processes occurring when CO_2 is injected into a rock, which is a porous medium with pores filled with water. For a system of two equations of the “reaction-diffusion” type on a segment, we show that in a finite time, a solution close to a stationary distribution corresponding to the concentration of a saturated solution under given conditions is formed from a given initial function.

***Keywords and phrases*:** singular perturbation, reaction-diffusion equation, formation of boundary-layer solution, method of differential inequalities, differential inclusion.

***AMS Subject Classification*:** 35K60

1. Введение. Математическая постановка задачи, исследуемой в настоящей работе, является редуцированной до одномерного рассмотрения модельной задачей о насыщении водного раствора в поровом пространстве породы, в которую производится закачка CO_2. Утилизация двуокиси углерода, сопутствующей процессу добычи нефти и газа, входит, в частности, в экологические

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

программы таких государств как Норвегия (хранилище Sleipner; см. [7] и Австрия (проект Gorgon; см. [10]. До недавнего времени интерес к подобным проектам возникал и в нашей стране в контексте хранения CO_2 в пластах, расположенных в границах терригенных осадочных пород нефтегазоносных и угольных бассейнов (см. [6]). Процесс закачки и хранения CO_2 неизбежно сопровождается химическими реакциями внутри породы, приводящими в том числе к ее деструкции, однако этот процесс занимает десятилетия. Для прогнозирования условий безопасного хранения CO_2 в природных хранилищах требуется сочетание эксперимента и адекватных математически обоснованных моделей хранения. Одной из составляющих такой модели является задача о протекании процесса растворения химических компонент в воде, заполняющей поровое пространство породы, что приводит к постановке начально-краевой задачи для уравнения реакция-диффузия в ограниченном объеме.

В настоящей работе рассмотрена система двух уравнений типа «реакция-диффузия» на отрезке, решение которой стабилизируется к постоянному во времени распределению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при данных условиях. Показано, что за конечное время из заданной начальной функции формируется решение, близкое к стационарному распределению. Целью рассмотрения редуцированной одномерной постановки является определение основных особенностей, возникающих в ходе аналитического исследования решения задачи, в частности, доказательства теоремы существования указанного решения, для того, чтобы в дальнейшем использовать полученные результаты при рассмотрении трехмерной задачи моделирования реальных объектов.

Метод аналитического исследования процесса формирования предложен в [1]. Особенностью настоящей работы является наличие негладких нелинейных реактивных слагаемыех в уравнениях «реакция-диффузия», что приводит к необходимости использования теории дифференциальных включений (см. [5]).

2. Постановка задачи. Рассматривается двухкомпонентная система уравнений, описывающая химические реакции, проходящие до состояния насыщения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\begin{cases} f(u,v,x,\varepsilon), & u<u_{\max},\\ u_{\max}-u, & u\geqslant u_{\max},\end{cases} \\
&\frac{\partial v}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\begin{cases} g(u,v,x,\varepsilon), & v<v_{\max},\\ v_{\max}-v, & v\geqslant v_{\max},\end{cases} \qquad x\in(0,1),\quad t\in(0,T];\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial v}{\partial x}(1,t)=0, \qquad t\in[t_0,T],\\
&u(x,0)=u^0(x),\quad v(x,0)=v^0(x), \qquad x\in[0,1].
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ε — малый параметр, имеющий смысл коэффициента диффузии, $T>0$, u и v — концентрации реагирующих веществ, $u_{\max}$ и $v_{\max}$ — предельно допустимые значения концентраций, а функции f и g описывают химические реакции.

Исходя из физических соображений, потребуем выполнения следующих условий.

Условие 1. $0\leqslant u^0(x)<u_{\max}$, $0\leqslant v^0(x)<v_{\max}$, $x\in[0,1]$.

Условие 2. $f(u,v,x,\varepsilon)>0$, $g(u,v,x,\varepsilon)>0$ всюду на множестве $\overline{\Omega}:=\bigl\{(u,v,x,\varepsilon)\colon u\in[0,u_{\max}],\ v\in[0,v_{\max}(x)],\ x\in[0,1],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]\bigr\}$.

Кроме того потребуем, чтобы функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ были C^2-гладкими в $\overline{\Omega}$, а $u^0(x)$, $v^0(x)$ — на отрезке $x\in[0,1]$.

Вопрос о существовании решения у системы уравнений (1) с краевым условием Дирихле рассмотрен в работе [8], где доказано, существование решения из пространства $L_2((0,1)\times(0,T))$ в случае существования верхнего $(\overline{u},\overline{v})$ и нижнего $(\underline{u},\underline{v})$ решений. Обобщение на случай граничных условий Неймана возможно согласно [3]. Заметим, что верхним и нижним решениями задачи (1) могут быть $(\overline{u},\overline{v})=(u_{\max},v_{\max})$ и $(\underline{u},\underline{v})=(0,0)$.

Покажем, что за конечное время у задачи (1) формируется решение, удовлетворяющее оценке

$$u(x,t)=u_{\max}(x)+O(\varepsilon),\quad v(x,t)=v_{\max}(x)+O(\varepsilon),$$

которое будет находиться внутри области притяжения устойчивого стационарного решения задачи (1). Для доказательства будем использовать схему, предложенную в [1].

3. Задача вблизи начального момента времени. Рассмотрим задачу

$$\tilde{u}_t = \begin{cases} f(\tilde{u}, \tilde{v}, x, \varepsilon), & \tilde{u} < u_{\max}, \\ u_{\max} - \tilde{u}, & \tilde{u} \geqslant u_{\max}, \end{cases} \qquad \tilde{v}_t = \begin{cases} g(\tilde{u}, \tilde{v}, x, \varepsilon), & \tilde{v} < v_{\max}, \\ v_{\max} - \tilde{v}, & \tilde{v} \geqslant v_{\max}, \end{cases} \qquad x \in (0,1),\ t \in (0,T];$$
$$\tilde{u}(x,0) = u^0(x), \qquad \tilde{v}(x,0) = v^0(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{2}$$

Здесь $x \in [0,1]$ играет роль параметра.

Поскольку функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ строго положительны при $u < u_{\max}$, $v < v_{\max}$, то существуют значения t_u, при котором $\tilde{u} = u_{\max}$, и t_v, при котором $\tilde{v} = v_{\max}$. Далее будем считать, что $T > t_0$, где

$$t_0 = \max\{t_u,\ t_v\}. \tag{3}$$

Решение задачи (2) понимается в смысле дифференциальных включений; оно непрерывно на отрезке $t \in [0,T]$ и, кроме того, выполняются равенства

$$\tilde{u}(x,t) = u_{\max}, \quad \tilde{v}(x,t) = v_{\max} \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ t \geqslant t_0 \tag{4}$$

(см. [5]).

3.1. Задачи для производных $\tilde{u}_x$, $\tilde{v}_x$, $\tilde{u}_{xx}$, $\tilde{v}_{xx}$. Определим функции $\tilde{u}_x(x,t)$, $\tilde{v}_x(x,t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t} = \begin{cases} f_u(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{u}_x + f_v(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{v}_x + f_x(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon), & t < t_u, \\ 0, & t \geqslant t_u, \end{cases}$$
$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial t} = \begin{cases} g_u(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{u}_x + g_v(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon)\tilde{v}_x + g_x(\tilde{u}, \tilde{v}, x, t, \varepsilon), & t < t_v, \\ 0, & t \geqslant t_v, \end{cases} \qquad x \in (0,1),\ t \in (0,T];$$
$$\tilde{u}_x(x,0) = u_x^0(x), \quad \tilde{v}_x(x,0) = v_x^0(x), \quad x \in [0,1]. \tag{5}$$

Производные $\tilde{u}_{xx}(x,t)$, $\tilde{v}_{xx}(x,t)$ определим как решения задачи

$$\frac{\partial \tilde{u}_{xx}}{\partial t} = \begin{cases} f_u\tilde{u}_{xx} + f_v\tilde{v}_{xx} + f_{d2}(x,t), & t < t_u, \\ 0, & t \geqslant t_u, \end{cases}$$
$$\frac{\partial \tilde{v}_{xx}}{\partial t} = \begin{cases} g_u\tilde{u}_{xx} + g_v\tilde{v}_{xx} + g_{d2}(x,t), & t < t_v, \\ 0, & t \geqslant t_v, \end{cases} \qquad x \in (0,1),\ t \in (0,T];$$
$$\tilde{u}_{xx}(x,0) = u_{xx}^0(x), \quad \tilde{v}_{xx}(x,0) = v_{xx}^0(x), \quad x \in [0,1], \tag{6}$$

где

$$f_{d2}(x,t) := f_{xx} + f_{uu}u_x^2 + 2f_{uv}u_xv_x + 2f_{ux}u_x + 2f_{vx}v_x + f_{vv}v_x^2,$$
$$g_{d2}(x,t) := g_{xx} + g_{uu}u_x^2 + 2g_{uv}u_xv_x + 2g_{ux}u_x + 2g_{vx}v_x + g_{vv}v_x^2,$$

а производные функций f и g берутся при $((\tilde{u}(x,t), \tilde{v}(x,t), x, t, \varepsilon))$.

Решения задач (5) и (6) понимаются в терминах дифференциальных включений. Каждая из задач имеет единственное решение, непрерывное для каждого значения параметра $x \in [0,1]$ по переменной $t \in [0,T]$ (см. [5]).

При $t \in (0, \min\{t_u, t_v\})$ каждая из систем уравнений (5) и (6) является линейной с непрерывными ограниченными коэффициентами, поэтому существует такое $p > 0$, что справедливы оценки (см. [2])

$$|\tilde{u}_x| \leqslant Ce^{pt}, \quad |\tilde{v}_x| \leqslant Ce^{pt}, \quad |\tilde{u}_{xx}| \leqslant Ce^{pt}, \quad |\tilde{v}_{xx}| \leqslant Ce^{pt}, \quad x \in (0,1),\ t \in (0, \min\{t_u, t_v\}), \tag{7}$$

где $C > 0$ — константа.

3.2. Пограничные функции. Введем функции

$$Ru(x,t,\varepsilon) := \tilde{u}_x(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}_x(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon},$$
$$Rv(x,t,\varepsilon) := \tilde{v}_x(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{v}_x(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon}.$$

Составим суммы

$$U(x,t,\varepsilon) = \tilde{u}(x,t) + \varepsilon Ru(x,t,\varepsilon), \quad V(x,t,\varepsilon) = \tilde{v}(x,t) + \varepsilon Rv(x,t,\varepsilon).$$

Далее покажем, что при $t \geqslant t_0$ пара функций $(U(x,t,\varepsilon), V(x,t,\varepsilon))$ будет отличаться от точного решения $(u(x,t), v(x,t))$ задачи (1) на величину порядка ε по норме в пространстве C.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
L_u[U,V] &:= \frac{\partial U}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - u_{\max} + U = \\
&= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,t) + \varepsilon\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\partial t}(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\partial t}(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon} - \varepsilon^2\tilde{u}_{xx}(x,t) - \\
&- \varepsilon\left(\tilde{u}_x(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}_x(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon}\right) - \begin{cases} f(U,V,x,\varepsilon), & \tilde{u}(x,t) < u_{\max}, \\ -u_{\max} + \tilde{u}(x,t) + \varepsilon R_u(x,t,\varepsilon), & \tilde{u}(x,t) \geqslant u_{\max}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v[U,V] &:= \frac{\partial V}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - v_{\max} + V = \\
&= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x,t) + \varepsilon\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x\partial t}(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x\partial t}(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon} - \varepsilon^2\tilde{v}_{xx}(x,t) - \\
&- \varepsilon\left(\tilde{v}_x(0,t)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{v}_x(1,t)\exp\frac{x-1}{\varepsilon}\right) - \begin{cases} g(U,V,x,\varepsilon), & \tilde{v}(x,t) < v_{\max}, \\ -v_{\max} + \tilde{v}(x,t) + \varepsilon R_v(x,t,\varepsilon), & \tilde{v}(x,t) \geqslant v_{\max}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Учитывая оценки (7) и уравнения (2), заключаем, что найдется такая величина $p_0 > 0$, что для всех $x \in [0,1]$ будут справедливы оценки

$$L_u[U,V] = \varepsilon C_1 e^{p_0 t}, \quad L_v[U,V] = \varepsilon C_1 e^{p_0 t}.$$

3.3. Оценка невязки. Пусть $(u(x,t), v(x,t))$ — решение задачи (1). Сделаем замену

$$u = U(x,t,\varepsilon) + w_1(x,t)e^{p^* t}, \quad v = V(x,t,\varepsilon) + w_2(x,t)e^{p^* t},$$

где

$$p^* = \max\left\{p, p_0, \max|f_u| + \max|g_u|, \max|f_v| + \max|g_v|\right\}. \tag{8}$$

Отметим, что функции $w_{1,2}(x,t)$, как и решение $(u(x,t), v(x,t))$ задачи (1), принадлежат пространству $L_2((0,1)\times(0,T))$. Подставив решение в таком виде в задачу (1) и применив формулу конечных приращений в интегральной форме, можно получить следующую задачу для функций $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w_1}{\partial t} + p^* w_1 - \varepsilon^2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \begin{cases} h_1(w_1,w_2,x,t,\varepsilon)w_1 + \\ \quad + h_2(w_1,w_2,x,t,\varepsilon)w_2 + \\ \qquad\qquad + \varepsilon e^{(p_0-p^*)t}, & w_1(x,t) < (u_{\max} - U)e^{-p^* t}, \\ -w_1 + \varepsilon e^{(p_0-p^*)t}, & w_1(x,t) \geqslant -\varepsilon Ru(x,t,\varepsilon)e^{-p^* t}, \end{cases} \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} + p^* w_2 - \varepsilon^2\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \begin{cases} h_3(w_1,w_2,x,t,\varepsilon)w_1 + \\ \quad + h_4(w_1,w_2,x,t,\varepsilon)w_2 + \\ \qquad\qquad + \varepsilon e^{(p_0-p^*)t}, & w_2(x,t) < (v_{\max} - V)e^{-p^* t}, \\ -w_2 + \varepsilon e^{(p_0-p^*)t}, & w_2(x,t) \geqslant -\varepsilon Rv(x,t,\varepsilon)e^{-p^* t}, \end{cases} \\
\frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \\
w_1(x,0) = 0, \quad w_2(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1],
\end{gathered} \tag{9}$$

где введены обозначения

$$h_1(w_1,w_2,x,t,\varepsilon) := \int_0^1 f_u\big(U+sw_1e^{p^*t}, V+w_2e^{p^*t}, x,\varepsilon\big)ds,$$

$$h_2(w_1,w_2,x,t,\varepsilon) := \int_0^1 f_v\big(U+w_1e^{p^*t}, V+sw_2e^{p^*t}, x,\varepsilon\big)ds,$$

$$h_3(w_1,w_2,x,t,\varepsilon) := \int_0^1 g_u\big(U+sw_1e^{p^*t}, V+w_2e^{p^*t}, x,\varepsilon\big)ds,$$

$$h_4(w_1,w_2,x,t,\varepsilon) := \int_0^1 g_v\big(U+w_1e^{p^*t}, V+sw_2e^{p^*t}, x,\varepsilon\big)ds.$$

Согласно принципу максимума, доказанному в [4], для решения $(w_1(x,t), w_2(x,t))$ системы (9) из пространства $L_2((0,1)\times(0,T))$ выполняются следующие оценки:

$$\begin{gathered}
\Big\|\big(1+(h_1-p^*+h_3)(x^2-2x)\big)w_1(x,t)+ \\
+\big(1+(h_2-p^*+h_4)(x^2-2x)\big)w_2(x,t)\Big\|_{L_\infty((0,1)\times(0,T))} = O(\varepsilon), \\
\text{если } w_1 < (u_{\max}-U)e^{-p^*t},\ w_2 < (v_{\max}-V)e^{-p^*t}, \\
\big\|w_1(x,t)\big\|_{L_\infty((0,1)\times(0,T))} = O(\varepsilon), \qquad \text{если } w_1 > -\varepsilon R u(x,t,\varepsilon)e^{-p^*t}, \\
\big\|w_2(x,t)\big\|_{L_\infty((0,1)\times(0,T))} = O(\varepsilon), \qquad \text{если } w_2 > -\varepsilon R v(x,t,\varepsilon)e^{-p^*t}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Из этих оценок непосредственно следует, что ни одна из функций $w_{1,2}(x,t)$ не может превосходить положительного значения порядка, большего, чем $O(\varepsilon)$.

Тот факт, что эти функции не могут принимать отрицательных значений, по абсолютной величине порядка, большего, чем $O(\varepsilon)$, следует из оценки (10) и выбора константы p^* (см. (8)), поскольку под знаком модуля оказываются выражения одного знака.

Итак, справедливы оценки

$$u(x,t) = U(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p^*t}, \quad v(x,t) = V(x,t,\varepsilon) + O(\varepsilon)e^{p^*t}.$$

При $t = t_0$ имеем:

$$u(x,t) = u_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad v(x,t) = v_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}.$$

4. Стабилизация. При $t \geqslant t_0$ решение $(u(x,t), v(x,t))$ задачи (1) совпадает с решением задачи

$$\begin{gathered}
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \begin{cases} f(u,v,x,\varepsilon), & u < u_{\max}, \\ u_{\max}-u, & u \geqslant u_{\max}, \end{cases} \\
&\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \begin{cases} g(u,v,x,\varepsilon), & v < v_{\max}, \\ v_{\max}-v, & v \geqslant v_{\max}, \end{cases}
\end{aligned}\right. \quad x\in(0,1), \quad t\in(t_0,T]; \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t\in[t_0,T], \\
u_{\text{init}} = u(x,t_0) = u_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad v_{\text{init}} = v(x,t_0) = v_{\max} + O(\varepsilon)e^{p^*t_0}, \quad x\in[0,1].
\end{gathered} \tag{11}$$

Заметим, что если $u_{\text{init}}(x) \geqslant u_{\max}$ и $v_{\text{init}}(x) \geqslant u_{\max}$, то задача (1) распадается на две линейные задачи, с единственным стационарным устойчивым решением $u_{\max}$ или $v_{\max}$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $u_{\text{init}}(x) < u_{\max}$ или $v_{\text{init}}(x) < v_{\max}$. В этом случае верхним решением задачи (11) в смысле классического определения (см. [9]) является пара функций $(u_{\max}, v_{\max})$. Эта же пара функций является стационарным решением задачи (1).

Нижним решением задачи (11) является пара функций

$$\begin{aligned} \underline{U}_t(x,t,\varepsilon) &= u_{\max} - \varepsilon\left(\mu_u + \varepsilon\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\exp\frac{x-1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda t}, \\ \underline{V}_t(x,t,\varepsilon) &= v_{\max} - \varepsilon\left(\mu_v + \varepsilon\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\exp\frac{x-1}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{12}$$

Нижнее решение также можно понимать в классическом смысле, поскольку $U_t(x,t,\varepsilon) < u_{\max}$, $V_t(x,t,\varepsilon) < v_{\max}$ при любых $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$.

При достаточно больших значениях μ_u, μ_v функции $u_{\text{init}}(x)$ и $v_{\text{init}}(x)$ будут удовлетворять неравенствам

$$\underline{U}_t(x,0,\varepsilon) \leqslant u_{\text{init}}(x) \leqslant u_{\max}, \quad \underline{V}_t(x,0,\varepsilon) \leqslant v_{\text{init}}(x) \leqslant v_{\max}.$$

Поскольку при всех $(x,t) \in [0,1] \times [t_0,T]$ решение $(u(x,t),v(x,t))$ задачи (11) удовлетворяет неравенствам

$$\underline{U}_t(x,t,\varepsilon) \leqslant u(x,t) \leqslant u_{\max}, \quad \underline{V}_t(x,t,\varepsilon) \leqslant v(x,t) \leqslant v_{\max}$$

(см. [9]), то, принимая во внимание соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} \underline{U}_t = u_{\max}, \quad \lim_{t\to+\infty} \underline{V}_t = v_{\max},$$

к приходим к предельным равенствам

$$\lim_{t\to+\infty} |u(x,t) - u_{\max}| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} |v(x,t) - v_{\max}| = 0.$$

Учитывая единственность решения задачи (11) в случае, когда выполнено хотя бы одно из неравенств $u_{\text{init}}(x) < u_{\max}$ или $v_{\text{init}}(x) < v_{\max}$ (см. [9]), приходим к выводу, что $(u_{\max}, v_{\max})$ является единственным асимптотически устойчивым решением задачи (11).

5. Основной результат. Основным результатом исследования является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для решения* $(u(x,t),v(x,t))$ *задачи* (1) *выполняются предельные равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| u(x,t) - u_{\max} \right\|_{L_2((0,1)\times(0,T))} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \left\| v(x,t) - v_{\max} \right\|_{L_2((0,1)\times(0,T))} = 0. \tag{13}$$

6. Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \begin{cases} -ku + Q, & u < u_{\max}, \quad u_{\max} < Q/k, \\ -u + u_{\max}, & u \geqslant u_{\max}, \end{cases} \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \begin{cases} ku, & v < v_{\max}, \\ -v + v_{\max}, & v \geqslant v_{\max}, \end{cases} \end{aligned}\right. \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]; \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \\ &u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_t = \begin{cases} -k\tilde{u} + Q, & \tilde{u} < u_{\max}, \\ -\tilde{u} + u_{\max}, & \tilde{u} \geqslant u_{\max}, \end{cases} \quad \tilde{v}_t = \begin{cases} k\tilde{u}, & \tilde{v} < v_{\max}, \\ -\tilde{v} + v_{\max}, & \tilde{v} \geqslant v_{\max}, \end{cases} \quad x \in [0,1], \quad t \in (0,T]; \\ &u(x,0) = 0, \qquad v(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ее решением является пара функций

$$\tilde{u} = \min\left\{\frac{Q}{k}(e^{-kt} + 1),\ u_{\max}\right\}, \quad \tilde{v} = \min\left\{\int\limits_0^t \tilde{u}(t')dt',\ v_{\max}\right\}.$$

(см. [5]). Отсюда получаем

$$t_u = -\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{k}{Q}u_{\max}\right).$$

Если выполняется неравенство

$$v_{\max} \leqslant \frac{Q}{k^2}\left(1 - e^{-kt_u}\right) + \frac{Q}{k}t_u, \tag{14}$$

то момент времени t_v определяется как решение уравнения

$$v_{\max} = \frac{Q}{k^2}\left(1 - e^{-kt_v}\right) + \frac{Q}{k}t_v.$$

Если же выполнено неравенство, противоположное (14), то

$$t_v = \frac{1}{u_{\max}}\left(v_{\max} + u_{\max}t_u - \frac{Q}{k^2}\left(1 - e^{-kt_u}\right) - \frac{Q}{k}t_u\right).$$

Поскольку явной зависимости от x нет, то пара функций $(\tilde{u}, \tilde{v})$ является точным решением задачи, которое стабилизируется к $(u_{\max}, v_{\max})$ за время $t_0 = \max(t_u, t_v)$.

7. Заключение. В работе обосновано существование решения одномерной параболической системы уравнений, описывающей протекание двухкомпонентной химической реакции в ограниченном объеме. Показано, что за конечное время решение задачи становится равным постоянному значению, отвечающему концентрации насыщенного раствора при заданных условиях. В дальнейшем результаты работы могут быть применены для обоснования трехмерных модельных задач, связанных с хранением CO_2 в подземных резервуарах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Шнайдер К. Р.* О формировании и распространении резких переходных слоев в параболических задачах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2005. — № 1. — С. 9–13.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — Наука, 1973.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — Наука, 1967.
4. *Портнягин Д. В.* Принцип максимума и принцип сравнения для системы двух уравнений// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 2. — С. 365–376.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — Наука, 1985.
6. *Afanasyev A., Kempkab T., Kühnb M., Melnik O.* Validation of the MUFITS reservoir simulator against standard CO_2 storage benchmarks and history-matched models of the Ketzin pilot site// Energy Proc. — 2016. — *97*. — P. 395–402.
7. *Furre A. K. et. al.* 20 Years of Monitoring CO_2-injection at Sleipner// Energy Proc. — 2017. — *114*. — P. 3916-3926.
8. *He T.* Reaction-diffusion systems with discontinuous reaction functions/ PhD thesis. — North Carolina State University, 2005.
9. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — New York: Plenum Press, 1992.
10. *Trupp M., Frontczak J. Torkington J.* The Gorgon CO_2 Injection Project – 2012 Update// Energy Proc. — 2013. — *37*. — P. 6237-6247.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Левашова Наталия Тимуровна (Levashova Natalia Timurovna)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: `levashovant@my.msu.ru`