



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 25–37
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-25-37

УДК 517.929

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО—СИВАШИНСКОГО

© 2025 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. Рассматривается периодическая краевая задача для уравнения Курамото—Сивашинского. Показано, что существует двухпараметрическое семейство решений, которые имеют структуру бегущих волн, и получены асимптотические формулы для них. Показано также, что совокупность таких решений образует двумерное инвариантное многообразие, которое является локальным аттрактором. Указанные решения имеют разные периоды по переменной t , неустойчивы по Ляпунову, но устойчивы по Перрону, Пуанкаре и Жуковскому. Обоснование результатов основано на теории инвариантных многообразий и нормальных форм Пуанкаре—Дюлака.

Ключевые слова: уравнение Курамото—Сивашинского, двумерное инвариантное многообразие, бегущая волна, устойчивость, бифуркация, нормальная форма.

PERIODIC TRAVELING WAVES OF THE KURAMOTO—SIVASHINSKY EQUATION

© 2025 А. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. A periodic boundary-value problem for the Kuramoto–Sivashinsky equation is considered. We prove that there exists a two-parameter family of traveling-wave solutions and obtain asymptotic formulas for them. We also prove that the set of such solutions forms a two-dimensional invariant manifold, which is a local attractor. The indicated solutions have different periods in the variable t , are unstable in the Lyapunov sense, but are stable in the Perron, Poincaré, and Zhukovsky senses. The study is based on the theory of invariant manifolds and Poincaré–Dulac normal forms.

Keywords and phrases: Kuramoto–Sivashinsky equation, two-dimensional invariant manifold, traveling wave, stability, bifurcation, normal form.

AMS Subject Classification: 35Lxx

1. Введение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + g_2(u^2)_x + g_3(u^3)_x = 0, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$, $b, g_2, g_3 \in \mathbb{R}$, $g_2^2 + g_3^2 \neq 0$. Данное эволюционное дифференциальное уравнение известно под названием «уравнение Курамото—Сивашинского» (см. [23, 26, 27]). Классический вариант этого уравнения предполагает, что $g_3 = 0$. Кроме широко известных приложений в химической кинетике (см. [23]) и гидродинамике (см. [26]), модифицированные варианты уравнения (1)

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

используют в физике пограничных явлений (см., например, [19]), в частности, как математическую модель формирования наноструктур на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов (см., например, [18–20]).

В данной работе будем изучать уравнение (1) в случае, когда оно дополнено периодическими краевыми условиями, которые изначально приведены после соответствующих перенормировок пространственной переменной x , а также и эволюционной переменной t . Итак, уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Конечно возможны иные варианты краевых условий, отличных от периодических краевых условий (2) (см., например, монографию [27], и список литературы в ней). Вместе с тем вариант, когда выбраны периодические краевые условия, по-видимому, один из самых распространенных (см., например, [18–20, 26]).

Для краевой задачи (1)–(2) изучались различные вопросы. Например, в [7–9, 22] изучались локальные бифуркации в окрестности пространственно однородных состояний равновесия, т.е. решений краевой задачи вида $u(t, x) = \text{const}$.

В данной работе будет рассмотрен ряд вопросов, связанных с существованием и свойствами решений краевой задачи (1)–(2), которые имеют структуру бегущих волн, т.е. решений вида

$$u(t, x) = F(y), \quad y = x + \omega t, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Безусловно, этот популярный для приложений в физике вопрос уже рассматривался и ранее (см., например, [17, 25]), но в данной статье будет изучена возникающая задача на базе использования математически обоснованных методов теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий (с бесконечномерным фазовым пространством). Такой подход позволил не только получить достаточные условия существования бегущих волн, но и одновременно вывести для них асимптотические формулы, дать анализ их устойчивости в смысле классических определений теории устойчивости. Речь идет об устойчивости по А. М. Ляпунову, А. Пуанкаре, О. Перрону. Для анализа всей этой совокупности вопросов будут использованы такие методы теории динамических систем (качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными), как метод инвариантных (интегральных) многообразий, а также метод нормальных форм, который ведет свое начало от работ А. Пуанкаре.

2. Общие замечания. Отметим, что если дополнить краевую задачу (1)–(2) начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad (3)$$

то из результатов работ [5, 16] вытекает, что начально-краевая задача (1)–(3) локально корректно разрешима, если $f(x) \in H^4$; через H^4 обозначено функциональное пространство, состоящее из тех функций $f(x)$, для которых выполнены следующие свойства:

- (i) $f(x)$ имеет период 2π ;
- (ii) при $x \in [-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^4[-\pi, \pi]$ (см. [15]).

Некоторые необходимые пояснения, связанные с использованием результатов работ [5, 16], будут приведены в следующих разделах. Напомним, что

$$\|f\|_{H^4} = \|f\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f'\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f''\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f'''\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f^{IV}\|_{L_2(-\pi, \pi)}.$$

Нетрудно проверить, что краевая задача (1)–(2) имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $u(t, x) = c$, где c — произвольная действительная постоянная.

Пусть функция $h(x)$ принадлежит пространству 2π -периодических функций, которые при $x \in (-\pi, \pi)$ принадлежат $L_2(-\pi, \pi)$: $h(x) \in H^0$. В следующих разделах будем использовать обозначение

$$M_0(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) dx.$$

Лемма 1. Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи (1)–(2). Тогда

$$M_0(u) = c, \quad (4)$$

т.е. пространственное среднее решения краевой задачи (1)–(2) не зависит от t .

Подчеркнем, что решение $u(t, x) = c$ входит в совокупность тех решений краевой задачи (1)–(2), для которых $M_0(u) = c$.

Доказательство. Для доказательства леммы 1 проинтегрируем обе части уравнения по переменной x . После элементарных преобразований и умножения на $1/(2\pi)$ получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (g(u))_x dx = 0, \quad g(u) = g_2 u^2 + g_3 u^3.$$

Очевидно, что три последних интеграла в левой части равны нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u dx \right) = \frac{d}{dt} (M_0(u)) = 0.$$

Итак, выполнено условие (4). $\square$

Обозначим через H_c^0 совокупность тех функций $f(x) \in H^0$, для которых $M_0(f) = c$. Нетрудно проверить, что при $c \neq 0$ множество H_c^0 является аффинным подпространством гильбертова пространства H^0 , а H_c^4 — аффинным подпространством гильбертова пространства H^4 . Если же $c = 0$, то H_0^0 и H_0^4 являются линейными подпространствами функциональных пространств H^0 и H^4 соответственно. Ясно, что подпространства H_c^4 инвариантны (локально инвариантны) для решений краевой задачи (1)–(2). Действительно, из включения $f(x) \in H_c^4$ вытекает, что $f_t(x) \in H_c^4$, где $f_t(x) = u(t, x)$, а $u(t, x)$ — решение начально-краевой задачи (1)–(3) с условием $u(0, x) = f(x) \in H_c^4$. При этом включение $f_t(x) \in H_c^4$ выполнено до тех пор, пока решение $u(t, x)$ существует или при всех $t > 0$, если начально-краевая задача (1)–(3) имеет решение при всех $t > 0$ (см. монографию [27]).

В краевой задаче (1)–(2) сделаем замену

$$u(t, x) = c + v(t, x), \quad (5)$$

где $c = M_0(u)$. Следовательно, $M_0(v) = 0$, т.е. $v(t, x) \in H_0^4$ при любом t , когда решение $u(t, x)$ ($v(t, x)$) существует.

Замена (5) позволяет переписать краевую задачу (1)–(2) в следующем виде:

$$v_t = A(b, a)v - a_2(v^2)_x - a_3(v^3)_x, \quad (6)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad M_0(v) = 0. \quad (7)$$

В краевой задаче (6)–(7)

$$A(b, a)v = -v_{xxxx} - bv_{xx} + av_x, \quad a = -(2g_2c + 3g_3c^2), \quad a_2 = g_2 + 3g_3c, \quad a_3 = g_3.$$

Лемма 2. Пусть $b < 1$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t, x)\|_{L_2(-\pi, \pi)}^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} v^2(t, x) dx = 0,$$

где $v(t, x)$ — решение краевой задачи (6)–(7).

Доказательство. Умножив уравнение (6) на $v(t, x)$ и проинтегрировав полученное равенство по переменной x , получим следующее интегральное равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 dx = - \int_{-\pi}^{\pi} v_{xxxx} v dx - b \int_{-\pi}^{\pi} v_{xx} v dx + a \int_{-\pi}^{\pi} v_x v dx - a_2 \int_{-\pi}^{\pi} (v^2)_x v dx - a_3 \int_{-\pi}^{\pi} (v^3)_x v dx.$$

После преобразований по частям можно убедиться, что три последних интеграла равны нулю, а

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 dx = b \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} v_{xx}^2 dx \leq (b-1) \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx < 0,$$

если $b-1 < 0$, т.е. $b < 1$. Следовательно, в такой ситуации неотрицательная функция

$$v_0(t) = \int_{-\pi}^{\pi} v_x^2 dx$$

убывает и, более того, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_0(t) = 0$. Итак, при $b < 1$ состояние равновесия $v(t, x) = 0$ будет глобальным аттрактором для решений краевой задачи (6)–(7) в смысле нормы в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$. Иногда в такой ситуации говорят, что $v(t, x) = 0$ — это «слабый» глобальный аттрактор, т.е. глобальный аттрактор в более слабой норме, чем норма в фазовом пространстве (в нашем случае это пространство начальных условий H_0^4). $\square$

Из последнего замечания вытекает, что искать бегущие волны у краевой задачи (6)–(7) и, следовательно, краевой задачи (1)–(2) можно лишь при $b \geq 1$. Далее, дополнительные построения, связанные с методом инвариантных многообразий и нормальных форм, позволяют показать, что при $b = 1$ состояние равновесия $v(t, x) = 0$ также будет аттрактором, но локальным. Все последние утверждения означают, что далее будем искать решения краевой задачи (6)–(7), имеющие структуру бегущих волн при $b > 1$.

3. Свойства решений линеаризованной краевой задачи. В данном разделе рассмотрим линеаризованную в окрестности нуля краевую задачу (6)–(7), т.е. линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} v_t &= A(b, a)v, \\ v(t, x + 2\pi) &= v(t, x), \quad M_0(v) = 0. \end{aligned}$$

где линейный дифференциальный оператор имеет вид

$$A(b, a)v = -v_{xxxx} - bv_{xx} + av_x.$$

Он имеет счетный набор собственных чисел

$$\lambda_n = \lambda_n(b, a) = \Theta_n(b) + i\sigma_n(a), \quad \Theta_n(b) = -n^4 + bn^2, \quad \sigma_n(a) = an.$$

Собственные числа λ_n отвечают собственным функциям $\exp(inx)$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. При этом функции $\exp(inx)$ в пространстве H_0^0 образуют полную ортогональную систему. В частности, отсюда следует, что оператор $A(b, a)$ в H_0^0 является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов (см. [5]). Это свойство линейного дифференциального оператора $A(b, a)$ дает основание использовать результаты работ [5, 16] для обоснования корректной разрешимости нелинейной начально-краевой задачи (1)–(3), если, конечно, учесть, что в уравнениях (1) ((6)) нелинейные слагаемые достаточно гладко зависят от $v(t, x)$ (см., например, [16]).

В заключение этого раздела отметим, что из теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному (первому) приближению вытекает, что решение $v(t, x) = 0$ нелинейной краевой задачи (6)–(7) асимптотически устойчиво, если $b < 1$ ($\operatorname{Re} \lambda_n = \Theta_n < 0$) при любом $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ и неустойчиво, если $b > 1$ (по крайней мере, Θ_1 и Θ_{-1} положительны). При $b = 1$ в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной краевой задачи (6)–(7) реализуется критический случай (см., например [3, 4]). В монографии [4] приведен конечномерный вариант теоремы Ляпунова, а в монографии [3] рассмотрены уже уравнения в банаховом пространстве, т.е. приведено обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению на бесконечномерный случай, в частности, на уравнение с частными производными.

4. Бегущие волны вспомогательной краевой задачи. В этом разделе покажем, что при

$$b = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

краевая задача (6)–(7) имеет решения, имеющие структуру бегущей волны, т.е. решения вида

$$v(t, x) = w(x + \omega t),$$

где скорость распространения волны ω , как и функция $w(y)$, подлежит определению в ходе анализа краевой задачи при выбранных значениях b . Напомним, что при $\omega \neq 0$ получаем бегущие волны. Если оказалось, что $\omega = 0$, то получаем пространственно неоднородные состояния равновесия рассматриваемой краевой задачи.

В краевой задаче (6)–(7) положим

$$\tau = t, \quad y = x + \omega t, \quad (8)$$

а также будем искать ω как функцию c и ε , т.е. положим

$$\omega(c, \varepsilon) = a(c) - \varepsilon \sigma(\varepsilon),$$

где $\sigma(\varepsilon)$ — достаточно гладкая функция. Пусть $\sigma_0 = \sigma(0)$ и поэтому $\sigma(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon), \quad \Phi(0) = 0.$$

Тем самым вопрос о выборе $\omega = \omega(c, \varepsilon)$ сводится к определению σ_0 и функции $\Phi(\varepsilon)$. Напомним, что $a(c) = -(2cg_2 + 3c^2g_3)$, т.е. является функцией параметра c . Быть может, уместно подчеркнуть, что функция $a(c)$ переменной $c \in (-\infty, \infty)$ принимает любые значения, если $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$. При $g_3 \neq 0$ она принимает любые положительные значения, если $g_3 > 0$ и любые отрицательные значения, если $g_3 < 0$.

Решения краевой задачи (6)–(7) при $b = 1 + \varepsilon$ будем искать как функцию, которая зависит от τ и y ($v = v(\tau, y)$). В новых переменных (8) краевая задача (6)–(7) с учетом выбора коэффициента b может быть переписана в следующем виде:

$$v_\tau = A(\varepsilon)v - a_2(v^2)_y - a_3(v^3)_y, \quad (9)$$

$$v(\tau, y + 2\pi) = v(\tau, y), \quad M_0(v) = 0, \quad (10)$$

где теперь

$$M_0(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\tau, y) dy.$$

Кроме этого,

$$A(\varepsilon) = A_0v + \varepsilon A_1v + B(\varepsilon)v, \quad A_0v = -v_{yyyy} - v_{yy}, \quad A_1v = -v_{yy} + \sigma_0v_y, \quad B(\varepsilon)v = \varepsilon\Phi(\varepsilon)v_y,$$

где $\Phi(\varepsilon)$ — также гладкая функция. Очевидно, что линейный дифференциальный оператор $B(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ подчинен операторам B_1, B_2 ($B_1v = v_{yyyy}$, $B_2v = v_{yy}$; см. [5]), а коэффициент $\varepsilon\Phi(\varepsilon)$ имеет в нуле порядок малости выше первого.

Отметим, что при достаточно малой положительной постоянной ε_0 и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оператор $A(\varepsilon)$ имеет собственные числа

$$\lambda_{\pm 1}(\varepsilon) = \varepsilon(1 \pm i\sigma_0) + o(\varepsilon),$$

которые отвечают собственным функциям $\exp(\pm iy)$. Остальные собственные числа оператора $A(\varepsilon)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0$, где γ_0 — некоторая положительная постоянная. В рассматриваемом случае можно выбрать $\gamma_0 = 11$, если ε_0 — достаточно малая положительная постоянная. Проверка этих свойств линейного дифференциального оператора $A(\varepsilon)$ достаточно стандартна, если учесть, что оператор A_0 имеет собственные числа $\lambda_n = n^2 - n^4$ и при $n \neq \pm 1$ для них выполнено неравенство $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -12$. Подчеркнем, что все собственные числа оператора A_0 двукратны, а при $\varepsilon \neq 0$ собственные числа оператора $A(\varepsilon)$ в ситуации общего положения попарно комплексно сопряжены, $\lambda_{-n}(\varepsilon) = \overline{\lambda_n(\varepsilon)}$. Тем самым для оператора $A(\varepsilon)$ реализуется близкий к критическому случай двукратного нулевого собственного значения. При $\varepsilon = 0$ имеем $A(0) = A_0$, и собственные числа этого оператора суть $\lambda_{\pm n} = -n^4 + n^2$.

В такой ситуации у краевой задачи (9)–(10) в окрестности нулевого состояния равновесия существует двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, которое принято называть центральным инвариантным многообразием (см. [6, 21, 24]). Пусть $u(t, x)$ — решение краевой задачи (9)–(10) с начальными условием $u(t, x) \in Q(\delta)$, где через $Q(\delta)$ обозначен шар радиуса δ с центром в нуле пространства H_0^4 . Тогда это решение со скоростью экспоненты приближается к инвариантному многообразию $M_2(\varepsilon)$. Отметим, что величина δ может быть выбрана не зависящей от ε .

Прежде чем перейти к дальнейшим построениям и, в частности, изучению решений, принадлежащих $M_2(\varepsilon)$. Отметим общее свойство для решений краевой задачи (9)–(10). Для них характерно свойство, которое называют трансляционной инвариантностью. Суть его состоит в том, что вместе с решениями $v(\tau, y, \varepsilon)$ у этой краевой задачи есть решения $v(\tau, y + \beta, \varepsilon)$, где β — произвольная действительная постоянная.

Решения, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$ (см. [7–9, 22]), можно и удобно искать в следующем виде:

$$v(\tau, y, z, \bar{z}) = \varepsilon^{1/2} v_1(y, z, \bar{z}) + \varepsilon v_2(y, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2} v_3(y, z, \bar{z}) + \varepsilon^2 v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon), \quad (11)$$

где $v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon)$ гладко зависит от своих аргументов при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Наконец, $z = z(s)$, $s = \varepsilon\tau$ — медленное время, а

$$v_1(\tau, y, z, \bar{z}) = v_1(y, z, \bar{z}) = z(s)q(y) + \bar{z}(s)\bar{q}(y), \quad q(y) = \exp(iy).$$

Функции $v_2(y, z, \bar{z})$, $v_3(y, z, \bar{z})$ и $v_0(y, z, \bar{z}, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ принадлежат классу функций W (см. [7–9, 22]). Напомним его определение.

Определение 1. Функция $p(y, z, \bar{z})$ принадлежит классу W , если для нее выполнены следующие условия:

- (i) Функция $p(y, z, \bar{z})$ рассматриваемая как функция y при всех $z, \bar{z}$ принадлежит подпространству $H_{0,\pm 1}^4$ гильбертова пространства H^4 , состоящему из тех функций, для которых выполнены равенства

$$M_0(p) = M_{\pm 1}(p) = 0,$$

где

$$M_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(y, z, \bar{z}) dy, \quad M_{\pm 1}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(y, z, \bar{z}) \exp(\mp iy) dy.$$

При этом, конечно, $M_0(p)$, $M_{\pm 1}(p)$ зависят от $z, \bar{z}$ как от параметров.

- (ii) Функция $p(y, z, \bar{z})$ при $|z| \leq \delta_p$ ($\delta_p > 0$) зависит от $z, \bar{z}$ гладко, т.е. имеет достаточно большое число непрерывных частных производных по переменным $z, \bar{z}$.

Наконец, функция $z(s)$ удовлетворяет уравнению, которое принято называть нормальной формой (см., например, монографию [1]):

$$z'_s = \varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) \quad (12)$$

где $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ — достаточно гладкая функция. Более того, для нее справедливо равенство

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon).$$

Отметим, что для дальнейших построений определяющую роль в случае общего положения играет функция $\psi(z, \bar{z}) = \varphi(z, \bar{z}, 0)$. Таким образом, уравнение (12) приобретает следующий вид:

$$z'_s = \psi(z, \bar{z}). \quad (13)$$

Его называют «укороченной» нормальной формой (см. [2]). При этом $\psi(z, \bar{z}) = z\psi_0(z, \bar{z})$.

Отметим также, что для комплекснозначной функции $\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon)$ справедливо равенство $\varphi_0(z, \bar{z}, \varepsilon) = \varphi_0(|z|^2, \varepsilon)$, а также аналогичное равенство для $\psi_0(z, \bar{z})$, имеющее вид $\psi_0(z, \bar{z}) = \psi_0(|z|^2)$. Обе функции $\varphi_0(|z|^2, \varepsilon)$, $\psi_0(|z|^2)$ в ситуации общего положения комплекснозначны, так как у них могут быть комплексные коэффициенты.

Доказательство равенств

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\varphi_0(|z|^2, \varepsilon), \quad \psi(z, \bar{z}) = z\psi_0(|z|^2)$$

основано на следующем простом замечании. Трансляционная инвариантность решений краевой задачи (9)–(10) означает, что функция $v(\tau, y + \beta, \varepsilon)$ также является решением; следовательно, это приводит к замене $z(s)$ на функцию $w(s) = z(s) \exp(i\beta)$, которая также будет решением нормальной формы (12) (и укороченной нормальной формы (13)). Следовательно, справедливо равенство

$$\exp(i\beta)z'_s = \varphi(\exp(i\beta)z, \exp(-i\beta)\bar{z}, \varepsilon)$$

или

$$\exp(i\beta)\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = \varphi(\exp(i\beta)z, \exp(-i\beta)\bar{z}, \varepsilon).$$

Из последнего равенства и вытекает нужное свойство функции $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$. ddd

Замечание 1. Пусть для непрерывно дифференцируемой функции $F(p, q)$ справедливо равенство

$$\exp(i\beta)F(p, q) = F(\exp(i\beta)p, \exp(-i\beta)q),$$

где β — произвольное действительное число. Тогда производные от обеих частей по β совпадают и при $\beta = 0$ в том числе. Следовательно, справедливо равенство (после сокращения на i)

$$F(p, q) = p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с частными производными имеет общее решение $F(p, q) = pF_0(pq)$, где $F_0(\xi)$ — также непрерывно дифференцируемая функция. Следовательно, при $p = z$, $q = \bar{z}$ получаем

$$F(z, \bar{z}) = zF_0(z\bar{z}) = zF_0(|z|^2).$$

Далее определим в явном виде правую часть «укороченной» нормальной формы (13).

Для определения правых частей равенств (11)–(13) получим следующие линейные неоднородные краевые задачи, которые позволят определить ψ , v_2 , v_3 . Для дальнейшего определения остальных слагаемых процесс следует продолжить.

Итак, для определения v_2 получим линейную неоднородную краевую задачу

$$A_0 v_2 = a_2(v_1^2)_y, \tag{14}$$

$$v_2(y + 2\pi, z, \bar{z}) = v_2(y, z, \bar{z}), \quad M_0(v_2) = M_{\pm 1}(v_2) = 0, \tag{15}$$

которая однозначно разрешима в рассматриваемом классе функций W . Напомним, что

$$A_0 v_2 = -v_{2y}y - v_{2yy},$$

а переменную z в краевой задаче (14)–(15) интерпретируем как параметр. В результате стандартного анализа обыкновенного дифференциального уравнения (14) с учетом условий (15) получаем, что решение этой краевой задачи имеет следующий вид:

$$v_2 = v_2(y, z, \bar{z}) = \eta_2 z^2 q^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}^2 \bar{q}^2, \quad \eta_2 = -i \frac{a_2}{6}.$$

На третьем шаге получаем линейную неоднородную краевую задачу для определения функции $v_3(y, z, \bar{z}) \in W$, которую можно записать в следующем виде:

$$A_0 v_3 = F_3(y, z, \bar{z}), \tag{16}$$

$$v_3(y + 2\pi, z, \bar{z}) = v_3(y, z, \bar{z}), \quad M_0(v_3) = M_{\pm 1}(v_3) = 0, \tag{17}$$

где

$$F_3(y, z, \bar{z}) = -A_1(zq + \bar{z}\bar{q}) + 2a_2(v_1 v_2)_y + a_3(v_1^3)_y + \psi(z, \bar{z})q + \bar{\psi}(z, \bar{z})\bar{q}.$$

В отличие от краевой задачи (14)–(15), где условия разрешимости в классе функций из W были выполнены, у краевой задачи (16)–(17) выполнение соответствующих условий разрешимости ($M_0(F_3) = M_{\pm 1}(F_3) = 0$) обеспечивает выбор функций $\psi, \bar{\psi}$. Вычисление соответствующих интегралов показало, что

$$\psi(z, \bar{z}) = (1 + i\sigma_0)z + (l_1 + il_2)z|z|^2,$$

где $l_1 = -a_2^2/3$, $l_2 = -3a_3$. При этом $\psi_0(|z|^2) = (1 + i\sigma_0) + (l_1 + il_2)|z|^2$.

Замечание 2. Случай общего положения предполагает выполнение условия $l_1 \neq 0$, т.е. $a_2 \neq 0$. Далее будем предполагать, что $a_2 = g_2 + 3g_3c \neq 0$. Если $l_1 = 0$ ($a_2 = 0$), то тогда реализацию алгоритма следует продолжить и несколько скорректировать.

При выполнении условий разрешимости стандартным образом можно найти решения краевой задачи (16)–(17):

$$v_3(y, z, \bar{z}) = \eta_3 z^3 q^3 + \bar{\eta}_3 \bar{z}^3 \bar{q}^3, \quad \eta_3 = -\frac{1}{72}(a_2^2 + 3a_3 i).$$

Рассмотрим сначала нормальную форму (13), т.е. уравнение

$$z'_s = (1 + i\sigma_0)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \quad (18)$$

у которого нетрудно найти состояние равновесия, если выбрать σ_0 соответствующим образом.

Лемма 3. Дифференциальное уравнение (18) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия S_0 : $z(s) = \xi_0 \exp(i\nu)$, если $\sigma_0 = l_2/l_1 = 9a_3/a_2^2$. Здесь $\xi_0 = \sqrt{3}/|a_2|$, а ν — произвольная действительная постоянная. Это семейство состояний равновесия — глобальный аттрактор для решений дифференциального уравнения (18).

Доказательство леммы 3 достаточно стандартно. Кратко изложим его в одном из возможных вариантов.

Положим в уравнении (18)

$$z(s) = \rho(s) \exp(i\Theta(s)).$$

Тогда получаем систему

$$\rho'_s = \rho + l_1 \rho^3, \quad \Theta'_s = \sigma_0 + l_2 \rho^2. \quad (19)$$

Первое уравнение системы дифференциальных уравнений (19) имеет состояние равновесия $\rho = \xi_0 = \sqrt{-1/l_1} = \sqrt{3}/|a_2|$. Все решения этого уравнения с положительными начальными условиями стремятся к ξ_0 при $s \rightarrow \infty$. Отметим, что первое уравнение системы (19) — это уравнение Бернулли; его решения можно найти в явном виде и проверить таким образом последнее замечание.

Если теперь подставить $\rho = \xi_0$ в правую часть второго уравнения системы (19), то при $\sigma_0 = -l_2 \xi_0^2 = 9a_3/a_2^2$ получим, что $\Theta'_s = 0$ и, следовательно, $\Theta = \nu$, ν — произвольная действительная постоянная.

Перейдем теперь к вопросу о существовании ненулевого состояния равновесия у «полной» нормальной формы, т.е. дифференциального уравнения (12). Это приводит к вопросу о существовании решения у комплексного уравнения

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = 0. \quad (20)$$

Левую часть уравнения (20) в силу гладкости функции $\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ по совокупности переменных можно записать в виде

$$\varphi(z, \bar{z}, \varepsilon) = \psi(z, \bar{z}) + \varepsilon \chi_1(z, \bar{z}, \varepsilon) = z\psi_0(|z|^2) + \varepsilon z\chi_0(|z|^2, \varepsilon),$$

где

$$\psi_0(|z|^2) = (1 + i\sigma) + (l_1 + il_2)|z|^2, \quad \chi_0(|z|^2, \varepsilon)$$

— гладкая функция переменных $|z|^2, \varepsilon$. Напомним, что при определении функции ψ_0 коэффициент σ будет определен ниже, и $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon)$, где σ_0 было определено ранее при приближенных вычислениях с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ включительно. Теперь уравнение (20) приобретает вид

$$(1 + i\sigma)z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + \varepsilon z\chi_0(|z|^2, \varepsilon) = 0.$$

После сокращения на z ($z \neq 0$) получаем уравнение для определения $z = z(s)$ и $\sigma = \sigma(\varepsilon)$:

$$(1 + i\sigma) + (l_1 + il_2)|z|^2 = -\varepsilon\chi_0(|z|^2, \varepsilon). \quad (21)$$

Положим теперь $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon)$ и отметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (21) имеет решение

$$z = z(0) = \xi_0 \exp(i\nu), \quad \xi_0 = \sqrt{-\frac{1}{l_1}} = \frac{\sqrt{3}}{|a_2|}, \quad \sigma = \sigma_0 = \frac{l_2}{l_1}, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Решение уравнения (21) при малых ε можно искать в виде

$$z(\varepsilon) = \xi_0 \exp(i\nu)(1 + w(\varepsilon)), \quad \sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \Phi(\varepsilon), \quad (22)$$

где $w(\varepsilon), \Phi(\varepsilon)$ — действительные функции параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $w(0) = 0$, $\Phi(0) = 0$, ν — произвольная действительная постоянная. В результате подстановки равенств (22) в уравнение (21) после преобразований получим уравнение для определения $w(\varepsilon), \Phi(\varepsilon)$:

$$i\Phi - \left(1 + i\frac{l_2}{l_1}\right)(2w + w^2) = -\varepsilon\chi_2(w, \varepsilon).$$

Если теперь в этом уравнении разделить действительные и мнимые части, то получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} (2w + w^2) - \varepsilon\chi_3(w, \varepsilon) &= 0, \\ \frac{l_2}{l_1}(2w + w^2) - \Phi - \varepsilon\chi_4(w, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\chi_3(w, \varepsilon) = \operatorname{Re} \chi_2(w, \varepsilon)$, $\chi_4(w, \varepsilon) = \operatorname{Im} \chi_2(w, \varepsilon)$. Сразу отметим, что при $\varepsilon = 0$ система (23) имеет решение $w = \Phi = 0$. Кроме того, матрица Якоби левых частей системы (23), вычисленная при $\varepsilon = w = \Phi = 0$, имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2\frac{l_2}{l_1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det J = -2 \neq 0$, что гарантирует применимость теоремы о неявных функциях. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нормальная форма (12) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия*

$$S(\varepsilon) : \quad z(\varepsilon) = \xi(\varepsilon) \exp(i\nu), \quad \xi(\varepsilon) = \xi_0(1 + w(\varepsilon)),$$

где ν — произвольная действительная постоянная, если при этом $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, $\sigma(0) = \sigma_0 = 9a_3/a_2^2$. При этом одномерное инвариантное многообразие $S(\varepsilon)$ нормальной формы (12) — локальный аттрактор для решений дифференциального уравнения (12), которые находятся в малой окрестности $S(\varepsilon)$. Все состояния равновесия, принадлежащие $S(\varepsilon)$, устойчивы, но, естественно, не могут быть асимптотически устойчивыми.

Построения раздела 4 дают основание перенести результаты анализа нормальных форм (12) и (13) на краевую задачу (9)–(10), а также основную краевую задачу (1)–(2), если в ней параметр b выбран как $1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

5. Основное утверждение. Из результатов работ [6, 24] и методики работ [7–9, 22], где были рассмотрены иные, но во многом аналогичные вопросы, вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что семейству состояний равновесия $S(\varepsilon)$ нормальной формы (12) соответствует одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$ краевой задачи (9)–(10). Это многообразие образовано пространственно неоднородными состояниями равновесия*

$$v = w(y + \nu, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \cos(y + \nu) + 2\varepsilon\xi_0^2\gamma_2 \sin(2y + 2\nu) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (24)$$

где $\xi_0 = \sqrt{3}/|a_2|$ (см. анализ нормальной формы (13)), $\gamma_2 = a_2/6$, ν — произвольная действительная постоянная. Краевая задача $\ddot{E}(9)$ –(10) имеет одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$, сформированное решениями (24). Это многообразие является локальным аттрактором для решений краевой задачи (9)–(10), а заполняющие его состояния равновесия устойчивы в метрике фазового пространства решений краевой задачи (9)–(10), т.е. в норме пространства H^4 .

Подчеркнем, что формула (24) — это действительная форма решений, принадлежащих $V_1(\varepsilon)$.

Следствие 1. Пусть в краевой задаче (1)–(2) $b = 1 + \varepsilon$. Тогда однопараметрическому семейству (24) (одномерному инвариантному многообразию $V_1(\varepsilon)$) краевой задачи (9)–(10) соответствует двумерное инвариантное многообразие $V_2(c, \varepsilon)$ краевой задачи (1)–(2). Оно заполнено решениями, которые имеют структуру бегущих волн:

$$u(t, x, \nu, c, \varepsilon) = u(x + \omega(c, \varepsilon)t + \nu, c, \varepsilon) = c + w(x + \omega(c, \varepsilon)t + \nu, \varepsilon). \quad (25)$$

Если теперь воспользоваться записью второго слагаемого в правой части (25) в приближенном виде (24), то решение краевой задачи (1)–(2) можно записать иначе:

$$u_0(t, x, \nu, c, \varepsilon) = c + w_0(x + \omega_0(c)t + \nu, \varepsilon), \quad (26)$$

где теперь $\omega_0(c) = a(c)$ и

$$w_0(x + \omega_0(c)t + \nu, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \cos(x + \omega_0(c)t + \nu).$$

В формуле (26) выписана «главная» часть равенства (25).

Формула (26) будет далее использована при изучении вопросов, связанных с устойчивостью бегущих волн. Подчеркнем, что инвариантное многообразие $V_2(c, \varepsilon)$ — локальный аттрактор. Исследуем вопрос, связанный с устойчивостью решений (бегущих волн), принадлежащих $V_2(c, \varepsilon)$.

Теорема 2. Решения (25) неустойчивы в смысле определения Ляпунова, но устойчивы в смысле определения Перрона и Пуанкаре (см. соответствующие определения и утверждения в [11–13]).

Замечание 3. Проверка устойчивости или неустойчивости предполагает использование нормы фазового пространства, т.е. в нашем случае нормы пространства H^4 .

Доказательство. Пусть выбраны два решения краевой задачи (1)–(2), рассматриваемой при $b = 1 + \varepsilon$, имеющие структуру бегущих волн и принадлежащие $V_2(c, \varepsilon)$, т.е. рассмотрим две функции

$$u_1 = u_1(x + \omega(c_1, \varepsilon)t + \nu_1, c_1, \varepsilon), \quad u_2 = u_2(x + \omega(c_2, \varepsilon)t + \nu_2, c_2, \varepsilon),$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и при выбранном далее (фиксированном) ε рассмотрим соответствующие им «главные» части

$$u_{01}(t, x, \varepsilon) = c_1 + w_0(x + \omega_0(c_1)t + \nu_1, \varepsilon) + O(\varepsilon),$$

$$u_{02}(t, x, \varepsilon) = c_2 + w_0(x + \omega_0(c_2)t + \nu_2, \varepsilon) + O(\varepsilon),$$

где, как и ранее, $\omega_0(c_1) = a(c_1)$, $\omega_0(c_2) = a(c_2)$. Напомним, что

$$u_{01}(t, x, \varepsilon) = c_1 + 2\xi_0\varepsilon^{1/2} \cos(x + \omega_0(c_1)t + \nu_1),$$

$$u_{02}(t, x, \varepsilon) = c_2 + 2\xi_0\varepsilon^{1/2} \cos(x + \omega_0(c_2)t + \nu_2).$$

Далее, $\omega_{10} = \omega_0(c_1)$, $\omega_{20} = \omega_0(c_2)$.

Пусть разность $c_1 - c_2 = \varepsilon\delta_1 \neq 0$ нормирована с использованием бифуркационного параметра ε ; при доказательстве теоремы 2 его можно и следует считать фиксированным. Тогда получаем, что

$$\omega_0 = \omega_{10} - \omega_{20} = \varepsilon^{1/2}\delta_1\delta_2,$$

где $\delta_2 = 2g_2 + 3g_3(c_1 + c_2)$. В ситуации общего положения $\delta_2 \neq 0$ и, следовательно, $\omega_0 \neq 0$, если c_1, c_2 выбраны соответствующим образом.

Пусть $Q(t, x) = u_{01}(t, x, \varepsilon) - u_{02}(t, x, \varepsilon)$. Следовательно, $Q_\Delta(t) = \|Q\|_{H^4}$ — функция, которая зависит только от t , но не зависит от x . Учитывая, что

$$Q = Q(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\delta_1 + 2\varepsilon^{1/2}\xi_0 \left[\cos(x + \omega_{10}t + \nu_1) - \cos(x + \omega_{20}t + \nu_2) \right]$$

и проводя элементарные вычисления, получаем

$$\|Q\|_{H^0}^2 = \varepsilon(2\pi\delta_1^2 + \Lambda_0^2(t)),$$

где

$$\Lambda_0^2(t) = 16\xi_0^2\pi \sin^2(\delta_3 t + \nu_0), \quad \nu_0 = \frac{1}{2}(\nu_2 - \nu_1), \quad \delta_3 = \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\delta_1\delta_2 \neq 0.$$

Отсюда

$$\|Q\|_{H^4}^2 = \varepsilon(2\pi\delta_1^2 + 5\Lambda_0^2(t)).$$

В результате получаем

$$Q_\Delta^2(t) = 2\varepsilon\pi\left(\delta_1^2 + 40\xi_0^2 \sin^2(\delta_3 t + \nu_0)\right). \quad (27)$$

Стандартный анализ равенства (27) показывает, что справедливо утверждение.

Лемма 5. *Существует последовательности $\{t_n\}$, $\{t_k\}$, обладающие следующими свойствами:*

- (i) $t_n, t_k > 0$, если $n \geq n_0, k \geq k_0$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t_k) = 2\varepsilon\pi\delta_1^2$ ($\delta_1 \neq 0$);
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t_n) = Q_0 \geq 80\varepsilon\pi\xi_0^2 = \frac{240\varepsilon\pi}{a_2^2}$.

Из (ii), (iii) вытекают предельные соотношения

$$\varliminf_{t \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t) = 2\varepsilon\pi\delta_1^2 \xrightarrow{\delta_1 \rightarrow 0} 0; \quad (28)$$

$$\varlimsup_{t \rightarrow \infty} Q_\Delta^2(t) \geq \frac{240\varepsilon\pi}{a_2^2} > 0, \quad (29)$$

т.е. верхний предел больше величины, которая не зависит от δ_1 .

При доказательстве леммы 5 центральное место занимает анализ тригонометрических уравнений

$$\sin^2(\delta_3 t + \nu_0) = 0, \quad \sin^2(\delta_3 t + \nu_0) = 1,$$

т.е.

$$t_k = \frac{\pi k - \nu_0}{\delta_3}, \quad t_n = \frac{2\pi n + \pi - 2\nu_0}{2\delta_3}, \quad t_k \rightarrow \infty,$$

если $k \rightarrow \infty$, и $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, если $\delta_3 > 0$. Отметим, что без нарушения общности можно считать справедливым неравенство $\delta_3 > 0$. Если оказалось, что $\delta_2 > 0$, то выбираем $\delta_1 = c_1 - c_2 > 0$ ($c_1 > c_2$) и, напротив, если $\delta_2 < 0$, то выбираем $\delta_1 < 0$ ($c_1 < c_2$). Без нарушения общности можно считать, что $c_1 > c_2$ или, наоборот, $c_1 < c_2$. Особо подчеркнем, что верхний предел не зависит от выбора δ_1 , а нижний предел может быть достаточно мал, если, в свою очередь, δ_1 и ε малы.

Из определений и утверждений работ [11–13] вытекают следующие утверждения.

- (a) любое из решений краевой задачи (1)–(2) при $b = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, принадлежащее $V_2(c, \varepsilon)$, неустойчиво в смысле определений Ляпунова (см. верхний предел (29));
- (b) из равенств (28) вытекает, что любое решение, принадлежащее $V_2(c, \varepsilon)$, устойчиво в смысле определения устойчивости по Перрону;
- (c) эти решения устойчивы по Пуанкаре (орбитально устойчивы). Последнее утверждение вытекает из того, что периодические по эволюционной переменной решения, устойчивые по Перрону, устойчивы и по Пуанкаре (см. [11–13]).

Добавим, что все эти решения из двухпараметрического семейства, образующего двумерные инвариантные многообразия $V_2(c, \varepsilon)$, суть периодические функции t ; следовательно, из утверждений монографии [10] вытекает, что из их устойчивости по Пуанкаре (орбитальной устойчивости) вытекает устойчивость по Жуковскому.

Подчеркнем, что выше речь шла об устойчивости по Перрону, но не об асимптотической устойчивости по Перрону. Аналогичные замечания относятся к устойчивости по Пуанкаре и Жуковскому. $\square$

6. Заключение. В работе показано, что при $b = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$) у краевой задачи (1)–(2) существуют двумерные инвариантные многообразия $V_2(c, \varepsilon)$, заполненные при каждом из таких ε решениями, имеющими структуру периодических бегущих волн. Задача о существовании и свойствах бегущих волн была сведена к задаче о локальных бифуркациях в близком к критическому случае двукратного нулевого собственного значения спектра устойчивости однородного состояния равновесия изучаемой краевой задачи. Их периодичность по x естественна, так как рассматривается периодическая краевая задача. Вместе с этим эти решения периодические функции переменной t и их период по t зависит от выбора c , т.е. пространственно однородного состояния равновесия, в окрестности которого существуют решения, принадлежащие $V_2(c, \varepsilon)$. Можно отметить, что периоды найденных t -периодических решений $T = T(c, \varepsilon)$ в любом случае заполняют интервал бесконечной длины. Более того, можно привести варианты, когда $T(c, \varepsilon)$ — это любое положительное число. Так, например, будет, если $g_3 = 0$ и $g_2 \neq 0$. Естественно, нетрудно найти варианты, когда частота $\omega(c, \varepsilon) = 0$. В этом случае полученные решения не будут бегущими волнами, а будут ненулевыми состояниями равновесия рассматриваемой краевой задачи (1)–(2). Более того, как правило, можно указать значения параметров первоначального уравнения (1) (например, $g_3 = 0$), когда период построенных решений будет близок к нулю или, напротив, сколь угодно велик.

Двупараметрическое семейство решений, образующих $V_2(c, \varepsilon)$, если следовать терминологии, характерной для ряда разделов физики (см., например, [14]), могут быть проинтерпретированы как «пакет бегущих волн». Действительно, частоты решений краевой задачи, принадлежащих двумерному многообразию $V_2(c, \varepsilon)$, как правило, различны.

Вопрос о существовании двупараметрического семейства бегущих волн, устойчивость многообразий, образованных ими, был исследован на основе применения методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Отметим особо, что бегущие волны неустойчивы в смысле определения Ляпунова, хотя они принадлежат аттрактору. Для них характерна устойчивость по Перрону, Пуанкаре и Жуковскому. Последние три определения достаточно часто более содержательны при изучении устойчивости решений, отличных от состояний равновесия, например, бегущих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2002.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — 52, № 5. — С. 930–945.
8. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в периодической краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото—Сивашинского// Автомат. телемех. — 2017. — 11. — С. 20–33.
9. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана—Хиллиарда, Курамото—Сивашинского и их обобщениях// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 4. — С. 670–683.
10. Леонов Г. А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. — М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2006.
11. Сергеев И. Н. О непрерывности показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости систем, задающих повороты плоскости// Диффер. уравн. — 2018. — 54, № 6. — С. 842–856.
12. Сергеев И. Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 5. — С. 636–646.

13. *Сергеев И. Н.* Зависимость и независимость свойств перроновской и ляпуновской устойчивости от фазовой области системы// Диффер. уравн. — 2019. — 55, № 10. — С. 1338–1346.
14. *Скотт Э.* Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. — М.: Физматлит, 2007.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
16. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
17. *Barker B., Johnson M. A., Noble P., Rodrigues L. M., Zumbrun K.* Nonlinear modulational stability of periodic traveling-wave solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation// Phys. D. — 2013. — 258. — P. 11–46.
18. *Bradley R. M., Gelfand M. P.* One-dimensional conservative surface dynamics with broken parity: Arrested collapse versus coarsening// Phys. Lett. A. — 2015. — 379, № 3. — P. 199–205.
19. *Bradley R. M., Harper J. M. E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment// J. Vac. Sci. Techn. A. — 1988. — 6, № 4. — P. 2390–2395.
20. *Bradley R. M., Loew K. M.* Effect of dispersion on the nanoscale patterns produced by ion sputtering// Phys. Rev. E. — 2019. — 100. — 012801.
21. *Kulikov A. N.* Inertial invariant manifolds of a nonlinear semigroup of operators in a Hilbert space// J. Math. Sci. — 2024. — 283, № 3. — P. 402–411.
22. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Spatially inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto–Sivashinsky equation// J. Math. Sci. — 2016. — 219, № 2. — P. 173–183.
23. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
24. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
25. *Noble P., Rodrigues L. M.* Whitham’s modulation equations and stability of periodic wave solutions of the Korteweg–de Vries–Kuramoto–Sivashinsky equation// Indiana Univ. Math. J. — 2013. — 62, № 3. — P. 753–783.
26. *Sivashinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flows// Phys. D. — 1985. — 17. — P. 243–255.
27. *Temam R.* Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. — New York: Springer-Verlag, 1997.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета № 075-02-2025-1636).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatol'evich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль

(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

E-mail: supfro@yandex.ru