ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 11–24
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-11-24

УДК 517.955.8

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СИСТЕМЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДИФФУЗИИ И РАЗРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ РЕАКЦИИ

© 2025 г. **К. А. КОЦЮБИНСКИЙ**

Аннотация. Исследуется одномерная система уравнений реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии и разрывными функциями реакции и краевыми условиями Неймана. Показано, что сингулярное возмущение в уравнении для быстрой компоненты и наличие разрывов приводят к образованию контрастных структур с переходным слоем. Проведен анализ существования, единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения. Проведенный анализ позволяет обосновать корректность численных методов для подобных систем и предсказать поведение решения в областях резкого изменения, что важно для разработки эффективных вычислительных алгоритмов.

***Ключевые слова*:** система реакция-диффузия, сингулярно возмущенная система, уравнение второго порядка, задача Неймана, малый параметр, устойчивость по Ляпунову, асимптотический метод.

CONTRAST STRUCTURES IN A REACTION-DIFFUSION SYSTEM WITH MULTISCALE DIFFUSION COEFFICIENTS AND DISCONTINUOUS REACTION FUNCTIONS

© 2025 **K. A. KOTSYUBINSKY**

Abstract. In this paper, we examine a one-dimensional reaction-diffusion system with different-scale diffusion coefficients, discontinuous reaction functions, and Neumann boundary conditions. We demonstrate that a singular perturbation in the fast-component equation and reaction discontinuities lead to the formation of contrast structures with internal transition layers. Also, we analyze the existence, uniqueness, and asymptotic stability of stationary solutions. The obtained results provide theoretical justification for numerical methods applicable to such systems and enable prediction of behavior of solutions in domains of sharp gradients, which is crucial for developing efficient computational algorithms.

***Keywords and phrases*:** reaction-diffusion system, singularly perturbed system, second-order differential equation, Neumann problem, small parameter, Lyapunov stability, asymptotic method.

***AMS Subject Classification*:** 35F40

1. Введение. В данной работе исследуется система уравнений реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии в одномерном случае. Подобные системы возникают при моделировании процессов, включающих взаимодействие веществ с различными кинетическими свойствами, таких как химические реакции в пористых средах или задачи хранения углекислого газа. Искомыми величинами являются концентрации реагентов, один из которых («быстрый»)

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00069).

определяется преимущественно реакционными процессами, а другой («медленный») — диффузионными.

Ключевой особенностью рассматриваемой системы является наличие разрывов первого рода в функциях реакции, что соответствует скачкообразному изменению свойств среды. Это приводит к формированию контрастных структур, в которых решение имеет резкие градиенты в окрестности точки разрыва. Наряду с этим, сингулярное возмущение в уравнении для быстрой компоненты обусловливает образование переходного слоя, где концентрация вещества изменяется чрезвычайно быстро. Краевые условия Неймана соответствуют заданию потока вещества на границе, что характерно для многих прикладных задач.

Также в последнем разделе разобран частный случай постановки задачи, где демонстрируется способ проверки применимости результатов работы к этой постановке, а также построено асимптотическое приближение первого порядка.

Полученные аналитические результаты позволяют обосновать корректность численных методов, используемых для расчета подобных систем (см., например [9,12]). Асимптотический анализ дает возможность предсказать поведение решения в областях резкого изменения, что критически важно для построения оптимальных вычислительных алгоритмов — от выбора сетки до формирования начального приближения. Особое внимание уделяется существованию, единственности и устойчивости стационарного решения, а также анализу структуры переходного слоя. Результаты работы могут быть применены к задачам химической кинетики, экологического мониторинга и других областей, где существенную роль играют разномасштабные диффузионно-реакционные процессы.

2. Постановка задачи. Рассматривается вопрос существования стационарного решения параболической системы на отрезке $D := (-1, 1)$:

$$\begin{cases} N_f[u,v] := \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, & \\ & x \in D := (-1,1), t > 0, \\ N_g[u,v] := \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(-1,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0, & \\ u(x,0) = u_{init}(x), \quad v(x,0) = v_{init}(x), \quad x \in \overline{D} := [-1,1], & \end{cases} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, функции источников $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ определены в области $(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times \overline{D} \times \{\varepsilon \mid 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, где ε_0 — положительная константа, I_u, I_v — некоторые множества, явный вид которых будет уточнен ниже. Функции $f(u,v,x,\varepsilon)$ и $g(u,v,x,\varepsilon)$ терпят разрыв первого рода в точке $x = 0$, которая делит отрезок на две подобласти $D^{(-)} := (-1,0)$ и $D^{(+)} := (0,1)$:

$$\begin{gathered} f(u,v,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & x \in D^{(-)} := (-1,0), \\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & x \in D^{(+)} := (0,1), \end{cases} \\ g(u,v,x,\varepsilon) = \begin{cases} g^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & x \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ f^{(-)}(u,v,0,\varepsilon) \neq f^{(+)}(u,v,0,\varepsilon), \quad g^{(-)}(u,v,0,\varepsilon) \neq g^{(+)}(u,v,0,\varepsilon). \end{gathered} \tag{2}$$

Функции $f^{(\mp)}$ и $g^{(\mp)}$ достаточно гладкие в своих областях определения. Компонента u далее будет называться «быстрой», а v — «медленной». Из-за наличия разрыва в функциях f и g решение (1), если существует, будет не классическим и принадлежать пространству $C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D^{(-)}) \cap C^2_x(D^{(+)}) \cap C_t(t \geqslant 0)$, а вблизи точки $x = 0$ будет сформирован так называемый переходный слой между двумя устойчивыми положениями. Стационарное состояние системы (1), если существует, будет также являться решением эллиптической системы:

$$\begin{cases} L_f[u,v] := \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0, & \\ & x \in D, \\ L_g[u,v] := \dfrac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0, & \\ \dfrac{du}{dx}(-1) = \dfrac{du}{dx}(1) = 0, \quad \dfrac{dv}{dx}(-1) = \dfrac{dv}{dx}(1) = 0, & \end{cases} \tag{3}$$

Далее определим набор условий, при которых будут выполнены теоремы существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарного решения системы (1). Для этого сначала рассмотрим так называемую вырожденную систему, полученную из исходной стационарной системы (3) при $\varepsilon = 0$ отдельно в подобластях $D^{(\mp)}$:

$$\begin{cases} 0 = f^{(\mp)}(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, x, 0), & x \in D^{(\mp)}, \\ \dfrac{d^2v^{(\mp)}}{dx^2} = g^{(\mp)}(u^{(\mp)}, v^{(\mp)}, x, 0), & x \in D^{(\mp)}. \end{cases} \tag{4}$$

Потребуем выполнение следующего условия:

(A1) Алгебраические уравнения в задаче (4) имеют такие решения $u^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(v^{(\mp)}(x), x)$, что выполнены условия $f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0) > 0$ при $x \in D$. Также для задач

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^{(\mp)}}{dx^2} = g\big(\varphi^{(\mp)}(v^{(\mp)}, x), v^{(\mp)}, x, 0\big), & x \in D^{(\mp)}, \\ \dfrac{dv^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, & v^{(\mp)}(0) = \psi_v, \end{cases} \tag{5}$$

существует решение $\overline{v}^{(\mp)}(x,\psi_v)$ при произвольном граничном условии $\psi_v \in I_v$. Без ограничения общности будем считать, что функции $\overline{u}^{(\mp)}(x,\psi_v) := \varphi^{(\mp)}(\overline{v}^{(\mp)}(x,\psi_v), x)$ в точке разрыва упорядочены следующим образом: $\overline{u}^{(-)}(0,\psi_v) < \overline{u}^{(+)}(0,\psi_v)$.

Отметим, что условие существования решения краевой задачи в (A1) может быть заменено на условие Липшица для функции $g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0)$ (см. [6]) или существование верхнего и нижнего решений для этой задачи (см. [13]).

Введем обозначения $\overline{f}^{(\mp)}(x) = f^{(\mp)}(\overline{u}^{(\mp)}(x,\psi_v), \overline{v}^{(\mp)}(x,\psi_v), x, 0)$ и аналогичные для функции g и всех их производных. Также введем функции:

$$J(\psi_v) = \frac{d\overline{v}^{(-)}}{dx}(0,\psi_v) - \frac{d\overline{v}^{(+)}}{dx}(0,\psi_v),$$

$$H(\psi_u,\psi_v) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(-)}(\psi_v,0)}^{\psi_u} f^{(-)}(u,\psi_v,0,0)du} - \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(+)}(\psi_v,0)}^{\psi_u} f^{(+)}(u,\psi_v,0,0)du}.$$

(A2) Пусть существует такое значение параметра $\psi_{0v} \in I_v$, что выполнено равенство $J(\psi_{0v}) = 0$. Пусть для $\psi_u \in \big(\varphi^{(-)}(\psi_{0v},0), \varphi^{(+)}(\psi_{0v},0)\big)$ подкоренные выражения в функции $H(\psi_u,\psi_{0v})$ положительны, а также существует такое значение параметра ψ_{0u}, удовлетворяющее условию

$$\varphi^{(-)}(\overline{v}^{(-)}(0,\psi_{0v}),0) < \psi_{0u} < \varphi^{(+)}(\overline{v}^{(+)}(0,\psi_{0v}),0),$$

что выполнено равенство $H(\psi_{0u},\psi_{0v}) = 0$. Также пусть выполнены неравенства

$$\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial\psi_u} H(\psi_{0u},\psi_{0v}) > 0. \tag{6}$$

Отметим, что второе неравенство в (6) будет справедливо при выполнении в точке разрыва соотношения

$$f^{(-)}(\psi_{0u},\psi_{0v},0,0) > f^{(+)}(\psi_{0u},\psi_{0v},0,0).$$

(A3) Пусть выполнено неравенство

$$\overline{g}_v^{(\mp)}(x) - \left|\overline{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right| > -\lambda_0^{(\mp)}, \quad x \in D^{(\mp)},$$

где $\lambda_0^{(\mp)}$ — главные собственные значения задач

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Psi^{(\mp)}}{dx^2} + \lambda^{(\mp)}\Psi^{(\mp)} = 0, & x \in D, \\ \Psi^{(\mp)}(0) = 0, \quad \dfrac{d\Psi^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0. \end{cases}$$

3. Асимптотическое приближение решения стационарной задачи. Для доказательства существования решения используем асимптотический метод дифференциальных неравенств. Для этого построим формальную асимптотику в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \overline{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{u}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)}u(\xi)\right), \\ V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \overline{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\overline{v}_i^{(\mp)}(x) + Q_i^{(\mp)}v(\xi)\right) + \sum_{i=n+1}^{n+2} \varepsilon^i Q_i^{(\mp)}v(\xi), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\xi = x/\varepsilon$ — растянутая переменная, функции с верхней чертой будут описывать поведение решения внутри подобластей $D^{(\mp)}$, а $Q_i^{(\mp)}u$ и $Q_i^{(\mp)}v$ — вблизи переходного слоя. Отметим, что в формальной асимптотике отсутствуют функции пограничного слоя, так как принципиального влияния на ход доказательства они не окажут и были разобраны в других работах (см., например, [4] и ссылки в этой работе). Функции будем строить отдельно в подобластях $D^{(\mp)}$, а затем сшивать согласно условию непрерывности:

$$\begin{aligned} U_n^{(-)}(0,\varepsilon) &= U_n^{(+)}(0,\varepsilon) = \psi_u := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \psi_{iu}, \\ V_n^{(-)}(0,\varepsilon) &= V_n^{(+)}(0,\varepsilon) = \psi_v := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \psi_{iv}, \end{aligned} \tag{8}$$

где величины $\psi_i u$ и $\psi_i v$ будут определены позднее. Также сшивается первая производная формальной асимптотики:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}U_n^{(-)}(0,\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x}U_n^{(+)}(0,\varepsilon) + O(\varepsilon^n), \\ \frac{\partial}{\partial x}V_n^{(-)}(0,\varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x}V_n^{(+)}(0,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \tag{9}$$

Потребуем также выполнения стандартного условия убывания на бесконечности функций переходного слоя вида

$$Q_i^{(\mp)}u(\mp\infty) = Q_i^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0.$$

Прежде чем переходить к построению формальной асимптотики, перепишем функции источников в задаче (3) согласно методу А. Б. Васильевой, например, для функции f:

$$\begin{aligned} &f^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) = \overline{f}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}f(\xi,\varepsilon), \\ &\overline{f}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = f^{(\mp)}\big(\overline{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon), \overline{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon), x, \varepsilon\big), \\ &Q^{(\mp)}f(\xi,\varepsilon) = f^{(\mp)}\Big(\overline{u}^{(\mp)}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\xi,\varepsilon), \overline{v}^{(\mp)}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi\Big) - \\ &\qquad\qquad - f^{(\mp)}\Big(\overline{u}^{(\mp)}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \overline{v}^{(\mp)}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi\Big), \end{aligned} \tag{10}$$

и для функции g будем использовать аналогичное представление. Строить функции разложения (7) будем итерационно в следующем порядке:

$$Q_0^{(\mp)}v \to \overline{u}_0^{(\mp)} \to \overline{v}_0^{(\mp)} \to Q_0^{(\mp)}u \to Q_1^{(\mp)}v \to \ldots.$$

Для этого запустим процесс с нулевого порядка переходного слоя медленной компоненты, где в задачу (3) подставим разложения (7) и (10) и выделим соответствующую компоненту при ε^0:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Q_0^{(\mp)} v}{d\xi^2} = 0, \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)} v(\mp\infty) = \dfrac{dQ_0^{(\mp)} v}{d\xi}(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Задача, очевидно, имеет только тривиальное решение, т.е. $Q_0^{(\mp)} v(\xi) = 0$.

Далее запишем вырожденную задачу:

$$\begin{cases} 0 = f\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(x), \overline{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0\big), & x \in D^{(\mp)}, \\ \dfrac{d^2 \overline{v}_0^{(\mp)}}{dx^2} = g\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(x), \overline{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0\big), & x \in D^{(\mp)}, \\ \dfrac{d\overline{v}_0^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \quad \overline{v}_0^{(\mp)}(0) = \psi_v. \end{cases} \tag{12}$$

В силу условия (A1) существует решение $\overline{v}_0^{(\mp)}(x, \psi_v)$ и $\overline{u}_0^{(\mp)}(x, \psi_v) = \varphi(\overline{v}_0^{(\mp)}(x, \psi_v), x)$. В дальнейших выкладках зависимость от параметра ψ_v данного решения и всех прочих функций будем для краткости опускать, если это не вызывает недоразумения. Также введем обозначения $\overline{f}^{(\mp)}(x) = f^{(\mp)}\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(x), \overline{v}_0^{(\mp)}(x), x, 0\big)$ и аналогичные для функции g и всех их производных.

Задача для $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Q_0^{(\mp)} u}{d\xi^2} = f^{(\mp)}\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u, \overline{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0\big), \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)} u(\mp\infty) = 0, \quad Q_0^{(\mp)} u(0) = \psi_u - \overline{u}_0^{(\mp)}(0). \end{cases} \tag{13}$$

Если ввести функции

$$\widetilde{u}(\xi) := \overline{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \quad \Phi^{(\mp)}(\xi) := \frac{d\widetilde{u}^{(\mp)}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} Q_0^{(\mp)} u(\xi),$$

то можно понизить порядок уравнения:

$$\begin{cases} \Phi^{(\mp)}(\widetilde{u}) := \dfrac{d}{d\xi} Q_0^{(\mp)} u(\xi) = \sqrt{2 \displaystyle\int\limits_{\overline{u}_0^{(\mp)}(0)}^{\widetilde{u}} f^{(\mp)}\big(u, \overline{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0\big)\, du}, \\ Q_0^{(\mp)} u(0) = \psi_u - \overline{u}_0^{(\mp)}(0), \end{cases} \tag{14}$$

В силу условия (A2) подкоренное выражение положительно, а значит, решение задачи Коши (14) существует. Формально функции $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ зависят от параметра ψ_u, но для краткости будем его опускать. Также согласно [1] для функции $Q_0^{(\mp)} u(\xi)$ и всех ее производных выполнены экспоненциальные оценки вида

$$\left| Q_0^{(\mp)} u(\xi) \right| < C \exp(-\varkappa \xi), \quad C > 0, \quad \varkappa > 0. \tag{15}$$

Также введем обозначения

$$\widetilde{f}^{(\mp)}(\xi) = f^{(\mp)}\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \overline{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0\big)$$

и аналогичные для функции g и всех их производных.

Таким образом, построен нулевой порядок разложения (7). В первом порядке функция переходного слоя для медленной компоненты определяется из задачи, аналогичной (11), откуда также следует $Q_1^{(\mp)}v(\xi) = 0$. Первая отличная от нуля функция переходного слоя медленной компоненты появится во втором порядке; она определяется из задачи

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 Q_2^{(\mp)} v}{d^2\xi} = \widetilde{g}^{(\mp)}(\xi) - \overline{g}^{(\mp)}(0), \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ &Q_2^{(\mp)} v(\mp\infty) = \frac{dQ_2^{(\mp)} v}{d\xi}(\mp\infty) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

решение которой имеет вид

$$Q_2^{(\mp)} v(\xi) = \int\limits_{\mp\infty}^{\xi} d\xi_1 \int\limits_{\mp\infty}^{\xi_1} \Big(\widetilde{g}^{(\mp)}(\xi_2) - \overline{g}^{(\mp)}(0)\Big)\, d\xi_2. \tag{17}$$

Задачи для последующих порядков запишем в общем виде при $k = 1, 2, \ldots, n$. Регулярная часть определяется из задачи

$$\begin{aligned} &0 = \overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{u}_k^{(\mp)} + \overline{f}_v^{(\mp)}(x)\overline{v}_k^{(\mp)} + F_k^{(\mp)}(x), \quad x \in D, \\ &\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{v}_k^{(\mp)}}{dx^2} = \overline{g}_u^{(\mp)}(x)\overline{u}_k^{(\mp)} + \overline{g}_v^{(\mp)}(x)\overline{v}_k^{(\mp)} + G_k^{(\mp)}(x), \quad x \in D, \\ \overline{v}_k^{(\mp)}(0) = -Q_k^{(\mp)} v(0), \quad \dfrac{d\overline{v}_k^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

где $F_k^{(\mp)}(x)$ и $G_k^{(\mp)}(x)$ — известные функции. Определим быструю компоненту через медленную в алгебраическом уравнении и подставим в краевую задачу:

$$\begin{aligned} &\overline{u}_k^{(\mp)}(x) = -\frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{v}_k^{(\mp)} - \frac{F_k^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}, \quad x \in D, \\ &\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{v}_k^{(\mp)}}{dx^2} = \left(\overline{g}_v^{(\mp)}(x) - \dfrac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right)\overline{v}_k^{(\mp)} + \overline{G}_k^{(\mp)}(x), \quad x \in D, \\ \overline{v}_k^{(\mp)}(0) = -Q_k^{(\mp)} v(0), \quad \dfrac{d\overline{v}_k^{(\mp)}}{dx}(\mp 1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

Множитель перед $\overline{v}_k^{(\mp)}$ в краевой задаче (19) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{g}_v^{(\mp)}(x) - \frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x) = \overline{g}_v^{(\mp)}(x) + \overline{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\overline{g}_u^{(\mp)}(x) \geqslant \overline{g}_v^{(\mp)}(x) - \left|\overline{\varphi}_v^{(\mp)}(x)\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right| > -\lambda_0^{(\mp)}, \tag{20}$$

где учтено условие (A3). Таким образом, выполнены все условия существования и единственности решения $\overline{v}_k^{(\mp)}(x)$ задачи (19) (см., например, [10], [11, теорема 3]). Из условия (A1) следует, что $\overline{f}_u^{(\mp)}(x) > 0$, а значит, существует и $\overline{u}_k^{(\mp)}(x)$.

Задача для переходного слоя быстрой компоненты:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Q_k^{(\mp)} u}{d\xi^2} = Q_k^{(\mp)} u + Q_k^{(\mp)} f(\xi), \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_k^{(\mp)} u(\mp\infty) = 0, \quad Q_k^{(\mp)} u(0) = -\overline{u}_k^{(\mp)}(0), \end{cases} \tag{21}$$

где $Q_k^{(\mp)} f(\xi)$ — функция, найденная на предыдущих шагах. Решение данной задачи можно записать в стандартном виде:

$$Q_k^{(\mp)} u(\xi) = -\frac{\overline{u}_k^{(\mp)}(0)}{\Phi^{(\mp)}(0)}\Phi^{(\mp)}(\xi) + \Phi^{(\mp)}(\xi)\int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi_1}{\big(\Phi^{(\mp)}(\xi_1)\big)^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\xi_1} \Phi^{(\mp)}(\xi_2) Q_k^{(\mp)} f(\xi_2) d\xi_2. \tag{22}$$

Определение функций порядка ε^{k+1} в разложении (7) начинается с решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Q_{k+1}^{(\mp)} v}{d^2 \xi} = Q_{k+1}^{(\mp)} g(\xi), \quad \xi \in (0, \mp\infty), \\ Q_{k+1}^{(\mp)} v(\mp\infty) = \dfrac{d Q_{k+1}^{(\mp)} v}{d\xi}(\mp\infty) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где функция $Q_{k+1}^{(\mp)} g(\xi)$ определена на предыдущих шагах. Решение можно получить повторным интегрированием аналогично второму порядку.

Далее необходимо определить коэффициенты ψ_{iu} и ψ_{iv} представления (8). Условие непрерывного сшивания (8), очевидно, выполнено за счет граничных условий при $x = 0$ во всех разобранных выше задачах. Условие сшивания производных (9) для быстрой компоненты перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \left(\frac{d\overline{u}_{i-1}^{(-)}}{dx}(0, \psi_v) - \frac{d\overline{u}_{i-1}^{(+)}}{dx}(0, \psi_v) + \frac{\partial Q_i^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_i^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) = \\ &= H(\psi_u, \psi_v) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i H_i(\psi_u, \psi_v) = H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \left(\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{iu} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) \psi_{iv} + \overline{H}_i\big(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \ldots, \psi_{i-1\,u}, \psi_{i-1\,v}\big) \right), \end{aligned} \tag{24}$$

где введены обозначения:

$$H(\psi_u, \psi_v) = \frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v), \tag{25}$$

а функции H_i и $\overline{H}_i$ содержат все остальные слагаемые в выражении при ε^i. Проведем аналогичные выкладки для медленной компоненты:

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{\partial \overline{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0, \psi_v) - \frac{\partial \overline{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0, \psi_v) \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n+1} \varepsilon^{i-1} \left(\frac{d\overline{v}_{i-1}^{(-)}}{dx}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{d\overline{v}_{i-1}^{(+)}}{dx}(0, \psi_u, \psi_v) + \frac{\partial Q_i^{(-)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) - \frac{\partial Q_i^{(+)} v}{\partial \xi}(0, \psi_u, \psi_v) \right) = \\ &= J(\psi_v) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i J_i(\psi_u, \psi_v) = J(\psi_{0v}) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \psi_{iv} + \overline{J}_i(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \ldots, \psi_{i-1\,u}, \psi_{i-1\,v}) \right), \end{aligned} \tag{26}$$

где функции J_i и $\overline{J}_i$ также содержат все остальные слагаемые в выражении при ε^i, а $J(\psi_v)$ определяется выражением

$$J(\psi_v) = \frac{\partial \overline{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0, \psi_v) - \frac{\partial \overline{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0, \psi_v). \tag{27}$$

Таким образом, формируется система конечных уравнений для нулевого порядка:

$$\begin{cases} H(\psi_{0u}, \psi_{0v}) = 0, \\ J(\psi_{0v}) = 0 \end{cases} \tag{28}$$

и для последующих порядков системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u}, \psi_{0v})\psi_{ku} + \dfrac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u}, \psi_{0v})\psi_{kv} = -\overline{H}_k(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \ldots, \psi_{i-1\,u}, \psi_{i-1\,v}), \\ \dfrac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v})\psi_{kv} = -\overline{J}_k(\psi_{0u}, \psi_{0v}, \ldots, \psi_{i-1\,u}, \psi_{i-1\,v}), \end{cases} \tag{29}$$

Существование решений систем (28) и (29) обеспечивается условием (A2). Таким образом можно построить все функции в разложении (7) и получить все коэффициенты в разложении (8).

4. Существование решения стационарной задачи. Для доказательства существования решения задачи (3) будем строить верхнее и нижнее решение как модификацию построенной формальной асимптотики. Для этого введем следующее определение.

Определение 1. Нижним и верхним решениями задачи (3), соответственно, называются пары функций $(\alpha_u(x,\varepsilon), \beta_u(x,\varepsilon))$ и $(\alpha_v(x,\varepsilon), \beta_v(x,\varepsilon))$, принадлежащие пространству $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D^{(-)}) \cap C^2(D^{(+)})$ и удовлетворяющие следующим условиям при достаточно малых $\varepsilon > 0$:

(B1) $\alpha_u(x,\varepsilon) \leqslant \beta_u(x,\varepsilon)$ при $x \in \overline{D}$;

(B2) $L_f[\alpha_u, v] \geqslant 0 \geqslant L_f[\beta_u, v]$ при $x \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$ и $v \in [\alpha_v(x,\varepsilon), \beta_v(x,\varepsilon)]$;

(B3) $\dfrac{\partial \alpha_u^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) \leqslant \dfrac{\partial \alpha_u^{(+)}}{\partial x}(0,\varepsilon)$, $\dfrac{\partial \beta_u^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) \geqslant \dfrac{\partial \beta_u^{(+)}}{\partial x}(0,\varepsilon)$;

(B4) $\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial x}(-1,\varepsilon) \geqslant 0 \geqslant \dfrac{\partial \beta_u}{\partial x}(-1,\varepsilon)$, $\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial x}(1,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \dfrac{\partial \beta_u}{\partial x}(1,\varepsilon)$

и аналогичным для пары функций $(\alpha_v(x,\varepsilon), \beta_v(x,\varepsilon))$.

Выберем в качестве верхнего решения

$$\begin{aligned} \overline{U}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right), \\ \overline{V}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x). \end{aligned} \tag{30}$$

Нижнее решение строится в аналогичном виде.

Запишем операторное неравенство из (B2) для быстрой компоненты:

$$\begin{aligned} L_f\left[\overline{U}_n^{(\mp)}, v\right] &= \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right) - f^{(\mp)}\left(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon \right) = \\ &= L_f\left[U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)} \right] + \varepsilon^{n+2} \frac{d^2}{dx^2}\left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right) - \\ &\quad - \left(f^{(\mp)}\left(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon \right) - f^{(\mp)}\left(U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)}, x, \varepsilon \right) \right). \end{aligned}$$

Слагаемое $L_f\big[U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)}\big]$ по построению можно оценить как $O(\varepsilon^{n+1})$. Произвольные функции $u \in \big[\alpha_u(x,\varepsilon), \beta_u(x,\varepsilon)\big]$ и $v \in \big[\alpha_v(x,\varepsilon), \beta_v(x,\varepsilon)\big]$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \theta_u^{(\mp)}(x) \left(\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) \right), \\ v(x) &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \theta_v^{(\mp)}(x) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x), \end{aligned} \tag{31}$$

где $\theta_u^{(\mp)}(x) \in [-1,1]$ и $\theta_v^{(\mp)}(x) \in [-1,1]$ при $x \in [-1,1]$ — некоторые функции, которые неявным образом зависят от u и v. Раскладывая функции $f^{(\mp)}\big(\overline{U}_n^{(\mp)}, v, x, \varepsilon\big)$ и $f^{(\mp)}\big(U_n^{(\mp)}, V_n^{(\mp)}, x, \varepsilon\big)$ по формуле Тейлора с центром в точке $\big(\overline{u}_0^{(\mp)}(0) + Q_0^{(\mp)} u(\xi), \overline{v}_0^{(\mp)}(0), 0, 0\big)$, получим выражение

$$\begin{aligned} L_f\left[\overline{U}_n^{(\mp)}, v\right] &= -\varepsilon^n \left[\overline{f}_u^{(\mp)}(x) \overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) + \overline{f}_v^{(\mp)}(x) \theta_v^{(\mp)}(x) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x) \right] + \\ &+ \varepsilon^n \left[\frac{d^2}{d\xi^2} Q_\beta^{(\mp)} u - \widetilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) Q_\beta^{(\mp)} u(\xi) - \left(\widetilde{f}_u^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_u^{(\mp)}(0) \right) \overline{u}_\beta^{(\mp)}(0) - \right. \\ &\left. - \left(\widetilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_v^{(\mp)}(0) \right) \theta_v^{(\mp)}(0) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(0) \right] + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \tag{32}$$

Для медленной компоненты аналогичными рассуждениями можно получить

$$L_g\left[u,\overline{V}_n^{(\mp)}\right]=\varepsilon^n\Big[\frac{d^2}{dx^2}\overline{v}_\beta^{(\mp)}-\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\theta_u^{(\mp)}(x)\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)-\overline{g}_v^{(\mp)}(x)\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)\Big]+O(\varepsilon^{n+1}). \tag{33}$$

Определим добавочные функции $\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)$ и $\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)$ как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned}&-\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)+\left|\overline{f}_v^{(\mp)}(x)\right|\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)=-A,\\ &\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\overline{v}_\beta^{(\mp)}+\left|\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right|\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)-\overline{g}_v^{(\mp)}(x)\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)=-B, \quad x\in D,\\ \overline{v}_\beta^{(\mp)}(0)=\psi_{\beta v}, \quad \dfrac{d\overline{v}_\beta^{(\mp)}}{dx}(\mp1)=0,\end{cases}\end{aligned} \tag{34}$$

где A, B, $\psi_{\beta v}$ — произвольные положительные константы. Выражая из алгебраического уравнения быструю компоненту и подставляя в краевую задачу, получаем:

$$\begin{aligned}&\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)=\frac{|\overline{f}_v^{(\mp)}(x)|}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)+\frac{A}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}, \quad x\in\overline{D},\\ &\begin{cases}\dfrac{d^2}{dx^2}\overline{v}_\beta^{(\mp)}=\left(\overline{g}_v^{(\mp)}(x)-\dfrac{|\overline{f}_v^{(\mp)}(x)|}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\left|\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right|\right)\overline{v}_\beta^{(\mp)}-\left(\dfrac{|\overline{g}_u^{(\mp)}(x)|}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}A+B\right), \quad x\in D,\\ \overline{v}_\beta^{(\mp)}(0)=\psi_{\beta v}, \quad \dfrac{d\overline{v}_\beta^{(\mp)}}{dx}(\mp1)=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{35}$$

Из условия (A3) и оценки $|\theta_u^{(\mp)}(x)|\leqslant 1$ следует неравенство

$$\overline{g}_v^{(\mp)}(x)-\frac{\left|\overline{f}_v^{(\mp)}(x)\right|}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\left|\overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right|>-\lambda_0^{(\mp)}. \tag{36}$$

В силу (A1) и положительности коэффициентов A и B неоднородность в задаче (35) для компоненты $\overline{v}_\beta$ отрицательна. Таким образом, задача для $\overline{v}_\beta^{(\mp)}$ в (35) имеет положительное решение (см., например, [10], [11, теорема 3]), т.е. $\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)>0$ при $x\in\overline{D}$. Из условия (A1), первого уравнения (35) и оценки $\overline{v}_\beta^{(\mp)}(x)>0$ следует неравенство $\overline{u}_\beta^{(\mp)}(x)>0$.

Функцию $Q_\beta^{(\mp)}u(\xi)$ определим как решение задачи

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{d^2\xi}Q_\beta^{(\mp)}u=\widetilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)Q_\beta^{(\mp)}u(\xi)+Q_\beta^{(\mp)}f(\xi), \quad \xi\in(0,\mp\infty),\\ Q_\beta^{(\mp)}u(0)=\psi_{\beta u}-\overline{u}_\beta^{(\mp)}(0), \quad Q_\beta^{(\mp)}u(\mp\infty)=0,\end{cases} \tag{37}$$

где

$$Q_\beta^{(\mp)}f(\xi) = \Big(\widetilde{f}_u^{(\mp)}(\xi)-\overline{f}_u^{(\mp)}(0)\Big)\overline{u}_\beta^{(\mp)}(0) - \left|\widetilde{f}_v^{(\mp)}(\xi)-\overline{f}_v^{(\mp)}(0)\right|\overline{v}_\beta^{(\mp)}(0) - C_u\exp\big(-\varkappa_u|\xi|\big), \tag{38}$$

$C_u>0$ и $\varkappa_u>0$ — некоторые коэффициенты, а $\psi_{\beta u}$ будет определен далее. Вследствие экспоненциальных оценок (15) и явного вида функций $\widetilde{f}^{(\mp)}(\xi)$ и $\overline{f}^{(\mp)}(0)$ и всех их производных, первые два слагаемых в выражении для $Q_\beta^{(\mp)}f(\xi)$ также являются функцией вида (15); следовательно, при выборе достаточно больших $C_u>0$ и $\varkappa_u>0$ можно добиться выполнения неравенства $Q_\beta^{(\mp)}f(\xi)<0$. Решение задачи (37) записывается в стандартном виде:

$$Q_\beta^{(\mp)}u(\xi)=\frac{\psi_{\beta u}-\overline{u}_\beta^{(\mp)}(0)}{\Phi^{(\mp)}(0)}\Phi^{(\mp)}(\xi)+\Phi^{(\mp)}(\xi)\int\limits_0^\xi\frac{d\xi_1}{\big(\Phi^{(\mp)}(\xi_1)\big)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\xi_1}\Phi^{(\mp)}(\xi_2)Q_\beta^{(\mp)}f(\xi_2)d\xi_2. \tag{39}$$

В силу неравенств $Q_\beta^{(\mp)}f(\xi) < 0$ и $\Phi^{(\mp)}(\xi) > 0$ и при достаточно большом $\psi_{\beta u} > \overline{u}_\beta^{(\mp)}(0)$ функция $Q_\beta^{(\mp)}u(\xi)$ будет положительна.

Условие (B3) для верхнего решения медленной компоненты можно переписать в следующем виде:

$$0 \leqslant \varepsilon^n M_1 = \frac{\partial \overline{V}_n^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) - \frac{\partial \overline{V}_n^{(+)}}{\partial x}(0,\varepsilon) = \varepsilon^n \left(\frac{d\overline{v}_\beta^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\overline{v}_\beta^{(+)}}{dx}(0) \right) + O(\varepsilon^{n+1}) =$$
$$= \varepsilon^n \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v})\psi_{\beta v} + \overline{J}_\beta \right) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (40)$$

где $\overline{J}_\beta$ — известная величина, а $M_1 > |\overline{J}_\beta| > 0$ — произвольная достаточно большая константа. Аналогично, для быстрой компоненты имеем:

$$0 \leqslant \varepsilon^{n-1} M_2 = \frac{\partial \overline{U}_n^{(-)}}{\partial x}(0,\varepsilon) - \frac{\partial \overline{U}_n^{(+)}}{\partial x}(0,\varepsilon) = \varepsilon^{n-1} \left(\frac{d}{d\xi} Q_\beta^{(-)}u(0) - \frac{d}{d\xi} Q_\beta^{(+)}u(0) \right) + O(\varepsilon^n) =$$
$$= \varepsilon^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u},\psi_{0v})\psi_{\beta u} + \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u},\psi_{0v})\psi_{\beta v} + \overline{H}_\beta \right) + O(\varepsilon^n), \quad (41)$$

где $\overline{H}_\beta$ — известная величина и

$$M_2 > |\overline{H}_\beta| + \left| \frac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u},\psi_{0v}) \big(M_1 - \overline{J}_\beta \big) \left(\frac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v}) \right)^{-1} \right| > 0.$$

При выполнении условия (A2) и выборе коэффициентов M_1 и M_2 достаточно большими система линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \psi_u} H(\psi_{0u},\psi_{0v})\psi_{\beta u} + \dfrac{\partial}{\partial \psi_v} H(\psi_{0u},\psi_{0v})\psi_{\beta v} = M_2 - \overline{H}_\beta, \\ \dfrac{d}{d\psi_v} J(\psi_{0v})\psi_{\beta v} = M_1 - \overline{J}_\beta \end{cases} \quad (42)$$

будет иметь решение $\psi_{\beta u} > \overline{u}_\beta^{(\mp)}(0) > 0$ и $\psi_{\beta v} > 0$. Таким образом, условие (B3) будет выполнено.

С учетом решения задачи (35) и функции (39) имеем:

$$\begin{aligned} L_f \left[\overline{U}_n^{(\mp)}, v \right] &= -\varepsilon^n A - \varepsilon^n \left(|\overline{f}_v^{(\mp)}(x)| + \theta_v(x) \overline{f}_v^{(\mp)}(x) \right) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x) - \\ &\qquad - \varepsilon^n C_u \exp(-\varkappa_u |\xi|) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0, \\ L_g \left[u, \overline{V}_n^{(\mp)} \right] &= -\varepsilon^n B - \varepsilon^n \left(|\overline{g}_u^{(\mp)}(x)| + \theta_u(x) \overline{g}_u^{(\mp)}(x) \right) \overline{u}_\beta^{(\mp)}(x) - \\ &\quad - \varepsilon^n \left(\left| \widetilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_v^{(\mp)}(0) \right| + \theta_v(x) \left(\widetilde{f}_v^{(\mp)}(\xi) - \overline{f}_v^{(\mp)}(0) \right) \right) \overline{v}_\beta^{(\mp)}(x) + O(\varepsilon^{n+1}) < 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, условие (B2) также выполнено. Условие на границе (B4) проверяется аналогично другим работам (см., например, [4] и ссылки в этой работе). Из способа построения верхнего и нижнего решения, очевидно, следует их упорядоченность (B1), а также следующая теорема (см. [7, 8, 13]).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (A1)—(A3). *При достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $u_s(x,\varepsilon)$, $v_s(x,\varepsilon)$ *задачи* (3) *с переходным слоем около точки* $x = 0$, *для которого построенные функции* $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$ *являются равномерным асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$ *при* $x \in \overline{D}$.

5. Асимптотическая устойчивость стационарного решения. Доказательство асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (1) проводится по схеме, предложенной в [2] (см. [3] и ссылки в этой работе).

Определение 2. Нижним и верхним решениями задачи (1) соответственно называются пары функций $(\alpha_u(x,t,\varepsilon), \beta_u(x,t,\varepsilon))$ и $(\alpha_v(x,t,\varepsilon), \beta_v(x,t,\varepsilon))$, принадлежащие пространству $C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D^{(-)}) \cap C^2_x(D^{(+)}) \cap C_t(t \geqslant 0)$ и удовлетворяющие следующим условиям при достаточно малых $\varepsilon > 0$:

(C1) $\alpha_u(x,t,\varepsilon) \leqslant \beta_u(x,t,\varepsilon)$ при $x \in \overline{D}$ и $t \geqslant 0$;

(C2) $N_f[\alpha_u, v] \geqslant 0 \geqslant N_f[\beta_u, v]$ при $x \in D^{(-)} \cup D^{(+)}$, $v \in [\alpha_v(x,t,\varepsilon), \beta_v(x,t,\varepsilon)]$ и $t > 0$;

(C3) $\dfrac{\partial \alpha_u^{(-)}}{\partial x}(0,t,\varepsilon) \leqslant \dfrac{\partial \alpha_u^{(+)}}{\partial x}(0,t,\varepsilon)$, $\dfrac{\partial \beta_u^{(-)}}{\partial x}(0,t,\varepsilon) \geqslant \dfrac{\partial \beta_u^{(+)}}{\partial x}(0,t,\varepsilon)$ при $t \geqslant 0$;

(C4) $\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon) \geqslant 0 \geqslant \dfrac{\partial \beta_u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)$, $\dfrac{\partial \alpha_u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \dfrac{\partial \beta_u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)$ при $t \geqslant 0$,

и аналогичным для пары функций $(\alpha_v(x,t,\varepsilon), \beta_v(x,t,\varepsilon))$.

Построим эти функции следующим образом:

$$\begin{aligned} u_\beta(x,t,\varepsilon) &= u_s(x,\varepsilon) + \left(\overline{U}_1^{(\mp)}(x,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)\right) e^{-\lambda t}, \\ v_\beta(x,t,\varepsilon) &= v_s(x,\varepsilon) + \left(\overline{V}_1^{(\mp)}(x,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)\right) e^{-\lambda t}, \\ u_\alpha(x,t,\varepsilon) &= u_s(x,\varepsilon) + \left(\underline{U}_1^{(\mp)}(x,\varepsilon) - u_s(x,\varepsilon)\right) e^{-\lambda t}, \\ v_\alpha(x,t,\varepsilon) &= v_s(x,\varepsilon) + \left(\underline{V}_1^{(\mp)}(x,\varepsilon) - v_s(x,\varepsilon)\right) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь $u_s(x,\varepsilon)$ и $v_s(x,\varepsilon)$ — решения задачи (3), $\lambda > 0$ — некоторая постоянная. Проверка соответствующих условий определения нижнего и верхнего решений задачи (1) проводится стандартным образом (см. [5]). Из структуры верхнего и нижнего решения для нестационарной задачи и локальной единственности решения задачи (3) (см., например, [13]) следует основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (A1)–(A3). *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *стационарное решение* $(u_s(x,\varepsilon), v_s(x,\varepsilon))$ *задачи* (1) *существует, локально единственно и асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем область его притяжения не менее* $[\underline{U}_1, \overline{U}_1] \times [\underline{V}_1, \overline{V}_1]$.

6. Пример. Рассмотрим частный вариант постановки задачи с функциями f и g следующего вида:

$$f(u,v,x) = \begin{cases} u - \varphi(x), & x \in D^{(-)}, \\ u, & x \in D^{(+)}, \end{cases} \qquad g(u,v,x) = \begin{cases} v - k(x)u, & x \in D^{(-)}, \\ v, & x \in D^{(+)}. \end{cases} \tag{45}$$

Задача для регулярной части нулевого порядка будет сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{cases} \overline{u}_0^{(-)}(x) - \varphi(x), & x \in D^{(-)}, \\ \overline{u}_0^{(+)}(x), & x \in D^{(+)}, \end{cases} \\ \frac{d^2 \overline{v}_0^{(\mp)}}{dx^2} &= \begin{cases} \overline{v}_0^{(-)}(x) - k(x)\overline{u}_0^{(-)}(x), & x \in D^{(-)}, \\ \overline{v}_0^{(+)}(x), & x \in D^{(+)}. \end{cases} \end{aligned} \tag{46}$$

Так как главное собственное значение задачи в условии (A3) положительно, то приходим к неравенству

$$\overline{g}_v^{(\mp)}(x) - \left|\overline{\varphi}_v^{(\mp)}(x) \overline{g}_u^{(\mp)}(x)\right| = 1 > 0 > -\lambda_0^{(\mp)}.$$

Рассмотрим каждую подобласть отдельно. В $D^{(-)}$ решение алгебраического уравнения относительно быстрой компоненты имеет вид $\overline{u}_0^{(-)}(x) = \varphi(x)$, а $\overline{v}_0^{(-)}(x)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \overline{v}_0^{(-)}}{dx^2} = \overline{v}_0^{(-)}(x) - k(x)\varphi(x), & x \in (-1,0), \\ \dfrac{d\overline{v}_0^{(-)}}{dx}(-1) = 0, & \overline{v}_0^{(-)}(0) = \psi_v. \end{cases} \tag{47}$$

Функция Грина для данной задачи определена следующим образом:

$$G(x,s) = \frac{1}{2(e^2+1)} \begin{cases} (e^{x+2}+e^{-x})(e^s-e^{-s}), & -1 \leqslant x \leqslant s, \\ (e^{s+2}+e^{-s})(e^x-e^{-x}), & s \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \tag{48}$$

а решение записывается в виде

$$\overline{v}_0^{(-)}(x,\psi_v) = \frac{\psi_v e^2}{1+e^2}\, e^x + \frac{\psi_v}{1+e^2}\, e^{-x} + \int\limits_{-1}^{0} k(s)\varphi(s)G(x,s)\,ds. \tag{49}$$

В подобласти $D^{(+)}$ быстрая компонента $\overline{u}_0^{(+)}(x) = 0$, а $\overline{v}_0^{(+)}(x)$ определяется из задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{v}_0^{(+)}}{dx^2} = \overline{v}_0^{(+)}(x), & x \in (0,1), \\ \dfrac{d\overline{v}_0^{(+)}}{dx}(1) = 0, & \overline{v}_0^{(+)}(0) = \psi_v; \end{cases} \tag{50}$$

ее решение имеет вид

$$\overline{v}_0^{(+)}(x,\psi_v) = \frac{\psi_v}{1+e^2}\, e^x + \frac{\psi_v e^2}{1+e^2}\, e^{-x}. \tag{51}$$

Отсюда следует выполнение условия (A1).

Задача для $Q_0^{(\mp)}u(\xi)$ записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Q_0^{(\mp)}u}{d\xi^2} = Q_0^{(\mp)}u, \quad \xi \in (0,\mp\infty), \\ Q_0^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0, \quad Q_0^{(\mp)}u(0) = \psi_u - \overline{u}_0^{(\mp)}(0). \end{cases} \tag{52}$$

Решение задачи в явном виде:

$$Q_0^{(\mp)}u(\xi,\psi_u) = \begin{cases} (\psi_u - \varphi(0))e^{\xi}, & \xi \leqslant 0, \\ \psi_u e^{-\xi}, & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{53}$$

В силу отсутствия зависимости функций f и g от ε в подобластях $D^{(\mp)}$ в первом порядке все слагаемые (7) будут тривиальными. Проверим условие (A2) сшивания асимптотики для быстрой компоненты:

$$\begin{aligned} 0 = \left(\frac{\partial Q_0^{(-)}u}{\partial\xi}(0,\psi_u) - \frac{\partial Q_0^{(+)}u}{\partial\xi}(0,\psi_u)\right) + \varepsilon\left(\frac{d\overline{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\overline{u}_0^{(+)}}{dx}(0)\right) = \\ = H(\psi_u) + \varepsilon\left(\frac{d\overline{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\overline{u}_0^{(+)}}{dx}(0)\right) = \\ = H(\psi_{0u}) + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\psi_u}H(\psi_{0u})\psi_{1u} + \frac{d\overline{u}_0^{(-)}}{dx}(0) - \frac{d\overline{u}_0^{(+)}}{dx}(0)\right), \end{aligned} \tag{54}$$

где использовано обозначение

$$H(\psi_u) = \frac{\partial Q_0^{(-)}u}{\partial\xi}(0,\psi_u) - \frac{\partial Q_0^{(+)}u}{\partial\xi}(0,\psi_u) = 2\psi_u - \varphi(0) \tag{55}$$

и учтен явный вид функций $Q_0^{(\mp)}u(\xi,\psi_u)$. Таким образом, чтобы сшить формальную асимптотику быстрой компоненты, необходимо выполнение равенств

$$\psi_{0u} = \frac{1}{2}\varphi(0), \quad \psi_{1u} = -\frac{1}{2}\varphi'(0). \tag{56}$$

Для медленной компоненты проверка условия гладкости приводит к равенству:

$$0=\frac{\partial\overline{v}_0^{(-)}}{\partial x}(0,\psi_v)-\frac{\partial\overline{v}_0^{(+)}}{\partial x}(0,\psi_v)+\varepsilon\left(\frac{\partial Q_2^{(-)}v}{\partial\xi}(0,\psi_u,\psi_v)-\frac{\partial Q_2^{(+)}v}{\partial\xi}(0,\psi_u,\psi_v)\right)=J(\psi_v)+O(\varepsilon)=$$

$$=\left(\frac{\psi_v e^2}{1+e^2}-\frac{\psi_v}{1+e^2}+\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{0}k(s)\varphi(s)G(x,s)\,ds\Bigg|_{x=-0}\right)-\left(\frac{\psi_v}{1+e^2}-\frac{\psi_v e^2}{1+e^2}\right)+O(\varepsilon),\quad(57)$$

откуда получим

$$\psi_v=\psi_{0v}=\frac{1}{2}\,\frac{1+e^2}{1-e^2}\,\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{0}k(s)\varphi(s)G(x,s)\,ds\Bigg|_{x=-0}.\quad(58)$$

Производные функций H и J также можно посчитать явно:

$$\frac{\partial}{\partial\psi_u}H(\psi_{0u},\psi_{0v})=2>0,\quad \frac{d}{d\psi_v}J(\psi_{0v})=2\frac{e^2-1}{e^2+1}>0.\quad(59)$$

Таким образом, условие (A2) также выполнено.

7. Заключение. В работе доказаны теоремы существования, локальной единственности и устойчивости по Ляпунову стационарного решения системы реакции-диффузии с разномасштабными коэффициентами диффузии и разрывными функциями реакции. Найдены достаточные условия, при которых в данной системе формируется контрастная структура возле точки разрыва. Также рассмотрен модельный пример. Полученные результаты и способ их достижения будут использованы в дальнейших работах с обобщением задачи на трехмерный случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
2. *Нефедов Н. Н.* Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 2. — С. 262-–269.
3. *Нефедов Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвеция: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 12. — С. 2074-–2094.
4. *Нефедов Н. Н., Дерюгина Н. Н.* Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция-диффузия с граничными условиями Неймана// Теор. мат. физ. — 2022. — *212*. — С. 83–94.
5. *Нефедов Н. Н., Левашова Н. Т., Орлов А. О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция-диффузия с разрывным реактивным слагаемым// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2018. — *6*. — С. 3–10.
6. *Нефедов Н. Н., Попов В. Ю., Волков В. Т.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М., 2016.
7. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками при различных условиях квазимонотонности// Теор. мат. физ. — 2022. — *212*, № 1. — С. 62—82.
8. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* Существование полуправильных решений эллиптических систем с разрывными нелинейностями// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 2. — С. 239—257.
9. *Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A.* Numerical optimisation of CO_2 flooding using a hierarchy of reservoir models// Adv. Geosci. — 2021. — *56*. — P. 19–31.
10. *Amann H.* Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces// SIAM Rev. — 1976. — *18*, № 4. — P. 620–709.
11. *Calc N.* On an elliptic boundary value problem not in divergence form// Proc. Am. Math. Soc. — 1983. — *88*, № 1. — P. 47–52.

12. *Class H., Ebigbo A., Helmig R., Dahle H.K.* A benchmark study on problems related to CO_2 storage in geologic formations// Comput. Geosci. — 2009. — *13.* — P. 409–434.
13. *Pao C. V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. — New York: Plenum Press, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00069).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Коцюбинский Константин Алексеевич (Kotsubinsky Konstantin Alekseevich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: kkotsubinsky@gmail.com