ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 243 (2025). С. 5–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-243-5-10

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПИКАРА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2025 г. **Н. А. АНТОНОВ**

Аннотация. В работе применяется метод Пикара к решению задачи Коши для ряда уравнений с дробной производной типа Атаньяны—Балеану. Построена схема вычисления последовательных приближений решения и доказана ее сходимость.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными, дробная производная Атаньяны—Балеану, метод Пикара.

APPLICATION OF PICARD'S METHOD TO CAUCHY PROBLEM SOLUTION TO SOME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2025 **N. A. ANTONOV**

Abstract. In this paper, we apply the Picard method for solving the Cauchy problem for some fractional differential equations with Atangana–Baleanu fractional derivative. An iterative scheme is derived and its convergence is proved.

Keywords and phrases: fractional differential equation, Atangana–Baleanu fractional derivative, Picard method.

AMS Subject Classification: 34A08

1. Введение. Дифференциальные уравнения с дробными производными хорошо описывают многие физические процессы (см. [1,6,11]). Детальное изложение дробного исчисления приведено в [1,6,10,12]; обзор методов решения подобных дифференциальных уравнений приведен в [1,10–12].

В последние годы были введены некоторые новые определения дробных производных на основе ядер соответствующих интегральных операторов без сингулярностей: производная Капуто—Фабрицио и ее обощенный вариант — производная Атаньяны—Балеану (см. [4, 14]). Важность этих производных объясняется тем, что ряд моделей, описывающих тепловые процессы, не могут быть описаны с помощью классических дробных дифференциальных операторов (см. [4,5,8]), в то время как свойства производных Атаньяны—Балеану являются более подходящими для этого (см. [2,3]).

В работе рассматривается метод последовательных приближений Пикара для построения решения соответствующей задачи Коши (см. [7,13]). С его помощью можно найти решения для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, обходясь меньшим объемом вычислений, но сохраняя при этом достаточную точность. Одним из таких уравнений является уравнение Риккати, имеющее большое значение при решении задач Гросса—Питаевского, Бюргерса—Кортевега—де Фриза, Рамануджана и ряда других (см. [9]).

2. Основные понятия.

Определение 1. Пусть $v \in H^1(a,b)$ и $0 < \alpha < 1$. *Оператором дробного дифференцирования Атаньяны—Балеану в смысле Капуто* называется оператор

$$(T^\alpha v)(x) = \left({}^{ABC}D^\alpha_{a+}v\right)(x) = \frac{\beta(\alpha)}{1-\alpha}\int\limits_{a+}^{x} v'(s)E_\alpha\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(x-s)^\alpha\right]ds, \quad a < x < b,$$

где $\beta(\alpha)$ — такая нормирующая функция, что $\beta(0) = \beta(1) = 1$, и $E_\alpha(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Определение 2. Пусть $v \in L^1(a,b)$. *Оператором дробного интегрирования Римана—Лиувилля* называется оператор

$$\left({}^{RL}I^\alpha_{a+}v\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a+}^{x} v(s)(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Определение 3. Пусть $v \in L^1(a,b)$. *Оператором дробного интегрирования Атаньяны—Балеану* называется оператор

$$\left({}^{AB}I^\alpha_{a+}v\right)(x) = \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}v(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\,{}^{RL}I^\alpha_{a+}v(x).$$

Лемма 1. *Для дробной производной Атаньяны—Балеану в смысле Капуто справедлива формула Ньютона—Лейбница*:

$$\left({}^{AB}I^\alpha_{a+}\left({}^{ABC}D^\alpha_{a+}v\right)\right)(x) = v(x) - v(a).$$

3. Постановка задачи и метод Пикара.

Для $v \in H^1(0,1)$ и $a = 0$ рассмотрим задачу Коши:

$$T^\alpha v(x) = g(x, v(x)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = \mu. \tag{1}$$

Применив оператор ${}^{AB}I^\alpha_{a+}$ к левой и правой частям уравнения (1), получим

$$v(x) - \mu = {}^{AB}I^\alpha_{a+}g(x, v(x)). \tag{2}$$

Введем последовательные приближения Пикара для уравнения (2):

$$v_{m+1}(x) = \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x)) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1}ds, \tag{3}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $v_0 = \mu$. Добавляя и вычитая выражение

$$\frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x),$$

получим:

$$\begin{aligned} v_{m+1}(x) = \mu &+ \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x)) + \\ &+ \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x g(s, v_m(s))(x-s)^{\alpha-1}ds + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds - \\ &- \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x) - \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x). \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$v_{m+1}(x) = \mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}\Big(g(x, v_m(x)) - T^\alpha v_m(x)\Big) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x) +$$
$$+ \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds - \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \Big(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s))\Big)(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$\mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds = v_m(x).$$

Доказательство. По определению

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds = \Big({}^{RL}I^\alpha_{0+}\big(T^\alpha v_m(s)\big)\Big)(x),$$
$$\mu + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\Big({}^{RL}I^\alpha_{0+}\big(T^\alpha v_m\big)\Big)(x) = \mu + \Big({}^{AB}I^\alpha_{0+}\big(T^\alpha v_m\big)\Big)(x).$$

Тогда по правилу Ньютона—Лейбница

$$\mu + \Big({}^{AB}I^\alpha_{0+}\big(T^\alpha v_m\big)\Big)(x) = \mu + \Big({}^{AB}I^\alpha_{0+}\big({}^{ABC}D^\alpha_{0+}v_m\big)\Big)(x) = v_m(x).$$ □

Сгруппированное выражение можно записать в виде

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}\big(g(x, v_m(x)) - T^\alpha v_m(x)\big) -$$
$$- \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \Big(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s))\Big)(x-s)^{\alpha-1}ds. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим задачу Коши (1) в следующей форме:

$$F(x, v(x), \alpha) = T^\alpha v(x) - g(x, v(x)) = 0. \quad (5)$$

Пусть $h \in (0, +\infty)$. Перепишем выражение (5) в виде

$$hF(x, v(x), \alpha) - T^\alpha v(x) + T^\alpha v(x) = 0.$$

Положим $hF(x, v(x), \alpha) - T^\alpha v(x) = g_1(x, v(x), h, \alpha)$. Тогда

$$T^\alpha v(x) = g_1(x, v(x), h, \alpha).$$

Следовательно,

$$g_1(x, v(x), h, \alpha) = T^\alpha v(x) - hF(x, v(x), \alpha). \quad (6)$$

Применим к полученному уравнению схему (4):

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}\Big(g_1(x, v_m(x), h, \alpha) - T^\alpha v_m(x)\Big) -$$
$$- \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \Big(T^\alpha v_m(s) - g_1(s, v_m(s), h, \alpha)\Big)(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Произведем замену (6):

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) + \frac{1-\alpha}{\beta(\alpha)}\Big(T^\alpha v_m(x) - hF(x, v_m(x), \alpha) - T^\alpha v_m(x)\Big) -$$
$$- \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \Big(T^\alpha v_m(s) - T^\alpha v_m(s) + hF\big(s, v_m(s), \alpha\big)\Big)(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Сократим и заменим $F(x, v_m(x), \alpha)$ на $T^\alpha v_m(x) - g(x, v_m(x))$:

$$v_{m+1}(x) = v_m(x) - \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}\cdot\Big(T^\alpha v_m(x) - g(x, v_m(x))\Big) -$$
$$- \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \Big(T^\alpha v_m(s) - g(s, v_m(s))\Big)(x-s)^{\alpha-1}ds.$$

Преобразуем каждое слагаемое в получившемся выражении:

$$v_m(x) - \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}T^\alpha v_m(x);$$

$$- \frac{h\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x T^\alpha v_m(s)(x-s)^{\alpha-1}ds =$$
$$= -\frac{h\alpha}{\beta(\alpha)}\Big({}^{RL}I^\alpha_{0+}\big(T^\alpha v_m\big)\Big)(x) = -\frac{h\alpha}{\beta(\alpha)}\Big({}^{RL}I^\alpha_{0+}\big({}^{ABC}D^\alpha_{0+}v_m\big)\Big)(x).$$

Сложив два предыдущих слагаемых, находим

$$\frac{-h\alpha}{\beta(\alpha)}\Big({}^{RL}I^\alpha_{0+}\big({}^{ABC}D^\alpha_{0+}v_m\big)\Big)(x) + \frac{-h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}{}^{ABC}D^\alpha_{0+}v_m(x) =$$
$$= \Big[{}^{ABC}D^\alpha_{0+}v_m(x) \equiv w_m(x)\Big] = \frac{-h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}w_m(x) + \frac{-h\alpha}{\beta(\alpha)}\big({}^{RL}I^\alpha_{0+}w_m\big)(x) =$$
$$= -h\cdot\left(\frac{(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}w_m(x) + \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\big({}^{RL}I^\alpha_{0+}w_m\big)(x)\right) =$$
$$= \Big[\text{по определению 3}\Big] = -h\cdot\big({}^{AB}I^\alpha_{0+}w_m\big)(x) = -h\cdot\Big({}^{AB}I^\alpha_{0+}\big({}^{ABC}D^\alpha_{0+}w_m\big)\Big)(x) =$$
$$= -h\cdot(v_m(x) - \mu).$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Последовательные приближения Пикара* (3) *можно записать в виде*

$$v_{m+1}(x, h) = h\mu + (1-h)v_m(x, h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}g(x, v_m(x, h)) + hIv_m(x), \tag{7}$$

где

$$Iv(x) := \frac{\alpha}{\beta(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x g(s, v(s, h))(x-s)^{\alpha-1}ds,$$

$h \in (0, +\infty)$.

Полученные последовательные приближения принимают вид классических приближений Пикара (3) при $h = 1$. При $h < 1$ итерации замедляются и радиус сходимости расширяется (при $h > 1$ наоборот). При достаточно малом h сходимость можно гарантировать для любых липшицевых функций $g(x, v)$. Таким образом, параметр h следует рассматривать как регулятор радиуса сходимости: чем меньше данный параметр, тем надежнее метод (но возможна более медленная сходимость).

Теорема 2. *Если $v \in H^1(0,1)$ и $g(x,v)$ является гладкой и липшицевой по v с константой*

$$L < \frac{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)+1},$$

то последовательные приближения (7) образуют фундаментальную последовательность в $H^1(0,1)$, сходящуюся к решению задачи Коши (1) при $m \to +\infty$, причем это решение единственно.

Доказательство. Без ограничения общности для упрощения доказательства положим $\mu = 0$. Итерационная схема в таком случае приобретает вид:

$$v_{m+1}(x,h) = (1-h)v_m(x,h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} g(x, v_m(x,h)) + hIv_m(x), \tag{8}$$

где

$$Iv(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta(\alpha)} \int\limits_0^x g(s, v(s,h))(x-s)^{\alpha-1} ds, \tag{9}$$

и $h > 0$, $0 < \alpha < 1$. Докажем, что последовательность $\{v_m\}$ является фундаментальной. Введем норму

$$\|v\| = \sup_{x\in[0,1]} |v(x)|. \tag{10}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}v(x) = (1-h)v(x,h) + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)} g(x, v(x,h)) + hIv(x). \tag{11}$$

Задача сводится к доказательству того факта, что $\mathcal{T}$ является сжимающим оператором. Для любых двух приближений v_i, v_j проведем следующую оценку:

$$\big|\mathcal{T}v_j(x) - \mathcal{T}v_i(x)\big| \leqslant (1-h)\big|v_j(x) - v_i(x)\big| + \frac{h(1-\alpha)}{\beta(\alpha)}\big|g(x,v_j) - g(x,v_i)\big| + h\big|Iv_j(x) - Iv_i(x)\big|. \tag{12}$$

Воспользуемся свойством Липшица функции g для оценки разности интегралов:

$$\big|Iv_j(x) - Iv_i(x)\big| \leqslant \frac{\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \big|g(s, v_j(s)) - g(s, v_i(s))\big|(x-s)^{\alpha-1} ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \big|v_j(s) - v_i(s)\big|(x-s)^{\alpha-1} ds \leqslant \frac{L\alpha}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}\big\|v_j - v_i\big\|\frac{x^\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}\big\|v_j - v_i\big\|.$$

Таким образом,

$$\big|\mathcal{T}v_j(x) - \mathcal{T}v_i(x)\big| \leqslant \left[(1-h) + \frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}\right] \cdot \big\|v_j - v_i\big\|.$$

Введем обозначение

$$K := 1 - h + \frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}.$$

Если $K < 1$, то оператор $\mathcal{T}$ является сжимающим, по теореме Банаха у него существует единственная фиксированная точка, а приближения Пикара сходятся. В этом случае условие на параметр K примет вид

$$\frac{h(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{hL}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} - h < 0.$$

Поскольку по условию $h > 0$, данное неравенство переписывается в виде

$$\frac{(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} = L \cdot \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)+1}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} < 1.$$

Таким образом, условие сходимости не зависит от конкретного значения параметра h (от него зависит лишь скорость сходимости, как упоминалось ранее), а ограничение на константу Липшица имеет вид

$$K = \frac{(1-\alpha)L}{\beta(\alpha)} + \frac{L}{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)} = L < \frac{\beta(\alpha)\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)+1}. \qquad \square$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
2. *Al-Refai M.* Comparison principles for differential equations involving Caputo fractional derivative with Mittag-Leffler non-singular kernel// Electron. J. Differ. Equations. — 2018. — *2018*, № 36. — P. 1–10.
3. *Al-Refai M.* On weighted Atangana–Baleanu fractional operators// Adv. Differ. Equations. — 2020. — *2020*. — 3.
4. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and applications to heat transfer model// Therm. Sci. — 2016. — *20*, № 2. — P. 763–769.
5. *Baleanu D., Fernandez A.* On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel// Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. — 2018. — *59*. — P. 444–462.
6. *Das S.* Functional Fractional Calculus. — Berlin: Springer-Verlag, 2011.
7. *Fareed A. F., Semary M. S., Hassan H. N.* An approximate solution of fractional order equations based on controlled Picard's method with Atangana–Baleanu fractional derivative// Alexandria Eng. J. — 2022. — *61*. — P. 3673–3678.
8. *Gómez J. F., Torres L., Escobar R. F.* Fractional Derivatives with Mittag-Leffler Kernel. — Springer, 2019.
9. *Kashkari B., Syam M.* Fractional-order Legendre operational matrix of fractional integration for solving the Riccati equation with fractional order// Appl. Math. Comput. — 2016. — *290*. — P. 281–291.
10. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
11. *Momani S., Odibat Z. M.* Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order// Chaos Solitons Fractals. — 2007. — *31*. — P. 1248–1255.
12. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. — New York: Academic Press, 1999.
13. *Semary M. S., Hassan H. N., Radwan A. G.* Single and dual solution of fractional order differential order based on controlled Picard's method with Simpson rule// J. Ass. Arab Univ. Basic Appl. Sci. — 2017. — *24*, № 1. — P. 247–253.
14. *Syam M. I., Al-Refai M.* Fractional differential equations Atangana–Baleanu fractional derivative: Analysis and applications// Chaos Solitons Fractals. — 2019. — *10*, № 2.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Антонов Никита Андреевич (Antonov Nikita Andreevich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: antonovna@my.msu.ru