ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 74–81
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-74-81

УДК 517.538, 517.574

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (НЕ)ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО РОСТА

© 2025 г. **Э. Б. МЕНЬШИКОВА, Б. Н. ХАБИБУЛЛИН**

Аннотация. Приведена одна простая теорема единственности для целых функций f на комплексной плоскости $\mathbb{C}\mathbb{C}$ с верхними ограничениями на рост её модуля $\ln|f|\leqslant M$. Результат формулируется исключительно в терминах радиальной проинтегрированной считающей функции N_Z распределения точек Z, где $f(Z)=0$. В обратном направлении получена достаточно общая теорема неединственности о существовании ненулевой целой функции f, обращающейся в нуль на Z, с ограничениями на рост $\ln|f|$ через малые сдвиги считающей функции N_Z.

Ключевые слова: целая функция, распределение корней, субгармоническая функция, риссовское распределение масс, теорема единственности, теория Неванлинны.

DISTRIBUTIONS OF (NON)UNIQUENESS FOR ENTIRE FUNCTIONS OF ARBITRARY GROWTH

© 2025 **E. B. MENSHIKOVA, B. N. KHABIBULLIN**

Abstract. A simple uniqueness theorem is given for entire functions f on the complex plane $\mathbb{C}$ with upper constraints on the growth of its module $\ln|f|\leqslant M$. The result is formulated exclusively in terms of the radial integral counting function N_Z of the distribution of points Z, such that $f(Z)=0$. In the opposite direction, a rather general nonuniqueness theorem is obtained on the existence of a nonzero entire function f that vanishes on Z, with restrictions on the growth of $\ln|f|$ by small shifts of the countable function N_Z.

Keywords and phrases: entire function, distribution of zeros, subharmonic function, Riesz distribution of masses, uniqueness theorem, Nevanlinna theory.

AMS Subject Classification: 30D20, 30C15, 31A05

1. Введение. Символом $\varnothing$ обозначаем *пустое множество*, $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*, $\mathbb{N}_0:=\{0\}\cup\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$, $\overline{\mathbb{N}}_0:=\mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ — *расширение* множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty:=\sup\mathbb{N}_0\notin\mathbb{N}_0$, для которой $n\leqslant+\infty$ при всех $n\in\overline{\mathbb{N}}_0$. *Множество всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|z|:=\sqrt{(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2}$ и с *замкнутой положительной полуосью* $\mathbb{R}^+:=\bigl\{x\in\mathbb{R}\bigm| x\geqslant 0\bigr\}$, а $\mathbb{R}^+_*:=\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ — *открытая положительная полуось* и $\mathbb{C}_*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ — *проколотая в нуле комплексная плоскость.* Порядковое пополнение $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями $+\infty:=\sup\mathbb{R}=\inf\varnothing\notin\mathbb{R}$ и $-\infty:=\inf\mathbb{R}=\sup\varnothing\notin\mathbb{R}$ определяет её *расширение* $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, где, наряду со стандартными операциями, полагаем $0\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot 0:=0$; $\overline{\mathbb{R}}^+:=\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.

Работа Э. Б. Меньшиковой (раздел 3) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002). Работа Б. Н. Хабибуллина (разделы 1, 2) выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код темы FMRS-2025-0010).

Как и в [1], величина $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* при $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, *строго* положительна, когда $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, *отрицательна* при $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$, *строго* отрицательна при $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$; $x^+ := \sup\{0, x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — *положительная часть* величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — её *отрицательная часть.*

Символом 0, наряду с $0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и $0 \in \mathbb{C}$, могут обозначаться и нулевые функции, меры и т. п., а *величина* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ может рассматриваться и как *функция, тождественно равная* c. Так, для функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $c \in \overline{\mathbb{R}}$ запись $f = c$ *на* X означает, что $f(x) = c$ для всех $x \in X$; будем писать $f \neq c$ *на* X, если найдётся $x_f \in X$, для которого $f(x_f) \neq c$.

Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *положительна* (соответственно *строго положительна*, *отрицательна*, *строго отрицательна*), если $f(X) \subseteq \mathbb{R}^+$ (соответственно $f(X) \subseteq \mathbb{R}^+_*$, $f(X) \subseteq -\mathbb{R}^+$, $f(X) \subseteq -\mathbb{R}^+_*$). Если $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$), то функция f — *возрастающая* (соответственно *строго возрастающая*) на X; функция f *убывающая* (соответственно *строго убывающая*) на X, если противоположная функция $-f$ возрастающая (соответственно строго возрастающая) на X.

Интервалы с концами $a \leqslant b \in \overline{\mathbb{R}}$ — это *отрезки* $[a, b] := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| a \leqslant x \leqslant b\bigr\}$, множества $(a, b] := [a, b] \setminus a$, $[a, b) := [a, b] \setminus b$ и (открытые) *промежутки* $(a, b) := [a, b) \setminus a$ и $(a, +\infty]$, $[-\infty, b)$.

Через $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\bigr\}$ и $\overline{\mathbb{D}} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leqslant 1\bigr\}$, а также $\partial\mathbb{D} := \partial\overline{\mathbb{D}} := \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$ обозначаем соответственно открытый и замкнутый *единичные круги*, а также *единичную окружность* с центром в нуле. При $r \in \mathbb{R}^+$, таким образом, $r\mathbb{D}$ и $r\overline{\mathbb{D}}$, а также $r\partial\mathbb{D} = r\partial\overline{\mathbb{D}}$ — соответственно открытый и замкнутый круги, а также окружность радиуса r с центром в нуле.

Пусть X — некоторое множество (точек). Любую функцию $Z : X \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем *распределением точек на* X с *кратностями* $Z(x) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ *точек* $x \in X$ *в* Z. Каждому подмножеству $S \subseteq X$ можно поставить в соответствие *сужение* этого распределения точек на S, обозначаемое $Z\lfloor_S \colon S \to \overline{\mathbb{N}}_0$ и определяемое правилом $Z\lfloor_S(x) = Z(x)$ для каждого $x \in S$.

Если f — голоморфная на *открытом множестве* $O \subseteq \mathbb{C}$ функция, то распределение точек

$$\mathsf{Zero}_f : z \underset{z\in O}{\longmapsto} \sup\left\{p \in \mathbb{R} \,\middle|\, \limsup_{z \neq w \to z} \frac{|f(w)|}{|w-z|^p} < +\infty\right\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

называем *распределением корней* функции f на O. Распределение корней $Z\lfloor_0$ нулевой функции на O — функция, равная $+\infty$. В случае, когда $D \subseteq \mathbb{C}$ — *область*, т.е. открытое связное множество, существование голоморфной функции $f \neq 0$ на D с распределением корней $\mathsf{Zero}_f = Z$ эквивалентно конечности $Z(D) \subseteq \mathbb{N}_0$ распределения точек Z и дискретности в D множества всех точек $z \in D$ с ненулевой кратностью $Z(z) > 0$.

Пусть Z — распределение точек на области $D \subseteq \mathbb{C}$, а $M : D \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция на D. Если для голоморфной на D функции f из неравенств $\ln|f| \leqslant M$ и $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ на $\mathbb{C}$ следует $f = 0$, т.е. $\mathsf{Zero}_f = +\infty$, то Z — *распределение единственности по* функции M. В противном случае Z — *распределение <u>не</u>единственности по* функции M. Распределение точек $Z\lfloor_0 = +\infty$ на D — распределение единственности по любой функции M.

Радиальная считающая функция распределения точек Z на $\mathbb{C}$ — это функция

$$Z^{\mathfrak{r}} : t \underset{t\geqslant 0}{\longmapsto} \sum_{|z|\leqslant t} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+,$$

а *радиальная проинтегрированная считающая функция* по Р. Неванлинне определяется как

$$\mathsf{N}_Z(r) = \int_0^r \frac{Z^{\mathfrak{r}}(t) - Z(0)}{t}\, \mathrm{d}t + Z(0)\ln r \in \overline{\mathbb{R}}^+ \quad \text{при } r \in \mathbb{R}^+_*. \tag{1}$$

Основная проблематика статьи — выявление распределений (не)единственностей Z на $\mathbb{C}$ по общим функциям M через их радиальную проинтегрированную считающую функцию N_Z.

2. Теорема единственности для произвольных распределений точек. Для функций $M : r\partial\mathbb{D} \to \overline{\mathbb{R}}$ определим *радиальное интегральное среднее* (см. [6, определение 2.6.7])

$$\mathsf{C}_M : r \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta \tag{2}$$

по окружности $r\partial\mathbb{D}$ при существовании этого интеграла Римана или Лебега со значением, вообще говоря, в $\overline{\mathbb{R}}$, т.е. когда функция M *интегрируема на окружностях с центром в нуле.*

Следующая теорема в целом элементарна.

Теорема 1 (единственности)**.** *Пусть Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ и для некоторой неограниченной в $\mathbb{R}^+$ последовательности $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чисел $r_n \in \mathbb{R}^+$ функция $M\colon \mathbb{C}\to\overline{\mathbb{R}}$ интегрируема на окружностях $r_n\partial\mathbb{D}$ радиусов r_n с центром в нуле. Если верхний предел*

$$\limsup_{r_n\to+\infty}\bigl(\mathsf{N}_Z(r_n)-\mathsf{C}_M(r_n)\bigr)=+\infty, \tag{3}$$

то Z — распределение единственности по функции M.

Доказательство. Если $Z^{\mathfrak{r}}(r)=+\infty$ для какого-нибудь $r\in\mathbb{R}^+$, то по классическим теоремам единственности Z — распределение единственности по любой функции M безотносительно к условию (3). Осталось рассмотреть случай конечной считающей функции $Z^{\mathfrak{r}}(r)<+\infty$ при всех $r\in\mathbb{R}^+$. Сужение распределения точек Z на начало координат обозначим через

$$Z\lfloor_0 : z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \begin{cases} Z(0) & \text{при } z=0,\\ 0 & \text{при } z\neq 0\end{cases} \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

По одной из теорем Вейерштрасса существует целая функция f_0 с распределением корней $\mathsf{Zero}_{f_0} \overset{(4)}{=} Z - Z\lfloor_0$, для которой $f_0(0)\neq 0$, и по классической формуле Пуассона—Йенсена

$$\mathsf{C}_{\ln|f_0|}=\mathsf{N}_{Z-Z\lfloor_0}+\ln|f_0(0)|. \tag{5}$$

Если f — целая функция, для которой $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ на $\mathbb{C}$ и $\ln|f|\leqslant M$, то имеет место представление

$$f(z)=z^{Z(0)}f_0(z)h(z) \quad \text{для всех } z\in\mathbb{C}, \text{ где } h \text{ — целая функция}, \tag{6}$$

а также одновременно, после интегрирования неравенства $\ln|f|\leqslant M$,

$$\mathsf{C}_{\ln|f|}+\mathsf{C}_{\ln|h|}\leqslant \mathsf{C}_M \quad \text{на } \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

где из представления (6) для первого слагаемого в левой части неравенства имеем равенства

$$\begin{aligned}\mathsf{C}_{\ln|f|}(r) &\overset{(6)}{=} \mathsf{C}_{\ln|f_0|}(r)+Z(0)\ln r \overset{(5)}{=} \mathsf{N}_{Z-Z\lfloor_0}(r)+\ln|f_0(0)|+Z(0)\ln r=\\ &= \mathsf{N}_{Z-Z\lfloor_0}(r)+Z(0)\ln r+\ln|f_0(0)| \overset{(4),(1)}{=} \mathsf{N}_Z(r)+\ln|f_0(0)| \quad \text{при всех } r\in\mathbb{R}^+_*.\end{aligned}$$

Последнее согласно (7) влечёт за собой неравенства

$$\mathsf{C}_{\ln|h|} \overset{(7)}{\leqslant} \mathsf{C}_M-\mathsf{N}_Z-\ln|f_0(0)| \quad \text{на } \mathbb{R}^+_*.$$

Переходя здесь к нижнему пределу по $r_n\to+\infty$, получаем

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty}\mathsf{C}_{\ln|h|}(r_n) &\leqslant \liminf_{n\to+\infty}\bigl(\mathsf{C}_M(r_n)-\mathsf{N}_Z(r_n)\bigr)-\ln|f_0(0)|=\\ &= -\limsup_{n\to+\infty}\bigl(\mathsf{C}_M(r_n)-\mathsf{N}_Z(r_n)\bigr)-\ln|f_0(0)|,\end{aligned}$$

откуда по условию (3) имеем

$$\liminf_{n\to+\infty}\mathsf{C}_{\ln|h|}(r_n)=-\infty,$$

что возможно лишь для $h=0$. Таким образом, $f=0$ по представлению (6) для любой целой функции f с $\mathsf{Zero}_f\geqslant Z$ и $\ln|f|\leqslant M$ на $\mathbb{C}$. Отсюда Z — распределение единственности по M. Теорема доказана. $\square$

3. Теорема неединственности для произвольных распределений точек. Следующая теорема неединственности в противоположном направлении не столь проста и потребует достаточно тонкого подхода. Она развивает и содержит в себе теорему 1 из [2], являющуюся подобным результатом асимптотического характера.

Теорема 2 (неединственности). *Пусть непрерывная функция $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^+_*$, для некоторых чисел $b, c \in \mathbb{R}^+$ имеют место ограничения для её производной*

$$d'(t) \geqslant -c \quad \textit{при всех } t \in \mathbb{R}^+_*, \tag{8a}$$

$$\textit{существует предел } \frac{d(t)}{t}\Big|_{t:=0} := \lim_{0<t\to 0} \frac{d(t)}{t} \in (0, b] \subseteq \mathbb{R}^+_*, \tag{8b}$$

$$\textit{функция } t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \frac{d(t)}{t} \quad \textit{является убывающей на } \mathbb{R}^+. \tag{8c}$$

Тогда любое распределение точек Z на $\mathbb{C}$ конечной кратности в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ и нулевой кратности в начале координат является распределением неединственности по функции

$$z \underset{z\in\mathbb{C}_*}{\longmapsto} B_d \frac{|z|}{d(|z|)} \mathsf{N}_Z\bigl(|z| + d(|z|)\bigr), \tag{9}$$

где $B_d := 54(1+b)(1+c) \in \mathbb{R}^+$ зависит только от b и c из (8a)–(8b).

Замечание 1. В случае ненулевой кратности $Z(0) > 0$ в нуле заключение теоремы 2 останется в силе, если функцию (10) подправить, заменив её на функцию

$$z \underset{z\in\mathbb{C}_*}{\longmapsto} B_d \frac{|z|}{d(|z|)} \mathsf{N}_{Z - Z\lfloor_0}\bigl(|z| + d(|z|)\bigr) + Z(0)\ln|z|. \tag{10}$$

Замечание 2. Условие (8b) теоремы 2 можно заменить на более жёсткое в терминах производной, а именно: $d'(t) \leqslant b$ при всех $t \in \mathbb{R}^+_*$ и $d(0) = 0$.

Субгармонической функции $u \neq -\infty$ на на $\mathbb{C}$ соответствует борелевская конечная на компактах, или радоновская, мера (см. [4, гл. 3, п. 3.5], [6, гл. 3, п. 3.7])

$$\varDelta_u := \frac{1}{2\pi} \triangle u, \text{ где } \triangle — \textit{оператор Лапласа}, \tag{11}$$

действующий в смысле теории обобщённых функциях на D. Меру $\varDelta_u$ называем *риссовским распределением масс* функции u. По определению риссовское распределение масс субгармонической функции $u = -\infty$ на D — это внешняя мера, равная $+\infty$ на любом непустом подмножестве из D.

Далее будет существенно использоваться некоторая техническая обработка доказательства основного результата статьи [2] с субгармоническими дополнениями.

Лемма 1 (см. [2, основная теорема]). *Пусть $\varDelta \geqslant 0$ — некоторая радоновская мера на $\mathbb{C}$. Тогда для каждой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u с риссовским распределением масс $\varDelta_u = \varDelta$ при любом выборе непрерывной строго положительной функции ϱ, определённой на луче $[a, +\infty)$ при некотором $a > 0$ и удовлетворяющей условию*

$$r \underset{r\geqslant a}{\longmapsto} r + \varrho(r) — \textit{строго возрастающая функция на } [a, +\infty), \tag{12}$$

найдётся субгармоническая на $\mathbb{C}$ функция $v \neq -\infty$, с которой при

$$b := a + \varrho(a) \in \mathbb{R}^+_* \tag{13}$$

выполняется неравенство

$$u(z) + v(z) \leqslant \int_a^r \int_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) \mathrm{d}\varDelta^{\mathfrak{r}}\bigl(t + \varrho(t)\bigr) \frac{dx}{x} + \varDelta^{\mathfrak{r}}(b)\ln(1+r) \quad \textit{при всех } r := |z| > a. \tag{14}$$

Из леммы 1 получим её вариант с более компактным, чем (14), неравенством по всей $\mathbb{C}$.

Лемма 2. *Пусть функция $\varrho\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_*$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^+_*$, причём*

$$\varrho'(t) \geqslant -\frac{1}{2} \quad \textit{при всех } t \in \mathbb{R}^+_*, \tag{15a}$$

$$\textit{существует предел } \frac{\varrho(t)}{t}\Big|_{t:=0} := \lim_{0<t\to 0} \frac{\varrho(t)}{t} \in (0,\sigma] \subseteq \mathbb{R}^+_*, \tag{15b}$$

$$\textit{функция } t \xmapsto[t\in\mathbb{R}^+]{} \frac{\rho(t)}{t} \quad \textit{является убывающей на } \mathbb{R}^+. \tag{15c}$$

Тогда для любой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции u, гармонической в некоторой окрестности нуля, с риссовским распределением масс $\varDelta_u$ найдётся субгармоническая функция $v \neq -\infty$, сумма $u+v$ с которой удовлетворяет неравенству

$$u(z) + v(z) \leqslant 4(1+\sigma)^2 \frac{r}{\varrho(r)} \int\limits_0^{r+\varrho(r)} \frac{\varDelta_u^{\mathfrak{r}}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \textit{при всех } z \in \mathbb{C} \textit{ и } r := |z| \in \mathbb{R}^+. \tag{16}$$

Доказательство. Функция u — гармоническая в некоторой окрестности нуля, поэтому

$$\varDelta_u^{\mathfrak{r}} = 0 \quad \text{на } [0,\varepsilon) \text{ при некотором } \varepsilon > 0. \tag{17}$$

Согласно требованию (15a) имеем $1 + \varrho'(t) \geqslant 1/2$ и функция

$$t \xmapsto[t\in\mathbb{R}^+_*]{} t + \varrho(t) \tag{18}$$

строго возрастает на $\mathbb{R}^+_*$. Ясно, что в этом случае можно применять лемму 1 при любом выборе $a > 0$. Ввиду (15a) его можно выбрать столь малым, что $b \overset{(13)}{=} a + \varrho(a) < \varepsilon$. В этом случае $\varDelta_u^{\mathfrak{r}}(b)\ln(1+r) = 0$ для любого $r > a$. По лемме 1 можно выбрать субгармоническую функцию $v \neq -\infty$, для которой

$$u(z) + v(z) \overset{(14)}{\leqslant} \int\limits_a^r \int\limits_a^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) \mathrm{d}\varDelta_u\bigl(t + \varrho(t)\bigr) \frac{dx}{x} \leqslant \int\limits_0^r \int\limits_0^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) \mathrm{d}\varDelta_u\bigl(t + \varrho(t)\bigr) \frac{dx}{x} \tag{19}$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ и $r := |z| > a$. Но в круге $a\overline{\mathbb{D}}$ левая часть (19) ввиду её полунепрерывности сверху не больше некоторого числа $C \in \mathbb{R}^+$. Поэтому замена функции v на разность $v - C$ с сохранением обозначения v для этой разности влечёт за собой выполнение неравенства (19) *при всех* $z \in \mathbb{C}$. Ввиду убывания функции (15c)

$$\text{функция } t \xmapsto[t\in\mathbb{R}^+_*]{} \frac{t}{\rho(t)} \text{ является возрастающей на } \mathbb{R}^+_*, \tag{20}$$

и по (19) при любом $z \in \mathbb{C}$ и $r := |z|$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} u(z) + v(z) &\overset{(19)}{\leqslant} \int\limits_0^r \int\limits_0^x \left(1 + \frac{2t}{\varrho(t)}\right) \mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{r}}\bigl(t + \varrho(t)\bigr) \frac{\mathrm{d}x}{x} \overset{(20)}{\leqslant} 2\int\limits_0^r \left(1 + \frac{x}{\varrho(x)}\right) \int\limits_0^x \mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak{r}}\bigl(t + \varrho(t)\bigr) \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= 2\int\limits_0^r \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\varrho(x)}\right) \varDelta_u^{\mathfrak{r}}\bigl(x + \varrho(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^r \left(2 + \frac{\varrho(x)}{x} + \frac{x}{\varrho(x)}\right) \frac{\varDelta_u^{\mathfrak{r}}\bigl(x + \varrho(x)\bigr)}{x + \varrho(x)}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{21}$$

Ввиду убывания функции (15c) и согласно (15b)

$$\frac{\varrho(x)}{x} \leqslant \sigma \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^+. \tag{22}$$

Используя это, для скобки в подынтегральном выражении из правой части (21) получаем

$$\left(2 + \frac{\varrho(x)}{x} + \frac{x}{\varrho(x)}\right) = \frac{x}{\varrho(x)}\left(1 + \frac{\varrho(x)}{x}\right)^2 \overset{(22)}{\leqslant} \frac{x}{\varrho(x)}(1+\sigma)^2. \tag{23}$$

Ввиду возрастания функции (20) из (21)–(23) следует

$$u(z)+v(z)\overset{(21),(15a)}{\leqslant}\int_0^r\int_0^x\left(1+\frac{2t}{\varrho(t)}\right)\mathrm{d}\varDelta_u^{\mathfrak r}\bigl(t+\varrho(t)\bigr)\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant 2(1+\sigma)^2\frac{r}{\varrho(r)}\int_0^r\frac{\varDelta_u^{\mathfrak r}\bigl(x+\varrho(x)\bigr)}{x+\varrho(x)}\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

при всех $z\in\mathbb C$ и $r:=|z|\in\mathbb R^+$, а также строго возрастает обратная к (18) непрерывно дифференцируемая функция $x:\mathbb R^+\to\mathbb R^+$, причём

$$x'(t)\underset{t>0}{=}\frac{1}{1+\varrho'\bigl(x(t)\bigr)}\overset{(15a)}{\leqslant}\frac{1}{1+(-1/2)}=2\quad\text{при всех } t>0. \tag{25}$$

Замена переменной для последнего интеграла из (24) даёт соотношения

$$\int_0^r\frac{\varDelta_u^{\mathfrak r}\bigl(x+\varrho(x)\bigr)}{x+\varrho(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{r+\varrho(r)}\frac{\varDelta_u^{\mathfrak r}(t)}{t}x'(t)\,\mathrm{d}t\overset{(25)}{\leqslant}2\int_0^{r+\varrho(r)}\frac{\varDelta_u^{\mathfrak r}(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

что согласно (24) влечёт за собой неравенство (29). □

Доказательство теоремы 2. Пусть d — функция из теоремы 2, удовлетворяющая условиям (8) с постоянной $c\in\mathbb R^+$ в (8a). Рассмотрим функцию

$$\varrho:=\frac{1}{3(1+c)(1+b)}d\leqslant\frac13 d, \tag{26}$$

для которой согласно (8) имеют место все три условия из (15), где в (15b) можно выбрать

$$\sigma:=\frac12\geqslant\frac{1}{3(1+c)(1+b)},\quad \varrho(r)\underset{r\in\mathbb R^+}{\overset{(22)}{\leqslant}}\sigma r=\frac12 r \tag{27}$$

Существует целая функция f_Z с распределением корней $\mathsf{Zero}_{f_Z}=Z$, и по условию $Z(0)=0$. Риссовское распределение масс субгармонической функции $\ln|f_Z|$ — это риссовское распределение масс $\varDelta_{\ln|f_Z|}$, определяемое равенством (см. [6, теорема 3.7.8])

$$\varDelta_{\ln|f_Z|}(S)=\sum_{z\in S}Z(z)\in\overline{\mathbb R}^+\quad\text{для любого } S\subset\mathbb C$$

соответственно с радиальной считающей функцией

$$\varDelta_{\ln|f_Z|}^{\mathfrak r}(t)\underset{t\in\mathbb R^+}{=}\sum_{z\in t\overline{\mathbb D}}Z(z)$$

и радиальной проинтегрированной считающей функцией

$$\mathsf N_Z(r)\underset{r\in\mathbb R^+}{=}\int_0^r\frac{\varDelta_{\ln|f_Z|}^{\mathfrak r}(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{28}$$

По лемме 2 для субгармонической функции $u:=\ln|f_Z|\neq-\infty$ и $\sigma\overset{(27)}{=}1/2$ найдётся субгармоническая функция $v\neq-\infty$, для которой имеет место неравенство (29) в данном случае вида

$$\ln\bigl|f_Z(z)\bigr|+v(z)\leqslant 4(1+\sigma)^2\frac{|z|}{\varrho(|z|)}\int_0^{|z|+\varrho(|z|)}\frac{\varDelta_u^{\mathfrak r}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\overset{(28),(27)}{=}9\frac{|z|}{\varrho(|z|)}\mathsf N_Z\bigl(|z|+\varrho(|z|)\bigr) \tag{29}$$

при всех $z\in\mathbb C$. Теперь потребуется также следующий результат изЁ [3] (см. такжеЁ [5]).

Лемма 3 (см. [3, следствие 3(iii)]). *Пусть функция $v\neq-\infty$ субгармонична на $\mathbb C$, а функция $s:\mathbb C\to\mathbb R^+_*$ непрерывна и удовлетворяет неравенству $s(z)\leqslant 1+|z|$ при всех $z\in\mathbb C$. Тогда найдётся целая функция $h\neq0$, для которой выполнено неравенство*

$$\ln\bigl|h(z)\bigr|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v\bigl(z+d(z)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta+\ln^+\frac{1}{s(z)}\quad\textit{при всех } z\in\mathbb C. \tag{30}$$

Замечание 3. В формулировке [3, следствие 3] в последнем слагаемом в [3, формула (1.11)] был потерян верхний индекс $^+$ в логарифмической функции $\ln^+$, без которого для неограниченной функции s требуемая в (30) целая функция $h \neq 0$ может и не существовать, но только в случае конечного риссовского распределения масс $\varDelta_v(\mathbb{C}) \leqslant 1$.

Применение леммы 3 к функции v из (29) при выборе $s(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \varrho(|z|)$ даёт неравенство

$$\ln\bigl|h(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\bigl(z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta + \ln^+\Bigl(\frac{1}{\varrho(|z|)}\Bigr) \quad \text{при всех } z\in\mathbb{C}. \tag{31}$$

С целью применения последнего неравенства (31) проинтегрируем неравенство (29) с учётом субгармоничности функции $\ln|f_Z|$ в следующей форме:

$$\ln\bigl|f_Z(z)\bigr| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\bigl(z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\bigl|f_Z\bigl(z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr)\bigr|\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\bigl(z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta \leqslant$$

$$\leqslant 9\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}|}{\varrho\bigl(|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}|\bigr)}\mathsf{N}_Z\Bigl(\bigl|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr| + \varrho\Bigl(\bigl|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr|\Bigr)\Bigr)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{при всех } z\in\mathbb{C}.$$

Отсюда согласно (31) для некоторой целой функции $h\neq 0$ имеем

$$\ln\bigl|f_Z(z)h(z)\bigr| = \ln\bigl|f_Z(z)\bigr| + \ln\bigl|h(z)\bigr| \leqslant$$

$$\leqslant 9\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\frac{|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}|}{\varrho\bigl(|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}|\bigr)}\mathsf{N}_Z\Bigl(\bigl|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr| + \varrho\Bigl(\bigl|z+\varrho(|z|)e^{i\theta}\bigr|\Bigr)\Bigr)}_{I(z,\theta)}\,\mathrm{d}\theta \quad \textit{при всех } z\in\mathbb{C}. \tag{32}$$

Ввиду возрастания функций

$$t \underset{t\in\mathbb{R}^+_*}{\overset{(20)}{\longmapsto}} \frac{t}{\varrho(t)}, \quad t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\overset{(18)}{\longmapsto}} t+\varrho(t),$$

а также радиальной проинтегрированной считающей функции N_Z для последнего подынтегрального выражения $I(z,\theta)$ в обозначении $r:=|z|$ получаем неравенства

$$I(z,\theta) \leqslant \frac{r+\varrho(r)}{\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr)}\mathsf{N}_Z\Bigl(r+\varrho(r)+\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr)\Bigr), \quad r:=|z|, \tag{33}$$

где правая часть не зависит от θ. Здесь по теореме о конечных приращениях

$$\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr) - \varrho(r) \geqslant \inf_{t\in\mathbb{R}^+_*} \varrho'(t)\cdot\varrho(r) \overset{(15a)}{\geqslant} -\frac{1}{2}\varrho(r),$$

что влечёт за собой неравенства

$$\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr) \geqslant \frac{1}{2}\varrho(r), \quad \frac{r+\varrho(r)}{\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr)} \overset{(27)}{\leqslant} \frac{r+\frac{1}{2}r}{\frac{1}{2}\varrho(r)} = 3\frac{r}{\varrho(r)}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (33) следует

$$I(z,\theta) \leqslant 3\frac{r}{\varrho(r)}\mathsf{N}_Z\Bigl(r+\varrho(r)+\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr)\Bigr), \quad r:=|z|. \tag{34}$$

В то же время снова ввиду убывания функции $t \underset{t\in\mathbb{R}^+_*}{\overset{(20)}{\longmapsto}} \dfrac{\varrho(t)}{t}$ имеем

$$r+\varrho(r)+\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr) = \bigl(r+\varrho(r)\bigr)\biggl(1+\frac{\varrho\bigl(r+\varrho(r)\bigr)}{r+\varrho(r)}\biggr) \leqslant \bigl(r+\varrho(r)\bigr)\Bigl(1+\frac{\varrho(r)}{r}\Bigr) =$$

$$= r+2\varrho(r)+\varrho(r)\frac{\varrho(r)}{r} \overset{(27)}{\leqslant} r+2\varrho(r)+\varrho(r)\cdot\frac{1}{2} \leqslant r+3\varrho(r).$$

Таким образом, можем продолжить оценку (34) в виде неравенства
$$I(z,\theta) \leqslant 3\frac{r}{\varrho(r)}\mathsf{N}_Z\bigl(r+3\varrho(r)\bigr), \quad r:=|z|,$$
где правая часть не зависит от θ. Применяя это неравенство к (32), получаем
$$\ln\bigl|f_Z(z)h(z)\bigr| \leqslant 18\frac{r}{\varrho(r)}\mathsf{N}_Z\bigl(r+3\varrho(r)\bigr) \quad \textit{при всех } z\in\mathbb{C} \textit{ и } r:=|z|.$$
Отсюда согласно построению функции ϱ через d в (26) получаем
$$\ln\bigl|f_Z(z)h(z)\bigr| \overset{(26)}{\leqslant} 54(1+b)(1+c)\frac{r}{d(r)}\mathsf{N}_Z\bigl(r+d(r)\bigr) \quad \textit{при всех } z\in\mathbb{C} \textit{ и } r:=|z|. \tag{35}$$
Здесь функция $f:=f_Zh$ — ненулевая целая функция с
$$\mathsf{Zero}_f=\mathsf{Zero}_{f_Zh}=\mathsf{Zero}_{f_Z}+\mathsf{Zero}_h=Z+\mathsf{Zero}_h\geqslant Z,$$
удовлетворяющая неравенству (35). Следовательно, Z — распределение неединственности по функции (10). Теорема 2 доказана. □

Замечание 4. Равномерный характер основных соотношений теорем 1 и 2 и определённая независимость констант в оценках позволяют получить прямые аналоги этих теорем для (плюри)субгармонических и целых функций и распределений аналитических множеств коразмерности 1 на $\mathbb{C}^n$ и при $1<n\in\mathbb{N}$. Такое распространение требует значительной подготовки и будет изложено в дальнейших наших публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
2. *Хабибуллин Б. Н.* Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций// Мат. заметки. — 2003. — *73*, № 1. — С. 120–134.
3. *Хабибуллин Б. Н., Байгускаров Т. Ю.* Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 4. — С. 588–602.
4. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
5. *Khabibullin B. N.* The logarithm of the modulus of an entire function as a minorant for a subharmonic function outside a small exceptional set// Azerbaijan J. Math. — 2021. — *11*, № 2. — P. 48–59.
6. *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа Э. Б. Меньшиковой (раздел 3) выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00002). Работа Б. Н. Хабибуллина (разделы 1, 2) выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (код темы FMRS-2025-0010).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Меньшикова Энже Булатовна (Menshikova Enzhe Bulatovna)
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа
(Institute of Mathematics with Computing Centre —
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)
E-mail: `algeom@bsu.bashedu.ru`

Хабибуллин Булат Нурмиевич (Khabibullin Bulat Nurmievich)
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа
(Institute of Mathematics with Computing Centre —
Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)
E-mail: `khabib-bulat@mail.ru`