ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 61–73
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-61-73

УДК 517.929

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И КОНКУРЕНЦИИ НА МАКРОЭКОНОМИЧЕСКУЮ ДИНАМИКУ

© 2025 г. **А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ**

Аннотация. В работе рассмотрена система из двух нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом, являющаяся обобщением известной модели «спрос–предложение». Показано, что учет запаздывания и конкуренции существенно меняет поведение решений соответствующей динамической системы. Рассмотренная математическая модель с качественной точки зрения демонстрирует динамику, которая вполне естественна с экономической точки зрения.

Ключевые слова: модель «спрос-предложение», запаздывание, конкуренция, устойчивость, бифуркации, нормальные формы.

THE IMPACT OF DELAY AND COMPETITION ON MACROECONOMIC DYNAMICS

© 2025 **A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV**

Abstract. In this paper, we consider a system of two nonlinear equations with a deviating argument, which is a generalization of the well-known “demand–supply” model. It is shown that taking into account the delay and competition significantly changes the behavior of solutions of the corresponding dynamic system. From the qualitative point of view, this mathematical model demonstrates dynamics that are quite natural from the economic point of view.

Keywords and phrases: “supply-demand” model, delay, competition, stability, bifurcations, normal forms.

AMS Subject Classification: 34K18, 37G05, 37N40

1. Введение. Среди большого числа математических моделей макроэкономики всегда называют одну из первых таких моделей, которая известна под названиями «модель спрос–предложение» или «модель рынка одного товара» (см. [10, 11]). Напомним ее в первоначальной версии. Пусть $p(t)$ — цена товара в момент времени t, $p(t) \geqslant 0$. Тогда изменение $p(t)$ может быть найдено как решение дифференциального уравнения

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \tag{1}$$

где $D(p)$ — спрос (востребованность на рынке) товара, а $S(p)$ — предложение товара (предложение его производителем). Обе функции зависят от многих факторов, но основным, естественно, является цена товара. При этом, опираясь на экономические интерпретации данного уравнения, принято считать, что для функций $D(p)$, $S(p)$ выполнены следующие условия (см., например, [3, 6, 10, 11]):

Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета №075-02-2025-1636).

(I) Функции $D(p)$, $S(p)$ определены при $p \in (0,\infty)$ и зависят от p достаточно гладко (как правило, функции $D(p), S(p) \in C^{\infty}(0,\infty)$).
(II) $D(p) > 0$, $S(p) > 0$, $D'(p) < 0$, $S'(p) > 0$.
(III) $\lim\limits_{p\to 0} S(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = \infty$ или $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = S_\infty$, где $S_\infty \gg 1$. Второй вариант соответствует рынку одного товара с «насыщением».
(IV) $\lim\limits_{p\to 0} D(p) = \infty$ или $\lim\limits_{p\to 0} D(p) = D_\infty \gg 1$, $\lim\limits_{p\to 0} D(p) = \lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$.

Опираясь на эти предположения, стандартным образом можно показать, что у дифференциального уравнения (1) имеется единственное положительное состояние равновесия $p(t) = p_0$ ($p_0 > 0$), которое асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво), если рассматривать только положительные значения для переменной $p(t)$ ($p(t) > 0$).

Последнее замечание позволяет сделать вывод, что такой вариант математической модели не является естественным с экономической точки зрения, так как для рыночной экономики характерно следующее:

(a) состояние равновесия $p = p_0$ может быть неустойчивым;
(b) для рыночной экономики характерны циклы (экономические циклы), что показала экономическая практика XIX и XX вв.

Поэтому у многих экономистов эта модель считается классической, но устаревшей. Вместе с тем, ее достаточно легко подправить таким образом, чтобы устранить такие очевидные недостатки.

Одним из самых простых и действенных вариантов модификации уравнения (1) является учет эффекта запаздывания. Это приводит к замене обыкновенного дифференциального уравнения (1) на уравнение с отклоняющимся аргументом (см. [3, 6]), например,

$$\dot{p} = D(p_h) - S(p_h), \tag{2}$$

где теперь в правой части $p_h = p(t-h)$, $h > 0$. Уместность такого изменения правой части уравнения (1) основывается на таком простом и экономически естественном соображении, что цена в некий торговый день (час) формируется под воздействием цены предшествующего торгового периода (например, дня). Ясно, что уравнение (2), так же как и (1), имеет состояние равновесия $p(t) = p_0 > 0$.

Уравнение (2) было изучено в [3, 6]. В этих работах показано, что при $h < h_*$ состояние равновесия $p = p_0$ асимптотически устойчиво, а при $h > h_*$ теряет устойчивость колебательным образом.

Действительно, пусть $p = p_0$ — положительное состояние равновесия уравнения (2). Положим

$$p(t) = p_0 + x(t), \quad p_h(t) = p_0 + y(t), \quad y(t) = x(t-h).$$

Тогда для $x(t)$ получаем следующее уравнение с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{x} = -ay + a_2 y^2 + a_3 y^3 + o(y^3), \tag{3}$$

где

$$a = -(D'(p_0) - S'(p_0)), \quad a_2 = \frac{1}{2}(D''(p_0) - S''(p_0)), \quad a_3 = \frac{1}{6}(D'''(p_0) - S'''(p_0)),$$

а через $o(y^3)$ обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости относительно переменной y. Линеаризованный вариант уравнения (3) имеет следующий вид:

$$\dot{x} = -ay. \tag{4}$$

Изучим вопрос об устойчивости решений уравнения (4), а также в первом приближении устойчивость нулевого решения уравнения (3). При этом вопрос об устойчивости решений уравнения (4) сводится к анализу характеристического уравнения

$$\lambda = -a\exp(-\lambda h), \tag{5}$$

анализ которого приведен в [3, 6]. При $h = H$, где $H = \pi/(2a)$, уравнение (4) имеет периодические решения $\exp(\pm i\sigma t)$, где $\sigma = a$. Если же $h < H$, то решения уравнения (4) асимптотически устойчивы, а при $h > H$ — неустойчивы.

Аналогичные выводы можно сделать относительно устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения (2): при $h \in (0, H)$ оно асимптотически устойчиво, а при $h > H$ теряет устойчивость. Наконец, при $h = H$ для нулевого решения уравнения (3) реализуется критический случай пары простых чисто мнимых собственных значений спектра устойчивости. Добавим, что, если положить

$$h = H(1+\gamma\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \quad \gamma = \pm 1, \tag{6}$$

то при анализе нелинейного уравнения (3) может быть использована бифуркационная теорема Андронова—Хопфа (см. [9]). В частности, это уравнение может иметь в окрестности нулевого состояния равновесия предельный цикл, в том числе устойчивый (подробнее см. [3,6]).

Кроме запаздывания еще одним фактором влияния на экономическую динамику следует считать фактор наличия конкуренции. В данной работе рассмотрим этот вопрос на основе изучения динамики рынка в простейшем случае, когда рассматривается рынок двух идентичных товаров, которые могут конкурировать. При этом будем изучать вариант, когда конкуренция «слабая», т.е. соответствующие коэффициенты малы по сравнению с другими. Рассмотрим следующую систему из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot p_1 &= D(p_{1,h}) - S(p_{1,h}) + \varepsilon c(p_{2,h} - p_{1,h}),\\ \dot p_2 &= D(p_{2,h}) - S(p_{2,h}) + \varepsilon c(p_{1,h} - p_{2,h}). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t)$ — цена товаров 1 и 2, $p_{j,h} = p_j(t-h)$, $h > 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Функции $D(p)$, $S(p)$ были описаны выше. Будем изучать систему дифференциальных уравнений (7), если h выбрано с помощью равенства (6). При отсутствии конкуренции ($c = 0$) у каждого из уравнений системы (7) реализуется случай, близкий к критическому в задаче об устойчивости состояния экономического равновесия ($p_1(t) = p_2(t) = p_0$). Подчеркнем, что система из двух дифференциальных уравнений (7) имеет состояние равновесия $p_1 = p_2 = p_0$ при любом выборе ε, c, где p_0 — состояние равновесия уравнения (1) (или (2)).

Положим теперь в системе (7)

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_0 + x_1(t), & p_2(t) &= p_0 + x_2(t),\\ p_{1,h} &= p_0 + y_1(t), & p_{2,h} &= p_0 + y_2(t),\\ y_j(t) &= x_j(t-h), & h &= H(1+\gamma\varepsilon), \quad j = 1,2. \end{aligned}$$

В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= -a y_1 + F(y_1) + \varepsilon c(y_2 - y_1),\\ \dot x_2 &= -a y_2 + F(y_2) + \varepsilon c(y_1 - y_2), \end{aligned} \tag{8}$$

где $F(y_j) = a_2 y_j^2 + a_3 y_j^3 + o(y_j^3)$, $j = 1,2$. У нее есть нулевое состояние равновесия. Далее в работе изучается структура окрестности нулевого состояния равновесия системы (8) при $c \neq 0$ и, в частности, устойчивость нулевого решения системы (8).

2. Устойчивость нулевого состояния равновесия. Из теоремы об устойчивости по линейному (первому) приближению следует, что сначала вместо нелинейной системы (8) следует рассмотреть ее линеаризованный вариант, т.е. следующую систему линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\dot x_1 = -a y_1 + \varepsilon c(y_2 - y_1), \quad \dot x_2 = -a y_2 + \varepsilon c(y_1 - y_2). \tag{9}$$

У системы (9) найдем нетривиальные решения вида

$$x_1 = \eta_1 \exp(\lambda t), \quad x_2 = \eta_2 \exp(\lambda t),$$

где η_1, η_2, λ — комплексные или действительные постоянные. При этом числа η_1, η_2 находим как ненулевые решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \big(\lambda + (a + c\varepsilon)\exp(-\lambda h)\big)\eta_1 - \big(c\varepsilon \exp(-\lambda h)\big)\eta_2 &= 0,\\ \big(-\varepsilon c \exp(-\lambda h)\big)\eta_1 + \big(\lambda + (a + c\varepsilon)\exp(-\lambda h)\big)\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

У нее есть нетривиальные решения, если ее определитель равен 0. Здесь и далее $h = H(1+\gamma\varepsilon)$. В результате получаем характеристическое уравнение

$$\big(\lambda + (a + c\varepsilon)\exp(-\lambda h)\big)^2 - \big(c\varepsilon \exp(-\lambda h)\big)^2 = 0,$$

которое приводит к двум следующим уравнениям:

$$\lambda + (a + 2c\varepsilon)\exp(-\lambda h) = 0, \tag{10}$$

$$\lambda + a\exp(-\lambda h) = 0. \tag{11}$$

При $\varepsilon = 0$ каждое из них совпадает с уравнением

$$\lambda = -a\exp(-\lambda H), \tag{12}$$

которое, как отмечалось ранее, имеет решения вида $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma$, $\sigma = a$, а остальные его корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda(\varepsilon) \leqslant -\nu_0 < 0$, ($\nu_0 = \mathrm{const} > 0$), если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$.

Поэтому для анализа устойчивости представляют интерес те корни уравнений (10), (11), которые при $\varepsilon = 0$ равны $\pm ia$. Вычисления с точностью до ε показывают, что такие корни уравнения (10) имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \tau_1(\varepsilon) \pm i\sigma_1(\varepsilon), \quad \tau_1(\varepsilon) = \frac{\pi(2a\gamma + 4c)}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma_1(\varepsilon) = \frac{(8c - a\pi^2\gamma)}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Уравнение (11) имеет корни

$$\lambda_{3,4}(\varepsilon) = \tau_2(\varepsilon) \pm i\sigma_2(\varepsilon), \quad \tau_2(\varepsilon) = \frac{2\pi a\gamma}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma_2(\varepsilon) = -\frac{\pi^2 a\gamma}{4 + \pi^2}\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Лемма 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (8) асимптотически устойчиво, если $\gamma = -1$ и $2c - a < 0$. Если $\gamma = 1$ или при $\gamma = -1$ справедливо неравенство $2c - a > 0$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (8) неустойчиво.*

Замечание 1. Если оказалось, что $\gamma = -1$ и $2c - a = 0$, то для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы (8) следует учесть слагаемые более высокого порядка малости, т.е. при определении $\lambda_{1,2}(\varepsilon)$, $\lambda_{3,4}(\varepsilon)$ их вычисления следует продолжить до членов, имеющих порядок малости ε^2 и, возможно, далее.

3. Анализ задачи в нелинейной постановке. Нормальная форма. В этом разделе рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений (8), если $h = H(1 + \gamma\varepsilon)$, где число $\gamma \in \mathbb{R}$ будет выбрано далее в ходе анализа нелинейной системы, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Положим $t = (1 + \gamma\varepsilon)\tau$. В результате система дифференциальных уравнений (8) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= (1 + \gamma\varepsilon)\big(-ay_1 + F(y_1) + \varepsilon c(y_2 - y_1)\big), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= (1 + \gamma\varepsilon)\big(-ay_2 + F(y_2) + \varepsilon c(y_1 - y_2)\big), \end{aligned} \tag{13}$$

где теперь $y_j = x_j(\tau - H)$ при всех ε, $j = 1, 2$.

Естественно, что и система (13) имеет нулевое состояние равновесия $x_1 = x_2 = 0$, для которого реализуется близкий к критическому случай двух пар чисто мнимых корней характеристического уравнения. Остальные корни характеристического уравнения, отличные от тех, которые близки к корням $\pm ia$, лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma_0 < 0$. Следовательно (см. [2,9]), система дифференциальных уравнений (13) имеет четырехмерное гладкое инвариантное многообразие $M_4(\varepsilon)$. Все решения системы дифференциальных уравнений (13) из малой, но не зависящей от ε, окрестности нулевого состояния равновесия с течением времени приближаются к $M_4(\varepsilon)$ с экспоненциальной скоростью. Поэтому анализ поведения решений, принадлежащих $M_4(\varepsilon)$, может быть сведен к анализу соответствующей четырехмерной действительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В комплексной форме записи она имеет следующий вид:

$$z_1' = \varphi_1(z_1, z_2, \varepsilon), \quad z_2' = \varphi_2(z_1, z_2, \varepsilon), \tag{14}$$

где правые части обоих уравнений гладко зависят от аргументов z_1, z_2, ε, если $|z_j| \leqslant \delta$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ и $\varphi_j(0, 0, \varepsilon) = 0$. Достаточно часто систему (14) называют нормальной формой. При этом в ситуации общего положения вместо системы (14) достаточно рассматривать ее укороченный вариант, т.е. систему

$$z_1' = \psi_1(z_1, z_2), \quad z_2' = \psi_2(z_1, z_2), \tag{15}$$

где $\psi_j(z_1, z_2) = \varphi_j(z_1, z_2, 0)$.

Дальнейший анализ поведения решений системы дифференциальных уравнений (13), принадлежащих окрестности ее нулевого решения, основан на предварительном изучении системы (15). При этом правые части системы дифференциальных уравнений (15) будут определяться в ходе реализации алгоритма, который можно считать модификацией широко известного алгоритма Крылова—Боголюбова (см., например, [3, 6]).

Решения системы (13), принадлежащие $M_4(\varepsilon)$, будем искать в виде сумм

$$x_1(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} x_{1,1}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon x_{1,2}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon^{3/2} x_{1,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + O(\varepsilon^2), \tag{16}$$

$$x_2(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} x_{2,1}(\tau, z_2, \overline{z}_2) + \varepsilon x_{2,2}(\tau, z_2, \overline{z}_2) + \varepsilon^{3/2} x_{2,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + O(\varepsilon^2), \tag{17}$$

где $s = \varepsilon\tau$ — «медленное» время. Отметим, что также справедливы равенства

$$y_1(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} y_{1,1}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon y_{1,2}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon^{3/2} y_{1,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + O(\varepsilon^2),$$
$$y_2(\tau, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} y_{2,1}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon y_{2,2}(\tau, z_1, \overline{z}_1) + \varepsilon^{3/2} y_{2,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + O(\varepsilon^2).$$

Напомним, что

$$\begin{aligned}
&y_j(\tau, s, \varepsilon) = x_j(\tau - H, s, \varepsilon), && j = 1, 2,\\
&y_{j,k}(\tau, z_j, \overline{z}_j) = x_{j,k}(\tau - H, z_j, \overline{z}_j), && j = 1, 2, \quad k = 1, 2,\\
&y_{j,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = x_{j,3}(\tau - H, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2), &&\\
&x_{j,1}(\tau, z_j, \overline{z}_j) = z_j q(\tau) + \overline{z}_j \overline{q}(\tau), \quad z_j = z_j(s), && j = 1, 2, \quad q(\tau) = \exp(i\sigma\tau), \quad \sigma = a.
\end{aligned}$$

Наконец, функции $x_{j,2}(\tau, z_j, \overline{z}_j)$ и $x_{j,3}(\tau, z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)$ гладко зависят от своих аргументов, если $|z_j| < \delta$, $\delta > 0$. По переменной τ они имеют период $2\pi/\sigma$, и для них справедливо тождество

$$M_\pm(x_{2,j}) = M_\pm(x_{3,j}) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где

$$M_\pm(\varphi) = \frac{\sigma}{2\pi} \int\limits_{-\pi/\sigma}^{\pi/\sigma} \varphi(\tau) \exp(\mp i\sigma\tau) d\tau$$

и $\varphi(\tau)$ — непрерывная $(2\pi/\sigma)$-периодическая функция. Такой класс функций обозначим W.

Подставим суммы (16), (17) в первое и второе уравнения системы (13) и выделим слагаемые, имеющие одинаковый порядок малости относительно одинаковых степеней ε ($\varepsilon^{1/2}$, ε, $\varepsilon^{3/2}$ и т. д.). При $\varepsilon^{1/2}$ получим равенства в силу выбора первых слагаемых в каждой из формул (16), (17). Для функций $x_{j,2}$, $x_{j,3}$, $j = 1, 2$, получим следующие линейные неоднородные системы уравнений:

$$\frac{d}{d\tau} x_{1,2} + a y_{1,2} = a_2 (y_{1,1})^2, \tag{18}$$

$$\frac{d}{d\tau} x_{2,2} + a y_{2,2} = a_2 (y_{2,1})^2, \tag{19}$$

а также

$$\frac{d}{d\tau} x_{1,3} + a y_{1,3} = -\bigl(z_1' q + \overline{z}_1' \overline{q}\bigr) - \gamma a (z_1 Q + \overline{z}_1 \overline{Q}) + \\ + aH\bigl(z_1' Q + \overline{z}_1' \overline{Q}\bigr) + 2a_2 y_{1,1} y_{1,2} + a_3 (y_{1,1})^3 + c(y_{2,1} - y_{1,1}), \tag{20}$$

$$\frac{d}{d\tau} x_{2,3} + a y_{2,3} = -\bigl(z_2' q + \overline{z}_2' \overline{q}\bigr) - \gamma a (z_2 Q + \overline{z}_2 \overline{Q}) + \\ + aH\bigl(z_2' Q + \overline{z}_2' \overline{Q}\bigr) + 2a_2 y_{2,1} y_{2,2} + a_3 (y_{2,1})^3 + c(y_{1,1} - y_{2,1}). \tag{21}$$

Здесь $Q = Q(\tau) = \exp(i\sigma\tau)\exp(-i\sigma H)$, $z_j = z_j(s)$, а штрихом обозначена производная по s.

Каждое из неоднородных дифференциальных уравнений (18), (19) имеет $(2\pi/\sigma)$-периодическое решение, принадлежащее W:

$$x_{j,2}(\tau, z_j, \overline{z}_j) = \eta_2 q^2 z_j^2 + \overline{\eta}_2 \overline{q}^2 \overline{z}_j^2 + \eta_0 |z_j|^2,$$

где

$$\eta_2 = a_2\Big(\frac{1+2i}{5a}\Big), \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}, \quad aH = \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Каждое из уравнений (20), (21) имеет решение, принадлежащее W, если выполнено условие разрешимости в классе $(2\pi/\sigma)$-периодических функций. Напомним это условие.

Условие разрешимости. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau}u + a\tilde{u} = f(\tau),$$

в котором $\tilde{u} = u(\tau - H)$, а функция $f(\tau)$ имеет период $2\pi/\sigma$ и непрерывна, имеет $(2\pi/\sigma)$-периодическое решение, если выполнены два равенства

$$M_{\pm}(f) = \frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\sigma}^{\pi/\sigma} f(\tau)\exp(\mp i\sigma\tau)d\tau = 0,$$

причем решение единственно.

Применяя условие разрешимости к каждому из уравнений (20), (21), получим два следующих равенства:

$$-z_1' + i\gamma a z_1 - iaHz_1' + (l_3 + il_4)z_1|z_1|^2 - ic(z_2 - z_1) = 0,$$
$$-z_2' + i\gamma a z_2 - iaHz_2' + (l_3 + il_4)z_2|z_2|^2 - ic(z_1 - z_2) = 0.$$

При их выводе учтено, что $\sigma H = \pi/2$, $\exp(-i\sigma H) = -i$. Наконец,

$$l_3 + il_4 = -i\left(3a_3 + \frac{2}{5a}a_2^2(11 + 2i)\right).$$

После преобразований с учетом того обстоятельства, что $\sigma = a$ $(aH = \pi/2)$ получаем систему уравнений (нормальную форму) для комплекснозначных функций $z_1(s)$, $z_2(s)$. В нашем случае она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1' &= g\left(\frac{\pi}{2} + i\right)z_1 + (l_1 + il_2)z_1|z_1|^2 - d\left(\frac{\pi}{2} + i\right)(z_2 - z_1), \\ z_2' &= g\left(\frac{\pi}{2} + i\right)z_2 + (l_1 + il_2)z_2|z_2|^2 - d\left(\frac{\pi}{2} + i\right)(z_1 - z_2), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$g = \frac{4\gamma a}{4+\pi^2}, \qquad l_1 = \frac{2}{5a(4+\pi^2)}\Big(2a_2^2(4 - 11\pi) - 15\pi a a_3\Big),$$
$$d = \frac{4c}{4+\pi^2}, \qquad l_2 = -\frac{4}{5a(4+\pi^2)}\Big(15aa_3 + 2a_2^2(11 + \pi)\Big).$$

Следует различать следующие варианты: $l_1 < 0$, $l_1 > 0$, $l_1 = 0$. В рамках данной работы ограничимся рассмотрением первого из них.

Замечание 2. Одна из причин такого выбора варианта состоит в следующем. В [3, 6] для первоначальной модели «спрос–предложение» (т.е. уравнения (2)) с учетом запаздывания было показано, что при реализации случая, близкого к критическому $(h = H(1 + \gamma\varepsilon))$, локальная динамика решений сводится к анализу дифференциального уравнения

$$z' = (\tilde{\alpha} + i\tilde{\beta})z + (\tilde{l}_1 + i\tilde{l}_2)z|z|^2, \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

т.е. к анализу нормальной формы, характерной для бифуркаций Андронова—Хопфа.

Если $\tilde{l}_1 < 0$, то при $\tilde{\alpha} > 0$ реализуется «мягкая» бифуркация рождения устойчивого предельного цикла. Если же $\tilde{l}_1 > 0$, то говорят о жестком возбуждении автоколебаний, когда при $\tilde{\alpha} < 0$ в окрестности еще асимптотически устойчивого состояния равновесия существует неустойчивый предельный цикл. Добавим, что при $\tilde{l}_1 = 0$ укороченная нормальная форма (23) не позволяет определить характер бифуркаций, и правая часть уравнения (23) требует уточнений и вычислений членов, имеющих более высокий порядок малости.

Подчеркнем также, что ситуация, когда $l_1 < 0$, характерна для уравнения (22) (см. [6]), если $D(p) = \alpha_0 p^{-m}$, $S(p) = \beta_0 p^k$, где α_0, β_0 — некоторые положительные постоянные, $m \geqslant 1$ и k — не очень большая положительная постоянная (например, $k = 1/2$). Такой выбор k, m достаточно приемлем для модели «спрос–предложение». Добавим также, что вариант $l_1 < 0$ обеспечивает диссипативность системы (22) (доказательство этого свойства можно найти в [5]).

Итак, далее будем считать, что $\gamma = 1$, $g > 0$, $l_1 < 0$. Постоянная d может иметь любой знак. Справедливости ради, можно отметить, что вариант $d > 0$ более характерен для задач макроэкономики. С экономической точки зрения вариант $d > 0$ ($c > 0$) означает, что падение цен у конкурента заставляет производителя также понижать цены. Такой выбор характерен, когда конкуренция носит сугубо экономический характер. Вместе с тем экономическая практика предоставляет нам примеры и противоположных вариантов ($d < 0$). Вариант $d = 0$ означает, что конкуренция отсутствует и две экономические системы развиваются независимо.

В системе дифференциальных уравнений (22) положим

$$s = \frac{2}{\pi g}\Theta, \quad z_j = \beta w_j, \quad \beta = \sqrt{-\frac{\pi g}{2l_1}}. \tag{24}$$

В результате замены (24) получим нормированный вариант нормальной формы (22):

$$\begin{aligned} w_1' &= (1 + i\kappa)w_1 - (1 + il)w_1|w_1|^2 - \nu(1 + i\kappa)(w_2 - w_1), \\ w_2' &= (1 + i\kappa)w_2 - (1 + il)w_2|w_2|^2 - \nu(1 + i\kappa)(w_1 - w_2), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\kappa = 2/\pi$, штрихом обозначена производная по Θ, $\nu = d/g$, $l = l_2/l_1$.

Замечание 3. Система дифференциальных уравнений (25) получена из системы (22) с помощью замен (24) при предположении, что $g > 0$, $l_1 < 0$. Если эти неравенства не выполнены, то нормировки (24) можно и нужно изменить, но в результате получим систему (25) аналогичной структуры, но, естественно, с иными коэффициентами. Тем не менее, подчеркнем еще раз, что далее изучается система дифференциальных уравнений (25).

4. Анализ нормальной формы. Перепишем систему (25) в действительной форме. Для этого положим

$$w_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1), \quad w_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2), \tag{26}$$

где $\rho_j = \rho_j(\Theta) > 0$, $\varphi_j = \varphi_j(\Theta) \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. В результате получаем вместо системы (25) следующую систему из четырех дифференциальных уравнений:

$$\rho_1' = \rho_1 - \rho_1^3 - \nu\left(\rho_2 \cos\psi - \rho_1 - \kappa\rho_2 \sin\psi\right), \tag{27}$$

$$\varphi_1' = \kappa - l\rho_1^2 - \nu\left(\kappa\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\cos\psi - 1\right) + \frac{\rho_2}{\rho_1}\sin\psi\right), \tag{28}$$

$$\rho_2' = \rho_2 - \rho_2^3 - \nu\left(\rho_1 \cos\psi - \rho_2 + \kappa\rho_1 \sin\psi\right), \tag{29}$$

$$\varphi_2' = \kappa - l\rho_2^2 - \nu\left(\kappa\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\cos\psi - 1\right) - \frac{\rho_1}{\rho_2}\sin\psi\right). \tag{30}$$

Положим $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Вычитая из дифференциального уравнения (30) уравнение (28) и оставляя без изменений уравнения (27), (29), получим в результате систему дифференциальных уравнений для «медленных» переменных $\rho_1(\Theta)$, $\rho_2(\Theta)$, $\psi(\Theta)$, которую можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_1' &= \rho_1 - \rho_1^3 + \nu\Big(\rho_1 - \rho_2\cos\psi + \kappa\rho_2\sin\psi\Big), \\ \rho_2' &= \rho_2 - \rho_2^3 + \nu\Big(\rho_2 - \rho_1\cos\psi - \kappa\rho_1\sin\psi\Big), \\ \psi' &= l(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \nu\left(\kappa\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cos\psi + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\sin\psi\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Состояниям равновесия системы дифференциальных уравнений (31) соответствуют периодические решения системы дифференциальных уравнений (27)–(30), а также комплексной системы дифференциальных уравнений (25). Последние замечания вытекают из замены (26), которая связывает системы (25) и (27)–(30).

В результате вопрос о нахождении циклов свелся к анализу следующей алгебро-тригонометрической системы уравнений:

$$\nu\rho_2(\cos\psi - \kappa\sin\psi) = (1+\nu)\rho_1 - \rho_1^3, \tag{32}$$

$$\nu\rho_1(\cos\psi + \kappa\sin\psi) = (1+\nu)\rho_2 - \rho_2^3, \tag{33}$$

$$l(\rho_1^2 - \rho_2^2) + \nu\left(\kappa\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cos\psi + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\sin\psi\right) = 0. \tag{34}$$

Отметим, что удобно и эффективно выделить два класса возможных решений у системы (32)–(34). Первый из них содержит те решения, для которых характерно равенство $\rho_1 = \rho_2$, второй — те, для которых эти компоненты различны, $\rho_1 \neq \rho_2$.

Пусть $\rho = \rho_1 = \rho$ $(\rho_1, \rho_2 > 0)$. Тогда из уравнения (34) вытекает, что $\sin\psi = 0$. Следовательно, $\psi = 0$ или $\psi = \pi$.

Если $\psi = 0$, то находим $\rho > 0$ как решение уравнения

$$(1+\nu) - \rho^2 = \nu \quad \Rightarrow \quad \rho = 1.$$

Во втором случае, когда $\psi = \pi$, находим соответствующее ρ из уравнения

$$(1+\nu) - \rho^2 = -\nu \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{1+2\nu}.$$

Итак, первый вариант $(\rho_1 = \rho_2)$ привел к нахождению двух состояний равновесия системы (32)–(34):

$$\begin{aligned}
&E_1: \quad \rho_1 = \xi_1, \quad \rho_2 = \xi_2, \quad \xi_1 = \xi_2 = 1, && \psi = \psi_* = 0;\\
&E_2: \quad \rho_1 = \xi_1, \quad \rho_2 = \xi_2, \quad \xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1+2\nu}, && \psi = \psi_* = \pi.
\end{aligned}$$

Состояние равновесия E_1 существует при всех ν и κ, а состояние равновесия E_2 существует, если $1+2\nu > 0$, иначе $\nu \in (-1/2, 0)\cup(0,\infty)$. Случай $\nu = 0$ можно исключить из анализа. Такой вариант означает, что в первоначальной постановке (см. (7)) $c = 0$. В свою очередь, $c = 0$ соответствует анализу двух не взаимодействующих экономик (отсутствию конкуренции).

Перейдем теперь к анализу устойчивости состояний равновесия E_1, E_2. Для этого используем известную теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному (первому) приближению. Для этого найдем матрицу Якоби $A = \{a_{j,k}\}$ с последующей подстановкой в нее координат состояний равновесия. Отметим, что в нашем случае

$$a_{11} = 1 - 3\rho_1^2 + \nu, \quad a_{12} = -\nu\cos\psi + \nu\kappa\sin\psi, \quad a_{13} = \nu\rho_2\sin\psi + \nu\kappa\rho_2\cos\psi,$$

$$a_{21} = -\nu\cos\psi - \kappa\nu\sin\psi, \quad a_{22} = 1 - 3\rho_2^2 + \nu, \quad a_{23} = \nu\rho_1\sin\psi - \nu\kappa\rho_1\cos\psi,$$

$$a_{31} = 2l\rho_1 + \nu\left(-\kappa\left(\frac{\rho_2}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2}\right)\cos\psi + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1^2}\right)\sin\psi\right),$$

$$a_{32} = -2l\rho_2 + \nu\left(\kappa\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2^2}\right)\cos\psi + \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2^2}\right)\sin\psi\right),$$

$$a_{33} = -\nu\kappa\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sin\psi + \nu\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\cos\psi.$$

После подстановки координат состояний равновесия E_1, E_2 получаем две соответствующие им матрицы Якоби

$$A_1 = \begin{pmatrix} \nu - 2 & -\nu & \nu\kappa \\ -\nu & \nu - 2 & -\nu\kappa \\ 2l - 2\nu\kappa & -2l + 2\nu\kappa & 2\nu \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 - 5\nu & \nu & -\nu\kappa\rho \\ \nu & -2 - 5\nu & \nu\kappa\rho \\ 2l\rho + 2\nu\kappa/\rho & -2l\rho - 2\nu\kappa/\rho & -2\nu \end{pmatrix},$$

где $\rho = \sqrt{1+2\nu}$.

Анализ устойчивости состояния равновесия E_1 предполагает изучение расположения собственных чисел матрицы A_1. Нетрудно найти, что $\lambda_3 = -2$, а два оставшихся корня характеристического уравнения находим как корни квадратного уравнения

$$P_a(\lambda) = \lambda^2 + p_a\lambda + q_a = 0,$$

где $p_a = 2(1-2\nu)$, $q_a = 4\nu[(\kappa^2+1)\nu-(1+l\kappa)]$. Анализ последнего квадратного уравнения приводит к следующему утверждению.

Лемма 2. *Система дифференциальных уравнений* (32)–(34) *при всех значениях параметров* ν *и* l *имеет состояние равновесия* $E_1 : \rho_1 = \rho_2 = 1$, $\psi = 0$. *Оно асимптотически устойчиво, если*

$$p_a = 2(1-2\nu) > 0, \quad q_a = 4\nu[(\kappa^2+1)\nu - (1+l\kappa)] > 0.$$

Состояние равновесия E_1 *неустойчиво, если хотя бы один из коэффициентов последнего квадратного трехчлена* $P_a(\lambda)$ *отрицателен.*

Для анализа устойчивости состояния равновесия E_2 рассмотрим матрицу A_2. Нетрудно убедиться, что одно из ее собственных чисел $\lambda_3 = -2(1+2\nu)$, т.е. $\lambda_3 < 0$ при всех ν, когда E_2 существует. Остальные собственные числа находим как корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p_p\lambda + q_p = 0,$$

где $p_p = 2(1+4\nu)$, $q_p = 4\nu\big[\kappa(1+2\nu)l + 1 + 3\nu + \kappa^2\nu\big]$.

Лемма 3. *Система дифференциальных уравнений* (32)–(34) *имеет состояние равновесия* E_2, *если* $1+2\nu > 0$. *Оно асимптотически устойчиво, если* $p_p > 0$, $q_p > 0$.

Отметим, что в типичной ситуации, когда $\nu > 0$, $l > 0$ (см. [6]) состояние равновесия E_2 всегда существует и асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании состояний равновесия у системы (32)–(34), для которых $\rho_1 \neq \rho_2$, т.е. заведомо отличных от E_1, E_2. Для этого рассмотрим уравнения (32), (33), из которых выразим $\cos\psi$, $\sin\psi$. Это можно сделать, если эти два уравнения рассматривать как систему из двух линейных уравнений относительно $\cos\psi$, $\sin\psi$. При этом ее определитель

$$\Delta = 2\kappa\nu^2\rho_1\rho_2 \neq 0,$$

если $\nu \neq 0$. Дополнительные определители системы (32), (33)

$$\Delta_1 = \nu\kappa\Big[(1+\nu)(\rho_1^2+\rho_2^2) - (\rho_1^4+\rho_2^4)\Big], \quad \Delta_2 = \nu(\rho_1^2+\rho_2^2)\Big[(1+\nu) - (\rho_1^2+\rho_2^2)\Big].$$

Следовательно,

$$\cos\psi = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sin\psi = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

В более подробной записи получаем следующие равенства:

$$\cos\psi = \frac{(1+\nu)(\rho_1^2+\rho_2^2) - (\rho_1^4+\rho_2^4)}{2\nu\rho_1\rho_2}, \quad \sin\psi = \frac{(\rho_2^2-\rho_1^2)\big[(1+\nu) - (\rho_1^2+\rho_2^2)\big]}{2\kappa\nu\rho_1\rho_2}.$$

Если теперь полученные равенства для $\cos\psi$, $\sin\psi$ подставить в уравнение (34), то после преобразований (например, сокращений на $\rho_2^2 - \rho_1^2 \neq 0$) получим систему алгебраических уравнений для определения положительных величин ρ_1, ρ_2:

$$2\kappa l\rho_1^2\rho_2^2 = \kappa^2\Big[(1+\nu)(\rho_1^2+\rho_2^2) - (\rho_1^4+\rho_2^4)\Big] + (\rho_1^2+\rho_2^2)\Big[(1+\nu) - (\rho_1^2+\rho_2^2)\Big], \tag{35}$$

$$4(\nu\kappa)^2\rho_1^2\rho_2^2 = \kappa^2\Big[(1+\nu)(\rho_1^2+\rho_2^2) - (\rho_1^4+\rho_2^4)\Big]^2 + (\rho_2^2-\rho_1^2)^2\Big[(1+\nu) - (\rho_1^2+\rho_2^2)\Big]^2. \tag{36}$$

Отметим, что уравнение (36) — это следствие основного тригонометрического тождества.

Положим

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = z, \quad \rho_1\rho_2 = w. \tag{37}$$

Используя замены (37), уравнение (35) можно записать следующим образом:

$$2\kappa lw^2 = \kappa^2(zM(z) + 2w^2) + zM(z), \tag{38}$$

где $M(z) = 1+\nu-z$. Из равенства (38), если $l-\kappa \neq 0$, можно выразить w^2:

$$w^2 = \frac{b}{2}zM(z), \quad b = \frac{\kappa^2+1}{\kappa(l-\kappa)}. \tag{39}$$

Если же $l = \kappa$, то $M(z) = 0$ или иначе $z = 1+\nu$.

Если теперь в уравнении (36) заменить $\rho_1^2\rho_2^2 = w^2$ на правую часть равенства (39), то в результате получим такой его вариант:

$$2(\nu\kappa)^2 bzM(z) = \kappa^2(1+b)^2 z^2 M^2(z) + (z - 2bM(z))zM^2(z),$$

которое эквивалентно двум равенствам

$$M(z) = 0, \tag{40}$$

или

$$\kappa^2(1+b^2)zM(z) + (z - 2bM(z))M(z) = 2(\nu\kappa)^2 b. \tag{41}$$

Уравнение (41) можно записать в виде квадратного уравнения

$$P_2(z,\nu,b) = P_2(z) = p_2 z^2 - p_1 z + p_0 = 0, \tag{42}$$

где $p_2 = p + 2b$, $p_1 = (1+\nu)(p+4b)$, $p_0 = 2b((1+\nu)^2 + \kappa^2\nu^2)$, $p = \kappa^2(1+b)^2 + 1$ ($p \geqslant 1$ при всех κ и b). Напомним, что $b = (\kappa^2+1)/(\kappa(l-\kappa))$, т.е. зависит от l — второго параметра в данной задаче.

Рассмотрим сначала равенство (40). Из него вытекает, что $z = 1+\nu$ и, в частности, $w^2 = 0$ (см. равенство (39)), если $l \neq \kappa$. Случай $l = \kappa$ следует рассматривать как особый; он реализуется крайне редко. Тем не менее и в последнем случае $w = 0$. Итак, в обоих вариантах получаем, что либо $\rho_1 = 0$, либо $\rho_2 = 0$. В данной задаче это посторонние решения.

Итак, основной содержательный вариант может быть реализован, если найти корни квадратного уравнения (42). При этом у данного уравнения интерес представляют лишь положительные корни ($\rho_1^2 + \rho_2^2 = z$). Еще одно ограничение возникает из-за равенства (39). Если $b > 0$, то $1 + \nu - z > 0$, т.е. $z < 1 + \nu$. При $b < 0$ получаем неравенство $z > 1 + \nu$.

Отметим также, что интерес для задачи представляют не неизвестные z и w ($z > 0$, $w > 0$), а ρ_1, ρ_2 как положительные корни системы алгебраических уравнений (37). При этом z — один из подходящих корней квадратного уравнения (42), а равенство (39) позволяет найти w.

Очевидно, что система алгебраических уравнений (37) имеет решения

$$\rho_1 = \xi_1 = \frac{\sqrt{z+2w} + \sqrt{z-2w}}{2}, \quad \rho_2 = \xi_2 = \frac{\sqrt{z+2w} - \sqrt{z-2w}}{2} \tag{43}$$

или

$$\rho_1 = \xi_2 = \frac{\sqrt{z+2w} - \sqrt{z-2w}}{2}, \quad \rho_2 = \xi_1 = \frac{\sqrt{z+2w} + \sqrt{z-2w}}{2}, \tag{44}$$

если, конечно, $z - 2w > 0$. Итак, в принципе, можем найти решения (43), (44), если z — корень квадратного уравнения (42), который удовлетворяет одному из следующих условий: $z \in (0, 1+\nu)$, если $b > 0$, или $z \in (\nu_*, \infty)$, если $b < 0$, где $\nu_* = \max(0, 1+\nu)$.

Анализ квадратного уравнения (42) был бы не очень сложной задачей, если бы не некоторые обстоятельства. Первое из них — это зависимость его коэффициентов от параметров. Во-вторых, достаточно сложный отбор решений, который обеспечивает содержательность равенств (43), (44). Поэтому анализ решений квадратного уравнения (42) был проведен численно, с использованием компьютера и результатов численного анализа из [6].

В заключение отметим, что определение величин ξ_1, ξ_2 при отыскании координат состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (31), для которых $\xi_1 \neq \xi_2$ представляет основную трудность. Третья координата определяется достаточно просто с помощью формул для $\cos\psi$ и $\sin\psi$. Пусть найдены величины ξ_1, ξ_2 (см. (43), (44)) и, естественно, z и w. Тогда при выборе варианта решения (43) получаем, что

$$\cos\psi = \frac{(1+\nu)z - z^2 + 2w^2}{2\nu w}, \quad \sin\psi = -\frac{\sqrt{z^2-4w^2}(1+\nu-z)}{2\kappa\nu w}.$$

Во втором варианте (см. (44)) получаем, что

$$\cos\psi = \frac{(1+\nu)z - z^2 + 2w^2}{2\nu w}, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{z^2-4w^2}(1+\nu-z)}{2\kappa\nu w}.$$

Две пары последних равенств, естественно дают два варианта значений $\psi = \psi_*$.

Далее состояния равновесия, отличные от E_1, E_2, будем обозначать E_a («асимметричные» состояния равновесия). Подчеркнем, что их всегда два, когда они существуют. Состояние равновесия, определяемое первым вариантом формул, будем обозначать E_{a3}, а второе — E_{a4}.

5. Некоторые результаты численного анализа. В этом разделе приведем некоторые численные результаты анализа задачи об определении координат асимметричного состояния равновесия, т.е. состояния равновесия, для которого $\xi_1 \neq \xi_2$. Этот анализ, естественно, зависит от выбора двух параметров, т.е. ν и l. В свою очередь, $l = l_2/l_1$, где комплексная постоянная l_1+il_2 — коэффициент при нелинейном слагаемом в уравнениях (22) (ее часто называют ляпуновской величиной).

Далее численные результаты будут приведены при уточненном выборе правых частей системы дифференциальных уравнений. Пусть

$$D(p_h) = p_h^{-k}, \quad S(p_h) = p_h^m,$$

где k, m — положительные числа. Как было показано в [6] при анализе бифуркаций Андронова—Хопфа у уравнения (2) (см. [6]) для ляпуновских величин

$$l_1 = l_1(m,k) = \pi\frac{k+m}{4+\pi^2}\left[\frac{4-11\pi}{5\pi}(k-m+1)^2 + k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2\right],$$
$$l_2 = l_2(m,k) = 2\frac{k+m}{4+\pi^2}\left[k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2 - (k-m+1)^2\frac{11+\pi}{5}\right].$$

При таком выборе $D(p_h)$, $S(p_h)$ и, следовательно, l_1, l_2, $l = l_2/l_1$ можно продемонстрировать, что вспомогательная нормальная форма (31) может иметь состояния равновесия, для которых $\rho_1 \neq \rho_2$ ($\xi_1 \neq \xi_2$). Приведем два соответствующих примера.

Пусть $k = 2$, $m = 0{,}02$. В таком случае оказалось, что

$$l_1 = -2{,}45937, \quad l_2 = -3{,}84979, \quad l = 1{,}56535.$$

Выберем $\nu = 0{,}13$. В таком случае оказалось, что

$$\xi_1 \approx 1{,}05766, \quad \xi_2 \approx 0{,}07859, \quad \psi_* \approx -0{,}43118\,\text{рад или } -24{,}70^\circ.$$

Нетрудно привести и еще один пример. Если $k = 2$, $m = 0{,}07$, $\nu = 1{,}49$, то

$$\xi_1 \approx 1{,}03265, \quad \xi_2 \approx 0{,}96569, \quad \psi_* \approx -0{,}031\,\text{рад или } -1{,}82^\circ.$$

Конечно, возможен более детальный численный анализ, и можно привести иные примеры, когда нормальная форма (31) имеет состояния равновесия третьего типа ($\rho_1 \neq \rho_2$); в рамках данной работы ограничимся этими двумя примерами.

6. Итоги анализа нормальной формы. Из предыдущих построений вытекает, что результаты анализа состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (31) позволяют сделать некоторые выводы для нормальной формы (25), а затем уже и для основной системы (8), если $h = H(1+\varepsilon)$.

Пусть система дифференциальных уравнений (31) имеет состояние равновесия $E_*(\xi_1, \xi_2, \psi_*)$ (это может быть E_1 или E_2, а также $E_{a,3}$ или $E_{a,4}$). Тогда такому состоянию равновесия соответствует однопараметрическое семейство периодических решений комплексной системы дифференциальных уравнений (25) (состояний равновесия в исключительной ситуации) следующего вида:

$$w_1(\Theta, \varphi_0) = \xi_1 \exp(i\sigma_*\Theta + i\varphi_0),$$
$$w_2(\Theta, \varphi_0) = \xi_2 \exp(i\sigma_*\Theta + i\psi_* + i\varphi_0),$$

где $\varphi_0 \in R$, ψ_* — третья координата состояния равновесия S_*. Наконец, используя уравнение (28)

$$\sigma_* = \kappa - l\xi_1^2 + \nu\left[\kappa\left(1 - \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\cos\psi_* - \frac{\xi_2}{\xi_1}\sin\psi_*\right]. \tag{45}$$

Пусть E_* — одно из грубых состояний равновесия системы (31), т.е. E_* — это либо E_1, либо E_2, либо $E_{a,3}$, $E_{a,4}$. Напомним, что состояние равновесия называют грубым, если спектр его устойчивости не имеет собственных значений, принадлежащих мнимой оси. В нашем случае собственные значения матрицы Якоби, вычисленной при координатах, равных координатам состояний равновесия, таковы, что $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$. Подчеркнем, что условия устойчивости и как следствие условия грубости для состояний равновесия E_1, E_2 были получены ранее (см. раздел 2). Для $E_{a,3}$, $E_{a,4}$ условия грубости следует проверять численно.

Из результатов работ [2–6] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Грубому состоянию равновесия* E_* *системы* (31) *соответствует предельный цикл* $C_*(\varepsilon)$ *системы* (8), *в которой* $h = H(1+\varepsilon)$ $(H = \pi/(2a))$. *Этот цикл образован однопараметрическим семейством периодических решений следующего вида* (*см.* (16), (17)):

$$p_1(t,\varepsilon) = p_0 + x_1(t,\varepsilon), \quad p_2(t,\varepsilon) = p_0 + x_2(t,\varepsilon),$$

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_1\beta\Big[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\Phi_0) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\Phi_0)\Big] + o(\varepsilon^{1/2}),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\xi_2\beta\Big[\exp(i\sigma(\varepsilon)t + i\Phi_0 + i\psi_*) + \exp(-i\sigma(\varepsilon)t - i\Phi_0 - i\psi_*)\Big] + o(\varepsilon^{1/2}).$$

Здесь ψ_* *— третья координата состояния равновесия нормальной формы* (31),

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma + \Big(\frac{\pi g}{2}\sigma_* - \sigma\Big)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

где постоянные β, σ_* *были определены ранее* (*см. равенства* (24), (45)), *а* Φ_0 *— произвольная действительная постоянная.*

Наконец, цикл $C_*(\varepsilon)$ *орбитально асимптотически устойчив, если состояние равновесия* E_* *асимптотически устойчиво, и он неустойчив, если* E_* *неустойчиво.*

Отметим особо, что состоянию равновесия E_1 соответствует цикл $C_1(\varepsilon)$, у которого $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\psi_* = 0$, т.е. получаем, что $x_1(t,\varepsilon) = x_2(t,\varepsilon)$. Такой цикл принято называть *синхронным*, или циклом Андронова—Хопфа (см. [4, 8]). Если рассматриваем цикл $C_2(\varepsilon)$, отвечающий состоянию равновесия E_2, то $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1+2\nu}$ $(1+2\nu > 0)$ и $\psi_* = \pi$. Такой цикл принято называть *противофазным*, или циклом Гюйгенса (см. [1, 4, 7, 8]).

Наконец, как было показано, существуют и циклы третьего типа, когда $\xi_1 \neq \xi_2$, $\psi_* \neq 0$, $\psi_* \neq \pi$. Такие циклы можно назвать *асимметричными* (см., например, [4, 5]).

7. Заключение. В работе рассмотрена модификация известной модели «спрос–предложение». К стандартной версии был добавлен учет двух факторов: запаздывание спроса и предложения, а также фактор наличия конкуренции. Полученная таким образом система из двух уравнений с отклоняющимся аргументом показала, что динамика решений такой системы достаточно богата и естественна с экономической точки зрения.

У изучаемой в данной работе математической модели существует состояние равновесия $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 > 0$, которое в зависимости от параметров системы может быть устойчивым или неустойчивым. Напомним, что в первоначальном варианте модели это было исключено: состояние экономического равновесия всегда было устойчиво. В рассматриваемой системе дифференциальных уравнений с запаздыванием возможны циклы трех видов: синхронный, противофазный и асимметричный. В циклах последнего типа амплитуды колебаний подсистем могут быть различными. Особо отметим, что в рассматриваемом варианте модели существует и устойчив противофазный цикл, если $c > 0$, а остальные параметры изучаемой модели изменяются в широком и естественном диапазоне. Тем самым такой цикл достаточно типичен.

Такой вывод совпадает с выводом Гюйгенса, когда он изучал синхронизацию колебаний двух идентичных маятников и экспериментально показал, что для них характерны противофазные колебания. Конечно, задача Гюйгенса и данная задача внешне далеки друг от друга, но выводы во многом аналогичны.

Полученные в статье результаты базируются на методе изучения нелинейных динамических систем, в первую очередь, на методах интегральных многообразий и теории нормальных форм.

Экономическая интерпретация полученных результатов достаточно прозрачна. Например, наличие устойчивого цикла Андронова—Хопфа означает, что колебания двух экономик происходят синхронно: подъем первой экономики сопровождается подъемом экономики второго субъекта экономической деятельности. Реализация устойчивого противофазного цикла означает, что подъем экономики первого субъекта сопровождается депрессией конкурента, а затем их роли меняются.

Особый интерес представляют асимметричные циклы, когда колебания подсистем происходят с разной амплитудой, причем разность фаз этих колебаний отлична от 0 и π. Внешне эти колебания можно интерпретировать как несинхронные. На самом деле они представляют собой более сложный вариант синхронной динамики, когда синхронизация проявляет себя достаточно нестандартным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
2. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 57–66.
3. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Математическая модель рынка и эффект запаздывания// в кн.: Математика в Ярославском университете: Сборник обзорных статей к 40-летию математического факультета. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2016. — С. 132–151.
4. *Куликов Д. А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов// Изв. вузов. Прикл. нелин. дин. — 2006. — *14*, № 5. — С. 120-132.
5. *Куликов Д. А.* Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах// Прикл. мат. мех. — 2010. — *74*, № 4. — С. 543–559.
6. *Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *217*. — С. 41–50.
7. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю.* Синхронизация. Фундаментальное явление. — М.: Техносфера, 2003.
8. *Kulikov A. N., Kulikov D. A., Radin M. A.* Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model// Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — *25*, № 1. — P. 93–111.
9. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
10. *Puu T.* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. — New York: Springer-Verlag, 2000.
11. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение о предоставлении субсидии из федерального бюджета №075-02-2025-1636).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatol'evich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль
(P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)
E-mail: supfro@yandex.ru