



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 46–60
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-46-60

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ЗАРЕМБЫ И УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2025 г. В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для полулинейного волнового уравнения в первом квадранте, в которой на пространственной полупрямой задаются условия Коши, а на временной полупрямой — граничное условие Зарембы. Исходная задача переформулирована как задача с условиями сопряжения на характеристиках. Наложённые неоднородные условия сопряжения определяют разрыв решения на характеристиках единственным образом. Методом характеристик построено решение в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Изучена разрешимость этих уравнений, а также зависимость от начальных данных и гладкость их решений. Для рассматриваемой задачи доказана единственность решения и установлены условия, при которых существует её классическое решение. В случае недостаточно гладких данных задачи построено слабое решение. Полученные математические результаты применены для решения задачи из теории горения.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия сопряжения, нелинейное волновое уравнение, метод характеристик.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE ZAREMBA BOUNDARY CONDITION AND CONJUGATION CONDITIONS FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION

© 2025 V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO

ABSTRACT. We consider an initial-boundary value problem for a semilinear wave equation in the first quadrant in which we pose the Cauchy conditions on the spatial half-line and the Zaremba boundary condition on the time half-line. We reformulate this problem as a problem with conjugation conditions on the characteristics. The imposed inhomogeneous conjugation conditions uniquely define discontinuity of the solution on the characteristics. By the method of characteristics, we construct a solution in an implicit analytical form as a solution of some integro-differential equations. The solvability of these equations and the dependence on the initial data and the smoothness of their solutions are examined. For the problem considered, we prove the uniqueness of a solution and establish conditions of the existence of a classical solution. A mild solution is constructed in the case of insufficiently smooth data of the problem. The obtained mathematical results are applied to a problem from combustion theory.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, conjugation conditions, nonlinear wave equation, method of characteristics.

AMS Subject Classification: 35Axx, 35Lxx

1. Постановка задачи. В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}$ рассмотрим смешанную задачу для нелинейного уравнения вида

$$\square_a u(t, x) = \mathcal{N}[u](t, x) := f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

с условиями Коши

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

и граничным условием Зарембы

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, t_*], \quad (3)$$

$$\alpha(t)u(t, 0) + \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [t_*, \infty), \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) использованы следующие обозначения: $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ — оператор Даламбера ($a > 0$ для определенности), t_* — положительное действительное число, f — функция, заданная на множестве $\bar{Q} \times \mathbb{R}^3$, φ и ψ — функции, заданные на полупрямой $[0, \infty)$, α и μ_1 — функции, заданные на отрезке $[0, t_*]$, и μ_2 — функция, заданная на полупрямой $[t_*, \infty)$.

Классическое решение задачи (1)–(4) с $\alpha \equiv 0$ было построено в [26]. В случае волнового уравнения и условия Неймана (4), т.е. $f(t, x, u, u_t, u_x) = f(t, x)$ и $\alpha \equiv 0$, решение задачи (1)–(4) произвольной гладкости было построено в [5].

Можно рассматривать задачу (1)–(4) как две связанные начально-краевые задачи: первая смешанная задача и третья смешанная задача. Тогда в некоторых случаях удастся получить классическое¹ решение (см. [7, 23]) или обобщенное (см. [34, 36]) решение задачи (1)–(4) в рамках одного метода, но это сопряжено с рядом трудностей, если, например, не выполняются условия согласования. Поэтому в данной работе будем рассматривать задачу (1)–(4) как единое целое.

Задачи вида (1)–(4) возникают в математической теории горения. При этом часто полагают $\mu_1(0) \neq \varphi(0)$ (см. [38]), т.е. не выполняется одно из необходимых условий согласования. Это влечет невозможность построения классического решения задачи (1)–(4) во всей четверти плоскости. Следовательно, представляется целесообразным предложить какое-либо другое определение решения задачи (1)–(4), чтобы оно было классическим на меньшем множестве, т.е. принадлежало классу $C^2(\bar{Q} \setminus \Gamma)$. Можно воспользоваться подходом из работ авторов [6, 8, 24]; при этом на множестве Γ , которое является объединением двух характеристик, будут задаваться условия согласования. Это приводит к следующей формулировке.

Задача (1)–(4) с условиями сопряжения на характеристиках. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и (4), и следующим условиям сопряжения:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)), \quad t \in [0, \infty), \quad (5)$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad (6)$$

где $\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)) \in \mathbb{R}$ — функция с параметром $\varphi(0) - \mu_1(0)$, удовлетворяющая естественному условию согласования

$$\gamma(t; 0) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad \gamma(0; s) = s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Здесь через $()^\pm$ обозначены предельные значения функции u , вычисляемые с разных сторон относительно кривой $x = r(t)$, т.е.

$$(u)^\pm(t, x = r(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} u(t, r(t) \pm \delta).$$

При таком определении решение задачи (1)–(4) не обязано принадлежать пространству $C^2(\bar{Q})$; от него требуется лишь принадлежность классу $C^2(\tilde{Q})$, где

$$\tilde{Q} = \bar{Q} \setminus \{(t, x) \mid x - at = 0 \vee x - at = -at^*\}.$$

Однако при выполнении некоторых дополнительных условий согласования такое решение будет классическим в обычном смысле, т.е. из класса $C^2(\bar{Q})$. Кроме того, отметим, такой подход делит единую задачу (1)–(7) на три связанные задачи (для ясности см. рис. 1):

¹Отметим, что в [7] в условии согласования (13) была допущена опечатка; должно быть: $\varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) + \psi'(0) = \mu'(0)$; ср., например, с [7, формула (14)], где приведены правильные условия сопряжения

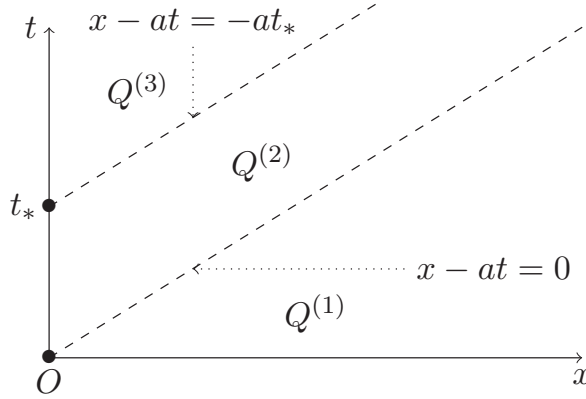


Рис. 1. Разделение области Q характеристиками $x - at = 0$ и $x - at = -at_*$ на три подобласти: $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$ и $Q^{(3)}$.

- (i) Задача Коши (1) и (2) в области $Q^{(1)} = Q \cap \{(t, x) \mid x - at > 0\}$.
- (ii) Задача Пикара (1), (3) и (5) в области $Q^{(2)} = Q \cap \{(t, x) \mid -at_* < x - at < 0\}$. Здесь следует упомянуть, что условие (7) фактически является необходимым и достаточным условием согласования в этой задаче Пикара (подробнее см. [4]).
- (iii) Задача Пикара (1), (4) и (6) в области $Q^{(3)} = Q \cap \{(t, x) \mid x - at < -at_*\}$.

Поскольку решение каждой такой подзадачи является классическим по отдельности, то решение задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) из класса $C^2(\tilde{Q})$ также будем считать классическим.

В случае $\alpha \equiv 0$ решение задачи (1)–(7) было анонсировано в [25].

При $f(t, x, u, u_t, u_x) = g(t, x)u$, $t_* = +\infty$ и $\gamma \equiv \text{const}$ — первая смешанная задача для линейного уравнения Клейна–Гордона–Фока с переменным массовым коэффициентом — задача (1)–(7) была изучена в [9] (строго говоря, там рассматривалась задача не в четверти плоскости, а в полуполосе, однако в силу конечной скорости распространения колебаний из тех результатов следует также разрешимость задачи в четверти плоскости).

Следует сказать, что подобные задачи с условиями сопряжения для гиперболических уравнений, представленных во втором каноническом виде, рассматривались в [1–3, 11, 12]. В [10] изучалась похожая задача для уравнения Клейна–Гордона–Фока с нелокальными краевыми условиями. Отметим также работу [13], где было получено обобщенное решение задачи Коши с условиями согласования на некоторой гиперплоскости.

Замечание 1. Функцию γ в условии (5) следует определять из физических соображений. В разделе 8 будет показано, как это можно сделать.

2. Основные результаты. В этом разделе мы сформулируем основные результаты статьи: теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(4), доказательство которых будет представлено в последующих разделах настоящей работы.

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \varphi \in C^2([0, \infty)), \quad \psi \in C^1([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C^2([0, t_*]), \quad \mu_2 \in C^1([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in C^1([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C^2([0, \infty)), \end{aligned} \quad (8)$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x, u, u_t, u_x) - f(t, x, z, z_t, z_x)| \leq L(t, x)(|u - z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|) \quad (9)$$

с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) имеет единственное решение и в классе $C^2(\tilde{Q}) \cap C(Q_0)$, где $Q_0 = \overline{Q} \setminus \{(t, x) \mid x - at = 0\}$. Это

решение представляется соотношениями

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$u^{(1)}(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \mathcal{N}[u](\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (11)$$

$$u^{(2)}(t, x) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - u^{(1)}\left(\frac{at - x}{2a}, \frac{at - x}{2}\right) + u^{(1)}\left(\frac{x + at}{2a}, \frac{x + at}{2}\right) + \gamma\left(\frac{at - x}{2a}; \varphi(0) - \mu_1(0)\right) - \gamma\left(\frac{x + at}{2a}; \varphi(0) - \mu_1(0)\right) - \frac{1}{4a^2} \int_{at-x}^{x+at} dz \int_0^{x-at} \mathcal{N}[u^{(2)}]\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{y + z}{2}\right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (12)$$

$$u^{(3)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}]\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{y + z}{2}\right) dz - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right) + \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left[2a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(z) u^{(2)}\left(\frac{t_* + z}{2}, \frac{a(z - t_*)}{2}\right) \exp\left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta\right) dz + 2u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) \exp\left(-a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\eta) d\eta\right) - \mu_1(t_*) - a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \exp\left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta\right) \times \left(\mu_2(z) + \frac{1}{2a^2} \int_{-at_*}^{-az} \mathcal{N}[u^{(3)}]\left(\frac{az - y}{2a}, \frac{az + y}{2}\right) dy\right) dz\right], \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (13)$$

Замечание 2. Решение u смешанной задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), построенное в теореме 1, принадлежит классу $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu_1(0) = \varphi(0)$.

Из теоремы 1 фактически следует следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия гладкости (8) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное решение u в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad (14)$$

$$\mu_1'(0) = \psi(0), \quad (15)$$

$$\mu_1''(0) = f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0)) + a^2 \varphi''(0), \quad (16)$$

$$\mu_2(t_*) = \alpha(t_*) \mu_1(t_*) + \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0), \quad (17)$$

$$\mu_2'(t_*) = \alpha'(t_*) \mu_1(t_*) + \alpha(t_*) \mu_1'(t_*) + \partial_t \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0). \quad (18)$$

Это решение представляется соотношениями (10)–(13), где $\gamma \equiv 0$.

Если данные задачи (1)–(4) недостаточно гладкие, то можно рассматривать обобщенные решения в самых разных вариациях. Приведем один из таких способов.

Определение 1. Следуя [18], функцию u , представимую в виде (10)–(13), где

$$\gamma : [0, \infty) \ni t \mapsto \gamma(t; \varphi(0) - \mu_1(0)) \in \mathbb{R}$$

— функция, удовлетворяющая условию (7), назовем *слабым решением* задачи (1)–(4).

В разделе 7 сравним определение 1 слабого решения с другими определениями обобщенных решений.

Замечание 3. В определении 1 слабого решения мы требуем, чтобы функция γ , задающая разрыв решения на характеристике $x - at = 0$, была найдена заранее, а не постулируем ее вид. Это диктуется тем, что решение должно быть физически корректным (или быть хотя бы близким к таковому), поскольку во многих физических приложениях, например, тепловых ударах, начальные и граничные данные не совпадают в общей точке $(0, 0)$.

Замечание 4. Любое классическое решение задачи (1)–(4) является также слабым решением этой задачи.

Замечание 5. Если выполняются дополнительные условия гладкости (8) и согласования (14)–(18), то слабое решение задачи (1)–(4) является классическим.

Имеют место теоремы существования и единственности слабого решения задачи (10)–(13).

Теорема 3. Пусть выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} f &\in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \varphi \in C^1([0, \infty)), \quad \psi \in C([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C^1([0, t_*]), \quad \mu_2 \in C([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in C([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C^1([0, \infty)), \end{aligned} \quad (19)$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение и в классе $C^1(\tilde{Q}) \cap C(Q_0)$. Это решение непрерывно зависит от функций $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, \alpha$ и γ .

Теорема 4. Пусть функция f имеет вид

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = F(t, x) + g(t, x, u) \quad (20)$$

выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} F &\in L^1_{\text{loc}}(\overline{Q}), \quad g \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C([0, \infty)), \quad \psi \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty)), \\ \mu_1 &\in C([0, t_*]), \quad \mu_2 \in L^1_{\text{loc}}([t_*, \infty)), \quad \alpha_2 \in L^1_{\text{loc}}([t_*, \infty)), \quad \gamma \in C([0, \infty)), \end{aligned}$$

и функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$ класса $L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$. Смешанная задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение и в классе $C(\tilde{Q})$. Это решение непрерывно зависит от функций $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, \alpha$ и γ .

Замечание 6. Слабое решение u смешанной задачи (1)–(4), построенное в теоремах 3 и 4, принадлежит классу $C(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования $\mu_1(0) = \varphi(0)$.

3. Интегро-дифференциальные уравнения. В этом разделе будет показано, что решение задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) эквивалентно решению связанных интегро-дифференциальных уравнений (11)–(13).

Итак, пусть функция u принадлежит классу $C^2(\tilde{Q})$ и выполняются условия гладкости (8). Тогда, согласно [24], имеет место представление (11), где $u^{(1)}$ определяется формулой (10). Для вывода уравнения (12), где $u^{(2)}$ определяется выражением (10), выберем четыре точки

$$A_1 \left(\frac{at - x}{2a}, \frac{at - x}{2} \right), \quad B_1 \left(t - \frac{x}{a}, 0 \right), \quad C_1(t, x), \quad D_1 \left(\frac{at + x}{2a}, \frac{at + x}{2} \right)$$

из области $\overline{Q^{(2)}}$, учтем граничное условие (3): $u(B_1) = \mu(t - a^{-1}x)$ — и тот факт, что точки A_1 и D_1 лежат на характеристике $x - at = 0$; следовательно, $u(A_1)$ и $u(D_1)$ могут быть вычислены из

уравнения (11) и условия (5). Применив тождество криволинейного характеристического параллелограмма [29], получим представление (12). Равенство (13), где $u^{(3)}$ определяется выражением (10), может быть также получено с помощью тождества криволинейного характеристического параллелограмма. Для этого выберем точки

$$A\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right), \quad B\left(t - \frac{x}{a}, 0\right), \quad C(t, x), \quad D\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right)$$

из множества $\overline{Q^{(3)}}$, учтем условия $u(A) = u^{(2)}(A)$ и $u(D) = u^{(2)}(D)$, обозначим $g(t) = u^{(3)}(t, 0)$, где g — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, которая будет определена в дальнейшем, и получим

$$u^{(3)}(t, x) = g\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) dz - \\ - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (21)$$

Для определения функции g воспользуемся граничным условием (4). Подставляя функцию u , заданную выражениями (10)–(12) и (21), в (4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\alpha(t)g(t) - \frac{g'(t)}{a} = \mathcal{E}(t) := \\ := \mu_2(t) + \frac{1}{2a^2} \int_{-at_*}^{-at} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{at-y}{2a}, \frac{at+y}{2}\right) dy - \partial_x u^{(2)}\left(\frac{at + at_*}{2a}, \frac{at - at_*}{2}\right) - \\ - \frac{1}{a} \partial_t u^{(2)}\left(\frac{at + at_*}{2a}, \frac{at - at_*}{2}\right), \quad t \in [t_*, \infty).$$

Из условия сопряжения (6) следует условие Коши $g(t_*) = \mu_1(t_*)$. Значит, функция g определяется формулой

$$g(t) = \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left(\int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{R}(\xi) \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi + \mu_1(t_*)\right), \quad t \in [t_*, \infty),$$

где $\mathcal{R} = -a\mathcal{E}$. Таким образом, имеет место равенство

$$u^{(3)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{at+x} \mathcal{N}[u^{(3)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right) dz - \\ - u^{(2)}\left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2}\right) + u^{(2)}\left(\frac{at + at_* + x}{2a}, \frac{at - at_* + x}{2}\right) + \\ + \exp\left(a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\xi) d\xi\right) \left(\int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{R}(\xi) \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi + \mu_1(t_*)\right), \\ t \in [t_*, \infty), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}. \quad (22)$$

Упростим уравнение (22). Для этого рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J} = \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \left\{ a \partial_x u^{(2)}\left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2}\right) - \partial_t u^{(2)}\left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2}\right) \right\} \exp\left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta\right) d\xi. \quad (23)$$

Обозначим

$$\mathcal{U}(\xi) = \exp \left(-a \int_{t_*}^{\xi} \alpha(\eta) d\eta \right), \quad \mathcal{V}(\xi) = 2a^{-1}u^{(2)} \left(\frac{\xi + t_*}{2}, \frac{a\xi - at_*}{2} \right)$$

и выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{U}(\xi) \mathcal{V}'(\xi) d\xi = (UV)(\xi) \Big|_{\xi=t_*}^{\xi=t-a^{-1}x} - \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \mathcal{U}'(\xi) \mathcal{V}(\xi) d\xi = \\ &= 2a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(z) u^{(2)} \left(\frac{t_* + z}{2}, \frac{az - at_*}{2} \right) \exp \left(-a \int_{t_*}^z \alpha(\eta) d\eta \right) dz - 2\mu_2(t_*) + \\ &\quad + 2u^{(2)} \left(\frac{at + at_* - x}{2a}, \frac{at - at_* - x}{2} \right) \exp \left(-a \int_{t_*}^{t-a^{-1}x} \alpha(\eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Из формул (22)–(24) следует представление (13).

Покажем теперь, что любая функция u из классов, которая представима в виде (10)–(13), где при этом $u^{(j)} \in C^1(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2, 3$, является решением задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), если выполняются условия гладкости (8). В самом деле, аналогично работе [30], в силу условий (8) заключаем, что $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Подставляя представления (10)–(13) в уравнение (1), убеждаемся, что функции $u^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют этому уравнению в $\overline{Q^{(j)}}$. Аналогично, подставляя эти представления в условия (2)–(4), приходим к выводу, что функция $u^{(1)}$ удовлетворяет начальным условиям (2), функция $u^{(2)}$ — условию Дирихле (3), функция $u^{(3)}$ — условию Робина (4). Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что выполняются условия сопряжения (5) и (6). Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполняются условия гладкости (8). Функция u из класса $C^2(\tilde{Q})$ является решением смешанной задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) тогда и только тогда, когда она представима в виде (10)–(13), где функции $u^{(j)} \in C^1(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2, 3$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть выполняются условия гладкости (19) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Тогда решения $u^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, уравнений (11)–(13) существуют, единственны в классе $C^1(\overline{Q^{(j)}})$ и непрерывно зависят от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 , α и γ .

Доказательство. Существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решения уравнений (11)–(13) при $\alpha \equiv 0$ доказаны в [26]. Разрешимость уравнения (13) при $\alpha \not\equiv 0$ доказывается аналогично. $\square$

4. Доказательство теоремы 1 и замечания 2. Теорема 1 следует из теорем 5 и 6. Чтобы при этом решение u принадлежало классу $C(\overline{Q})$, необходимо и достаточно выполнения условия $\gamma \equiv \text{const}$. Согласно (7), из $\gamma \equiv 0$ следует $\varphi(0) = \mu_1(0)$, и наоборот. Замечание 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 2. Докажем необходимость. Пусть функция $u \in C^2(\overline{Q})$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(4). Из начальных условий (2) и граничных условий (3) и (4) следуют величины $\partial_t^k \partial_x^p u(0, 0)$, где k, p — целые неотрицательные числа, $0 \leq k + p \leq 2$. Продифференцировав условие (3) по переменной t дважды и условие (4) по переменной t один раз, получим

$$\partial_t u(t, 0) = \mu_1'(t), \quad \partial_t^2 u(t, 0) = \mu_1''(t), \quad t \in [0, t_*), \quad (25)$$

$$\alpha(t) \partial_t u(t, 0) + \partial_t \partial_x u(t, 0) + u(t, 0) \alpha'(t) = \mu_2'(t), \quad t \in [t_*, \infty). \quad (26)$$

Аналогично, дифференцируя условия Коши (2) по переменной x , будем иметь

$$\partial_x u(0, x) = \varphi'(x), \quad \partial_x^2 u(0, x) = \varphi''(x), \quad \partial_x \partial_t u(0, x) = \psi'(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (27)$$

Из выражений (2), (3), (25), (27) и уравнения (1) при $t = 0$ и $x = 0$ получим

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \varphi(0), \quad \partial_x u(0, 0) = \varphi'(0), \quad \partial_x^2 u(0, 0) = \varphi''(0), \\ \partial_t u(0, 0) &= \psi(0), \quad \partial_x \partial_t u(0, 0) = \psi'(0), \\ u(0, 0) &= \mu_1(0), \quad \partial_t u(0, 0) = \mu_1'(0), \quad \partial_t^2 u(0, 0) = \mu_1''(0), \\ \partial_t^2 u(0, 0) &= f(0, 0, u(0, 0), \partial_t u(0, 0), \partial_x u(0, 0)) - a^2 \partial_x^2 u(0, 0), \end{aligned} \quad (28)$$

Из представлений (28) следуют равенства (14)–(16).

Теперь подставим $t = t_*$ в формулы (26):

$$\begin{aligned} \mu_2(t_*) &= \alpha(t_*)u(t_*, 0) + \partial_x u(t_*, 0), \\ \mu_2'(t_*) &= \alpha(t_*)\partial_t u(t_*, 0) + \partial_t \partial_x u(t_*, 0) + u(t_*, 0)\alpha'(t_*). \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку $u \in C^2(\overline{Q})$ и $\mu_1 \in C^2([0, t_*])$, то

$$\begin{aligned} u(t_*, 0) &= u(t_* - 0, 0) = \mu_1(t_* - 0) = \mu(t_*), \\ \partial_t u(t_*, 0) &= \partial_t u(t_* - 0, 0) = \mu_1'(t_* - 0) = \mu'(t_*), \end{aligned}$$

и, в таком случае, из (29) следуют равенства (17) и (18).

Также заметим, что функция $u \in C^2(\overline{Q})$ является решением задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), причем в силу непрерывности функции u на характеристике $x - at = 0$ верно равенство $\gamma \equiv 0$, которое не противоречит (7), поскольку ранее мы показали, что $\mu_1(0) = \varphi(0)$. Следовательно, имеют место представления (10)–(13) с $\gamma \equiv 0$ для решения $u \in C^2(\overline{Q})$.

Обоснуем *достаточность*. Заметим, что при условиях теоремы существует единственное решение u задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7) с некоторой условно произвольной функцией γ . Это решение представимо в виде (10)–(13). Более того, поскольку $\mu_1(0) = \varphi(0)$, то γ однозначно определяется как $\gamma \equiv 0$ в силу (7). При этом согласно доказательству теоремы 5 имеем $u^{(j)} \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$. Из условий (5), (6) и $\gamma \equiv 0$ также следует $u \in C(\overline{Q})$. Для того чтобы доказать принадлежность функции u классу $C^2(\overline{Q})$, необходимо установить совпадение на характеристиках $x = at$ и $x = at - at_*$ значений производных первого и второго порядков функций $u^{(j)}$, т.е.

$$\begin{aligned} \partial_t^k \partial_x^p u^{(1)}(t, x = at) &= \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at), \\ \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at - at_*) &= \partial_t^k \partial_x^p u^{(3)}(t, x = at - at_*), \end{aligned}$$

где k, p — целые неотрицательные числа, $1 \leq k + p \leq 2$. Для этого достаточно условий (14)–(18), что можно вывести из представлений (10)–(13), действуя в точности по алгоритму, изложенному в [27, 28, 30]. Таким образом, построено решение $u \in C^2(\overline{Q})$ задачи (1)–(4).

Докажем единственность классического решения. Предположим, что существуют два различных решения $u \in C^2(\overline{Q})$ и $v \in C^2(\overline{Q})$ смешанной задачи (1)–(4). Очевидно, они являются решениями задачи (1)–(4) с условиями сопряжения (5)–(7), где $\gamma \equiv 0$, что противоречит теореме 1.

6. Доказательство теорем 3, 4 и замечания 6. Теорема 3, гарантирующая существование и единственность слабого решения, следует из теоремы 6.

Если в уравнении (1) нелинейность f имеет вид (20), то уравнения (11)–(13) становятся интегральными, и их решения можно искать в классе непрерывных функций, как в [7, 23, 27, 28]; в указанных работах доказано существование, единственность и непрерывная зависимость от исходных данных решений этих интегральных уравнений в классе непрерывных функций. В этом случае непрерывность построенного слабого решения на характеристике $x - at = -at_*$ устанавливается непосредственной проверкой. Это окончательно доказывает теорему 4. Замечание 6 доказывается аналогично замечанию 2.

7. Обобщенное решение. В этом разделе сравним определение 1 слабого решения с другими подходами определения обобщенных решений задачи (1)–(4).

Наиболее очевидным определением обобщенным решением является решение u в пространстве Соболева $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$. Однако в этом случае по теореме вложения Соболева $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q) \subset C(\overline{Q})$, если $p > 1$. Из этого следует условие согласования (14), что делает невозможным рассмотрение разрывных решений в пространствах $W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$, $1 < p \leq \infty$.

Как и в предыдущих частях работы, введем функции $u^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) как сужение решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ задачи (1)–(4) на множества $\overline{Q^{(i)}}$ по формуле (10). Теперь проинтегрируем уравнение (1) по треугольнику

$$\mathcal{T}_1 = \text{Conv}\{(t, x), (0, x - at), (0, x + at)\},$$

где $(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}$, т.е. $\mathcal{T}_1 \subset \overline{Q^{(1)}}$. Применим теорему Грина для функций, принадлежащих пространствам Соболева (см. [40]), к левой части уравнения, вычислим линейные интегралы с использованием условий Коши (2) аналогично [24] и получим представление (11) решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(1)}}$. Аналогично, рассматривая множество

$$\mathcal{T}_2 = \text{Conv}\left\{(t, x), \left(t - \frac{x}{a}, 0\right), (0, at - x), (0, x + at)\right\} \subset \overline{Q^{(2)}},$$

выводим представление (12) с $\gamma \equiv 0$ решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(2)}}$. Поэтому такое определение не позволяет корректно с физической точки зрения трактовать разрыв решения на характеристике $x - at = 0$ даже в случае $p = 1$. Используя те же рассуждения, показываем, что решение $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ в области $\overline{Q^{(3)}}$ можно представить в виде (13). Следовательно, решение $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$ задачи (1)–(4) представимо в виде (10)–(13) с $\gamma \equiv 0$, т.е. оно является слабым с $\gamma \equiv 0$.

Можно показать, что если $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(Q)$ является решением задачи (1)–(4), то оно является кусочно непрерывным, т.е., возможно, после модификации функции u на множестве лебеговой меры нуль, $u \in C(\overline{Q^{(1)}})$ и $u \in C(\overline{Q^{(2)} \cup Q^{(3)}})$. Действительно, если $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(Q)$, то $\partial_t^2 u \in L_{\text{loc}}^1(Q)$ и $\partial_x^2 u \in L_{\text{loc}}^1(Q)$. Следовательно, $\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u = \mathcal{N}[u] \in L_{\text{loc}}^1(Q)$. Также, возможно, после модификации функции u на множестве лебеговой меры нуль, функции $\varphi = u(0, \cdot)$ и $\psi = \partial_t u(0, \cdot)$ принадлежат пространствам $W_{\text{loc}}^{1,1}([0, \infty)) \subset C([0, \infty))$ и $L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ соответственно (см. [17]). Итак, правая часть выражения (11) является непрерывной функцией. Это означает, что $u \in C(\overline{Q^{(1)}})$. Аналогично из представлений (12) и (13) доказываем, что $u \in C(\overline{Q^{(2)}})$ и $u \in C(\overline{Q^{(3)}})$. Так как из (12) и (13) следует равенство $[(u)^- - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0$, то $u \in C(\overline{Q^{(2)} \cup Q^{(3)}})$.

Теперь выберем произвольную ограниченную область $G \subset \overline{Q}$ с положительно ориентированной кусочно гладкой границей ∂G без точек возврата. Тогда, проинтегрировав уравнение (1) по множеству G и применив теорему Грина к левой части, получим интегральный закон сохранения

$$\oint_{\partial G} a^2 \partial_x u(t, x) dt + \partial_t u(t, x) dx + \iint_G \mathcal{N}[u](t, x) dt dx = 0 \quad (30)$$

для решения $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(Q)$. Уравнение (30) служит основой для определения обобщенного кусочно гладкого решения волнового уравнения в [14, гл. II, § 2, п. 9]. Однако определения, основанные на интегральном соотношении (30), не позволяют корректно трактовать разрывы решения (см. [24]).

Другим способом обобщения определения решения является концепция, в которой решения являются пределом классических решений.

Определение 2. Пусть выполняются условия гладкости (19). Тогда функция u является *сильным обобщенным решением* задачи (1)–(4), если $u \in C^1(\overline{Q})$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\overline{Q})$, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n, u)_{C^1(\overline{Q})} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\square_a u_n - \mathcal{N}[u_n], 0)_{C(\overline{Q})} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(0, \cdot), \varphi)_{C^1([0, \infty))} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\partial_t u_n(0, \cdot), \psi)_{C([0, \infty))} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n(\cdot, 0), \mu_1)_{C^1([0, t_*])} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\alpha(\cdot) u_n(\cdot, 0) + \partial_x u_n(\cdot, 0), \mu_2)_{C([t_*, \infty))} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\rho(x_1, x_2)_X$ — расстояние между элементами $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ метрического пространства X .

Определение 2 не допускает разрывные сильные обобщенные решения, однако позволяет считать решение «почти» классическим, поскольку оно является пределом классических решений, и, следовательно, отличается от классического некоторой погрешностью.

Замечание 7. Любое классическое решение задачи (1)–(4) также является сильным обобщенным решением этой задачи.

Замечание 8. Если существует сильное обобщенное решение u , то выполняются условия согласования (14), (15) и (17).

Доказательство. Пусть $u_n \in C^2(\overline{Q})$ — такая последовательность функций, что выполняются условия (31). Тогда $u_n(0, \cdot)$ и $u_n(\cdot, 0)$ сходятся поточечно к φ и μ_1 соответственно. Это влечет $u(0, 0) = \varphi(0) = \mu_1(0)$. По тем же соображениям получаем, что выполнены условия (15) и (17). $\square$

Замечание 9. Если выполняются дополнительные условия гладкости (8) и условия согласования (16) и (18), то сильное обобщенное решение u задачи (1)–(4) является классическим.

Аналогично [21] устанавливается следующий факт.

Утверждение 1. Пусть выполняются условия гладкости (19) и условия согласования (14), (15) и (17). Функция u является сильным обобщенным решением задачи (1)–(4) тогда и только тогда, когда функция u является слабым решением задачи (1)–(4) с $\gamma \equiv 0$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности сильного обобщенного решения.

Теорема 7. Пусть выполняются условия (19) и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица (9) с непрерывной функцией $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Смешанная задача (1)–(4) имеет сильное обобщенное решение u в классе $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (14), (15) и (17). Это решение определяется формулами (14), (10)–(16) и непрерывно зависит от функций φ , ψ , μ_1 , μ_2 и α .

Доказательство. Необходимость условий согласования (14), (15) и (17) доказана в замечании 7. Докажем достаточность. Согласно утверждению 1 имеем представления (10)–(16) сильного обобщенного решения u . Согласно теореме 6 уравнения (10)–(13) имеют единственные непрерывно дифференцируемые решения, которые непрерывно зависят от исходных данных. Из (10)–(16) и условий согласования (14), (15) и (17) следует, что $u \in C^1(\overline{Q})$. $\square$

8. Применение результатов к решению задачи из теории горения. Следуя [16, 38], рассмотрим задачу из математической теории горения для идеально изолированного, полубесконечного, очень тонкого, однородного и изотропного стержня постоянного сечения с постоянной температуропроводностью κ^2 ($\kappa = \sqrt{\lambda \rho^{-1} c^{-1}}$, где λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость). Пусть температура u задается функцией μ_1 на конце $x = 0$ стержня в моменты времени $t \in [0, t_*)$. После момента времени t_* конец $x = 0$ стержня больше не поддерживается при определенной температуре, вместо этого плотность теплового потока на границах задается функцией $\tilde{\mu}_2$ для всех моментов времени $t \geq t_*$. Также предположим следующее:

- (a) В момент времени $t = 0$ стержень не горит, а нагрет до температуры, близкой к температуре воспламенения.
- (b) Начальное распределение температуры $u(t = 0, \cdot)$ задается функцией φ , начальное распределение скорости изменения температуры $\partial_t u(t = 0, \cdot)$ задается функцией ψ .
- (c) Температура на конце $x = 0$ стержня в моменты времени $t \in (0, t_*)$ больше начальной температуры стержня.
- (d) Протекание процесса теплопереноса внутри стержня строго подчиняется закону Максвелла–Каттанео со временем релаксации τ_r , т.е. связь между температурой u и плотностью теплового потока q удовлетворяет уравнению

$$q(t, x) = -\lambda \partial_x u(t, x) - \tau_r \partial_t q(t, x). \quad (32)$$

- (е) Отсутствуют внутренние источники или стоки тепла, за исключением выделения тепла за счет протекания химической реакции, которая строго подчиняется закону Аррениуса, что дает уравнение теплового баланса в виде

$$\rho c \partial_t u(t, x) + \partial_x q(t, x) = \omega(u(t, x)), \quad (33)$$

где $\omega(u) = Q\rho k \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u)$, θ — функция Хевисайда, Q — количество тепла, выделяемого на единицу массы в результате химической реакции, k — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

Учитывая вышеизложенное, приходим к задаче (1)–(4), в которой

$$a = \frac{\kappa^2}{\tau_r}, \quad f(t, x, u, u_t, u_x) = \frac{\omega(u) + \tau_r \omega'(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r}, \quad \mu_2 = -\frac{\tilde{\mu}_2 + \tau_r \tilde{\mu}_2'}{\lambda}, \quad \alpha \equiv 0. \quad (34)$$

Поскольку верно равенство

$$\omega'(u) = Q\rho k E R^{-1} u^{-2} \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u) = ER^{-1}u^{-2}\omega(u),$$

то мы можем преобразовать функцию f , заданную выражением (34), к более простому виду:

$$f(t, x, u, u_t, u_x) = \frac{(1 + \tau_r E R^{-1} u^{-2} u_t) \omega(u)}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r}$$

с безразмерной величиной $\tau_r E R^{-1} u^{-2} \partial_t u$, которая, по-видимому, характеризует релаксацию тепла, полученного от внутреннего источника, т.е. ее малость свидетельствует о незначительности релаксационных явлений, связанных с выделением энергии в процессе горения, но не с теплопередачей: незначительность релаксационных эффектов теплопередачи можно оценить величиной $\tau_r \partial_t^2 u / \partial_t u$ (см. [31]).

Следует отметить, что данная математическая модель не учитывает выгорание вещества, что справедливо, если время воспламенения достаточно мало или если протекание реакций конденсированной фазы имеет нулевой порядок по концентрации. Более того, данная модель верна только до момента воспламенения t_{ig} , который можно определить на основе различных критериев (см., например, [37, 39]).

Наша цель — решить задачу (1)–(4), (34) без предположения истинности каких-либо условий согласования. Для этого мы можем рассмотреть задачу с условиями сопряжения, т.е. задачу (1)–(7), (34) и применить теорему 1 или 3. Последнее представляется возможным, поскольку функция f , заданная формулой (34), удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным; это следует из того факта, что функции ω и ω' являются ограниченными. В таком случае необходимо определить функцию γ из физических соображений.

Проведем вывод функции γ по схеме, изложенной в [15, 19, 20]. Сначала, следуя [33], перепишем уравнение (1), (34) в консервативном виде:

$$\begin{pmatrix} \partial_t u(t, x) \\ \partial_t q(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \rho^{-1} c^{-1} \\ \lambda \tau_r^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u(t, x) \\ \partial_x q(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^{-1} c^{-1} \omega(u(t, x)) \\ -\tau_r^{-1} q(t, x) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Из системы (35) следуют условия Ранкина–Гюгонио

$$\llbracket q \rrbracket = \sqrt{\lambda c \rho \tau_r^{-1}} \llbracket u \rrbracket. \quad (36)$$

Также система (35) влечет формулы

$$\llbracket \partial_t u \rrbracket + c^{-1} \rho^{-1} \llbracket \partial_x q \rrbracket = c^{-1} \rho^{-1} \llbracket \omega(u) \rrbracket, \quad \llbracket \partial_t q \rrbracket + \lambda \tau_r^{-1} \llbracket \partial_x T \rrbracket = -\tau_r^{-1} \llbracket q \rrbracket,$$

где $\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)^- - (\cdot)^+$.

Для нахождения функции γ понадобится лемма Адамара (см. [19, 20], которая для (35) имеет вид

$$\frac{\delta \llbracket u \rrbracket}{\delta t} = \llbracket \partial_t u \rrbracket + \sqrt{\frac{\lambda}{\tau_r c^{-1} \rho}} \llbracket \partial_x u \rrbracket. \quad (37)$$

Рассматривая систему (35)–(37), получаем эволюционное уравнение относительно $\llbracket u \rrbracket$:

$$\frac{\delta \llbracket u \rrbracket}{\delta t} = \frac{\llbracket \omega(u) \rrbracket}{2\rho c} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{2\tau_r} := \frac{\omega((u)^+ + \llbracket u \rrbracket) - \omega((u)^+)}{2\rho c} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{2\tau_r}.$$

Теперь, учитывая соотношение

$$\llbracket u \rrbracket(t, x = at) = \tilde{\gamma}(t) = -\gamma(t)$$

и условие (3), из которого следует $\tilde{\gamma}(0) = \mu_1(0) - \varphi(0)$, получаем задачу Коши

$$\gamma'(t) = \frac{\gamma(t)}{2\tau_r} - \frac{\omega(u(t, at + 0) - \gamma(t)) - \omega(u(t, at + 0))}{2\rho c}, \quad \gamma(0) = u_0(0) - \mu_T(0). \quad (38)$$

Уравнение (38) корректно, так как оно содержит функцию

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto u(t, at + 0) \mapsto \mathbb{R}, \quad (39)$$

которая определяется из решения задачи Коши в области $\overline{Q^{(1)}}$ и, таким образом, зависит только от функций φ , ψ , ω и коэффициентов c , ρ , κ .

Уравнение (38) в общем случае не интегрируется в квадратурах, но это не мешает доказать, что функция γ корректно определена на множестве $[0, \infty)$. В самом деле, если функция (39) непрерывна, то функция

$$[0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (t, \gamma) \mapsto \frac{\gamma}{2\tau_r} - \frac{\omega(u(t, at + 0) - \gamma) - \omega(u(t, at + 0))}{2\rho c} \in \mathbb{R} \quad (40)$$

тоже непрерывна. Поскольку функция (40) удовлетворяет условию Липшица по второй переменной, то по теореме Пикара—Линделефа существует единственное решение γ задачи Коши (38) в пространстве $C^1([0, \infty))$. Более того, согласно теореме о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, если $u \in C^1(\overline{Q^{(1)}})$, то $\gamma \in C^2([0, \infty))$.

В частном случае $\omega \equiv 0$ можно указать явный вид функции γ , а именно,

$$\gamma(t) = \gamma(0) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_r}\right).$$

8.1. Модифицированный закон Аррениуса. В данной работе мы фактически решили задачу из теории горения, где использовали закон Аррениуса для описания зависимости скорости химической реакции от температуры. Однако закон Аррениуса не является фундаментальным законом природы и не всегда выполняется. Результаты, полученные в данной работе, остаются справедливыми, если, например, вместо стандартного закона Аррениуса использовать одну из его модификаций и/или обобщений:

- (a) $\omega_1(u) = Q\rho k \exp(-ER^{-1}(u - T_0)^{-1})\theta(u - T_0)$, где T_0 — некоторая температура, которая определяется экспериментально (см. [22]);
- (b) $\omega_2(u) = Q\rho\beta u^m \exp(-ER^{-1}u^{-1})\theta(u)$, где $m \in [0, 1]$ — показатель степени слабого температурного члена ($m = 0$ соответствует стандартному закону Аррениуса, $m = 0,5$ предсказывается теорией столкновений, а $m = 1$ предсказывается теорией переходного состояния; см. [22], β — константа, не зависящая от температуры (см. [32]);
- (c) $\omega_3(u) = Q\rho k(1 + ER^{-1}u^{-1}(1 - T_0u^{-1})) \exp(-ER^{-1}u)\theta(u)$, где T_0 — некоторая температура, которая определяется экспериментально (см. [22]).

Заметим, что каждая из функций ω_i ($i = 1, 2, 3$) бесконечно дифференцируема и имеет ограниченную производную. Из этого следует, что функция

$$f : \overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, u, u_t, u_x) \mapsto \frac{\omega_i(u) + \tau_r \omega'_i(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r} \in \mathbb{R} \quad (41)$$

принадлежит классу $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$ и удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным с некоторой константой. Таким образом, замена функции ω на одну из функций ω_i ($i = 1, 2, 3$) в задаче (1)–(4), (34) сохраняет результаты, полученные в данной работе.

Результаты настоящей статьи позволяют рассматривать достаточно произвольный закон $\omega_{\text{gen}}(u)$ зависимости скорости химической реакции от температуры u . Заметим, что не имеет значения, как ведет себя функция $u \mapsto \omega_{\text{gen}}(u)$ при температуре u выше планковской T_P или

ниже абсолютного нуля, поскольку такие температуры невозможны. Поэтому вместо функции ω_{gen} , заданной определенным правилом, можно рассмотреть функцию

$$\tilde{\omega}_{\text{gen}}(u) = \begin{cases} \omega_{\text{gen}}(0), & x \leq -\varepsilon, \\ s_1(u), & -\varepsilon \leq x \leq 0, \\ \omega_{\text{gen}}(u), & 0 \leq x \leq T_P, \\ s_2(u), & T_P \leq x \leq T_P + \varepsilon, \\ \omega_{\text{gen}}(T_P), & x \geq T_P + \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} s_1(u) &= \omega_{\text{gen}}(0) + \frac{1}{2\varepsilon^4} \left(u(\varepsilon + u)^3 (2\varepsilon\omega'_{\text{gen}}(0) + \varepsilon u\omega''_{\text{gen}}(0) - 6u\omega'_{\text{gen}}(0)) \right), \\ s_2(u) &= \omega_{\text{gen}}(T_P) + (u - T_P)(\varepsilon + T_P - u)^3 \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\varepsilon^4} \left(\varepsilon(u - T_P)\omega''_{\text{gen}}(T_P) + 2(\varepsilon - 3T_P + 3u)\omega'_{\text{gen}}(T_P) \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Легко показать, что если $\omega_{\text{gen}} \in C^2([0, T_P])$, то функция $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ принадлежит классу $C^2(\mathbb{R})$ и ее производная ограничена. Следовательно, функция

$$f : \overline{Q} \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, u, u_t, u_x) \mapsto \frac{\tilde{\omega}_{\text{gen}}(u) + \tau_r \tilde{\omega}'_{\text{gen}}(u) u_t}{\rho c \tau_r} - \frac{u_t}{\tau_r} \in \mathbb{R} \quad (43)$$

удовлетворяет условию Липшица по трем последним переменным и принадлежит классу $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$. Таким образом, как и в предыдущем случае, замена функции ω на функцию $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ в задаче (1)–(4), (34) оставляет в силе полученные результаты.

Если функция ω не принадлежит классу $C^2([0, T_P])$, но принадлежит классу $C^1([0, T_P])$, то остаются справедливыми только результаты, касающиеся слабых и обобщенных решений, поскольку в этом случае функция f , определенная формулой (43), принадлежит только классу $C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, но не $C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}^3)$, где функция $\tilde{\omega}_{\text{gen}}$ определяется как и прежде, т.е. по формуле (41), но в представлениях (42) мы заменяем $\omega''_{\text{gen}}(0)$ и $\omega''_{\text{gen}}(T_P)$ на 0 и в результате получаем, что $\tilde{\omega}_{\text{gen}} \in C^1(\mathbb{R})$.

9. Заключение. В настоящей работе сформулированы достаточные условия существования единственного классического решения смешанной задачи в четверти плоскости для слабо квазилинейного волнового уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. Если эти условия не выполняются, изучена задача с условиями сопряжения на характеристиках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волкодав В. Ф., Бушков С. В., Илюшина Ю. А. Для уравнения гиперболического типа задача с производными по нормам на двух частях границы рассматриваемого множества и единственность ее решения // Мат. модел. краев. задачи. — 2004. — 3. — С. 43–48.
2. Волкодав В. Ф., Илюшина Ю. А. Характеристический принцип локального экстремума для одного уравнения гиперболического типа и его применение // Изв. вузов. Мат. — 2002. — № 4. — С. 13–17.
3. Волкодав В. Ф., Куликова Н. А. Задача Δ_2 для уравнения гиперболического типа с сопряжением пределов производных дробного порядка // Диффер. уравн. — 2003. — 39, № 12. — С. 1704–1707.
4. Корзюк В. И., Ковнацкая О. А. Задача Пикара на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2023. — 31, № 1. — С. 70–80.
5. Корзюк В. И., Козловская И. С., Соколович В. Ю., Севастюк В. А. Решение произвольной гладкости одномерного волнового уравнения для задачи со смешанными условиями // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2021. — 57, № 3. — С. 286–295.
6. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение смешанных задач из теории продольного удара по упругому полубесконечному стержню в случае отделения ударившего тела после удара // Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2024. — 60, № 2. — С. 95–105.

7. Корзюк В. И., Рудько Я. В. Классическое решение третьей смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 232. — С. 37–49.
8. Корзюк В. И., Рудько Я. В., Колячко В. В. Решения задач с разрывными условиями для волнового уравнения// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2023. — 3. — С. 6–18.
9. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна—Гордона—Фока с неоднородными условиями согласования// Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2019. — 63, № 1. — С. 7–13.
10. Корзюк В. И., Столярчук И. И. Решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна—Гордона—Фока с интегральными условиями в случае неоднородных условий согласования// Докл. Нац. акад. наук Беларуси. — 2019. — 63, № 2. — С. 142–149.
11. Куликова Н. А. Задача для уравнения гиперболического типа Δ_2 с сопряжением по нормали// Мат. модел. краев. задачи. — 2005. — 3. — С. 148–150.
12. Плотникова Ю. А. Краевые задачи для уравнений гиперболического и смешанного типов со специальными условиями сопряжения/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Стерлитамак, 2005.
13. Скалько Ю. И., Груднев С. Ю. Фундаментальное решение оператора задачи и его применение для приближенного решения начально-краевых задач// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 193. — С. 110–121.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
15. Christov I., Jordan P. M. Shock bifurcation and emergence of diffusive solitons in a nonlinear wave equation with relaxation// New J. Phys. — 2008. — 10. — 043027.
16. Frank-Kamenetskii D. A. Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.
17. Geymonat G. Trace theorems for Sobolev spaces on Lipschitz domains// Ann. Math. Blaise Pascal. — 2007. — 14. — P. 187–197.
18. Iwamiya T. Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces// Hiroshima Math. J. — 1986. — 16. — P. 499–530.
19. Jordan P. M. Growth and decay of shock and acceleration waves in a traffic flow model with relaxation// Phys. D. — 2005. — 207. — P. 220–229.
20. Jordan P. M., Lambers J. V. On the propagation and bifurcation of singular surface shocks under a class of wave equations based on second-sound flux// Int. J. Non-Linear Mech. — 2021. — 132. — 103696.
21. Kharibegashvili S. S., Jokhadze O. M. Global and blowup solutions of a mixed problem with nonlinear boundary conditions for a one-dimensional semilinear wave equation// Sb. Math. — 2014. — 205, № 4. — P. 573–599.
22. Kohout J. Modified Arrhenius equation in materials science, chemistry and biology// Molecules. — 2021. — 26. — 7162.
23. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and mild solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential// Izv. Irkutsk. Univ. Ser. Mat. — 2023. — 43. — P. 48–63.
24. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical and mild solutions of the Cauchy problem for a mildly quasilinear wave equation with discontinuous and distributional initial conditions// J. Math. Sci. — 2024. — 286, № 4. — P. 535–559.
25. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary-value problem with a mixed boundary condition and conjugation conditions for a mildly quasilinear wave equation// Мат. V Междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», посв. столетию со дня рождения Иванова Е. А. и Бриша Н. И. (Минск, 17–19 декабря 2024 г.). — Минск: БГУ, 2024. — С. 48–49.
26. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary-value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation// Proc. 11th Int. Workshop “Analytical Methods of Analysis and Differential Equations” (AMADE-2024) (Minsk, September 16–20, 2024). — Minsk: Belarusian State Univ., 2024. — P. 46–55.
27. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential// Differ. Equations. — 2022. — 58, № 2. — P. 175–186.
28. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential in a curvilinear quadrant// Differ. Equations. — 2023. — 59, № 8. — P. 1075–1089.
29. Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Curvilinear parallelogram identity and mean-value property for a semilinear hyperbolic equation of the second order// Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 2. — P. 61–74.

30. *Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I.* Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients// *Differ. Equations.* — 2017. — 53, № 1. — P. 74–85.
31. *Kostanovskiy A. V., Kostanovskaya M. E.* A criterion of applicability of the parabolic heat conduction equation// *Tech. Phys. Lett.* — 2008. — 34. — P. 500–502.
32. *Laidler K. J.* A glossary of terms used in chemical kinetics, including reaction dynamics (IUPAC recommendations 1996)// *Pure Appl. Chemistry.* — 1996. — 68. — P. 149–192.
33. *Levanov E. N., Sotskii E. I.* Some properties of the heat-transfer process in a motionless medium, taking account of heat-flux relaxation// *J. Eng. Phys.* — 1986. — 50. — P. 733–740.
34. *Maia S. A., Milla Miranda M.* Existence and decay of solutions of an abstract second order nonlinear problem// *J. Math. Anal. Appl.* — 2009. — 358. — P. 445–456.
35. *Roždestvenskiĭ B. L., Janenko N. N.* Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics. — Providence: Am. Math. Soc., 1983.
36. *Tsutsumi M.* Some nonlinear evolution equations of second order// *Proc. Jpn. Acad.* — 1971. — 47. — P. 950–955.
37. *Vilyunov V. N., Vorozhtsov A. B., Borovskoi I. G., Shelupanov A. A.* Ignition of condensed material// *Combust. Explos. Shock Waves.* — 1988. — 24, № 3. — P. 297–299.
38. *Viliunov V. N., Zarko V. E.* Ignition of Solids. — Amsterdam: Elsevier, 1989.
39. *Zeldovich Ya. B.* Ignition of Condensed Material// in: *Selected Works of Ya. B. Zeldovich. Vol. I: Chemical Physics and Hydrodynamics.* — Princeton: Princeton Univ. Press, 1992. — P. 255–261.
40. *Ženíček A.* Green's theorem from the viewpoint of applications// *Appl. Math. Praha* — 1999. — 44. — P. 55–80.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,

Minsk, Republic of Belarus;

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: korzyuk@bsu.by

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viacslavavicz)

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,

Minsk, Republic of Belarus)

E-mail: janycz@yahoo.com