



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 242 (2025). С. 22–40
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-242-22-40

УДК 519.24

АППРОКСИМАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ \mathbb{Z}^2

© 2025 г. Ю. П. ВИРЧЕНКО, Д. А. ЧЕРКАШИН

Аннотация. Разрабатывается метод построения аппроксимаций сколь угодно большой точности для вероятности перколяции из фиксированной вершины на квадратной решетке. На основе этого метода произведен расчет первого приближения вероятности перколяции, который дает для нее гарантированную оценку сверху вместе с оценкой снизу для порога перколяции.

Ключевые слова: вероятность перколяции, ветвящийся случайный процесс, иерархический граф, надкритический режим.

APPROXIMATIONS OF THE PERCOLATION PROBABILITY ON A PERIODIC GRAPH \mathbb{Z}^2

© 2025 Yu. P. VIRCHENKO, D. A. CHERKASHIN

ABSTRACT. A method for constructing approximations of arbitrarily high accuracy for the probability of percolation from a fixed vertex on a square lattice is developed. Based on this method, a first approximation of the percolation probability is calculated, which gives a guaranteed upper estimate for it together with a lower bound for the percolation threshold.

Keywords and phrases: percolation probability, branching random process, hierarchical graph, supercritical regime.

AMS Subject Classification: 60K35, 60J85

1. Введение. Теория перколяции первоначально возникла на основе анализа вероятностных моделей, связанных с описанием эффектов возникновения и/или исчезновения пространственного просачивания в конкретных физических ситуациях траекторий движения частицы при наличии случайных статических препятствий (см. [10, 12, 14]). Впоследствии стало ясно, что идея, лежащая в основе теории перколяции, допускает широкое обобщение в математическом смысле в виде понятия *просачивания случайных полей*, которое применимо не только к описанию физических ситуаций, возникающих в физике твердого тела, но и, например, в теории фильтрации жидкостей, а также к описанию аналогичных эффектов просачивания, имеющих не только физическое происхождение (см. [3–6]). Математическое оформление идей теории перколяции превратило ее к настоящему времени в своеобразный и довольно сложный раздел теории вероятностей.

Однако несмотря на значительное экстенсивное развитие теории, в ней, с нашей точки зрения, ощущается недостаточность аналитических методов исследования конкретных перколяционных моделей, т.е. таких методов, которые бы позволяли давать ответы на вопросы, представляющие интерес в приложениях. Одной из существенных причин такого положения является то, что в теории перколяции крайне затруднительно выявлять и в дальнейшем использовать в качестве аналитического инструмента какие-либо уравнения, которым могли бы подчиняться статистические характеристики отношения связности случайных множеств, являющееся объектом изучения

теории. Это связано, в частности, с тем, что понятие *связности случайных множеств* в евклидовых пространствах различной размерности по своей природе носит *пространственно нелокальный* характер. В связи с этим при решении задач теории перколяции приходится придумывать прямые методы аппроксимации вероятностей различных случайных событий, как это имеет место, например, в статистической механике (см., например, [17]). В настоящее время в дискретной теории перколяции имеются только лишь аналитические методы, основанные на так называемом *кластерном разложении* и контурных оценках (см., например, [13, 15]); здесь мы (с определенным умыслом) не упоминаем о методе, связанном с перечислением непересекающихся путей на графах). В частности, при вычислении вероятности перколяции из фиксированной вершины периодического графа на бесконечность, которая является основным объектом исследования настоящей работы, несмотря на суммируемость этого разложения, его сходимость очень медленная, и попытки увеличения скорости сходимости оказываются малоэффективными (см. [19]). Более того, это разложение не приспособлено для расчета самой интересной характеристики — *порога перколяции*.

Настоящая работа направлена на разработку метода аппроксимаций при расчете вероятности перколяции на так называемых периодических графах (см. [15]). Он основан на специальных перколяционных моделях, которые авторы называют *иерархическими* (см. [1]). Термин выбран нами по аналогии с иерархическими моделями Ф. Дайсона, используемыми в равновесной статистической механике решеточных систем при изучении фазовых переходов для гиббсовских случайных полей на кристаллических решетках (см. по этому поводу [8, 11]). Отличительным свойством этих моделей является то, что исследование каждой из них может быть сведено к изучению подходящей марковской цепи общего типа (см. [16]), связанной с марковским ветвящимся случайным процессом с дискретным временем (см., например, [7]).

В разделе 2 дано введение в систему понятий дискретной теории перколяции, в разделе 3 описан основной инструмент исследования — марковские цепи с ветвлением. В разделе 4 определены иерархические перколяционные модели, ассоциированные с так называемой квадратной решеткой. Раздел 5 посвящен конструкции аппроксимаций вероятности перколяции бернуллиевского случайного поля на квадратной решетке, а раздел 6 — описанию расчета аппроксимации первого порядка вероятности перколяции в рамках предлагаемого метода.

Настоящую работу следует рассматривать как продолжение работы [1]. По этой причине мы дублируем в тексте определения понятий, введенные в цитированной работе и приводим без доказательств наиболее важные для дальнейшего изложения утверждения, справедливость которых установлена в [1].

2. Теория перколяции на бесконечных графах. Пусть V — не более чем счетное множество, на котором определено бинарное симметричное отношение φ . Элементы множества V будем называть *вершинами* и обозначать в дальнейшем строчными латинскими буквами x, y, z и т. д. Наличие отношения φ между элементами x и y будем обозначать $\varphi(x, y)$. Симметричность отношения φ означает, что $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Отношение φ называется *отношением смежности*, а пара $\langle V, \varphi \rangle = \Gamma$ называется графом. Нас в дальнейшем будет интересовать только случай, когда множество V бесконечно.

Число элементов в каждом подмножестве $W \subset V$ будем обозначать символом $|W|$. В частности, если W бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$. Случайные множества W вершин будем называть *конфигурациями*. При этом семейства конфигураций являются случайными событиями. Для каждой вершины $x \in V$ кардинальное число $|\{y \in V : \varphi(x, y)\}|$ называется ее степенью. Если это число бесконечно, то считаем, что степень вершины бесконечна. В дальнейшем рассматриваем только графы, у которых степень каждой вершины конечна. Такие графы мы называем *локально компактными*.

Для каждой конфигурации W и отношения φ определено сужение φ_W этого отношения на W . В этом случае для каждой конфигурации определена пара $\langle W, \varphi_W \rangle = \Gamma_W$, которая является подграфом Γ_W графа Γ .

Так как существует естественная биекция между всеми конфигурациями W из V и случайными дихотомическими функциями $\rho(x)$, $x \in V$, принимающими значения в $\{0, 1\}$, устанавливаемая

формулой $W = \{x : \rho(x) = 1\}$, то определение фиксированной конфигурации $W \subset V$ эквивалентно определению соответствующей ей функции $\rho(x)$, $x \in V$.

Последовательность $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y \rangle$ вершин из V , в которой $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j \in I_n$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ называется *путем* на графе Γ из вершины x в вершину y . Если все вершины последовательности находятся в конфигурации W , то будем говорить, что путь $\gamma(x, y)$ расположен в W . При этом число n в последовательности $\gamma(x, y)$ называется длиной этого пути; этот факт будем записывать в виде $d(\gamma(x, y)) = n$. Кроме того, концевые вершины пути $\gamma(x, y)$ называются *связанными на W* ; этот факт мы будем записывать в виде $\varphi(x, y; W)$.

Если последовательность $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$ бесконечна, т.е. $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j \in \mathbb{N}$, то такой путь называется бесконечным с начальным узлом x . При этом полагаем $d(\gamma(x)) = \infty$.

Таким образом, для каждой конфигурации W определено бинарное симметричное отношение связности $\varphi(\cdot, \cdot; W)$. Если такое отношение имеет место для любой пары $\{x, y\} \subset W$, то подграф Γ_W называется *связным*. В частности, будем предполагать, что весь граф Γ является связным, т.е. отношение $\varphi(\cdot, \cdot; V)$ имеет место для любой пары вершин этого графа. Каждый связный подграф Γ_W , $W \subset V$, будем называть *кластером*. Кроме того, в дальнейшем, чтобы избежать недоразумений, будем отличать в обозначениях произвольным образом выбранные конфигурации и кластеры. Для последних мы будем использовать прописную букву C .

Очевидно, отношение связности $\varphi(\cdot, \cdot; W)$, транзитивно по отношению к любым трем вершинам x, y, z для любой конфигурации $W \subset V$. Поэтому оно является *отношением эквивалентности*. Согласно общему свойству таких отношений любая конфигурация W разбивается однозначным образом на дизъюнктивное семейство $\mathfrak{C}[W]$ связных кластеров $\{C_j; j \in \mathbb{N}\}$. Ввиду указанной выше биекции между конфигурациями и дихотомическими функциями любая такая функция $\rho(x)$, $x \in V$, определяет взаимно однозначным образом набор кластеров в V . Число вершин в каждом кластере C_j из набора, соответствующего конфигурации W , будем обозначать $|C_j|$, $j \in \mathbb{N}$. Если $x \in W$, то в наборе кластеров $\mathfrak{C}[W] = \{C_j; j \in \mathbb{N}\}$, составляющих эту конфигурацию, имеется единственный кластер $C(x)$, который ее содержит.

Для любой конфигурации W на соответствующем ей графе Γ_W возможно введение метрики. Расстояние $\text{dist}(x, y)$ между любыми двумя его вершинами x и y из Γ_W определяется формулой

$$\text{dist}(\gamma(x, y)) = \min \{ d(\gamma(x, y)); \{\gamma(x, y)\} \subset W \}.$$

Путь $\gamma(x, y)$ (соответственно, бесконечный путь $\gamma(x)$) называется *несамопересекающимся*, если для любых двух вершин x_j и x_k , $j \neq k$, из последовательности $\gamma(x, y) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y \rangle$ (соответственно, $\gamma(x) = \langle x = x_0, x_1, x_2, \dots \rangle$) выполняется $x_j \neq x_k$, $\{j, k\} \subset I_n \cup \{0\}$ (соответственно, $\{j, k\} \subset \mathbb{N}_+$).

Наибольший интерес в теории перколяции представляет случай, когда граф Γ перколяционной модели бесконечный и локально компактный. В этом случае конечность кластера, расположенного в V , эквивалентна конечности любого расположенного в нем самопересекающегося пути, и в таком графе Γ существуют сколь угодно удаленные друг от друга вершины.

Тип бесконечных графов, для которых ставятся и решаются задачи дискретной теории перколяции, определяется ее приложениями. Бесконечные графы, используемые в статистической математической физике и теории случайных процессов, по отношению к которым приложима теория перколяции, бывают в основном двух типов. Это так называемые *древесные бесконечные графы*, о которых пойдет речь в следующем разделе, и *периодические графы* (см. [15]), которые используются в статистической механике решетчатых систем (см. [17]). Ниже будут определены бесконечные графы *иерархического типа*, построение которых осуществляется на основе синтеза математических идей, используемых при построении графов указанных двух типов.

Определим теперь вероятностное пространство $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{W}, \mathcal{P} \rangle$ каждой перколяционной модели дискретной теории перколяции. Пространством \mathcal{W} элементарных случайных событий, очевидным образом, является семейством всех конфигураций $W \subset V$. σ -Алгебра \mathfrak{W} в вероятностном пространстве $\langle \mathcal{W}, \mathfrak{W}, \mathcal{P} \rangle$ должна порождаться не более чем счетным классом случайных событий, которые представляются семействами конфигураций. Для определения самосогласованной перколяционной модели потребуем, чтобы отношение смежности на графе Γ было измеримым относительно σ -алгебры \mathfrak{W} . В связи с этим выберем в качестве класса \mathfrak{W}_0 случайных событий,

порождающего эту σ -алгебру, класс всех так называемых *цилиндрических случайных событий* — семейств $\mathcal{A}[X] = \{W \subset V : X \subset W, |X| < \infty\}$ конфигураций, каждое из которых определяется конечным набором X вершин из V . Класс \mathfrak{W}_0 цилиндрических событий счетен, и поэтому порождаемая им минимальная σ -алгебра \mathfrak{W} , содержащая этот класс, автоматически является счетнопорожденной.

Пусть $Z \subset V$. Введем семейство конфигураций $\mathcal{C}[Z] = \{W \subset V : \varphi(x, y; W), \{x, y\} \subset Z\}$.

Теорема 1. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любого множества $Z \subset V$ семейство конфигураций $\mathcal{C}[Z]$ измеримо.

Справедливость этого утверждения дает основание ставить и решать задачу о вычислении вероятности каждого события, которое заключается в связанности любого конечного набора вершин графа Γ . Поэтому следствием теоремы 1, в частности, является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — связный бесконечный локально компактный граф. Тогда для любой вершины $x \in V$ семейство конфигураций $\mathcal{C}_\infty[x] = \{W : \exists(\gamma(x) \subset W : d(\gamma(x)) = \infty)\}$ измеримо.

Определение 1. Если на σ -алгебре \mathfrak{W} определена такая мера P , что для фиксированной вершины $x \in V$ графа Γ вероятность $P[x] = \Pr\{W \subset V : W \in \mathcal{C}_\infty[x]\} > 0$, то говорят, что из этой вершины существует перколяция.

Одной из центральных проблем теории перколяции является установление условий для графа Γ и меры P , которые приводят к существованию перколяции из какой-либо его вершины. В общем случае определение меры на бесконечных графах является математической проблемой. Примеры ее постановки и решения имеются в статистической механике решеточных моделей (см. [17]) и конструктивной квантовой теории поля (см. [18]), в рамках которых для определения меры P приходится устанавливать существование так называемого *термодинамического предела* распределений вероятностей для гиббсовских случайных полей. В настоящей работе мы ограничиваемся изучением перколяции для меры P , которая связана с *однородным бернуллиевским случайным полем* $\{\rho(x); x \in V\}$ на бесконечном графе, который называется *квадратной решеткой* \mathbb{Z}^2 .

Определение 2. Случайное дихотомическое поле $\{\rho(x); x \in V\}$, определяемое на не более чем счетном множестве V на основе набора вероятностей

$$\Pr\{\mathcal{A}[X]\} = c^{|X|}, \quad X \subset V, \quad (1)$$

при фиксированном значении $c \in [0, 1]$, называется *однородным бернуллиевским полем*.

Таким образом, распределение вероятностей однородного бернуллиевского поля полностью определяется значением одного параметра $c = \Pr\{\rho(x) = 1\} \in [0, 1]$ — вероятностью заполнения фиксированной вершины графа. Этот параметр будем называть *концентрацией*.

3. Марковские цепи с ветвлением. Циклом на графе Γ называется конечная последовательность $\langle x_0, x_1, \dots, x_n = x_0 \rangle$, в которой $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, n$. Связный граф Γ , не имеющий циклов, называется *древесным*. Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — *древесный граф*, у которого имеется какая-либо отмеченная вершина, которой припишем метку $\mathbf{0}$. Для любой вершины $x \in V$ существует единственный путь, связывающий ее с вершиной $\mathbf{0}$. Введем бесконечный дизъюнктивный набор множеств вершин S_m , $m \in \mathbb{N}$, так, что $S_m = \{x \in V : \text{dist}(\mathbf{0}, x) = m\}$. Очевидно, что

$$V = \{\mathbf{0}\} \cup \left(\bigcup_m S_m \right).$$

Множество S_m будем называть *поколением* порядка m . *Индексом ветвления* любой вершины $x \neq \mathbf{0}$ для *древесного графа* будем называть ее степень, уменьшенную на единицу. Каждая вершина y *древесного графа* из поколения S_m смежна с какой-либо одной вершиной $x \in S_{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$ — *связный бесконечный локально компактный древесный граф* с начальной вершиной $\mathbf{0}$. В этом случае индексы ветвления всех вершин конечны и конечны все наборы S_m ,

$m \in \mathbb{N}$. Бесконечный граф такого типа будем называть *однородным* (деревом Кэйли), если индекс ветвления у всех вершин $x \neq \mathbf{0}$ одинаков и равен степени нулевой вершины. Каждая вершина $x \in S_m$ из дерева Кэйли с индексом ветвления n смежна ровно с n вершинами $y \in S_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}_+$, $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Рассмотрим задачу теории перколяции из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе Γ при заданном на нем бернуллиевском случайном поле $\rho(x)$, $x \in \Gamma$. Введем в рассмотрение марковские цепи $\langle X_m \subset S_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$ со значениями в виде конечных наборов вершин из S_m , т.е. такие цепи обладают изменяющимся *пространством состояний* S_m , $m \in \mathbb{N}_+$. Эти случайные последовательности мы будем называть *марковскими цепями с ветвлением*.

Индукцией по $m \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие взаимно однозначным образом каждой вершине $x \in S_m$ графа Γ указанного типа с индексом ветвления, равным n , метку в виде последовательности $\langle j_1, j_2, \dots, j_m \rangle$, где $j_k \in I_n$, $k \in I_m$. При $m = 1$ для каждой вершины $x \in S_1$, $\varphi(\mathbf{0}, x)$, поставим в соответствие однокомпонентную последовательность $\langle j_1 \rangle$, $j_1 \in I_n$. Пусть для всех вершин из $\bigcup_{k=1}^m S_k$ определены метки $\langle j_1, j_1, \dots, j_k \rangle$. Зафиксируем одну из таких вершин с индексом ветвления n в последнем наборе S_m . Это означает, что она смежна с n вершинами y_1, y_2, \dots, y_n , $\varphi(x, y_k)$, $k \in I_n$ из набора S_{m+1} , так как расстояние от каждой из этих вершин до $\mathbf{0}$ на единицу больше, чем расстояние от вершины x . Присвоим этим вершинам метки $\langle j_1, j_1, \dots, j_m, j_{m+1} \rangle$. Ввиду произвольности $m \in \mathbb{N}$, каждой из вершин графа Γ присвоена метка.

Введем на пространствах состояний S_m цепи инъекцию $\mathsf{T} : 2^{S_m} \mapsto 2^{S_{m-1}}$, которая действует в каждом из наборов S_m , переводя каждую вершину $\langle j_1, j_1, \dots, j_m \rangle$ в вершину $\langle j_1, j_1, \dots, j_{m-1} \rangle$, где $\mathsf{T} \emptyset = \emptyset$ при $S_0 = \{\mathbf{0}\}$.

Распределение вероятностей любой марковской цепи полностью определяется распределением вероятностей $P_0(A)$ в начальном состоянии A и условной вероятностью перехода за один шаг ее эволюции, которая в нашем случае представляется функцией $P^{(m)}(A, A') = \Pr\{X_m = A \in S_m | X'_{m-1} = A' \in S_{m-1}\}$. Положим $A \subset S_0 = \{\mathbf{0}\}$, т.е. $A = \{\mathbf{0}\}$ с вероятностью единица. Распределение вероятностей в любой момент $m \in \mathbb{N}$ определяется на основе уравнения

$$P_m(A) = \sum_{A' \subset S_{m-1}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \in S_m.$$

Для конструируемой марковской цепи с ветвлением условная вероятность $P^{(m)}(A, A')$ должна быть такой, что соотношение $\mathsf{T} X_m \subset X'_{m-1}$ выполняется с вероятностью единица. Тогда

$$P_m(A) = \sum_{\substack{A' \subset S_{m-1}: \\ \mathsf{T} A \subset A'}} P^{(m)}(A, A') P_{m-1}(A'), \quad A \subset S_m.$$

Если $\mathsf{T} A = A'$, то набор $A \subset S_m$ представим в виде дизъюнктивного разложения

$$A = \bigcup_{x \in A'} A_x, \quad \mathsf{T} A_x = \{x\}, \quad |A_x| \leq n,$$

т.е. в A_x входят только те вершины y из набора S_m , для каждой из которых существует такое $j \in I_n$, что $y = \langle x, j \rangle$. Отсюда следует, что $|A| = \sum_{x \in \mathsf{T} A} |A_x|$.

Будем говорить, что марковская цепь с ветвлением обладает *марковским измельчением* (см. [2]), если

$$P^{(m)}(A, A') = \prod_{x \in A'} p(A_x), \quad (2)$$

где $p(A) = \Pr\{X = A\}$, $A \subset S_1$ — распределение вероятностей на 2^{S_1} , $S_1 = I_n$.

Введем производящую функцию случайной величины $|X_m|$:

$$F_m(\zeta) = \sum_{A \subset S_m} \zeta^{|A|} P_m(A), \quad \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| \leq 1,$$

и введем обозначение

$$G(\zeta) \equiv F_1(\zeta) = \sum_{A \subset I_n} \zeta^{|A|} P_1(A).$$

Теорема 3. Производящая функция $F_m(\zeta)$ удовлетворяет функционально-разностному уравнению

$$F_{m+1}(\zeta) = F_m(G(\zeta)), \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

При этом $F_0(\zeta) = \zeta$.

Для марковских цепей с ветвлением имеется *надкритический режим*, который определяется распределением $p(\cdot)$ на 2^{S_1} и при реализации которого выполняется

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \{|X_m| > 0\} = 1 - F_m(0) > 0.$$

При его реализации предел $q = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(0) < 1$, так что траектория с вероятностью $(1 - q)$ уходит на бесконечность.

Теорема 4. Надкритический режим существует тогда и только тогда, когда распределение условных вероятностей $p(\cdot)$ при условии, что $\mathbf{0} \in W$, обладает свойствами $p(\emptyset) = 0$, либо $p(\emptyset) > 0$, но

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) > 1.$$

В последнем случае условная вероятность его реализации равна $(1 - q)$, где q является единственным отличным от 1 решением уравнения

$$q = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|} p(A).$$

В частности, если из вершины $\mathbf{0}$ однородного древесного графа Γ , на множестве V вершин которого определено случайное однородное бернуллиевское поле $\{\rho(x); x \in V\}$ с концентрацией $c \in (0, 1)$, то на этом графе возможна постановка задачи о перколяции из этой вершины на бесконечность, т.е. возможно существование с ненулевой вероятностью бесконечной траектории у марковской цепи с ветвлением. В этом случае распределение условных вероятностей $p(\cdot)$, в соответствии с (1), определяется формулой

$$p(A) = c^{|A|} (1 - c)^{n - |A|}, \quad A \subset I_n.$$

Наличие перколяции означает существование надкритического режима. Так как безусловная вероятность $P(c)$ перколяции в случае, если она определяется на основе поля $\{\rho(x); x \in V\}$, равна $P(c) = c(1 - q)$, где $q \equiv q(c)$ зависит от $c \in (0, 1)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на однородном древесном графе с заданным на нем однородным бернуллиевским случайным полем с концентрацией $c \in [0, 1]$ существует тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — так называемый порог перколяции, который определяется как единственное решение $c_* \in (0, 1)$ уравнения

$$\sum_{A \subset I_n} |A| p(A) = 1, \tag{3}$$

где $p(A) = c^{|A|} (1 - c)^{n - |A|}$. При этом вероятность $P(c)$ ее реализации при $c > c_*$ равна $c(1 - q(c))$, где $q(c)$ — условная вероятность отсутствия перколяции является единственным отличным от единицы вещественным решением уравнения

$$q(c) = \sum_{A \subset I_n} q^{|A|} p(A). \tag{4}$$

4. Иерархические модели, ассоциированные с \mathbb{Z}^2 . Рассмотрим, теперь, применение описанных выше построений для конструирования аппроксимаций вероятности перколяции на бесконечном периодическом графе размерности 2, который называется квадратной решеткой \mathbb{Z}^2 . С этой целью определим последовательности $\langle \Gamma^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ специальных графов, которые мы называем иерархическими. В общем случае каждая такая последовательность может быть поставлена в соответствие каждому бесконечному локально компактному графу Γ так, чтобы возникала возможность аппроксимации вероятности перколяции на этом графе вероятностями перколяции на графах $\Gamma^{(n)}$ с возрастающей точностью при увеличении номера n — порядка аппроксимации (см. [1]).

Опишем построение последовательности иерархических перколяционных моделей, ассоциированных с квадратной решеткой. Этот бесконечный граф представляет собой набор вершин

$$V = \left\{ x = n_1 e_1 + n_2 e_2; n_j \in \mathbb{Z}, j \in \{1, 2\} \right\}$$

в \mathbb{R}^2 , на котором определено отношение смежности

$$\varphi(x, y) = \left\{ \langle x, y \rangle : y = x \pm e_j; j \in \{1, 2\} \right\}.$$

Зафиксируем конечное множество

$$V_0^{(n)} = \left\{ x : x = n_1 e_1 + n_2 e_2; |n_j| \leq n, j \in \{1, 2\} \right\},$$

$(2n + 1)^2$ элементов которого будем называть *внутренними вершинами*, а множество

$$\partial_+ V_0^{(n)} = \left\{ x : x \in V \setminus V_0^{(n)}, \exists (y \in V_0^{(n)} : \varphi(x, y)) \right\}$$

будем называть *внешней границей* этого множества $V_0^{(n)}$. Обозначив через $\varphi_0^{(n)}$ сужение отношения φ на $V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}$, удалив из него пары смежности $\{x, y\} \subset \partial_+ V_0^{(n)}$, определим связный конечный граф

$$\Gamma_0^{(n)} = \left\langle V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)} \right\rangle,$$

который будем называть *исходным графом* для построения бесконечного локально компактного иерархического графа $\Gamma^{(n)}$ порядка n посредством процедуры *склеивания*. Для этого следующим образом определим рекуррентно конечные графы $\Gamma_m^{(n)}$, $m \in \mathbb{N}_+$.

Пусть для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}_+$ имеется бесконечный набор $\mathfrak{G}^{(n)}$ графов, изоморфных графу $\Gamma_0^{(n)}$ с точки зрения отношения связности. Занумеруем вершины внешней границы $\partial_+ V_0^{(n)} \equiv S_1$ графа $\Gamma_0^{(n)}$, которые будем называть вершинами первого поколения, присвоив им метки $\langle j_1 \rangle$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$.

На первом шаге рекуррентного процесса построения выберем $4(2n + 1)$ графов из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$, нулевым вершинам которых присвоим метки $\mathbf{0}_{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Множества их внутренних вершин обозначим $V_{1;j_1}^{(n)}$ и, соответственно, множества вершин их внешних границ — $\partial_+ V_{1;j_1}^{(n)}$. Эти графы обозначим $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Определим теперь граф $\Gamma_1^{(n)}$ посредством операции приклеивания, которая заключается в отождествлении вершин $\mathbf{0}_{j_1}$ с вершинами $\langle j_1 \rangle$ графа $\Gamma_0^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n + 1)$. Граф $\Gamma_1^{(n)} = \langle V_1^{(n)} \cup \partial_+ V_1^{(n)}, \varphi_1^{(n)} \rangle$ состоит из множества

$$V_1^{(n)} = V_0^{(n)} \cup \bigcup_{j_1=1}^{4(2n+1)} V_{1;j_1}^{(n)}$$

внутренних вершин, число которых равно $|V_1^{(n)}| = (2n + 1)^2 [1 + 4(2n + 1)]$, и набора

$$\partial_+ V_1^{(n)} = \bigcup_{j_1=1}^{4(2n+1)} \partial_+ V_{1;j_1}^{(n)} \equiv S_2$$

вершин внешней границы второго поколения, число которых равно $|\partial_+ V_1^{(n)}| = [4(2n + 1)]^2$.

Вершинам внешней границы второго поколения присвоим метки $\langle j_1, j_2 \rangle$ так, что каждая метка с $j_2 = 1, \dots, 4(2n+1)$ входит в состав внешней границы множества $V_{1;j_1}^{(n)}$ с соответствующим номером j_1 . Отношение смежности $\varphi_1^{(n)}$ на графе $\Gamma_1^{(n)}$ представляет собой объединение пар смежных вершин всех графов $\Gamma_0^{(n)}$ и $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n+1)$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1}$ с вершинами $\langle j_1 \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_0^{(n)}$, $j_1 = 1, \dots, 4(2n+1)$. При этом вершины графов $\Gamma_{1;j_1}^{(n)}$ с различными номерами j_1 делаются несмежными.

Индукцией по порядку $m \in \mathbb{N}$ построим последовательно графы $\Gamma_m^{(n)}$. Положим, что уже определены множества $V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$, $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$, и на их основе построен граф $\Gamma_m^{(n)}$ с множеством внутренних вершин

$$V_m^{(n)} = V_{m-1}^{(n)} \cup \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)},$$

где все графы $\Gamma_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ с соответствующим каждому из них множеством внутренних вершин $V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ и множеством $\partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$ вершин внешней границы $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$ выбираются из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$. Таким образом, число внутренних вершин графа $\Gamma_m^{(n)}$ равно

$$|V_m^{(n)}| = (2n+1)^2 \sum_{k=0}^m [4(2n+1)]^k = (2n+1)^2 \frac{[4(2n+1)]^{m+1} - 1}{4(2n+1) - 1}.$$

Число вершин множества

$$\partial_+ V_m^{(n)} = \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} \partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)} \equiv S_m$$

внешней границы m -го поколения этого графа равно

$$|\partial_+ V_m^{(n)}| = \sum_{\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m} |\partial_+ V_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}| = [4(2n+1)]^{m+1}.$$

Отношение смежности $\varphi_m^{(n)}$ на этом графе представляет собой объединение пар смежных вершин графа $\Gamma_{m-1}^{(n)}$ и всех графов $\Gamma_{m;j_1, \dots, j_m}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1, \dots, j_m}$ с вершинами $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_{m-1}^{(n)}$. При этом вершины $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ с различными наборами $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ полагаются несмежными на новом графе.

После построения графа $\Gamma_m^{(n)}$ граф $\Gamma_{m+1}^{(n)}$ строится следующим образом. Сначала определяется множество

$$V_{m+1}^{(n)} = V_m^{(n)} \cup \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle \in I_{4(2n+1)}^{m+1}} V_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$$

его внутренних вершин на основе графов $\Gamma_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m+1$, выбранных из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$. Затем определяется множество вершин

$$\partial_+ V_{m+1}^{(n)} = \bigcup_{\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle \in I_{4(2n+1)}^{m+1}} \partial_+ V_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$$

его внешней границы и, наконец, определяется отношение смежности $\varphi_{m+1}^{(n)}$ на множестве $V_{m+1}^{(n)} \cup \partial_+ V_{m+1}^{(n)}$, которое является объединением пар смежных вершин графа $\Gamma_m^{(n)}$ и всех графов $\Gamma_{m+1;j_1, \dots, j_{m+1}}^{(n)}$, где $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m+1$, с учетом отождествления вершин $\mathbf{0}_{j_1, \dots, j_{m+1}}$ с вершинами $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ внешней границы графа $\Gamma_m^{(n)}$ и вершины $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ с различными наборами $\langle j_1, \dots, j_{m+1} \rangle$ являются не смежными на новом графе.

Определение 3. Иерархический граф $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$, соответствующий исходному графу $\Gamma_0^{(n)}$, является теоретико-множественным пределом $\Gamma_m^{(n)} \rightarrow \Gamma^{(n)}$ при $m \rightarrow \infty$, у которого

$$V^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} V_m^{(n)}, \quad \varphi^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m^{(n)}.$$

Очевидно, иерархический граф $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$ локально компактен, так как он порождается склеиванием счетного множества конечных связных графов из набора $\mathfrak{G}^{(n)}$, причем на каждом этапе приклеивается лишь конечный набор графов, каждый раз с новыми вершинами отождествления. Порождаемый иерархический граф $\Gamma^{(n)}$ обладает выделенной вершиной $\mathbf{0}$. Вершины иерархического графа $\Gamma^{(n)}$, помеченные в результате его построения всеми метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, являются его *вершинами сочленения* между конечными графами $\Gamma_{m, j_1, \dots, j_m}$, подклеиваемыми в процессе его построения, которые мы называем *блоками*. Это означает, что любой путь, соединяющий вершины из блоков $\Gamma_{m, j_1, \dots, j_m}$ и $\Gamma_{m+1, j_1, \dots, j_m, j_{m+1}}$ обязательно пройдет через вершину $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$.

Пусть на иерархическом графе $\Gamma^{(n)}$ определено однородное бернуллиевское поле $\{\rho(x); x \in V^{(n)}\}$ с параметром $c \in (0, 1)$. Тогда для такого графа определено случайное событие

$$\mathfrak{A}_\infty = \left\{ W \subset V^{(n)} : \exists (\gamma(\mathbf{0}) : \{\gamma(\mathbf{0})\} \subset W, |\gamma(\mathbf{0})| = \infty) \right\}$$

наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$.

Таким образом, на графе $\Gamma^{(n)}$ определена *иерархическая перколяционная модель*, которую обозначим $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Иерархические перколяционные модели обладают свойством, которое позволяет строить на их основе аппроксимации решений задачи перколяции на графе \mathbb{Z}^2 , точность которых возрастает при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_m(B)$, $B \subset S_m$, случайное событие, состоящее в том, что для множества B существует путь из вершины $\mathbf{0}$ в конечную вершину, находящуюся в B , а для любой вершины из $S_m \setminus B$ такой путь отсутствует. Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Для любого набора $B \subset S_m$ такого, что $B = B_x$, $\{x\} = \mathbb{T}B \neq \emptyset$ для вершины $x \in S_{m-1}$, условная вероятность события $\mathcal{Q}_m(B)$ при условии, что $\varphi(\mathbf{0}, x; W)$ равна

$$\Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | W : \varphi(x, \mathbf{0}; W)B \right\} = \Pr \left\{ W \subset V^{(n)} : W \cap S_m = B | W : \varphi(x, \mathbf{0}; W) \right\}.$$

Доказательство. Равенство следует из того, что, в силу независимости значений случайного поля $\rho(z)$, $z \in V^{(n)}$, появление любого пути γ на конфигурациях $W \subset V_m^{(n)}$, связывающий вершину x с какой-либо вершиной $y \in B$ и не связывающий x с ни с одной из вершин в $(V_m^{(n)})_x \setminus B$, $\mathbb{T}(V_m^{(n)})_x = \{x\}$ не зависит от части случайной реализации поля $\rho(z)$, $z \in V^{(n)}$ в вершинах $z \in V_m^{(n)} \setminus (V_m^{(n)})_x$. \square

Пусть отношение $\varphi(x, A; W)$ означает, что вершина x связана с каждой вершиной из A на конфигурации W , и $\bar{\varphi}(x, A; W)$ — противоположное отношение (при условии несмежности вершин из $\partial_+ V_0^{(n)}$ на иерархическом графе). При этом $\varphi(x, A)$ будет означать, что вершина x смежна с какой-нибудь вершиной из A , а $\bar{\varphi}(x, A)$ имеет противоположный смысл. Для каждого множества $A \subset \partial_+ V_0^{(n)}$ рассмотрим случайные события $\mathcal{Q}(A) \equiv \mathcal{Q}_1(A)$,

$$\mathcal{Q}(A) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \exists (z \in V_0^{(n)}, \varphi(z, A) : \varphi(\mathbf{0}, z; W)), \forall (z \in V_0^{(n)}, \varphi(\mathbf{0}, z; W) : \bar{\varphi}(z, \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A)) \right\}.$$

В частности,

$$\mathcal{Q}(\emptyset) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \forall (z \in V_0^{(n)}, \varphi(\mathbf{0}, z; W) : \bar{\varphi}(z, \partial_+ V_0^{(n)})) \right\}.$$

Следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Лемма 2. Для любых наборов $B \subset S_m$ и $B' \subset S_{m-1}$, $\mathbb{T}B \subset B'$ имеют место формулы

$$\Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(B') \right\} = p_0^{|\mathbb{T}B|} \Pr \left\{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\mathbb{T}B) \right\}, \quad (5)$$

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\mathbb{T} B) \} = \prod_{x \in \mathbb{T} B} p(B_x), \quad (6)$$

где

$$p(A) = \Pr \{ \mathcal{Q}(A) | \mathbf{0} \in W \}, \quad p_0 = \Pr \{ \mathcal{Q}(\emptyset) | \mathbf{0} \in W \}.$$

Пусть C — конечный кластер на этом графе, набор $\partial_+ C = \{x \notin C : \exists(y \in C : \varphi(x, y))\}$ является его *внешней границей*, а набор $\partial_- C = \{x \in C : \exists(y \notin C : \varphi(x, y))\}$ — *внутренней границей*. Оба этих множества вершин конечны.

Обозначим через $\mathfrak{D}(V_0^{(n)})$ и $\mathfrak{D}(V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)})$ семейства всех кластеров $C(\mathbf{0})$, которые содержат вершину $\mathbf{0}$ и содержатся соответственно в $V_0^{(n)}$ и $V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}$. При этом каждый кластер C' из $\mathfrak{D}(V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)})$ представим единственным образом в виде $C \cup \Delta$, где $\Delta \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}$, если отношение смежности понимается в смысле иерархического графа, т.е. никакие из вершин в $\partial_+ V_0^{(n)}$ не смежны между собой. Следовательно, событие

$$\{\mathbf{0} \in W\} = \{\mathbf{0} \in W \subset V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}\}$$

представимо в виде дизъюнктивного разложения

$$\{\mathbf{0} \in W\} = \bigcup_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} \bigcup_{\Delta: \Delta \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} \{\mathbf{0} \in W : C \cup \Delta = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W]\}.$$

Так как $\mathcal{Q}(A)$ является компонентой этого разложения при $\Delta = A$, то

$$\mathcal{Q}(A) = \bigcup_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} \{\mathbf{0} \in W : C \cup A = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W]\}.$$

Следовательно, вероятность $\Pr\{\mathcal{Q}(A)\} = cp(A)$ этого события представляется в виде суммы

$$cp(A) = \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A], \quad (7)$$

где

$$P[C; A] = \Pr \left\{ \mathbf{0} \in W : C \cup A = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W] \right\} = (1-c)^{|\partial_+ V_0^{(n)} \cup \partial_+ C| - |A|} c^{|A|} P[C], \quad (8)$$

$$P[C] = \Pr \left\{ \mathbf{0} \in W \subset V_0^{(n)} : C = C(\mathbf{0}) \in \mathfrak{C}[W] \right\},$$

так как случайные величины $\rho(x)$ в вершинах $x \in V_0^{(n)}$ и $x \in \partial_+ V_0^{(n)}$ независимы. В частности, полученное разложение справедливо и при $A = \emptyset$.

5. Конструкция аппроксимаций вероятности перколяции на графе \mathbb{Z}^2 . Определим случайную последовательность, траектории $\{B_n; n \in \mathbb{N}_+\}$ которой составлены из множеств $B_0 = \{0\}$ и $B_n \subset S_n = \{j_1, \dots, j_n\}$, $j_k = 1, \dots, 4(2n+1)$, $k = 1, \dots, n$. Случайные события, определяемые этими множествами, таковы, что существует конфигурация W на иерархическом графе, где выполняются отношения $\varphi(\mathbf{x}, B_n; W)$ и $\bar{\varphi}(\mathbf{0}, S_n \setminus B_n; W)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда формулы (7), (8), вместе с (5), (6), указывают, согласно (2), на то, что эта случайная последовательность является марковской цепью с ветвлением и марковским измельчением, у которой эти формулы определяют условные вероятности перехода. Для распределения вероятностей $p(A) = \Pr \{ \mathcal{Q}(A) | \mathbf{0} \in W \}$, $A \subset I_{4(2n+1)}$, посредством которых определяются вероятностей перехода, имеет место соотношение

$$\sum_{A \subset I_{4(2n+1)}} p(A) = 1.$$

Это связано с тем, что события

$$\mathcal{Q}(A) = \left\{ \mathbf{0} \in W : \varphi(\mathbf{0}, x; W), x \in A; \bar{\varphi}(\mathbf{0}, y; W), y \in I_{4(2n+1)} \setminus A \right\}$$

несовместимы для различных множеств $A \subset I_{4(2n+1)}$ и их объединение составляет все пространство конфигураций \mathcal{W} . Расчет вероятностей $p(A)$ сводится к расчету вероятностей $P[C; A]$ реализации каждого из таких кластеров C внутри $V_0^{(n)}$, который содержит вершину $\mathbf{0}$ и пересечение внешней границы которого с $\partial_+ V_0^{(n)}$ содержит фиксированное множество A .

Для описанной марковской цепи возможна постановка задачи о вычислении перколяции. Соответствующую перколяционную модель будем обозначать $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$. При этом все вершины, которые входят в подмножества из S_m , являются вершинами сочленения иерархического графа с метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$, $j_k \in I_{4(2n+1)}$, $k = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$, на котором также возможна постановка задачи о перколяции из начальной вершины. Соответствующую перколяционную модель будем обозначать $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Пусть $\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\mathcal{Q}}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ — случайные события наличия перколяции из вершины $\mathbf{0}$ соответственно для моделей $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Для перколяционных моделей $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ и $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$ имеет место равенство*

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) \} = \Pr \{ \bar{\mathcal{Q}}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) \}.$$

Доказательство. Пусть $\Gamma^{(n)}$ — бесконечный иерархический граф, ассоциированный графом \mathbb{Z}^2 . Он обладает набором вершин сочленения $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in I_{4(2n+1)}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда согласно возрастанию номера поколения m любой бесконечный путь $\gamma(\mathbf{0})$ из начальной вершины обязательно последовательно пройдет через вершины с некоторыми метками $\langle j_1, \dots, j_m \rangle \in S_m$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ ограничению каждого пути $\gamma(\mathbf{0})$, входящего в случайное событие $\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})$ на граф $\Gamma^{(n)}$ соответствует однозначным образом путь $\gamma(\mathbf{0}, z)$, $z \in V_m^{(n)}$ длины m .

Пусть $\mathcal{Q}_m = \{ W \subset V^{(n)} : \exists(z \in S_m : \varphi(\mathbf{0}, z; W)) \}$ — случайное событие в перколяционной иерархической модели, при котором существует такой путь $\gamma(\mathbf{0})$, что

$$\{\gamma(\mathbf{0})\} \cap S_m \neq \emptyset, \quad \mathcal{Q}_1(A) \equiv \mathcal{Q}(A).$$

Тогда

$$\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Q}_m.$$

При этом имеет место дизъюнктивное разложение

$$\mathcal{Q}_m = \bigcup_{B \subset S_m} \mathcal{Q}_m(B),$$

где

$$\mathcal{Q}_m(B) = \left\{ W \subset V^{(n)} : \forall(z \in B : \varphi(\mathbf{0}, z; W)), \forall(z \in S_m \setminus B : \bar{\varphi}(\mathbf{0}, z; W)) \right\},$$

так как вершины из любого поколения S_m являются несмежными между собой на иерархическом графе.

Покажем, что вероятность события \mathcal{Q}_m совпадает с вероятностью соответствующего события для марковской цепи. Пусть $F_m(\zeta)$ — введенная ранее производящая функции марковской цепи с ветвлением и марковским измельчением. Вычислим производящую функцию

$$\bar{F}_m(\zeta) = \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathcal{Q}(B)\},$$

описывающую изменение вероятности попадания траектории в поколение S_m , $m \in \mathbb{N}$, в иерархической перколяционной модели. Для нее имеет место соотношение

$$F_m(\zeta) = \bar{F}_m(\zeta) + \Pr\{W \cap S_m = \emptyset\}.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$\Pr\{\mathcal{Q}_m(B)\} = \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1} : B' \supset B} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(B')\} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\}$$

для любого непустого множества $B \subset S_m$. Так как при $\top B_x = \{x\}$ справедливо дизъюнктивное разложение $B = \sum_{x \in \top B} B_x$, так что

$$\mathcal{Q}_m(B) = \bigcap_{x \in \top B} \mathcal{Q}_m(B_x).$$

Тогда, учитывая (5) и (6), находим

$$\begin{aligned} \bar{F}_m(\zeta) &= \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B)\} = \\ &= \sum_{\emptyset \neq B \subset S_m} \zeta^{|B|} \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}: B' \supset \top B} p_0^{|B' \setminus \top B|} \Pr\{\mathcal{Q}_m(B) | \mathcal{Q}_{m-1}(\top B)\} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} = \\ &= \sum_{B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} \sum_{\emptyset \neq A \subset B'} p_0^{|B' \setminus A|} \prod_{x \in A} \sum_{\emptyset \neq B_x; x \in A} \zeta^{|B_x|} p(B_x) = \\ &= \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} (G^{|B'|}(\zeta) - p_0^{|B'|}) = \bar{F}_{m-1}(\zeta) - \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} p_0^{|B'|}. \end{aligned}$$

Так как

$$\Pr\{W \subset S_m : W = \emptyset\} = \Pr\{W \subset S_{m-1} : W = \emptyset\} + \sum_{\emptyset \neq B' \subset S_{m-1}} \Pr\{\mathcal{Q}_{m-1}(B')\} p_0^{|B'|},$$

то получаем эволюционное уравнение

$$F_m(\zeta) = F_{m-1}(G(\zeta)),$$

которое совпадает с уравнением для производящей функции марковской цепи, соответствующей перколяционной модели. Ввиду совпадения уравнений для производящих функций, совпадения начальных состояний $\{\mathbf{0}\}$ для обеих моделей, условие положительности вероятности $\Pr\{\mathcal{Q}_\infty(\Gamma_0^{(n)})\}$ совпадает с условием наличия перколяции у марковской цепи. \square

Таким образом, для сконструированной иерархической перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$ справедливы уравнения (3) и (4) с индексом ветвления $4(2n+1) = |S_1|$. При этом для расчета вероятности $p(A)$ того, что только вершины множества A , среди всех вершин первого поколения, принадлежат конфигурации, порождаемой случайной реализацией $\rho(x), x \in V^{(n)}$, должна быть использована разложение (7) и формула (8). Подставим в (4) разложение (8):

$$\begin{aligned} cq(c) &= \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} q^{|A|}(c) \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A] = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] \sum_{A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} (1-c)^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A|} [cq(c)]^{|A|} = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] (1-c + cq(c))^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}|}. \end{aligned}$$

Таким образом уравнение (4), определяющее вероятность наличия перколяции для марковской цепи, которая соответствует перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$, модифицируется в следующее:

$$cq(c) = \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] (1-c + cq(c))^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}|}. \quad (9)$$

Вероятность $P(c)$ перколяции при $c > c_*$ равна $c(1-q(c))$, где $q(c)$ — решение уравнения (9), содержащееся в $(0, 1)$.

Произведем такие же преобразования в уравнении, определяющем порог перколяции для перколяционной модели $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$. Подставим выражения (7), (8) для $p(A)$ в уравнение (3). Умножив его на c и произведя преобразования, получаем

$$\begin{aligned} c &= \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} |A| c p(A) = \sum_{A \subset \partial_+ V_0^{(n)}} |A| \sum_{\substack{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)}): \\ A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}}} P[C; A] = \\ &= \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} P[C] \sum_{A \subset \partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}} |A| c^{|A|} (1-c)^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)} \setminus A|} = \\ &= c \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} |\partial V_0^{(n)} \cap \partial_+ C| \cdot P[C]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Перколяция из вершины $\mathbf{0}$ на иерархическом графе $\Gamma^{(n)}$ с заданным на нем однородным бернуллиевским случайным полем существует при $c \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда $c > c_*$, где c_* — единственное решение в интервале $(0, 1)$ уравнения*

$$1 = \sum_{C \in \mathfrak{D}(V_0^{(n)})} |\partial V_0^{(n)} \cap \partial_+ C| \cdot P[C]. \quad (10)$$

Вероятность $P(c)$ реализации перколяции при $c > c_*$ равна $c(1-q(c))$, где функция $q(c)$ является единственным решением со значениями в $(0, 1)$ уравнения (9).

Доказательство. Единственность решения c_* следует из утверждения о монотонном неубывании вероятности $P(c)$ перколяции при $c \in (0, 1)$ (см., например, [9]). \square

6. Вычисление приближения первого порядка. Опишем теперь конструкцию конкретных приближений вероятности перколяции для графа $\mathbb{Z}^2 = \langle V, \varphi \rangle$.

Вершину $z \in V \setminus C$ назовем внешней по отношению C , если существует бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(z)$ с начальной вершиной z , который не пересекает C , $\{\gamma(z)\} \cap C = \emptyset$. В противном случае вершину z назовем внутренней по отношению к C . Конечный кластер C назовем *полным*, если он не имеет внутренних вершин. Любой конечный кластер можно сделать полным, добавив к нему все его внутренние вершины, не нарушая конечности самого кластера.

Пусть $\Gamma_0^{(n)} = \langle V_0^{(n)} \cup \partial_+ V_0^{(n)}, \varphi_0^{(n)} \rangle$ — введенные в разделе 4 конечные графы, $n \in \mathbb{N}_+$, с полными кластерами $V_0^{(n)}$ внутренних вершин, на основе которых были построены иерархические перколяционные модели. Эти модели являются аппроксимирующими, если для любого значения концентрации $c \in (0, 1)$ однородного бернуллиевского случайного поля $\rho(x)$, $x \in V$ и $x \in \Gamma^{(n)}$ имеет место неравенство

$$\Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma) \} \leq \Pr \{ \mathcal{Q}_\infty(\Gamma^{(n)}) \}.$$

Предположим, что иерархические модели $\bar{\Upsilon}(\Gamma_0^{(n)})$, порождаемые графами $\Gamma^{(n)}$, являются аппроксимирующими. Справедливо следующее утверждение, доказанное в [1].

Теорема 8. *Для последовательности $\Upsilon(\Gamma_0^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$ перколяционных моделей, аппроксимирующей бесконечный локально компактный граф Γ с отмеченной вершиной $\mathbf{0}$, соответствующая ей последовательность $\langle P^{(n)}(c); n \in \mathbb{N} \rangle$ вероятностей перколяции однородного бернуллиевского случайного поля $\rho(x)$, $x \in V$ с концентрацией $c \in (0, 1)$ на графах $\Gamma^{(n)} = \langle V^{(n)}, \varphi^{(n)} \rangle$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к вероятности перколяции $P(c)$ из вершины $\mathbf{0}$ на графе $\Gamma = \langle V, \varphi \rangle$.*

В связи с этим утверждением мы опишем в настоящем разделе перколяционную модель $\Upsilon(\Gamma_0^{(1)})$ и вычислим на ее основе верхнюю оценку $P^{(1)}(c)$ для вероятности перколяции $P(c)$ в случае, когда $\Gamma = \mathbb{Z}^2$.

В нулевом приближении при $n = 0$ множество $V_0^{(0)}$ состоит из одной вершины, $V_0^{(0)} = \{\mathbf{0}\}$, а множество вершин $\partial_+ V_0^{(0)}$ его внешней границей по отношению к \mathbb{Z}^2 состоит из всех вершин, смежных на квадратной решетке $\mathbf{0}$, т.е. $\partial_+ V_0^{(0)} = \{x \in \{\pm \mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2\}\}$. Объединение этих множеств является множеством вершин графа $\Gamma_0^{(0)}$.

Легко видеть, что соответствующий иерархический граф $\Gamma^{(0)}$ представляет собой дерево Кэйли с индексом ветвления, равным 4. Тогда уравнение (3) записывается в виде

$$\sum_{A \subset I_4} |A| c^{|A|} (1-c)^{4-|A|} = c(1-c)^3 \left[\frac{d}{d\eta} (1+\eta)^4 \right]_{\eta=c/(1-c)} = 4c = 1.$$

Поэтому порог перколяции в этом приближении равен $c_* = 0,25$. Так как для единственного кластера $C = \{\mathbf{0}\}$ в (9) имеем $P[C] = c$, то уравнение для условной вероятности $q(c)$ в этом случае принимает вид

$$q = (1 - c + cq)^4, \quad q = q(c),$$

где $q(c)$ является его отличным от 1 вещественным решением, и, соответственно, $P^{(0)}(c) = c(1 - q(c))$. Так как одно из решений этого уравнения равно 1, то для интересующего нас решения получаем посредством понижения степени кубическое уравнение. Его вещественное решение записывается по формуле Кардано в радикалах. При этом оно пригодно для описания перколяции только в диапазоне изменения параметра c , где $q(c) \in (0, 1)$. Этот диапазон как раз и ограничивается порогом c_* .

Перейдем теперь к анализу первого приближения. В этом приближении с $n = 1$ множество $V_0^{(1)}$ состоит из девяти вершин,

$$V_0^{(1)} = \left\{ x : x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2; |n_j| \leq 1, j \in \{1, 2\} \right\},$$

и, соответственно, его внешней границей на графе \mathbb{Z}^2 является

$$\partial_+ V_0^{(1)} = \left\{ x = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 : |n_1| = 2, n_2 \in \{0, \pm 1\}; |n_2| = 2, n_1 \in \{0, \pm 1\} \right\}.$$

Вершины графа $\Gamma_0^{(1)}$ представляет множество $V_0^{(1)} \cup \partial_+ V_0^{(1)}$. Для формулировки уравнений (9), (10) необходимо перечислить все кластеры $C \subset V_0^{(1)}$ вместе с соответствующими им числами $|\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C|$ вершин в множествах $\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C$ и затем выписать для всей этой совокупности кластеров соответствующие им вероятности $P[C]$ реализации их в блоке $V_0^{(1)}$ иерархического графа $\Gamma^{(n)}$.

Кластеры C , входящие в сумму в (9), будем классифицировать по числу $m = |C| = 1, \dots, 9$ находящихся в нем вершин. Так как все кластеры оказываются полными, то соответствующие им вероятности $P[C]$ даются общей формулой

$$P[C] = c^m (1-c)^l, \tag{11}$$

где $l = |\partial_+ C \cap V_0^{(1)}|$ — число вершин внешней границы кластера, находящихся в $V_0^{(1)}$.

Для визуального сопровождения классификации мы будем располагать граф $\Gamma_0^{(1)}$ с множеством вершин $V_0^{(1)} \cup \partial_+ V_0^{(1)}$ на плоскости, рассматривая его как часть графа \mathbb{Z}^2 при погружении в \mathbb{R}^2 . При этом смежные вершины графа будут изображаться в виде смежных между собой квадратов: черные соответствуют вершинам кластера C , а белые — вершинам, не входящим в кластер. Вершины, отмеченные крестиками, составляют множество $\partial_+ V_0^{(1)}$. Вершины внутри $V_0^{(1)}$, отмеченные черными точками, составляют ту часть $\partial_+ C \cap V_0^{(1)}$ внешней границы кластера, которая содержится в $V_0^{(1)}$. Центральный квадрат, соответствующий вершине $\mathbf{0}$, отмечен белой точкой.

Сумму в (9) составляют вклады $P[C]$ от 161 кластера C . Для того чтобы представить явно все эти слагаемые и составить уравнения (9), (10) первого приближения, заметим, что, с точки зрения значений (11) вероятностей $P[C]$, кластеры объединяются в группы изоморфных между собой, которые получаются из одного представителя группы посредством вращений множества

$V_0^{(1)}$ на углы, кратные $\pi/2$, и/или отражений относительно вертикальной и горизонтальной осей. Все изоморфные между кластеры имеют одинаковые значения m , l и $r = |\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(1)}|$, и поэтому определяют одинаковые слагаемые в уравнении (9), которые имеют, согласно (11), вид

$$P[C](1 - c + cq(c))^{|\partial_+ C \cap \partial_+ V_0^{(n)}|} = c^m (1 - c)^l (1 - c + cq)^r. \quad (12)$$

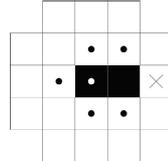
В связи с этим введем характеристику s — число изоморфных между собой кластеров, которую будем называть *кратностью*. О неизоморфных между собой кластерах с одним и тем же значением m будем говорить как о кластерах, имеющих разный тип. Каждый тип кластеров обладает характерным для него набором значений чисел m , l , s и r . Таким образом, в приводимой ниже классификации кластеров мы указываем для каждого значения m соответствующее число типов. Всего имеется 33 типа кластеров. По этой причине запишем уравнение (9) с учетом (12) в виде

$$cq = \sum_{k=1}^{33} R_k, \quad R_k \equiv s_k c^{m_k} (1 - c)^{l_k} (1 - c + cq)^{r_k}, \quad k = 1, \dots, 33. \quad (13)$$

Ниже представлена классификация всех кластеров согласно их типу и для каждой группы изоморфных между собой указан один ее представитель.

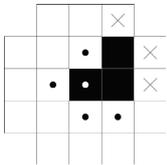
В случае $m = 1$ имеется один кластер $\{0\}$ с $l = 4$, у которого $\partial_+ V_0^{(1)} \cap \partial_+ C = \emptyset$ и поэтому $s = 1$, $r = 0$ и $R_1 = c(1 - c)^4$.

При $m = 2$ имеется только один тип кластеров:

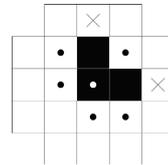


$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 1, \\ R_2 = 4c^2(1 - c)^5(1 - c + cq).$$

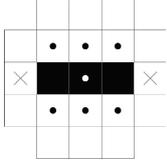
При $m = 3$ имеется три типа кластеров:



$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 3, \\ R_3 = 8c^3(1 - c)^4(1 - c + cq)^3;$$

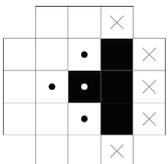


$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 2, \\ R_4 = 4c^3(1 - c)^5(1 - c + cq)^2;$$

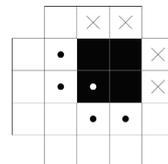


$$l = 6, \quad s = 2, \quad r = 2, \\ R_5 = 2c^3(1 - c)^6(1 - c + cq)^2.$$

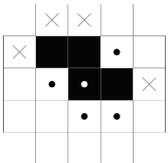
При $m = 4$ имеется 5 типов кластеров:



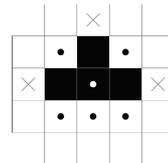
$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 5, \\ R_6 = 4c^4(1 - c)^3(1 - c + cq)^5;$$



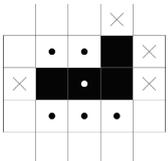
$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 4, \\ R_7 = 4c^4(1 - c)^4(1 - c + cq)^4;$$



$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 4, \\ R_8 = 8c^4(1 - c)^4(1 - c + cq)^4;$$

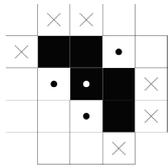


$$l = 5, \quad s = 4, \quad r = 3, \\ R_9 = 4c^4(1 - c)^5(1 - c + cq)^3;$$

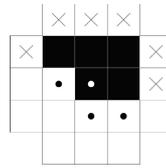


$$l = 5, \quad s = 8, \quad r = 4, \\ R_{10} = 8c^4(1 - c)^5(1 - c + cq)^4.$$

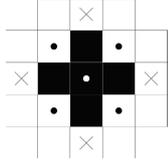
При $m = 5$ имеется 8 типов кластеров:



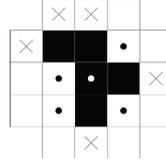
$$s = 4, \quad l = 3, \quad r = 6, \\ R_{11} = 4c^5(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



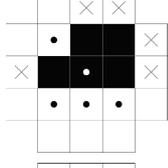
$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 6, \\ R_{12} = 8c^5(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



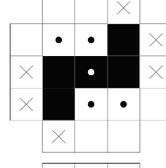
$$l = 4, \quad s = 1, \quad r = 4, \\ R_{13} = c^5(1-c)^4(1-c+cq)^4;$$



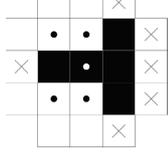
$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 5, \\ R_{14} = 8c^5(1-c)^4(1-c+cq)^5;$$



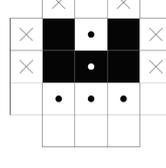
$$l = 4, \quad s = 8, \quad r = 5, \\ R_{15} = 8c^5(1-c)^4(1-c+cq)^5;$$



$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6, \\ R_{16} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6;$$

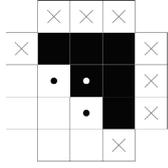


$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6, \\ R_{17} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6;$$

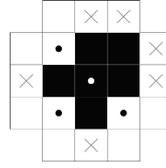


$$l = 4, \quad s = 4, \quad r = 6, \\ R_{18} = 4c^5(1-c)^4(1-c+cq)^6.$$

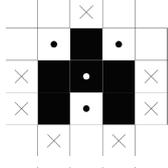
При $m = 6$ имеется 7 типов кластеров:



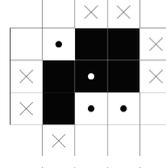
$$l = 2, \quad s = 4, \quad r = 8, \\ R_{19} = 4c^6(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$



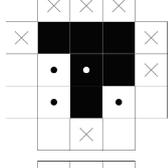
$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 6, \\ R_{20} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^6;$$



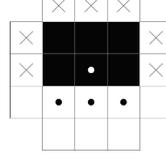
$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 7, \\ R_{21} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



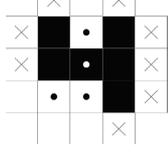
$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 7, \\ R_{22} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$



$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 7, \\ R_{23} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$

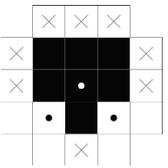


$$l = 3, \quad s = 4, \quad r = 7, \\ R_{24} = 4c^6(1-c)^3(1-c+cq)^7;$$

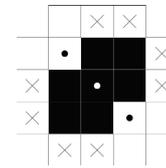


$$l = 3, \quad s = 8, \quad r = 8, \\ R_{25} = 8c^6(1-c)^3(1-c+cq)^8.$$

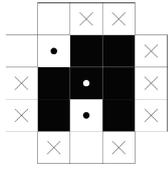
При $m = 7$ имеется 5 типов кластеров:



$$l = 2, \quad s = 4, \quad r = 8, \\ R_{26} = 4c^7(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$

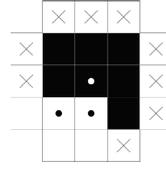


$$l = 2, \quad s = 2, \quad r = 8, \\ R_{27} = 2c^7(1-c)^2(1-c+cq)^8;$$



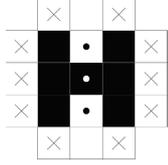
$$l = 2, \quad s = 8, \quad r = 9,$$

$$R_{28} = 8c^7(1-c)^2(1-c+cq)^9;$$



$$l = 2, \quad s = 8, \quad r = 9,$$

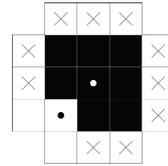
$$R_{29} = 8c^7(1-c)^2(1-c+cq)^9;$$



$$l = 2, \quad s = 2, \quad r = 10,$$

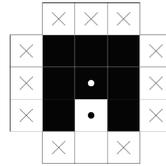
$$R_{30} = 2c^7(1-c)^2(1-c+cq)^{10}.$$

При $m = 8$ имеется 2 типа кластеров:



$$l = 1, \quad s = 4, \quad r = 10,$$

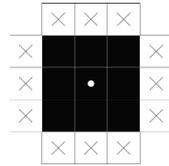
$$R_{31} = 4c^8(1-c)(1-c+cq)^{10};$$



$$l = 1, \quad s = 4, \quad r = 11,$$

$$R_{32} = 4c^8(1-c)(1-c+cq)^{11};$$

а при $m = 9$ — один кластер



$$l = 9, \quad s = 1, \quad r = 12,$$

$$R_{33} = c^9(1-c+cq)^{12}.$$

После подстановки описанных выражений для вероятностей R_k , $k = 1, \dots, 33$, в (13) получается полиномиальное уравнение 12-й степени, у которого отличное от 1 решение представляет собой функцию $q(c)$. График вероятности $P(c) = c(1-q(c))$ перколяции представлен на рис. 1 (красная кривая). Непосредственно проверяется, что решением этого уравнения является также $q = 1$.

Подстановка вероятностей R_k , $k = 1, \dots, 33$, в (10) при $q = 1$ дает уравнение для порога перколяции c_* :

$$\begin{aligned} 1 = & 4c^2(1-c)^5 + 4c^3(1-c)^5[3-2c] + 12c^3(1-c)^4[2+c(1-c)] + \\ & + 4c^4(1-c)^4[20-7c] + 20c^4(1-c)^3[1+4c(1-c)] + 48c^5(1-c)^3[3-c] + 168c^6(1-c)^3 + \\ & + 16c^6(1-c)^2[6-c] + 144c^7(1-c)^2 + 20c^7(1-c^2) + 44c^8(1-c) + 12c^9. \end{aligned}$$

Его решение $c_* \approx 0,34 \in (0, 1)$ (c недостатком).

На рисунке представлены графики приближения функции $P^{(j)}(c)$ порядков $j = 0, 1, 2$. Во втором приближении для получения соответствующего уравнения (13) перечисление графиков и коэффициенты полинома двадцатой степени относительно q рассчитывались на компьютере. Решение соответствующего уравнения для порога в этом приближении дает его значение $c_* \approx 0,38$.

7. Заключение. Достоинством предложенной схемы аппроксимации вероятности перколяции $P(c)$ на \mathbb{Z}^2 , по нашему мнению, является то, что она дает для этой функции гарантированные верхние оценки. Вместе с тем, проведенные явным образом вычисления показывают, что при увеличении порядка приближения они сталкиваются с серьезными техническими трудностями, которые связаны с ростом степени полинома в (3) и объемом перечисления всех кластеров, необходимых для определения его коэффициентов. Более того, представленное в тексте перечисление полных кластеров оказывается довольно прозрачным только при $n = 1$. Уже при $n = 2$ появляются неполные кластеры C , что усложняет вычисление соответствующих вероятностей $P[C]$. Более того, если анализируемый периодический граф имеет размерность больше 2, то вычисление вероятностей $P[C]$ осложняется еще и тем, что они могут иметь нетривиальную топологическую структуру. В случае трехмерных периодических графов, например, даже в простейшем случае графа в виде кубической решетки \mathbb{Z}^3 , кластеры C при погружении в \mathbb{R}^3 могут представляться заузленными областями.

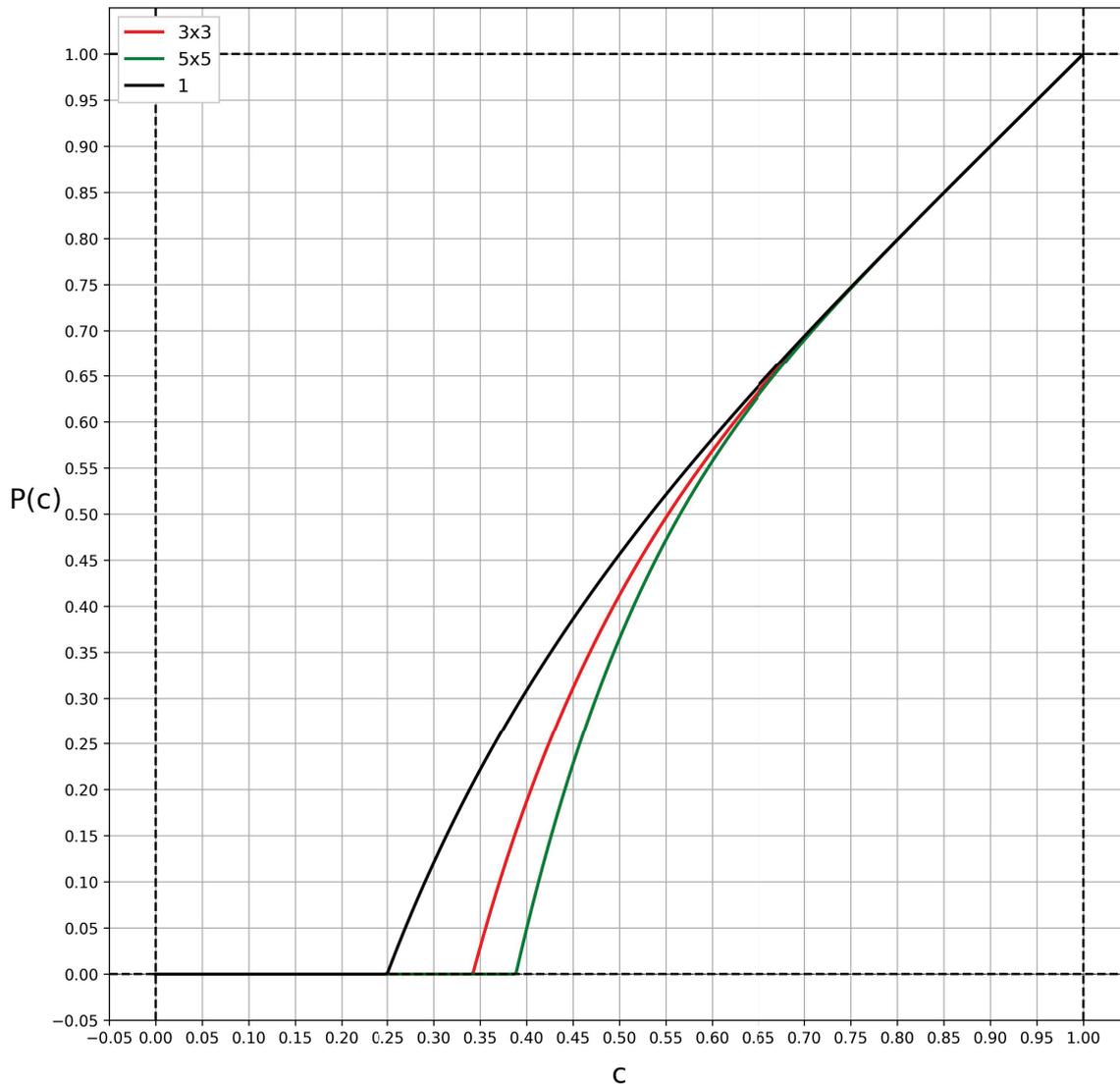


Рис. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вирченко Ю. П., Черкашин Д. А.* Иерархические модели дискретной теории перколяции и марковские ветвящиеся процессы // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — 235. — С. 15–33.
2. *Вирченко Ю. П., Штмлнская О. Л.* Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред // Теор. мат. физ. — 2000. — 124, № 3. — С. 490–505.
3. *Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. Ф.* Теория перколяции и некоторые приложения // Итоги науки техн. Сер. теор. вер., мат. стат. теор. кибер. — 1986. — 24. — С. 53–110.
4. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, I // Теор. мат. физ. — 1983. — 55, № 2. — С. 246–256.
5. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, II // Теор. мат. физ. — 1983. — 55, № 3. — С. 419–430.
6. *Молчанов С. А., Степанов А. К.* Просачивание случайных полей, III // Теор. мат. физ. — 1985. — 65, № 3. — С. 371–379.
7. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — М.: Наука, 1971.
8. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. — М.: Наука, 1980.

9. Antonova E. S., Virchenko Yu. P. Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs// J. Math. Sci. — 2011. — 175, № 1. — P. 86–90.
10. Broadbent S. R., Hammersley J. M. Percolation processes, I. Crystals and mazes// Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1957. — 53. — P. 629–641.
11. Dyson F. J. An Ising ferromagnet with discontinuous long-range order// Commun. Math. Phys. — 1971. — 21. — P. 269–283.
12. Frisch C. M., Hammersley J. M. Percolation processes and related topics// J. Soc. Industr. Appl. Math. — 1963. — 11. — P. 894–918.
13. Grimmett G. Percolation. — New York: Springer-Verlag, 1999.
14. Hammersley J. M. Percolation processes: lower bounds for the critical probability// Ann. Math. Stat. — 1957. — 28, № 3. — P. 790–795.
15. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. — Boston: Birkhäuser, 1982.
16. Nummelin E. General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators. — New York: Cambridge Univ. Press, 1984.
17. Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. — New York: Benjamin, 1969.
18. Simon R. The $P(\varphi)_2$ Euclidian (Quantum) Field Theory. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1974.
19. Virchenko Yu. P., Tolmacheva Yu. A. Method of sequential approximative estimates in discrete percolation theory// in: Studies in Mathematical Physics Research (*Benton C. V.*, ed.). — New York: Nova Science, 2004. — P. 155–175.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Вирченко Юрий Петрович (Virchenko Yuri Petrovich)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород
(Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia)

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Черкашин Дмитрий Андреевич (Cherkashin Dmitrii Andreevich)

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород
(Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia)

E-mail: dmt.cherkashin@gmail.com