ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 83–89
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-83-89

УДК 517.95; 532.5

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

© 2025 г. **В. Н. ХАНХАСАЕВ, В. М. ПЛАСТИНИНА**

Аннотация. Представлена вычислительная модель решения первой краевой задачи для смешанного дифференциального уравнения в пространственно двумерном случае по неявной разностной схеме. Для уравнения четвёртого порядка использованы два различных оператора второго порядка, аналогичных одномерному по пространственной переменной смешанному оператору теплопроводности, обобщающему чисто гиперболический случай и применяемому при математическом моделировании процесса отключения электрической дуги. Доказана корректность поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, уравнение смешанного типа, локально-одномерный метод, первая краевая задача, уравнение высокого порядка.

THE FIRST BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SOME MIXED EQUATIONS OF THERMAL CONDUCTIVITY OF THE SECOND AND FOURTH ORDER

© 2025 **V. N. KHANKHASAEV, V. M. PLASTININA**

Abstract. In this paper, we present a computational model for solving the first boundary-value problem for a mixed differential equation in a spatially two-dimensional case using an implicit finite-difference scheme. For a fourth-order equation, we use two different second-order operators that are similar to a one-dimensional mixed thermal conductivity operator in the spatial variable, generalizing the purely hyperbolic case and used in mathematical modeling of the shutdown process for an electric arc. The well-posedness of the boundary-value problem is proved.

Keywords and phrases: hyperbolic heat equation, mixed-type equation, locally one-dimensional method, first boundary-value problem, high-order equation.

AMS Subject Classification: 35M12

1. Уравнение второго порядка. В работах, посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в потоке газа, аналитически и численно решались различные математические модели для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье (см. [7, 8]). Дифференциальное уравнение переноса в частных производных, получаемое из классического закона Фурье, в двухмерном пространственном случае имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных параболического типа, и его аналитические решения показывают парадоксальное поведение бесконечной скорости распространения теплового возмущения. Любое локальное изменение температуры вызывает мгновенное возмущение в каждой точке среды на любом расстоянии от начала координат. Это противоречит теории относительности, а также известным механизмам теплопроводности. Причина этого дефекта причинно-следственной связи заключается в том, что уравнение теплопроводности имеет первый порядок по времени. Второй недостаток, связанный с этим, — это ограничение задачи с начальными значениями. В задаче Коши может быть указана только температура T в момент времени $t = 0$. Но в экспериментах также производная по времени $\partial T/\partial t$ при $t = 0$ может быть адаптирована к экспериментальной ситуации. Это возможно в гиперболическом уравнении теплопроводности второго порядка по времени.

Эксперименты со вторым звуком в твердом гелии и других кристаллических твердых телах при очень низких температурах и очень короткой продолжительности ясно показали, что тепло течет как затухающая волна. Если кристаллическая структура практически бездефектна (идеальна) и выполняются условия для второго звука, то после импульсного нагрева наблюдаемое горбовидное образование повышенной температуры (затухающая тепловая волна) перемещается с постоянной скоростью через среду. Волна отскакивает назад и вперед от границ, медленно рассеивая свою энергию по пути. Затухающая тепловая волна описывается уравнением в частных производных гиперболического типа, впервые полученным Максвеллом, а затем постулированным Верноттом и Каттанео (см. [8]). Применяя обобщенный закон Фурье, получаем следующее гиперболическое уравнение теплопроводности в двухмерном случае:

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

В предыдущей работе авторов приведена математическая модель для решения уравнения теплопроводности по явной разностной схеме для двумерного пространственного случая, не требующей применения локально-одномерного метода. Для конкретного численного расчета в среде программирования Mathcad-15 была разработана программа, однако численное решение по этой разностной схеме имеет недостаток в плане устойчивости и большого количества арифметических операций. Поэтому в данной статье рассматривается более экономичный метод решения по неявной разностной схеме с применением метода прогонки (см. [2]).

Рассмотрим математическую модель исследуемых процессов параболо-гиперболического типа по двум пространственным переменным:

$$b(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + c(x,y,t)u + f(x,y,t) \tag{3}$$

в области $G = [0,X]\times[0,Y]\times[-T,T]$, $T > 0$. При этом $b(x,y,t) = 0$ при $t \leqslant 0$; $b(x,y,t) > 0$, $t > 0$; $a(x,y,t) > 0$ для всех $(x,y,t) \in G$, т.е. при $t \leqslant 0$ уравнение (3) — параболическое, а при $t > 0$ — гиперболическое.

Для конкретного численного расчета в программе Mathcad-15 температурного поля в однородной мембране с $X = Y = \pi$ и интервалом времени $[-T,T]$ были выбраны следующие значения коэффициентов: $b(x,y,t) = 0$ при $t \leqslant 0$; $b(x,y,t) = 1$ при $t > 0$; $a = 1$; $c(x,y,t) = \mathrm{const} < 0$; $\lambda = \mathrm{const} > 0$; источник тепла $f(x,y,t) = 0$.

Рассмотрим постановку первой начально-краевой задачи. Для уравнения (3), принимающего вид

$$b(t)u_{tt} + u_t = \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + cu + f(x,y,t), \tag{4}$$

ставятся следующие начально-краевые условия:

$$u(x,y,t)\big|_{t=T} = u_0(x,y), \quad u_0 = 10\sin x\cdot\sin y, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} u(0,y,t) = 0, \quad u(\pi,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0, \\ u(x,\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant x,y \leqslant \pi, q \quad -T < t \leqslant T. \end{gathered} \tag{6}$$

Используя метод конечно-разностной аппроксимации точной постановки начально-краевой задачи (4)–(6) её дискретной реализацией, рассмотрим неявную разностную схему для уравнения (4)

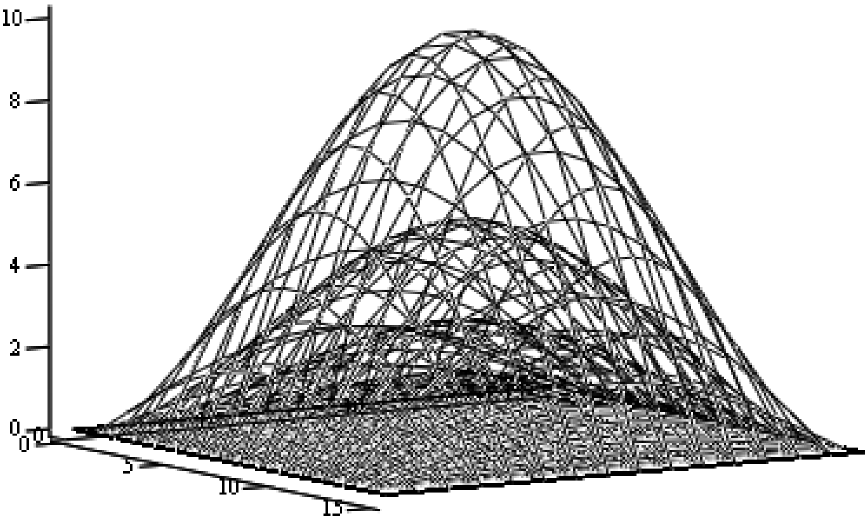

Рис. 1. График изменения температурного поля.

по локально-одномерному методу (см. [2]):

$$b(t_{k+1})\frac{U_{i,j}^{k+1}-2U_{i,j}^{k}+U_{i,j}^{k-1}}{\tau^2}+\frac{U_{i,j}^{k+1}-U_{i,j}^{k}}{\tau}=$$
$$=\lambda\frac{U_{i+1,j}^{k+1}-4U_{i,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2}+cU_{i,j}^{k+1}+f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Формула для параболического уравнения при $t \leqslant 0$:

$$\frac{U_{i,j}^{k+1}-U_{i,j}^{k}}{\tau}=\lambda\frac{U_{i+1,j}^{k+1}-4U_{i,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1}}{h^2}+cU_{i,j}^{k+1}+f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Приводим её к каноническому виду для нахождения коэффициентов метода прогонки:

$$\frac{\lambda}{h^2}(U_{i+1,j}^{k+1}+U_{i-1,j}^{k+1})-\left(\frac{1}{\tau}+\frac{4\lambda\tau}{h^2}-c\right)U_{i,j}^{k+1}+\frac{\lambda}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1})=-\frac{1}{\tau}U_{i,j}^{k}-f(x_i,y_j,t_{k+1}),$$
$$A=C=\frac{\lambda}{h^2},\quad B=\frac{1}{\tau}+\frac{4\lambda\tau}{h^2}-c,\quad D=-\frac{1}{\tau}U_{i,j}^{k}-f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Прогонку проводим последовательно сначала в направлении оси $0x$, затем оси $0y$ по формулам локально-одномерного метода (см. [2]).

Аналогично получаем расчетные формулы метода прогонки для гиперболического этапа. Формулу для гиперболического уравнения при $t > 0$ также приводим к каноническому виду:

$$\frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i-1,j}^{k+1}+U_{i+1,j}^{k+1})-\left(1+\tau+\frac{4\lambda\tau^2}{h^2}-c\tau^2\right)U_{i,j}^{k+1}+\frac{\lambda\tau^2}{h^2}(U_{i,j-1}^{k+1}+U_{i,j+1}^{k+1})=$$
$$=-(2+\tau)U_{i,j}^{k}+U_{i,j}^{k-1}-\tau^2 f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Тогда коэффициенты для вычисления в программе принимают вид:

$$A=C=\frac{\lambda\tau^2}{h^2},\quad B=1+\tau+\frac{4\lambda\tau^2}{h^2}-c\tau^2,\quad D=(-2+\tau)U_{i,j}^{k}+U_{i,j}^{k-1}-\tau^2 f(x_i,y_j,t_{k+1}).$$

Начальные условия для гиперболического уравнения теплопроводности берем из известного параболического этапа с учетом непрерывной склейки.

На рис. 1 представлен график, полученный с использованием расчетных формул в среде программирования MathCad-15.

2. Уравнение четвертого порядка. В [6] рассматривались математические модели разного уровня сложности для электрической дуги, остывающей в потоке газа. Было показано, что если процессы в области амплитуды тока обычно представляют как установившиеся, хорошо описываемые классическим уравнением теплопроводности параболического типа, то интенсивное дугогашение в области нуля тока необходимо рассматривать как существенно нестационарный процесс. Для изучения таких процессов на основе обобщения гипотезы Фурье вводилось гиперболическое уравнение теплопроводности, различные краевые задачи для которого решались как численно, так и аналитически. К этой проблеме примыкает также моделирование волнового механизма теплопереноса, обусловленного конечной скоростью распространения тепла.

Связывая теперь эти две фазы горения электрической дуги, необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности смешанного типа, где коэффициент при второй производной по времени может менять свой знак или вообще вырождаться, а также приводить постановки и исследовать корректность прямых и обратных задач для таких математических моделей.

Наряду с многочисленными методами решения краевых задач для различных уравнений второго порядка $K_1u = h$, можно использовать и предложенный Ю. А. Дубинским подход, когда с уравнением $K_1u = h$, которое в общем случае неразрешимо для произвольной правой части h, связывается некоторое уравнение четвёртого порядка $K_2K_1u = K_2h$, которое уже разрешимо всегда. Тогда исходное уравнение разрешимо с точностью до ядра оператора K_2. Эта конструкция может использоваться и как прием описания области значений оператора K_1u, соответствующего некорректной задаче.

В этой работе будут рассмотрены корректно поставленные краевые задачи в ограниченной области для таких некоэрцитивных уравнений четвертого порядка смешанно-составного типа, для которых удалось доказать разрешимость в некоторых весовых пространствах, несмотря на суперпозицию разных операторов.

Рассмотрим в области $D = \{(x, y) :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ дифференциальное уравнение в частных производных четвёртого порядка

$$Lu = K_1K_2u = f(x, y), \tag{7}$$

где дифференциальные операторы K_1u и K_2u имеют вид

$$K_1u \equiv k_1(x, y)u_{yy} + u_{xx} + a_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u = f_1(x, y), \tag{8}$$

$$K_2u \equiv k_2(x, y)u_{xx} + u_{yy} + a_2(x, y)u_x + c_2(x, y)u = f_2(x, y), \tag{9}$$

с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$k_1(x, 1) \geqslant 0, \quad k_1(x, 0) \leqslant 0, \quad x \in [0, 1]; \tag{10}$$

$$(2a_1 - k_{1y})(x, y) > 0, \quad (2a_2 - |k_{2x}|)(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \overline{D}; \tag{11}$$

$$k_2(1, y) = 0, \quad k_2(0, y) \leqslant 0, \quad y \in [0, 1]; \tag{12}$$

$$c_1(x, y),\ c_{1y}(x, y),\ c_2(x, y),\ c_{2x}(x, y) \leqslant 0, \quad (x, y) \in D. \tag{13}$$

Так как не сделано никаких предположений относительно знаков функций k_1 и k_2 внутри области D, то в классы уравнений вида (8) и (9) входит часть параболических, эллиптико-параболических и эллиптико-гиперболических уравнений с произвольными линиями и областями параболического вырождения, а также описанный в первой части оператор теплопроводности смешанного типа второго порядка в пространственно одномерном случае.

Рассматривая теперь уравнение (7), видим, что оно охватывает широкий класс уравнений смешанно-составного типа. Так, например, сюда входят уравнения с линиями вырождения, делящими область D на несколько частей, в которых уравнение (7) является либо эллиптическим, либо составным (т.е. имеющим две мнимые и две действительные характеристики), либо чисто гиперболическим.

В связи с известной симметрией между K_1 и K_2, а также с произвольностью линий вырождения, естественно исследование уравнения (7) в квадрате D. Пусть $nu = (\nu_x, \nu_y)$ — вектор внутренней нормали в D, а Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 — стороны D соответственно, $(x = 0)$, $(y = 1)$, $(x = 1)$, $(y = 0)$.

Краевая задача A. Найти такое решение уравнения (7) в области D, что

$$u\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} = 0, \quad u_x\big|_{\Gamma_3} = 0, \quad K_2 u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad u_{yy}\big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{14}$$

Краевые задачи B (C). Найти такое решение уравнения (8) (или (9)) в области D, что

$$u\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3} = 0 \qquad (\text{или } u\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4} = 0). \tag{15}$$

Заметим, что краевая задача C является частным случаем задачи B после соответствующей замены переменных, и значит, в следующей лемме индексы при коэффициентах в (8), (9) можно опустить, имея в виду краевую задачу B (для задачи C достаточно поменять переменные и соответствующие индексы).

Лемма 1. *Для любой функции $u(x,y) \in C^2(D)$, удовлетворяющей* (15)*, имеет место априорная оценка*

$$\|Ku\|_0 \geqslant \alpha_1 \|u\|_1, \tag{16}$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в $L_2(D)$, $\|\cdot\|_1$ — норма в $W_2^1(D)$; здесь и далее через α будем обозначать некоторые положительные постоянные, не зависящие от функций, входящих в соответствующие неравенства.

Доказательство. Интегрированием по частям получаем:

$$2\int\limits_D e^{\lambda y} u_y K u\, dD = 2\big(k u_{yy} + u_{xx} + a u_y + c u, e^{\lambda y} u_y\big) =$$

$$= \int\limits_D \Big\{\big[(2a - k_y) - \lambda k\big] u_y^2 + \lambda u_x^2 - (c_y + \lambda c) u^2\Big\} e^{\lambda y} dD +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \Big\{ - k u_y^2 \nu_y - 2 u_x u_y \nu_x + u_x^2 \nu_y - c u^2 \nu_y \Big\} e^{\lambda y} d\Gamma.$$

В силу (10), (12), (13), (15) интеграл по границе неотрицателен, а из (11) при достаточно малых $\lambda > 0$ и δ следует, что

$$((2a - k_y) - \lambda k)(x,y) \geqslant \delta > 0, \quad (x,y) \in D.$$

Применяя теперь неравенства Коши и Фридрихса, получаем искомую оценку (16). □

Из леммы 1, в частности, следует, что регулярные решения краевых задач B и C единственны.

Определение 1. Функцию $u(x,y) \in W_2^2(D)$ будем называть слабым обобщенным решением краевой задачи A, если для любых $\nu(x,y) \in C_0^\infty(D)$ имеет место тождество

$$(u, L^*\nu)_0 = (f, \nu)_0. \tag{17}$$

Определение 2. Функцию $u(x,y) \in W_2^2(D)$ будем называть полусильным решением краевой задачи A, если существует такая последовательность функций $(u_n) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющих (14), что $Lu_n \in L_2(D)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|Lu_n - f\|_0 = 0. \tag{18}$$

Теорема 1. *Для любой функции $f(x,y) \in L_2(D)$ существует слабое обобщенное решение $u(x,y)$ краевой задачи* A*, причем в случае $k_1\big|_{\Gamma_2} \geqslant 0$, при дополнительном условии, что $(2\alpha_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ в $\overline{D}$, существует и единственное полусильное решение.*

Доказательство. Применяя к уравнению (8) метод «ε-регуляризации» уравнением составного типа третьего порядка и метод вспомогательного оператора по схеме, изложенной в [1], получаем, что существует слабое обобщенное решение $\nu(x,y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи B, т.е. для любых $\omega(x,y) \in C_0^\infty(D)$ выполнено тождество

$$(\nu, K_1^*\omega)_0 = (f,\omega)_0. \tag{19}$$

Так как в класс уравнений вида (8) входят эллиптико-параболические уравнения, то, следуя [3], можно построить пример, показывающий, что без дополнительных ограничений решение задачи B, вообще говоря, не будет иметь большей гладкости, чем из пространства $W_2^1(D)$. Поэтому в выделенных случаях, указанных в условии теоремы 1, при дополнительном предположении, что $(2\alpha_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ в $\overline{D}$, удается показать при помощи метода конечных разностей и продолжения уравнения (8) в область D (см. [1]), что существует регулярное решение $u(x,y) \in W_2^2(D)$ краевой задачи B с правой частью $f(x,y) \in W_2^1(D)$, $f\big|_{\Gamma_2} = 0$, причем выполнена следующая апостериорная оценка:

$$\|f\|_1 \geqslant \alpha_2 \|u\|_2, f|_{\Gamma_4} = 0, \quad \alpha > 0. \tag{20}$$

Вследствие этого краевая задача C с правой частью $\nu(x,y) \in W_2^1(D)$ имеет регулярное решение $u(x,y) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям (15). Отсюда, интегрируя по частям и используя (19), получим (17), т.е. $u(x,y)$ — слабое обобщенное решение задачи A. В выделенных же случаях из существования регулярных решений и леммы 1 следуют существование и единственность сильного решения $\nu(x,y) \in W_2^1(D)$ краевой задачи B для любой функции $f(x,y) \in L_2(D)$, т.е. существует такая последовательность функций $\nu_n(x,y) \in C^4(\overline{D})$, удовлетворяющих (15), что

$$\lim_{n\to\infty} \|\nu_n - \nu\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|K_1\nu_n - f\|_0 = 0.$$

Имея последовательность функций $(u_n(x,y))$ и функцию $u(x,y)$, регулярные решения краевой задачи C с правыми частями $(\nu_n(x,y))$ и $\nu(x,y)$ соответственно, получаем при помощи оценки (20) соотношение (18), означающее, что $u(x,y)$ — полусильное решение задачи A, единственность которого следует из построения. Теорема 1 доказана. □

Следуя [4, 5], можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $f_2(x,y) \in W_2^2(D)$, $f_2\big|_{\Gamma_3} = 0$. *К условию* (11) *добавим следующие требования*:

(a) $(2\alpha_2 + 3k_{2x})(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$;
(b) $(2\alpha_2 - 3k_{2x})(1,y) > 0$ *для* $y \in M$, *где* $M = \{y \in [0,1] : k_{2x}(1,y) > 0\}$.

Тогда регулярное решение $u(x,y)$ *краевой задачи* C *принадлежит весовому пространству* $W^3_{2,\varphi}(D)$, *т.е.* $\varphi u \in W_2^3(D)$, *где* $\varphi(x) = o((1-x)^2)$ *в некоторой окрестности точки* $x = 1$ *и* $\varphi(x) \equiv 1$ *вне этой окрестности.*

Теорема 2. *Пусть* $f(x,y) \in W_2^1(D)$, $f\big|_{\Gamma_2} = 0$ *и выполнены условия* (a), (b), *а также условие* $(2\alpha_1 + k_{1y})(x,y) > 0$ *в* $\overline{D}$. *Тогда при* $k_1\big|_{\Gamma_2} > 0$ *или* $k_1\big|_{\Gamma_2} = 0$ *полусильное решение* $u(x,y)$ *краевой задачи* A *будет принадлежать пространству* $W^3_{2,\varphi}(D) \cap W_2^2(D)$ *и удовлетворять краевым условиям* (14) *в среднем.*

Доказательство. Требуемая гладкость полусильного решения прямо следует из доказательства теоремы 1 и утверждения леммы 2, а из теорем вложения Соболева вытекает, что $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$; так как $u\big|_{\Gamma_2\cup\Gamma_3} = 0$, то

$$u_x\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad u_{xx}\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad u_{yy}\big|_{\Gamma_3} = 0$$

в среднем. Отсюда, из вида уравнения (9) и краевого условия для его правой части $K_2u\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3} = 0$, достигаемого из теорем вложения, так как $K_2u \in W^1_{2,\varphi}(D)$, следует, что

$$u_x\big|_{\Gamma_3} = 0, \quad u_{yy}|_{\Gamma_2} = 0, \quad K_2u|_{\Gamma_1} = 0$$

в среднем. Теорема 2 доказана. □

Замечание. Аналогичным методом можно показать, что полусильное решение краевой задачи A при соответствующих ограничениях на правую часть и коэффициенты уравнения (7) принадлежит весовому пространству более высокой гладкости.

3. Заключение. Приведена визуализация результатов численных расчетов полей температуры в разные моменты времени и их анимация по времени в пакете MathCad-15. Эта математическая модель описывает процесс, связанный с отключением электрической дуги в спутном потоке газа. В дальнейшем планируется использовать метод теплового баланса, применив эту вычислительную модель к более реальной задаче в трехмерном пространственном случае, а так же провести численные расчеты для уравнения четвёртого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
2. *Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. — М.: Высшая школа, 1990.
3. *Кон Д., Ниренберг Л.* Некоэрцитивные краевые задачи// в кн.: Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1967. — С. 88–165.
4. *Ханхасаев В. Н.* К теории нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка// в кн.: Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. СО РАН, 1988. — С. 154–165.
5. *Ханхасаев В. Н.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка// в кн.: Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 1981. — С. 144–150.
6. *Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л.* Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа// Мат. 1 Междунар. науч.-практ. конф. «Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале». — Улан-Удэ, 2001. — С. 168–172.
7. *Ханхасаев В. Н., Дармахеев Э. В.* О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *155*. — С. 89-97.
8. *Шашков А. Г.* Волновые явления теплопроводности. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ханхасаев Владислав Николаевич (Khankhasaev Vladislav Nikolaevich)
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: `hanhvladnick@mail.ru`

Пластинина Валентина Михайловна (Plastinina Valentina Mikhailovna)
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: `plastininav@yandex.ru`