ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 55–63
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-55-63

УДК 517.9

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ БЫСТРОЙ ЦВЕТНОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕАБЕЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ В РАМКАХ ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМАЛИЗМА

© 2025 г. **Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ**

Аннотация. Выведена общая формула для потери энергии быстрой цветозаряженной частицы при её рассеянии на мягких бозонных возбуждениях кварк-глюонной плазмы в рамках классического гамильтонова формализма. Введено понятие эффективного тока рассматриваемого процесса рассеяния, определена его связь с классической матрицей рассеяния и найдена формула для потерь энергии высокоэнергетичной цветной частицы, движущейся в высокотемпературной плазме с неабелевым типом взаимодействия.

Ключевые слова: потери энергии, кварк-глюонная плазма, эффективный ток, классическая матрица рассеяния.

ENERGY LOSS OF A HIGH-SPEED COLOR PARTICLE IN A NON-ABELIAN PLASMA WITHIN THE FRAMEWORK OF THE HAMILTONIAN FORMALISM

© 2025 **Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV**

Abstract. A general formula for the energy loss of a fast color-charged particle in the process of its scattering on soft boson excitations of quark-gluon plasma is derived within the framework of the classical Hamiltonian formalism. The concept of the effective current of the scattering process is introduced, its relationship with the classical scattering matrix is ??determined, and a formula for the energy loss of a high-energy color particle moving in a high-temperature plasma with a non-Abelian interaction type is found.

Keywords and phrases: energy losses, quark-gluon plasma, effective current, classical scattering matrix.

AMS Subject Classification: 74J20, 82D10

1. Введение. В первой работе [6] цикла, состоящего из двух статей, нами была построена классическая $\mathcal{S}$-матрица рассеяния, определяющая процесс упругого рассеяния коллективного бозе-возбуждения с продольной поляризацией (плазмона) на жесткой цветной частице. Классическая матрица рассеяния была представлена в виде экспоненциальной функции

$$\mathcal{S} = e^{i\mathcal{T}}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

с вещественной фазой $\mathcal{T}$, которая, для рассматриваемого процесса рассеяния задается следующим выражением:

$$\mathcal{T} = \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2\, G^{(2)\,a_1a_2b}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2}(c^{-a_1}_{\boldsymbol{k}_1})^* c^{-a_2}_{\boldsymbol{k}_2}\,\mathcal{Q}^{-b}. \tag{1.2}$$

Здесь коэффициентная функция в подинтегральном выражении имеет вид

$$G^{(2)\,a_1a_2b}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2} = -\frac{i}{2}\,\mathcal{T}^{(2)\,b\,a_1\,a_2}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2} 2\pi\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{T}^{(2)\,b\,a_1\,a_2}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2}$ — полная эффективная амплитуда, определяющая процесс упругого рассеяния плазмона на жесткой частице, найденная нами в [15], а $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2}$ — так называемая «резонансная разность частот»

$$\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} \equiv \omega^l_{\boldsymbol{k}_1} - \omega^l_{\boldsymbol{k}_2} - \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2).$$

Целью данной работы является приложение общей теории построения классической матрицы рассеяния для волновых систем с распределенными параметрами к задаче вычисления потерь энергии высокоэнергетической цветозаряженной частицы, проходящей через горячую кварк-глюонную плазму, т.е. потерь энергии вследствие процесса рассеяния на мягких бозонных возбуждениях среды. Как известно, для получения искомого выражения потерь энергии, необходимо знать некоторые эффективные токи бозонного или фермионного типов, связанные с интересующими нас процессами рассеяния. В рамках квантовой теории поля (см., например, [2, 3]) операторы бозонных и фермионных токов представляют собой так называемые радиационные операторы первого порядка, которые, в свою очередь, выражаются через вариационные производные квантовой $\mathcal{S}$-матрицы. Эти соотношения предполагается использовать для получения классических бозонных, а также фермионных токов, где вместо квантовой $\mathcal{S}$-матрицы будет использоваться классическая $\mathcal{S}$-матрица в духе Захарова—Шульмана.

Подход к определению эффективного бозонного тока на основе квантовой $\mathcal{S}$-матрицы уже был использован в ряде работ в приложении к задачам горячей КХД среды. Например, R. Jackiw и V. P. Nair использовали данный эффективный ток для получения высокотемпературных функций отклика для неабелевой плазмы и соответствующего неабелевого обобщения формулы Кубо (см. [11]). В [10] формула, связывающая бозонный ток и $\mathcal{S}$-матрицу, была использована для простого вывода эффективного действия для жестких температурных петель.

2. Общее выражение для потерь энергии заряженной частицы в плазме. В качестве приложения теории, развитой в [15], в рамках гамильтонова подхода рассмотрим задачу вычисления потерь энергии быстрой цветозаряженной частицы, проходящей через высокотемпературную кварк-глюонную плазму, связанных с процессом рассеяния данной частицы на мягких бозонных возбуждениях среды. В качестве исходного выражения будем использовать классическое выражение для потерь энергии партонов на единицу длины, являющееся минимальным расширением на цветовую степень свободы стандартной формулы для потерь энергии в обычной электромагнитной плазме (см. [1]):

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2}\int d\boldsymbol{x}\,dt\int d\mathcal{Q}_0\,\mathrm{Re}\big\langle \boldsymbol{J}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{E}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x},t)\big\rangle =$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\lim_{\tau\to\infty}\frac{(2\pi)^4}{\tau}\int d\boldsymbol{k}\,d\omega\int d\mathcal{Q}_0\,\mathrm{Re}\big\langle \boldsymbol{J}^{*a}_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\boldsymbol{E}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{k},\omega)\big\rangle. \tag{2.1}$$

Здесь хромоэлектрическое поле $\boldsymbol{E}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x},t)$ определено в месте локализации частицы. К процедуре усреднения по ансамблю в выражении (2.1) мы добавили интегрирование по начальному значению цветного заряда $\mathcal{Q}^a_0$ жесткой частицы с мерой, обеспечивающей сохранение групповых инвариантов (см. [12]):

$$d\mathcal{Q}_0 \equiv \mu \prod_{a=1}^{d_A} d\mathcal{Q}_0^a \, \delta(\mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^a - q_2) \, \delta(d^{abc} \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c - q_3) \, \delta(d^{abcd} \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c \mathcal{Q}_0^d - q_4) \, \ldots, \tag{2.2}$$

где $d_A = N_c^2 - 1$ — размерность цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$; d^{abc} — полностью симметричные структурные константы данной алгебры, $a, b, c = 1, \ldots, N_c$. Все остальные высшие (симметризованные) структурные константы для $\mathfrak{su}(N_c)$ выражаются через цветовые тензоры δ^{ab} и d^{abc} (см., например, [7, 13, 17]). Число произведений δ-функций в правой части (2.2) равно рангу алгебры $\mathfrak{su}(N_c)$, т.е. $N_c - 1$. Так, например, в частном случае алгебры $\mathfrak{su}(2_c)$ необходимо оставить только первую δ-функцию, для алгебры $\mathfrak{su}(3_c)$ — две δ-функции в (2.2) и т. п. Константы $q_2, q_3, \ldots$ фиксируют (зависимые от представления) значения квадратичного, кубичного и т. д. инвариантов Казимира. В присоединенном представлении групповая константа q_2 — глюонный элемент Казимира $C_A = N_c$. Общий множитель μ, зависящий от N_c, в мере (2.2) выбирается так, чтобы выполнялась нормировка

$$\int d\mathcal{Q}_0 = 1,$$

следствием чего, в частности, являются равенства

$$\int d\mathcal{Q}_0 \, \mathcal{Q}_0^a = 0, \quad \int d\mathcal{Q}_0 \, \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b = \frac{q_2}{d_A} \, \delta^{ab}, \quad \int d\mathcal{Q}_0 \, \mathcal{Q}_0^a \mathcal{Q}_0^b \mathcal{Q}_0^c = \frac{q_3}{d_A} \left(\frac{N_c^2 - 4}{N_c} \right)^{-1} d^{abc} \tag{2.3}$$

и т. д.

3. Эффективный ток. Для определения потерь энергии необходимо знать некоторый эффективный ток жесткой цветозаряженной частицы при взаимодействии последней с окружающей средой. В качестве руководящей идеи здесь мы апеллируем к квантовой теории поля. Как уже упоминалось во введении, в свое время в рамках $\mathcal{S}$-матричного формализма было введено в рассмотрение важное понятие *радиационных операторов* (см. [2, 3]). Среди них особую роль играет радиационный оператор первого порядка (оператор тока), задаваемый общей формулой

$$\hat{J}^{(\kappa)l}(x) = -i\hat{S}^\dagger \, \frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\mathrm{in}(\kappa)}(x)} \quad \text{или} \quad \hat{J}^{(\kappa)l}(x) = i \, \frac{\delta \hat{S}}{\delta \hat{\phi}_l^{\mathrm{out}(\kappa)}(x)} \, \hat{S}^\dagger, \tag{3.1}$$

где индекс κ определяет тип поля $\hat{\phi}^{(\kappa)}$. Каждое из полей $\hat{\phi}^{(\kappa)}$ является тензорнозначной или спин-тензорнозначной величиной с конечным числом лоренцевых компонент $\hat{\phi}_l^{(\kappa)}$, $l = 1, \ldots, r_\kappa$. Это выражение, например, для квантовой электродинамики, когда $\hat{\phi}_l(x) \equiv A_\mu(x)$, представляет собой, с точностью до знака, оператор электромагнитного тока, одетый радиационными поправками.

По аналогии с квантовой теорией поля определим связь между классической матрицей рассеяния $\mathcal{S}$ и эффективным током жесткой цветозаряженной частицы с помощью следующего выражения:

$$\mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^{a\mu}(\boldsymbol{x}, t) = -i\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \mathcal{A}_\mu^{-a}(x)}. \tag{3.2}$$

Эффективный *одетый* ток (3.2) энергичной цветной частицы возникает в результате экранирующего действия всех термальных жестких частиц и взаимодействий с мягким цветным полем плазмы. Так как асимптотические in- и out-поля $\mathcal{A}_\mu^{-a}(x)$ и $\mathcal{A}_\mu^{+a}(x)$, соответственно, удовлетворяют уравнениям свободного поля, они могут быть разложены на положительную и отрицательную частотные части инвариантным образом, так что разложение будет справедливым для всех моментов времени. Так например, можно написать

$$\mathcal{A}_\mu^{-a}(x) = \int d\boldsymbol{k} \left(\frac{Z_l(\boldsymbol{k})}{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l} \right)^{1/2} \left\{ \epsilon_\mu^l(\boldsymbol{k}) c_{\boldsymbol{k}}^{-a} \, e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}^l t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \epsilon_\mu^{*\,l}(\boldsymbol{k}) \, (c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^* \, e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}^l t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right\}, \tag{3.3}$$

где $c_{\boldsymbol{k}}^{-a}$ и $(c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^*$ — асимптотические in-амплитуды, $\omega_{\boldsymbol{k}}^l$ — спектр продольных колебаний кварк-глюонной плазмы. Явный вид вектора поляризации продольной моды $\epsilon_\mu^l(\boldsymbol{k}) = (\epsilon_0^l(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k}))$ в A_0-калибровке определяется следующим выражением:

$$\epsilon_\mu^l(\boldsymbol{k}) = \frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{-\tilde{u}^2(k)}}\bigg|_{\text{on-shell}}, \tag{3.4}$$

так что имеем очевидную нормировку

$$\epsilon_\mu^l(\boldsymbol{k})\epsilon^{*\,l\mu}(\boldsymbol{k}) = -1.$$

Здесь продольный проектор $\tilde{u}_\mu(k)$ в лоренц-ковариантной форме имеет вид

$$\tilde{u}_\mu(k) = \frac{k^2}{(k\cdot u)}\big(k_\mu - u_\mu(k\cdot u)\big),$$

где вектор u_μ — 4-скорость среды, $\mu = 0,1,2,3$. В частности, имеем $\tilde{u}_0(k) = 0$ в системе покоя кварк-глюонной плазмы, когда $u_\mu = (1,0,0,0)$. Как следствие определения (3.4) немедленно получаем $\epsilon_0^l(\boldsymbol{k}) = 0$. Очевидно, что

$$(\boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k}))^2 = 1 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k})\cdot\hat{\boldsymbol{k}}) = 1, \tag{3.5}$$

где $\hat{\boldsymbol{k}} \equiv \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ и принята во внимание вещественность вектора поляризации. Подчеркнем, что в разложении (3.3) независимость амплитуд $c_{\boldsymbol{k}}^{-a}$ и $(c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^*$ от времени является принципиально важной, как это будет показано ниже.

Можно разрешить (3.3) относительно $c_{\boldsymbol{k}}^{-a}$ и $(c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^*$, т.е. выразить нормальные переменные в терминах функции поля в координатном представлении $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$, $i = 1,2,3$, и ее производной по времени $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(x)$ (см. [4,5]). С учетом нормировки (3.5) результат будет следующим:

$$c_{\boldsymbol{k}}^{-a} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l}{Z_l(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\boldsymbol{y}}{(2\pi)^3}\,e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}^l t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k})\left[\mathcal{A}_i^{-a}(\boldsymbol{y},t) + \frac{i}{\omega_{\boldsymbol{k}}^l}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\boldsymbol{y},t)\right],$$
$$(c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^* = \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l}{Z_l(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\boldsymbol{y}}{(2\pi)^3}\,e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}^l t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k})\left[\mathcal{A}_i^{-a}(\boldsymbol{y},t) - \frac{i}{\omega_{\boldsymbol{k}}^l}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\boldsymbol{y},t)\right].$$

Как уже говорилось выше, функции $c_{\boldsymbol{k}}^{-a}$ и $(c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^*$ в левой части по определению не зависят от времени t, поэтому правая часть этих выражений также не должна зависеть от t. По этой причине можно считать t равным произвольной постоянной и, в частности, полагать $t = 0$. Тогда вместо последних выражений будем иметь

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k}}^{-a} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l}{Z_l(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\boldsymbol{y}}{(2\pi)^3}\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k})\left[\mathcal{A}_i^{-a}(\boldsymbol{y},0) + \frac{i}{\omega_{\boldsymbol{k}}^l}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\boldsymbol{y},0)\right],\\ (c_{\boldsymbol{k}}^{-a})^* &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l}{Z_l(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2}\int\frac{d\boldsymbol{y}}{(2\pi)^3}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k})\left[\mathcal{A}_i^{-a}(\boldsymbol{y},0) - \frac{i}{\omega_{\boldsymbol{k}}^l}\,\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\boldsymbol{y},0)\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далее, принимая во внимание представление (1.1), переписываем правую часть исходного выражения для эффективного тока (3.2) в следующем виде:

$$\mathcal{J}_Q^{ai}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\delta\mathcal{T}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} = \int d\boldsymbol{k}_1\left\{\frac{\delta\mathcal{T}}{\delta c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1}}\frac{\delta c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} + \frac{\delta\mathcal{T}}{\delta(c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1})^*}\frac{\delta(c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1})^*}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)}\right\}. \tag{3.7}$$

Используя явные выражения (3.6), легко находим соответствующие вариационные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\delta c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1}}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa_1}\frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}_1}^l}{Z_l(\boldsymbol{k}_1)}\right)^{1/2} e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k}_1)\delta(t),\\ \frac{\delta(c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1})^*}{\delta\mathcal{A}_i^{-a}(x)} &= \delta^{aa_1}\frac{1}{2(2\pi)^3}\left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}_1}^l}{Z_l(\boldsymbol{k}_1)}\right)^{1/2} e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}}\,\epsilon_i^l(\boldsymbol{k}_1)\delta(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

При выводе этих соотношений функциональную производную от калибровочного потенциала с производной $\dot{\mathcal{A}}_i^{-a}(\boldsymbol{y}, 0)$ по отношению к $\mathcal{A}_i^{-a}(x)$ полагаем равной нулю, считая что данные функции являются независимыми. Используя явный вид (1.2) фазовой функции $\mathcal{T}$ и вариационные производные (3.8), находим из (3.7) искомый трехмерный вектор эффективного тока в координатном представлении:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^a(\boldsymbol{x}, t) = \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \left\{ G_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2}^{(2)\, a_1 ab} F_{\boldsymbol{k}_2}\, \boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k}_2)\, e^{-i\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{x}}\, (c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1})^* + G_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2}^{(2)\, aa_2 b} F_{\boldsymbol{k}_1}\, \boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k}_1)\, e^{i\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{x}}\, c_{\boldsymbol{k}_2}^{-a_2} \right\} \delta(t) \mathcal{Q}^{-b}.$$

Здесь для краткости обозначений полагаем

$$F_{\boldsymbol{k}} \equiv \frac{1}{2(2\pi)^3} \left(\frac{2\omega_{\boldsymbol{k}}^l}{Z_l(\boldsymbol{k})} \right)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Соответствующий ток в фурье-представлении имеет вид

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^a(\boldsymbol{k}, \omega) = \int dt\, d\mathbf{x}\, \boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^a(\mathbf{x}, t)\, e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} =$$
$$= (2\pi)^3 \int d\boldsymbol{k}_1\, G_{\boldsymbol{k}_1, -\boldsymbol{k}}^{(2)\, a_1 ab} F_{-\boldsymbol{k}} \boldsymbol{\epsilon}^l(-\boldsymbol{k})\, (c_{\boldsymbol{k}_1}^{-a_1})^* \mathcal{Q}^{-b} + (2\pi)^3 \int d\boldsymbol{k}_2\, G_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_2}^{(2)\, aa_2 b} F_{\boldsymbol{k}}\ \boldsymbol{\epsilon}^l(\boldsymbol{k})\, c_{\boldsymbol{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b}. \tag{3.10}$$

4. Формула для потерь энергии жесткой цветозаряженной частицы. Вернемся теперь к выражению для потерь энергии (2.1). Хромоэлектрическое поле в (2.1), порождаемое эффективным током (3.10), определяется уравнением поля, которое в A_0-калибровке имеет вид

$$E_{\mathcal{Q}}^{ai}(\boldsymbol{k}, \omega) = -i\omega\, {}^*\widetilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) \mathcal{J}_{\mathcal{Q}}^{aj}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Отличные от нуля компоненты эффективного глюонного пропагатора в данной калибровке задаются следующим выражением:

$${}^*\widetilde{\mathcal{D}}^{ij}(k) = \left(\frac{k^2}{\omega^2} \right) \frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2}\, {}^*\Delta^l(k) + \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2} \right) {}^*\Delta^t(k). \tag{4.1}$$

Здесь «скалярные» поперечный и продольный пропагаторы определены как

$${}^*\Delta^t(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^t(k)}, \quad {}^*\Delta^l(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^l(k)},$$

где, в свою очередь, «скалярные» поперечный и продольный поляризационные операторы

$$\Pi^t(k) = \frac{1}{2}\, \Pi^{\mu\nu}(k) P_{\mu\nu}(k), \quad \Pi^l(k) = \Pi^{\mu\nu}(k) \widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)$$

определяются с помощью соответствующих проекторов $P_{\mu\nu}(k)$ и $\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k)$, которые в лоренц-инвариантной форме задаются выражениями

$$\widetilde{Q}_{\mu\nu}(k) = \frac{\tilde{u}_\mu(k) \tilde{u}_\nu(k)}{\bar{u}^2(k)}, \quad P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu - \widetilde{Q}_{\mu\nu}(k) \frac{(k \cdot u)^2}{k^2},$$

а поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ определен в приближении так называемых жестких температурных петель (см. [8, 9]).

Подставляя хромоэлектрическое поле $E_{\mathcal{Q}}^{ai}(k)$ в уравнение (2.1) и учитывая структуру пропагатора (4.1), получаем формулу для потери энергии:

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \lim_{\tau \to \infty} \frac{(2\pi)^4}{\tau} \int d\boldsymbol{k}\, d\omega \int d\mathcal{Q}^- \frac{\omega}{\boldsymbol{k}^2} \left\{ \frac{k^2}{\omega^2} \left\langle |(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^a(\boldsymbol{k}, \omega))|^2 \right\rangle \mathrm{Im}({}^*\Delta^l(k)) + \right.$$
$$\left. + \left\langle |(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathcal{Q}}^a(\boldsymbol{k}, \omega))|^2 \right\rangle \mathrm{Im}({}^*\Delta^t(k)) \right\}, \tag{4.2}$$

где теперь мера интегрирования по цветному заряду $d\mathcal{Q}^-$ задается для асимптотического значения $\mathcal{Q}^{-a}$. Нас интересует вклад в потери энергии, связанный с рассеянием на продольных плазменных волнах (плазмонах), т.е. вклад, пропорциональный $\operatorname{Im}({}^*\Delta^l(p))$ в правой части уравнения (4.2). Используя явное выражение (3.10) фурье-образа для эффективного тока $\boldsymbol{\mathcal{J}}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{k},\omega)$ и последнее равенство в (3.5), приводим корреляционную функцию в интеграле (4.2) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\big\langle|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{k},\omega))|^2\big\rangle = (2\pi)^6\bigg\{F^2_{-\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^2\int d\boldsymbol{k}_1\,d\boldsymbol{k}'_1\,G^{(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}}\,G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\boldsymbol{k}'_1,\,-\boldsymbol{k}}\big\langle(c^{-a_1}_{\boldsymbol{k}_1})^*c^{-a'_1}_{\boldsymbol{k}'_1}\big\rangle+\\ +F^2_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^2\int d\boldsymbol{k}_2\,d\boldsymbol{k}'_2\,G^{(2)\,aa_2b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_2}\,G^{*\,(2)\,aa'_2b'}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'_2}\big\langle(c^{-a'_2}_{\boldsymbol{k}'_2})^*c^{-a_2}_{\boldsymbol{k}_2}\big\rangle\bigg\}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь в правой части оставлены только члены с нетривиальными корреляционными функциями, которые в свою очередь представляем в обычном виде:

$$\big\langle(c^{-a_1}_{\boldsymbol{k}_1})^*c^{-a'_1}_{\boldsymbol{k}'_1}\big\rangle=\mathcal{N}^{-a_1a'_1}_{\boldsymbol{k}_1}\delta(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}'_1),\quad \big\langle(c^{-a'_2}_{\boldsymbol{k}'_2})^*c^{-a_2}_{\boldsymbol{k}_2}\big\rangle=\mathcal{N}^{-a'_2a_2}_{\boldsymbol{k}'_2}\delta(\boldsymbol{k}'_2-\boldsymbol{k}_2),$$

а для цветовой матрицы плотности числа плазмонов $\mathcal{N}^{-aa'}_{\boldsymbol{k}}$ используем цветовую декомпозицию предложенную в [15], записанную в терминах асимптотических переменных:

$$\mathcal{N}^{-aa'}_{\boldsymbol{k}}=\delta^{aa'}N^{-l}_{\boldsymbol{k}}+\big(T^c\big)^{aa'}\mathcal{Q}^{-c}\,W^{-l}_{\boldsymbol{k}}. \tag{4.4}$$

Здесь $N^{-l}_{\boldsymbol{k}}$ и $W^{-l}_{\boldsymbol{k}}$ — скалярные функции, определяющие бесцветную и цветовую части плотности числа плазмонов соответственно, а цветовые генераторы T^a в присоединенном представлении определены как $\big(T^a\big)^{bc}\equiv -if^{abc}$, где f^{abc} — антисимметричные структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$.

Сначала проанализируем вклад от бесцветной части асимптотической плотности числа плазмонов, пропорциональный скалярной плотности $N^{-l}_{\boldsymbol{k}}$. Последующее интегрирование по асимптотическому заряду $\mathcal{Q}^{-a}$ в силу (2.3) приводит к соотношению

$$\int d\mathcal{Q}^-\,\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}=\frac{C_A}{d_A}\,\delta^{bb'}$$

и, таким образом, вместо (4.3) можно теперь записать

$$\begin{aligned}&\int d\mathcal{Q}^-\big\langle|(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\mathcal{J}}^a_{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{k},\omega))|^2\big\rangle=\\ &=(2\pi)^6\frac{C_A}{d_A}\bigg\{F^2_{-\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^2\int d\boldsymbol{k}_1\,G^{(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}}\,G^{*\,(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}}\,N^{-l}_{\boldsymbol{k}_1}+F^2_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^2\int d\boldsymbol{k}_1\,G^{(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,G^{*\,(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,N^{-l}_{\boldsymbol{k}_1}\bigg\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Первый член в скобках фактически удваивает второй член при замене $\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}$ в общем выражении для потерь энергии (4.2). Используя явный вид коэффициентной функции $G^{(2)\,a_1a_2b}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2}$ (1.3), получим

$$G^{(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,G^{*\,(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}=\frac{1}{4}\mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,\mathcal{T}^{*(2)\,b\,a\,a_1}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}(2\pi)^2\big[\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1})\big]^2. \tag{4.6}$$

В силу цветовой и импульсной факторизации эффективной амплитуды

$$\mathcal{T}^{(2)a\,a_1a_2}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2}=f^{a\,a_1a_2}\,\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k}_1,\,\boldsymbol{k}_2}$$

далее имеем

$$\mathcal{T}^{(2)\,b\,a\,a_1}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,\mathcal{T}^{*(2)\,b\,a\,a_1}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}=f^{baa_1}\,f^{baa_1}\,\big|\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\big|^2=N_cd_A\big|\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\big|^2.$$

Под квадратом δ-функции в (4.6), как обычно, понимаем

$$\big[\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1})\big]^2=\frac{1}{2\pi}\,\tau\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1})$$

(см. [5]). Таким образом, произведение (4.6) окончательно принимает вид

$$G^{(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\,G^{*\,(2)\,aa_1b}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}=\frac{1}{4}\,\tau N_cd_A\big|\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\big|^2(2\pi)\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1}). \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.5), а затем в (4.2), приходим к следующему выражению:

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\,\frac{(2\pi)^{10}}{2}\,N_c^2\int d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}_1 d\omega\left(\frac{k^2}{\omega}\right)F_{\boldsymbol{k}}^2\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\right|^2 N^{-l}_{\boldsymbol{k}_1}\,(2\pi)\delta(\Delta\omega_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1})\,\mathrm{Im}({}^*\Delta^l(k)). \tag{4.8}$$

В качестве последнего шага в подинтегральное выражение в правой части уравнения (4.8) необходимо подставить следующее представление для мнимой части скалярного пропагатора:

$$\mathrm{Im}({}^*\Delta^l(k)) \simeq -\pi\,\mathrm{sign}(\omega)\,\delta(\mathrm{Re}\,{}^*\Delta^{-1\,l}(k)) = -\pi\,\mathrm{sign}(\omega)\left(\frac{Z_l(\boldsymbol{k})}{2\omega^l_{\boldsymbol{k}}}\right)\bigl[\delta(\omega-\omega^l_{\boldsymbol{k}})+\delta(\omega+\omega^l_{\boldsymbol{k}})\bigr].$$

Вклад от второй δ-функции здесь просто удваивает результат от вклада первой. Подставим последнее представление в (4.8) и проинтегрируем по ω. Вспоминая определение (3.9) функции $F_{\boldsymbol{k}}$, находим искомое выражение для потери энергии, связанное с бесцветной частью плотности числа плазмонов‘(4.4):

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\,\frac{(2\pi)^6}{8}\,N_c^2\int d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}_1\left(\frac{k^2}{\omega^l_{\boldsymbol{k}}}\right)\left|\mathcal{T}^{(2)}_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}_1}\right|^2 N^{-l}_{\boldsymbol{k}_1}\,\delta(\omega^l_{\boldsymbol{k}}-\omega^l_{\boldsymbol{k}_1}-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)). \tag{4.9}$$

Осталось провести аналогичный анализ для вклада от цветовой части плотности числа плазмонов, пропорциональной скалярной плотности $W^{-l}_{\boldsymbol{k}}$. Для этого вернемся к промежуточному выражению (4.3) и, для конкретности, рассмотрим подинтегральную функцию в первом члене в фигурных скобках, а именно:

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}}\,G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\boldsymbol{k}'_1,\,-\boldsymbol{k}}\bigl\langle(c^{-a_1}_{\boldsymbol{k}_1})^*c^{-a'_1}_{\boldsymbol{k}'_1}\bigr\rangle\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}$$

или

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}}\,G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\boldsymbol{k}'_1,\,-\boldsymbol{k}}\bigl(T^c\bigr)^{a_1a'_1}\,W^{-l}_{\boldsymbol{k}_1}\mathcal{Q}^{-c}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}, \tag{4.10}$$

если оставить в корреляционной функции только чисто неабелеву, т.е. цветовую часть. Здесь нас будет интересовать общий цветовой фактор этого выражения. Для этой цели сначала нужно выделить цветовую зависимость функций $G^{(2)}$ по правилу

$$G^{(2)\,a_1ab}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}} = f^{a_1ab}\,G^{(2)}_{\boldsymbol{k}_1,\,-\boldsymbol{k}},\qquad G^{*\,(2)\,a'_1ab'}_{\boldsymbol{k}'_1,\,-\boldsymbol{k}} = f^{a'_1ab'}\,G^{*\,(2)}_{\boldsymbol{k}'_1,\,-\boldsymbol{k}},$$

а затем проинтегрировать по $\mathcal{Q}^-$ симметричное произведение трех асимптотических цветных зарядов в (4.10). В силу соотношений (2.3) данный интеграл должен быть пропорциональным полностью симметричным структурным константам цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, т.е.

$$\int d\mathcal{Q}^-\,\mathcal{Q}^{-c}\mathcal{Q}^{-b}\mathcal{Q}^{-b'}\sim d^{c\,b\,b'}.$$

Нетрудно видеть, что в результате цветовой фактор из выражения (4.10) будет в свою очередь пропорционален следу произведения четырех генераторов:

$$\mathrm{tr}\bigl(T^aT^cT^aD^c\bigr) = \frac{1}{2}\,N_c\,\mathrm{tr}\bigl(T^cD^c\bigr) = 0.$$

Здесь введена в рассмотрение матрица D^a (в дополнение к T^a) с компонентами $\bigl(D^a\bigr)^{b\,c}\equiv d^{a\,b\,c}$ и использовано соотношение

$$T^aT^bT^a = \frac{1}{2}\,N_cT^b.$$

Таким образом, вклад в потери энергии, связанный с цветовой частью плотности числа плазмонов, равен нулю, и причина этого заключается в том, что цветовой фактор этого вклада, не связанный с динамикой системы, равен нулю.

5. Заключение. В данной работе на основе полученной классической матрицы рассеяния был найден эффективный цветной ток, порождающий процесс рассеяния жесткой цветозаряженной частицы на мягких бозе-возбуждениях кварк-глюонной плазмы. Найденный ток позволил в свою очередь определить соответствующее выражение для потери энергии быстрой цветной частицы с целым спином, движущейся в высокотемпературной набелевой плазме.

Большой интерес как в чисто теоретическом, так и в практическом плане представляет собой обобщение полученных в данной работе результатов на фермионный сектор жестких и мягких возбуждений кварк-глюонной плазмы. Отметим, что само по себе рассмотрение процессов рассеяния с изменением типа статистики мягких и жестких мод представляется весьма сложным уже в самой попытке выписать адекватный этой задаче математический аппарат (см. например, ранние работы по этой теме [14, 16]). Здесь для описания цветовой степени свободы как жесткой цветной частицы с полуцелым спином, так и нормальных мягких фермионных переменных поля, предполагается использовать функции, принимающие значения в алгебре Грассмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.* Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
2. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
3. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. — М.: Наука, 1987.
4. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.
5. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивисткая квантовая теория. Т. 2. Релятивистские квантовые поля. — М.: Наука, 1978.
6. *Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю.* Классическая матрица рассеяния для жестких и мягких возбуждений в плазме с неабелевым взаимодействием// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2025. — *240.* — С. 29–38.
7. *de Azcárraga J. A., Macfarlane A. J., Mountain A. J., Pérez Bueno J. C.* Invariant tensors for simple groups// Nucl. Phys. B. — 1998. — *510.* — P. 657–687.
8. *Blaizot J.-P., Iancu E.* The quark–gluon plasma: collective dynamics and hard thermal loops// Phys. Rep. — 2002. — *359.* — P. 355–528.
9. *Braaten E., Pisarski R. D.* Soft amplitudes in hot gauge theories: a general analysis// Nucl. Phys. B. — 1990. — *337.* — P. 569–634.
10. *Elmfors P., Hansson T. H., Zahed I.* Simple derivation of the hard thermal loop effective action// Phys. Rev. D. — 1999. — *59.* — 045018.
11. *Jackiw R., Nair V. P.* High-temperature response functions and the non-Abelian Kubo formula// Phys. Rev. D. — 1993. — *48.* — P. 4991–4998.
12. *Kelly P., Liu Q., Lucchesi C., Manuel C.* Classical transport theory and hard thermal loops in the quark-gluon plasma// Phys. Rev. D. — 1994. — *50.* — P. 4209–4218.
13. *Klein A.* Invariant operators of the unitary unimodular group in n dimensions// J. Math. Phys. — 1963. — *4.* — P. 1283–1284.
14. *Markov Yu. A., Markova M. A.* Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma II: Soft-quark–hard-particle scattering and energy losses// Nucl. Phys. A. — 2007. — *784.* — P. 443–514.
15. *Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu.* Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction I: Plasmon – hard particle scattering// Nucl. Phys. A. — 2024. — *1048.* — 122903.
16. *Markov Yu. A., Markova M. A., Vall A. N.* Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma: soft-quark bremsstrahlung and energy losses// Int. J. Mod. Phys. A. — 2010. — *25.* — P. 685–776.
17. *Sudbery A.* Computer-friendly d-tensor identities for $SU(n)$// J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — *23.* — P. L705–L709.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yuri Adolfovich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatolievna)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com