ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 40–54
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-40-54

УДК 517.977.5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВАМИ ФАЗОВОЙ ТРАЕКТОРИИ

© 2025 г. **И. В. ЛУТОШКИН, М. С. РЫБИНА**

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального управления, содержащая запаздывание по фазовым переменным и управляемые разрывы фазовой траектории. Для решения задачи такого типа предлагается использовать метод параметризации, заключающийся в представлении управляющих функций в виде обобщенного сплайна с подвижными узлами и последующем сведении исходной задачи к конечномерной задаче нелинейного программирования относительно параметров управления. В данном исследовании в число переменных полученной конечномерной задачи включаются моменты разрыва фазовой траектории. Для переменных конечномерной задачи предлагается алгоритм вычисления производных целевой функции на основе использования сопряженных переменных исходной задачи оптимального управления. Предлагаемый алгоритм решения рассматриваемых задач оптимального апробирован на примерах, приведенных в работе.

Ключевые слова: оптимальное управление, запаздывание, управляемый разрыв фазовой траектории, численные методы, метод параметризации.

APPLICATION OF THE PARAMETRIZATION METHOD FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH DISCONTINUOUS PHASE TRAJECTORIES

© 2025 **I. V. LUTOSHKIN, M. S. RYBINA**

Abstract. In this paper, we consider an optimal control problem involving delays in phase variables and controlled discontinuities in the phase trajectory. To solve this type of problem, we propose the parametrization method based on representing control functions as generalized splines with movable nodes and subsequently reducing the original problem to a finite-dimensional nonlinear programming problem for control parameters. In this work, the moments of discontinuity of the phase trajectory are considered as variables of the resulting finite-dimensional problem. Also, we propose an algorithm for calculating the derivatives of the objective function based on the use of the adjoint variables of the original optimal control problem. The algorithm proposed for solving the considered problems was tested by examples presented in the work.

Keywords and phrases: optimal control, delay, discontinuous phase trajectory, parametrization method, numerical methods.

AMS Subject Classification: 49M37

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-28-00542).

ISSN 0233–6723

1. Постановка проблемы. При моделировании прикладных динамических оптимизационных проблем, формулируемых в терминах задач теории оптимального управления (ОУ), часто возникают потребности учета разрывов фазовых траекторий (см. [2,4]), а также учета запаздывающего по времени эффекта (см. [5,7,8]). В [9] предлагается модель управления экономической системой в условиях массового заболевания, в рамках которой присутствуют одновременно как запаздывание по фазовым переменным, так и управляемый разрыв фазовой траектории. В связи с этим возникает вопрос разработки методов решения таких задач ОУ.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \tag{1}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0; \tag{2}$$

$$x(\tau_i+) = \zeta_i(x(\tau_i-)), \quad \tau_i \in [t_0; T], \quad 1 \leqslant i \leqslant N^\tau; \tag{3}$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4}$$

$$J = g(x(T), \tau_1, \ldots, \tau_{N^\tau}) \to \min. \tag{5}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управления, для которых рассматривается поведение при $t_0 \leqslant t \leqslant T$; $f : \mathbb{R}^{1+2n+r} \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Функция $\psi(t)$ — детерминированная величина, описывающая поведение фазовой траектории $x(t)$ до момента начала управления. Скалярная величина $h > 0$ определяет точечное запаздывание системы. Скалярные величины τ_i представляют собой управляемые моменты разрыва фазовой траектории. Значение траектории в момент τ_i+ определяется детерминированной функцией $\zeta_i(x)$ ($1 \leqslant i \leqslant N^\tau$). Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ является односвязным компактом. Решение задачи (1)–(5) ищется в классе кусочно непрерывных управляющих функций. Функции f, g являются непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам.

Далее будем предполагать, что поставленная задача ОУ удовлетворяет условию ограниченности (см. [1]).

Условие ограниченности. *Каждому допустимому управлению $u(t)$, удовлетворяющему условию* (4)*, отвечает траектория $x(t)$ системы* (1)–(3)*, определенная на $[t_0, T]$; семейство возможных траекторий равномерно ограничено.*

Условие ограниченности позволяет обеспечить интегрируемость задачи Коши (1)–(3) для любого допустимого управления.

2. Параметризация управления. Метод параметризации (см. [3, 5]) заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \equiv T \tag{6}$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mu = 1, \ldots, r, \tag{7}$$

где $v_\mu^k \in \mathbb{R}^d$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t)) \in U$ и, соответственно, $v^k = (v_1^k, \ldots, v_r^k) \in \mathbb{R}^{d \times r}$.

Пусть управление (4) параметризовано в виде (6), (7); тогда фазовая траектория $x(t)$, порожденная задачей Коши (1)–(3), при $1 \leqslant k \leqslant N$ принимает зависимость от параметров управления $w^k = (t_k, v^k) \equiv \left(w_{0,0}^k, w_{1,1}^k, \ldots, w_{r,d}^k\right)$ и вектора моментов разрыва фазовой траектории $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{N^\tau})$. Будем считать, что моменты разрыва упорядочены: $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{N^\tau}$. Если $\tau_s = \tau_{s+1}$, то выполняется условие разрыва в виде $x(\tau_{s+1}+) = \zeta_{s+1}(\zeta_s(x(\tau_s-)))$.

Решение задачи (1)–(3) может быть представлено как

$$x(t) = \begin{cases} z(t; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k), & t \in [t_{k-1}; \min\{t_k, \tau_1\}); \\ z(t; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k, \tau_1, \ldots, \tau_s), & t \in [t_{k-1}; t_k) \cap [\tau_s; \tau_{s+1}), \ s < N^\tau; \\ z(t; w^1, \ldots, w^{k-1}, v^k, \tau_1, \ldots, \tau_{N^\tau}), & t \in [\max\{t_{k-1}, \tau_{N^\tau}\}; t_k). \end{cases}$$

Введем функции, возвращающие индексы соответствующих множеств:

$$l(t) = k-1,\ t \in [t_{k-1}; t_k); \quad m(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1; \\ i, & t \in [\tau_i; \tau_{i+1}); \\ N^\tau, & t \geqslant \tau_{N^\tau}. \end{cases}$$

Также введем обозначения $\overline{w^k} = (w^1, w^2, \ldots, w^k)$, $\overline{\tau_s} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s)$. Будем считать, что $z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_s}) = z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k)$, если $s < 1$.

Функции $z(\cdot)$ находятся из ряда соотношений. При $t \leqslant t_0$

$$z(t; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_s}) = \psi(t).$$

При $t \in [t_k; \min\{t_{k+1}, \tau_1\})$

$$z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}) = z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k) + \\ + \int\limits_{t_k}^{t} f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \tag{8}$$

Если разрыв траектории $x(t)$ происходит на промежутке $[t_k; t_{k+1})$, то после момента разрыва при $t \in [\tau_{m(t)}; \min\{t_{k+1}, \tau_{m(t)+1}\})$ и $m(t) < N^\tau$, а также при $t \in [\tau_{m(t)}; t_{k+1})$ и $m(t) = N^\tau$ выполняется соотношение

$$z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}) = \zeta_{m(t)}(z(\tau_{m(t)}-; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t)}})) + \\ + \int\limits_{\tau_{m(t)}}^{t} f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \tag{9}$$

Если момент разрыва предшествует $[t_k; t_{k+1})$, то до момента следующего разрыва на $[t_k; t_{k+1})$ при $t \in [t_k; \min\{t_{k+1}, \tau_{m(t)+1}\})$ или, если разрыва на $[t_k; t_{k+1})$ нет, при $t \in [t_k; t_{k+1})$ выполняется соотношение

$$z(t; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}) = z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t)}}) + \\ + \int\limits_{t_k}^{t} f\left(s, z(s; \overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t)}}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{k+1}(s; v^{k+1})\right) ds. \tag{10}$$

Введем функцию

$$\varphi\left(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}}\right) = g\left(z\left(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}\right)\right). \tag{11}$$

Таким образом, исходная задача (1)-(5) аппроксимируется следующей задачей нелинейного программирования (НП):

$$\varphi(w^1, \ldots, w^N, \tau_1, \ldots, \tau_{N^\tau}) \to \min \tag{12a}$$

при ограничениях

$$W = \Big\{w^k :\ w_{0,0}^{k-1} \leqslant w_{0,0}^k,\ u^k(t; v^k) \in U,\ w_{0,0}^{k-1} \leqslant t \leqslant w_{0,0}^k,\ k = 1, \ldots, N; \\ t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{N^\tau} \leqslant T,\ w_{0,0}^0 = t_0,\ w_{0,0}^N \equiv T \leqslant T^*\Big\}. \tag{12b}$$

В поставленной задаче (12) вычисление значения целевой функции эквивалентно решению соответствующей задачи Коши. Применение методов оптимизации нулевого порядка (недифференцируемой оптимизации) приводит к достаточно долгому вычислительному процессу. Если эксперт сможет удачно выбрать класс параметризации управления (6), (7), то задача НП будет иметь небольшую размерность, при этом адекватно аппроксимирует исходную задачу ОУ. При решении задач НП небольшой размерности эффективно применение классических методов дифференцируемой оптимизации.

3. Производные по параметрам управления. В задаче НП (12) зависимость φ от $(w^1,\dots,w^N,\tau_1,\dots,\tau_{N^\tau})$ задана опосредованно: решением задачи Коши (1)–(3) при представлении управления (4) в виде (6), (7). Для того, чтобы к задаче НП (12) применять методы дифференцируемой оптимизации первого порядка, необходимо построить алгоритм вычисления производных целевой функции $\varphi(w^1,\dots,w^N,\tau_1,\dots,\tau_{N^\tau})$.

В [5] рассматривается задача ОУ с точечным запаздыванием без разрыва фазовой траектории: (1), (2), (4) с критерием

$$J = g(x(T)) \to \min\,. \tag{13}$$

При параметризации управления (4) в виде (6), (7) задача (1), (2), (4), (13) имеет представление

$$\varphi(w^1,\dots,w^N) \to \min \tag{14a}$$

при ограничениях

$$W = \Big\{ w^k:\ w_{0,0}^{k-1} \leqslant w_{0,0}^k,\ u^k(t;v^k)\in U,\ w_{0,0}^{k-1}\leqslant t\leqslant w_{0,0}^k,\ k=1,\dots,N;\\ w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leqslant T^*\Big\}. \tag{14b}$$

Проблема вычисления производных целевой функции φ по переменным $(w^1,\dots,w^N)$ для задачи (14) с условиями (1), (2) решается на основе использования сопряженной системы.

Введем функцию Понтрягина и систему уравнений для сопряженных переменных:

$$H(t,p,x,\xi,u) = \langle p, f(t,x,\xi,u)\rangle\,; \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H(p(t),x,\xi,u(t))}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x(t)\\ \xi=x(t-h)}} - \\ \qquad -\dfrac{\partial H(p(t+h),x,\xi,u(t+h))}{\partial \xi}\theta(T-h-t)\bigg|_{\substack{x=x(t+h)\\ \xi=x(t)}}; \\ p(T) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x(T)}. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t<0; \\ 1 & t\geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть функции f, g, входящие в постановку задачи* (1)–(2), (13), *непрерывно дифференцируемы по всем переменным, параметризованное управление* (7) *дифференцируемо по параметрам v^k, $k=1,\dots,N$. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче* (14) *по параметрам верны следующие формулы*:

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\dots,w^N)}{\partial t_k} = H\Big(t_k,p(t_k),x(t_k),x(t_k-h),u^k(t_k,v^k)\Big) - \\ - H\Big(t_k,p(t_k),x(t_k),x(t_k-h),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\Big);$$

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\dots,w^N)}{\partial T} = H\Big(T,p(T),x(T),x(T-h),u^N(T,v^N)\Big);$$

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\dots,w^N)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s,p(s),x(s),x(s-h),u(s))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(s,v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k}ds.$$

Доказательство. Выведем формулу производной функции φ по параметрам t_k, $k=1,2,\dots,N$. Формально эта производная может быть записана в виде

$$\frac{\partial\varphi(w^1,\dots,w^N)}{\partial t_k} = \frac{\partial g\big(z(T;w^1,\dots,w^{N-1},v^N)\big)}{\partial x}\frac{\partial z\big(T;w^1,\dots,w^{N-1},v^N\big)}{\partial t_k}.$$

Второй сомножитель, полученный в правой части, представляет собой вариацию параметризованной траектории по моменту переключения управления.

Для задачи (1)-(2), (13) параметризованная траектория представляется в виде (8). В этом случае

$$z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N) = z(t_k; \overline{w^{k-1}}, v^k)+ \\ + \sum_{j=k}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f\Big(s, z(s; \overline{w^j}, v^{j+1}), z(s-h; \overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}), u^{j+1}(s; v^{j+1})\Big)\, ds. \quad (17)$$

Параметр t_k оказывает нетривиальное влияние на параметризованную траекторию с момента t_k, поэтому определим вариацию $y^{k00}(t)$ по данному параметру в виде

$$y^{k00}(t) = \frac{\partial z(t; \overline{w^j}, v^{j+1})}{\partial t_k}, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \quad k \leqslant j \leqslant N-1.$$

Непосредственно дифференцируя (17) по t_k, получаем

$$y^{k00}(T) = f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\Big) - f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big)+ \\ + \int_{t_k}^{T} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{k00}(s-h) I\big(s \in [t_k+h; T]\big)\right) ds; \quad (18)$$

здесь $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$, $I(\eta)$ — индикаторная функция:

$$I(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta \text{ истина;} \\ 0, & \text{если } \eta \text{ ложь.} \end{cases}$$

Перейдем к выводу производной, принимая во внимание уравнение вариации (18), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = \Big\langle p(T), y^{k00}(T)\Big\rangle = \Big\langle p(t_k), y^{k00}(t_k)\Big\rangle + \int_{t_k}^{T} \frac{d}{ds} \Big\langle p(s), y^{k00}(s)\Big\rangle\, ds =$$

$$= \Big\langle p(t_k), f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\Big) - f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big)\Big\rangle + \\ + \int_{t_k}^{T} \Big(\Big\langle \dot p(s), y^{k00}(s)\Big\rangle + \Big\langle p(s), \dot y^{k00}(s)\Big\rangle\Big)\, ds =$$

$$= H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\Big) - H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big)+ \\ + \int_{t_k}^{T} \Bigg(\Bigg\langle - \frac{\partial H(p(s),x,\xi,u(s))}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} - \\ - \frac{\partial H(p(s+h),x,\xi,u(s+h))}{\partial \xi} I\big(s \in [t_0; T-h]\big)\Big|_{\substack{x=x(s+h)\\ \xi=x(s)}}, y^{k00}(s)\Bigg\rangle + \\ + \Bigg\langle p(s), \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{k00}(s)\Big|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} + \\ + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{k00}(s-h) I\big(s \in [t_k+h; T]\big)\Big|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}}\Bigg\rangle\Bigg)\, ds =$$

$$= H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^k(t_k, v^k)\Big) - H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big).$$

Производная функции φ по параметрам $v^k_{\mu,\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $\mu = 1, 2, \ldots, r$, $\alpha = 1, 2, \ldots, d$, может быть записана в виде

$$\frac{\partial\varphi\left(w^1, \ldots, w^N\right)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \frac{\partial g\left(z\left(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N\right)\right)}{\partial x} \frac{\partial z\left(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N\right)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}.$$

Второй сомножитель, полученный в правой части, представляет собой вариацию параметризованной траектории по параметрам $v^k_{\mu,\alpha}$.

Параметр $v^k_{\mu,\alpha}$ оказывает нетривиальное влияние на параметризованную траекторию с момента t_{k-1}, поэтому определим вариацию $y^{k\mu\alpha}(t)$ по данному параметру в виде

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; \overline{w^j}, v^{j+1})}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \quad k-1 \leqslant j \leqslant N-1.$$

Дифференцируя (17) по $v^k_{\mu,\alpha}$ получаем

$$y^{k\mu\alpha}(T) = \int\limits_{t_{k-1}}^{T} \Bigg(\frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_{k-1} + h; T]) + \\ + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} I(s \in [t_{k-1}; t_k])\Bigg) ds; \quad (19)$$

здесь $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$. Принимая во внимание уравнение вариации (19), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина, можно вывести производную по $v^k_{\mu,\alpha}$:

$$\frac{\partial\varphi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \Big\langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k)\Big\rangle + \int\limits_{t_k}^{T} \frac{d}{ds}\Big\langle p(s), y^{k\mu\alpha}(s)\Big\rangle = \int\limits_{t_k}^{T} \Big(\Big\langle \dot p(s), y^{k\mu\alpha}(s)\Big\rangle + \Big\langle p(s), \dot y^{k\mu\alpha}(s)\Big\rangle\Big) ds =$$

$$= \int\limits_{t_k}^{T} \Bigg(\Bigg\langle - \frac{\partial H(p(s), x, \xi, u(s))}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} - \\ - \frac{\partial H(p(s+h), x, \xi, u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h])\Bigg|_{\substack{x=x(s+h)\\ \xi=x(s)}}, y^{k\mu\alpha}(s)\Bigg\rangle + \\ + \Bigg\langle p(s), \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s)\Bigg|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} + \\ + \frac{\partial f(s, x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} I(s \in [t_{k-1}; t_k]) + \\ + \frac{\partial f(s, x, \xi, u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_k + h; T])\Bigg|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}}\Bigg\rangle\Bigg) ds =$$

$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(s, x(s), x(s-h), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} ds.$$

Если конечный момент времени T является подвижным, то производная целевой функции φ из (14) по конечному моменту находится достаточно просто:

$$\frac{\partial\varphi\left(w^1,\ldots,w^N\right)}{\partial T}=\frac{\partial g\left(z\left(T;w^1,\ldots,w^{N-1},v^N\right)\right)}{\partial x}\frac{\partial z\left(T;w^1,\ldots,w^{N-1},v^N\right)}{\partial T}.$$

Найдем производную (17) по T:

$$\frac{\partial z\left(T;w^1,\ldots,w^{N-1},v^N\right)}{\partial T}=f(T,x(T),x(T-h),u^N(T)). \tag{20}$$

Принимая во внимание выражение (20), уравнение сопряженной переменной (16) и определение функции Понтрягина, получаем

$$\frac{\partial\varphi\left(w^1,\ldots,w^N\right)}{\partial T}=\left\langle p(T),f(T,x(T),x(T-h),u^N(T))\right\rangle=H(T,p(T),x(T),x(T-h),u^N(T,v^N)).$$

Теорема доказана. □

Теперь перейдем к задаче ОУ (1)–(5), которой соответствует задача НП (12). Вычисление производных целевой функции φ в задаче (12) также может быть сведено к использованию сопряженных переменных. Однако система сопряженных переменных не идентична (15), (16), введенной выше для задачи ОУ без разрыва фазовой траектории. В случае разрыва фазовой траектории сопряженные переменные также имеют разрыв.

Введем условие разрыва сопряженной траектории (см. [2]):

$$p(\tau_i-)=p(\tau_i+)\left(\frac{\partial\zeta_i(x)}{\partial x}\right)^T\Bigg|_{x=x(\tau_i-)},\quad 1\leqslant i\leqslant N^\tau. \tag{21}$$

Таким образом, в задаче ОУ (1)-(5) сопряженная система определяется условиями (15), (16), (21).

Теорема 2. *Пусть функции f, g, ζ_i ($i\leqslant N^\tau$), входящие в постановку задачи* (1)–(5)*, непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных функции φ в задаче* (12) *по параметрам верны следующие формулы*:

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N},\overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k}=H\Big(t_k,p(t_k-),x(t_k-),x(t_k-h+),u^k(t_k,v^k)\Big)-$$
$$-H\Big(t_k,p(t_k+),x(t_k+),x(t_k-h+),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\Big);$$

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N},\overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial \tau_i}=H\Big(\tau_i,p(\tau_i-),x(\tau_i-),x(\tau_i-h+),u(\tau_i-)\Big)-$$
$$-H\Big(\tau_i,p(\tau_i+),x(\tau_i+),x(\tau_i-h+),u(\tau_i+)\Big);$$

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N},\overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial T}=H\Big(T,p(T),x(T),x(T-h),u^N(T,v^N)\Big);$$

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N},\overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial H\big(s,p(s),x(s),x(s-h),u(s)\big)}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(s,v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}}ds.$$

Доказательство. Параметризованная траектория представляется в виде (9), (10). Введем формальную переменную $\tau_{N^\tau+1}=T$ и рассмотрим параметризованную траекторию с момента разрыва τ_i:

$$z(t;\overline{w^{l(t)}},v^{l(t)+1},\overline{\tau_j})=\zeta_j(z(\tau_j-;\overline{w^{l(\tau_j-)}},v^{l(\tau_j-)+1},\overline{\tau_{j-1}}))+$$
$$+\int\limits_{\tau_j}^{t}f\left(s,z(s;\overline{w^{l(s)}},v^{l(s)+1},\overline{\tau_j}),z(s-h;\overline{w^{l(s-h)}},v^{l(s-h)+1},\overline{\tau_{m(s-h)}}),u^{l(s)+1}(s;v^{l(s)+1})\right)ds, \tag{22}$$

$\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$, $i \leqslant j < N^\tau$; $\tau_j \leqslant t \leqslant \tau_{j+1}$, $j = N^\tau$. Так как параметр τ_i оказывает нетривиальное влияние с момента τ_i, то определим вариацию $y^{i00}(t)$ с этого момента как производную фазовой траектории по τ_i:

$$y^{i00}(t) = \frac{\partial z(t; \overline{w^{l(t)}}, v^{l(t)+1}, \overline{\tau_j})}{\partial \tau_i}, \ \tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}, \ i \leqslant j < N^\tau; \ \tau_j \leqslant t \leqslant \tau_{j+1}, \ j = N^\tau.$$

Продифференцируем соотношение (22) по τ_i. При $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ имеем

$$\begin{aligned} y^{i00}(t) = \frac{\partial \zeta_i(x(\tau_i-))}{\partial x} f\Big(\tau_i, x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\Big) - \\ - f\Big(\tau_i, x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\Big) + \\ + \int\limits_{\tau_i}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_i + h; T]) \right) ds. \quad (23) \end{aligned}$$

При $\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$, $i < j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leqslant t \leqslant T$, $j = N^\tau$ имеем

$$\begin{aligned} y^{i00}(t) = \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{i00}(\tau_j-) + \\ + \int\limits_{\tau_j}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) \right) ds. \quad (24) \end{aligned}$$

В (23) и (24) $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$.

Покажем постоянство скалярного произведения $\langle p(t), y^{i00}(t) \rangle$ на каждом из сегментов $[\tau_j; \tau_{j+1})$. Для этого воспользуемся полученной вариацией (23), (24), уравнением для сопряженной переменной (16) и определением функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \langle p(\tau_{j+1}-), y^{i00}(\tau_{j+1}-) \rangle = \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{d}{ds} \langle p(s), y^{i00}(s) \rangle \, ds = \\ = \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\langle \dot p(s), y^{i00}(s) \rangle + \langle p(s), \dot y^{i00}(s) \rangle \right) ds = \\ = \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \Bigg(\Bigg\langle - \frac{\partial H(p(s),x,\xi,u(s))}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} - \\ - \frac{\partial H(p(s+h),x,\xi,u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \Bigg|_{\substack{x=x(s+h) \\ \xi=x(s)}}, y^{i00}(s) \Bigg\rangle + \\ + \Bigg\langle p(s), \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{i00}(s) \Bigg|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} + \\ + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{i00}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) \Bigg|_{\substack{x=x(s) \\ \xi=x(s-h)}} \Bigg\rangle \Bigg) ds = \langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle . \end{aligned}$$

Итак, между любыми соседними точками разрыва скалярное произведение $\langle p(t), y^{i00}(t) \rangle$ постоянно и выполняется равенство

$$\langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+) \rangle = \langle p(\tau_{j+1}-), y^{i00}(\tau_{j+1}-) \rangle .$$

Воспользуемся условиями, выполняющимися при разрыве вариации (24) и сопряженной траектории (21):

$$\left\langle p(\tau_j+), y^{i00}(\tau_j+)\right\rangle = \left\langle p(\tau_j+), \frac{\partial\zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{i00}(\tau_j-)\right\rangle =$$
$$= \left\langle p(\tau_j+)\left(\frac{\partial\zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x}\right)^T, y^{i00}(\tau_j-)\right\rangle = \left\langle p(\tau_j-), y^{i00}(\tau_j-)\right\rangle.$$

Полученное соотношение показывает равенство скалярного произведения слева и справа в точке разрыва. Таким образом, скалярное произведение постоянно на всем промежутке определения функций $y^{i00}(t)$ и $p(t)$. В частности,

$$\left\langle p(\tau_i+), y^{i00}(\tau_i+)\right\rangle = \left\langle p(T), y^{i00}(T)\right\rangle.$$

Для вывода производной по τ_i воспользуемся полученной вариацией (23), постоянством скалярного произведения, конечным условием сопряженной переменной (16) и определением функции Понтрягина:

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial\tau_i} =$$
$$= \frac{\partial g(z(T;\overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}))}{\partial x}\frac{\partial z(T;\overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial\tau_i} = \left\langle p(T), y^{i00}(T)\right\rangle = \left\langle p(\tau_i+), y^{i00}(\tau_i+)\right\rangle =$$
$$= \left\langle p(\tau_i+), \frac{\partial\zeta(x(\tau_i-)}{\partial x} f\left(\tau_i, x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\right)\right\rangle -$$
$$- \left\langle p(\tau_i+), f\left(\tau_i, x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\right)\right\rangle =$$
$$= H\Big(\tau_i, p(\tau_i-), x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i-)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i-)+1})\Big) -$$
$$- H\Big(\tau_i, p(\tau_i+), x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u^{l(\tau_i+)+1}(\tau_i, v^{l(\tau_i+)+1})\Big).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial\tau_i} = H\Big(\tau_i, p(\tau_i-), x(\tau_i-), x(\tau_i-h+), u(\tau_i-)\Big) -$$
$$- H\Big(\tau_i, p(\tau_i+), x(\tau_i+), x(\tau_i-h+), u(\tau_i+)\Big).$$

Рассмотрим производную по моменту переключения управления t_k. Если момент переключения управления совпадает с моментом разрыва фазовой траектории, то вывод производной по t_k аналогичен выводу по моменту разрыва фазовой траектории. Пусть t_k не является моментом разрыва фазовой траектории.

Параметризованная траектория представляется в виде (8), (9), (10). Так как параметр t_k оказывает влияние с момента t_k, то параметризованную траекторию при $t \in [t_k; \tau_{m(t_k)+1})$ можно представить в виде

$$z(t;\overline{w^k}, v^{k+1}, \overline{\tau_{m(t_k)}}) = z(t_k;\overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t_k)}}) +$$
$$+ \int_{t_k}^{t} f\left(s, z(s;\overline{w^{l(s)}}, v^{l(s)+1}, \overline{\tau_{m(t_k)}}), z(s-h;\overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{l(s)+1}(s; v^{l(s)+1})\right) ds. \quad (25)$$

При $t \geqslant \tau_{m(t_k)+1}$ параметризованная траектория представляется системой (22), где начальный индекс $i = m(t_k)+1$.

Определим вариацию $y_u^{k00}(t)$ как производную фазовой траектории по t_k при $t \in [t_k; \tau_{m(t_k)+1})$ из соотношения (25), а при $t \geqslant \tau_{m(t_k)+1}$ — из соотношения (22).

При $t_k \leqslant t < \tau_{m(t_k)+1}$ имеем

$$y_u^{k00}(t) = f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h+), u^k(t_k, v^k)\Big) - f\Big(t_k, x(t_k), x(t_k-h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big) + \\ + \int\limits_{t_k}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y_u^{k00}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y_u^{k00}(s-h) I(s \in [t_k+h;T])\right) ds. \quad (26)$$

При $\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$, $m(t_k)+1 \leqslant j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leqslant t \leqslant T$, $j = N^\tau$ имеем

$$y_u^{k00}(t) = \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y_u^{k00}(\tau_j-) + \\ + \int\limits_{\tau_j}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y_u^{k00}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y_u^{k00}(s-h) I(s \in [\tau_j+h;T])\right) ds. \quad (27)$$

В (26), (27) $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$.

Скалярное произведение $\langle p(t), y_u^{k00}(t)\rangle$ является постоянным при $t \in [t_k;T]$. Проводя рассуждения, аналогичные выводу производной по моменту разрыва фазовой траектории τ_i, имеем

$$\Big\langle p(T), y_u^{k00}(T)\Big\rangle = \Big\langle p(t_k+), y_u^{k00}(t_k+)\Big\rangle .$$

Исходя из полученного соотношения, начальных условий в (26), конечного условия сопряженной переменной (16), определения функции Понтрягина, получаем

$$\frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k} = \\ = \frac{\partial g(z(T;\overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}))}{\partial x} \frac{\partial z(T;\overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial t_k} = \Big\langle p(T), y_u^{k00}(T)\Big\rangle = \Big\langle p(t_k), y_u^{k00}(t_k)\Big\rangle = \\ = \Big\langle p(t_k), f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h+), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t_k, x(t_k), x(t_k-h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right)\Big\rangle = \\ = H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h+), u^k(t_k, v^k)\Big) - H\Big(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k-h+), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\Big).$$

Параметр $v_{\mu,\alpha}^k$ оказывает нетривиальное воздействие на фазовую траекторию начиная с момента t_{k-1}. Рассмотрим фазовую траекторию при $t \in [t_{k-1}; \tau_{m(t_{k-1})+1})$:

$$z(t;\overline{w^{k-1}}, v^k, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}-}) = z(t_{k-1};\overline{w^{k-2}}, v^{k-1}, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}-}) + \\ + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} f\left(s, z(s;\overline{w^{l(s)}}, v^{l(s)+1}, \overline{\tau_{m(t_{k-1})}}), z(s-h;\overline{w^{l(s-h)}}, v^{l(s-h)+1}, \overline{\tau_{m(s-h)}}), u^{l(s)+1}(s;v^{l(s)+1})\right) ds. \quad (28)$$

Введем вариацию $y^{k\mu\alpha}(t)$ как производную параметризованной траектории по параметрам $v_{\mu,\alpha}^k$. При $t \in [t_{k-1}; \tau_{m(t_{k-1})+1})$ продифференцируем соотношение (28), при $t \geqslant \tau_{m(t_{k-1})+1}$ — соотношение (22).

При $t_{k-1} \leqslant t < \tau_{m(t_{k-1})+1}$ имеем

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_{k-1}+h;T]) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(s,v^k)}{\partial v_{\mu,\alpha}^k} I(s \in [t_{k-1};t_k))\right) ds. \quad (29)$$

При $\tau_j \leqslant t < \tau_{j+1}$, $m(t_{k-1})+1 \leqslant j < N^\tau$, а также при $\tau_{N^\tau} \leqslant t \leqslant T$, $j = N^\tau$ имеем

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial \zeta_j(x(\tau_j-))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau_j-)+ \\ + \int\limits_{\tau_j}^{t} \left(\frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [\tau_j + h; T]) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s,v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} I(s \in [t_{k-1}; t_k)) \right) ds. \quad (30)$$

В (29), (30) $x = x(s)$, $\xi = x(s-h)$.

При $t \geqslant t_k$ скалярное произведение $\left\langle p(t), y^{k\mu\alpha}(t) \right\rangle$ постоянно; обоснование аналогично приведенному для $\left\langle p(t), y^{i00}(t) \right\rangle$. Таким образом, можно сделать вывод, что

$$\left\langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \right\rangle = \left\langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \right\rangle.$$

Найдем производную целевой функции по $v^k_{\mu,\alpha}$:

$$\frac{\partial \varphi(\overline{w^N}, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \frac{\partial g(z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}}))}{\partial x} \frac{\partial z(T; \overline{w^{N-1}}, v^N, \overline{\tau_{N^\tau}})}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} = \\ = \left\langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T) \right\rangle = \left\langle p(t_k), y^{k\mu\alpha}(t_k) \right\rangle = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d}{ds} \left\langle p(s), y^{k\mu\alpha}(s) \right\rangle ds = \\ = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\left\langle \dot p(s), y^{k\mu\alpha}(s) \right\rangle + \left\langle p(s), \dot y^{k\mu\alpha}(s) \right\rangle \right) ds = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\left\langle - \left. \frac{\partial H(p(s),x,\xi,u(s))}{\partial x} \right|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} - \right.\right. \\ \left. - \left. \frac{\partial H(p(s+h),x,\xi,u(s+h))}{\partial \xi} I(s \in [t_0; T-h]) \right|_{\substack{x=x(s+h)\\ \xi=x(s)}}, y^{k\mu\alpha}(s) \right\rangle + \\ + \left. \left\langle p(s), \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(s,x,\xi,u(s))}{\partial \xi} y^{k\mu\alpha}(s-h) I(s \in [t_{k-1}+h; T]) \right\rangle \right|_{\substack{x=x(s)\\ \xi=x(s-h)}} + \\ \left. + \frac{\partial f(s,x(s),x(s-h),u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s,v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} \right) ds = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p(s),x(s),x(s-h),u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s,v^k)}{\partial v^k_{\mu,\alpha}} ds.$$

Производная по моменту T находится так же, как в теореме 1. $\square$

4. Вычислительные эксперименты. Приведем примеры, подтверждающие работоспособность предлагаемого алгоритма.

Пример 1. В [4] рассмотрен следующий пример:

$$\dot x = u, \quad x(0) = x^0, \quad u(t) \geqslant 0, \quad t \in [0; 1]; \quad (31)$$

требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int\limits_0^1 x^2(t) dt. \quad (32)$$

Функционал $J(\cdot)$ ограничен снизу нулем, который не достигается в классе процессов с кусочно непрерывным управлением $u(t)$ и непрерывной фазовой траекторией $x(t)$. Однако если добавить условие на возможный разрыв траектории $x(t)$, то в полученной задаче можно найти решение с $J(u) = 0$. Пусть $x(0+) = 0$, $u(t) = 0$ при всех $t \in [0; 1]$, тогда $J(u) = 0$.

Таблица 1. Результаты решения задачи (33) в классе кусочно постоянных управлений.

x^0	v_1	τ	v_2	J_{1000}	Δt	время
$-0{,}25$	24,945	0,0100	$7{,}028 \cdot 10^{-5}$	$3{,}125 \cdot 10^{-4}$	0,01	4
$-0{,}25$	117,02	0,0021	$7{,}021 \cdot 10^{-6}$	$4{,}907 \cdot 10^{-5}$	0,001	19
$-0{,}25$	121,22	0,0020	$5{,}362 \cdot 10^{-7}$	$4{,}301 \cdot 10^{-5}$	0,0001	125
$-2{,}5$	248,56	0,0100	$2{,}263 \cdot 10^{-6}$	$3{,}125 \cdot 10^{-2}$	0,01	4
$-2{,}5$	737,72	0,0034	$5{,}043 \cdot 10^{-10}$	$7{,}337 \cdot 10^{-3}$	0,001	17
$-2{,}5$	1163,6	0,0021	$-2{,}128 \cdot 10^{-10}$	$4{,}481 \cdot 10^{-3}$	0,0001	163

Для дальнейшего применения метода параметризации исходная задача (31), (32) была приведена к терминальной форме:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1^2, \quad \dot{x}_3 = ([-u]^+)^2; \\ x_1(0) = x^0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0; \\ J_C(u) = x_2(1) + Cx_3(1) \to \inf . \end{gathered} \tag{33}$$

Здесь $[a]^+ = a$, если $a > 0$ и $[a]^+ = 0$ в противном случае.

Решение задачи (33) проводилось методом параметризации в двух вариантах. В первом варианте в классе кусочно постоянных управлений с одним моментом переключения

$$u(t) = \begin{cases} v_1, & 0 \leqslant t < \tau; \\ v_2, & \tau \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{34}$$

Задача нелинейного программирования, порождаемая методом параметризации управления, содержит три переменных: v_1, v_2, τ. Задача решалась последовательно методом скорейшего спуска и методом Ньютона. Вычисление первых производных проводилось на основе нахождения соответствующих задач Коши методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования Δt. Вычисление вторых производных проводилось конечно-разностной аппроксимацией градиентов. В качестве начального приближения были выбраны значения $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $\tau = 0{,}5$. В таблице 1 приведены результаты решения.

В таблицах 1, 2 столбец «время» содержит значение длительности поиска решения. Единицы измерения можно считать условными, например, секунды. Из таблицы 1 видно, что при уменьшении шага интегрирования Δt: момент переключения τ стремится к 0; $v_1 \cdot \tau \approx -x^0$; v_2 стремится к 0. Таким образом, получаемое управление имеет «игольчатый» вид, ненулевую меру.

Второй вариант решения состоял в представлении управления в постоянном виде с одним управляемым разрывом фазовой траектории: $u(t) = v$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $x(\tau+) = x(\tau-) + \Delta x$.

В задаче нелинейного программирования, порожденной методом параметризации, содержатся переменные v, τ, Δx. Задача НП решалась последовательно методом скорейшего спуска и методом Ньютона. Аналогично задаче НП без учета разрыва фазовой траектории вычисление первых производных проводилось на основе нахождения соответствующих задач Коши методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования Δt, вычисление вторых производных — конечно-разностной аппроксимацией градиентов. В качестве начального приближения были выбраны значения $v = 0{,}3$, $\tau = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}3$. В таблице 2 приведены результаты решения.

Из таблицы 2 следует, что получаемое решение практически не зависит от шага интегрирования, качество решения существенно выше, чем решение, получаемое при кусочно постоянном виде управляющей функции. Таким образом, применение метода параметризации к задачам оптимального управления с разрывом фазовой траектории является оправданным.

Пример 2. В [4] рассмотрена модель оптимизации кредитной стратегии фирмы в виде задачи ОУ. На основе аналитических преобразований модель сводится к однофазовой с интегральным

Таблица 2. Результаты решения задачи (33) в классе постоянных управлений с разрывом фазовой трактории.

x^0	v	τ	Δx	J_{1000}	Δt	время
$-0{,}25$	$2{,}11 \cdot 10^{-7}$	$6{,}05 \cdot 10^{-14}$	0,25000	$7{,}26 \cdot 10^{-15}$	0,01	2
$-0{,}25$	$2{,}32 \cdot 10^{-7}$	$2{,}507 \cdot 10^{-13}$	0,25000	$2{,}048 \cdot 10^{-14}$	0,001	9
$-0{,}25$	$2{,}32 \cdot 10^{-7}$	$2{,}507 \cdot 10^{-13}$	0,25000	$2{,}048 \cdot 10^{-14}$	0,0001	65
$-2{,}5$	$1{,}97 \cdot 10^{-6}$	$5{,}852 \cdot 10^{-11}$	2,5625	$3{,}660 \cdot 10^{-10}$	0,01	2
$-2{,}5$	$9{,}05 \cdot 10^{-7}$	$5{,}681 \cdot 10^{-11}$	2,50000	$3{,}553 \cdot 10^{-10}$	0,001	13
$-2{,}5$	$9{,}05 \cdot 10^{-7}$	$5{,}676 \cdot 10^{-11}$	2,50000	$3{,}550 \cdot 10^{-10}$	0,0001	107

функционалом:

$$\begin{gathered} J = \int_0^T e^{-rt} u_1(t)dt \to \max_{u_1,u_2}; \\ \dot{x} = R((1+\alpha u_2)x) - (\beta(1+\alpha u_2) + \alpha r u_2)x - u_1; \\ x(0) = x^0; \quad x(t) \geqslant 0; \quad u_1(t) \geqslant 0; \quad 0 \leqslant u_2(t) \leqslant 1. \end{gathered} \tag{35}$$

Здесь $R(\cdot)$ представляет собой аналог неоклассической производственной функции (вогнутая, монотонно возрастающая, при нулевом аргументе равна нулю); $x(t)$ — разность между оценкой основных фондов фирмы и кредитной задолженностью; $u_1(t)$ — средства, переводимые на депозит; $u_2(t)$ — доля от максимально возможного значения кредитной задолженности; параметры: β — норма амортизации капитала, r — банковская ставка, α — величина, определяющая максимально возможную величину кредита относительно $x(t)$. В [4] показано, что оптимальное решение задачи (35) может иметь разрывы фазовой траектории.

Для проведения вычислительных экспериментов сформулируем модель (35) в терминальной форме:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = R((1+\alpha u_2)x_1) - (\beta(1+\alpha u_2) + \alpha r u_2)x_1 - u_1; \\ &\dot{x}_2 = e^{-rt}u_1(t); \\ &\dot{x}_3 = \left([-u_1]^+\right)^2 + \left([-u_2]^+\right)^2 + \left([u_2-1]^+\right)^2; \\ &x_1(0) = x_1^0; \quad x_2(0) = 0; \quad x_3(0) = 0; \\ &J_C = -x_2(T) + C\left(x_3(T) + \left([-x_1]^+\right)^2\right) \to \min_{u_1,u_2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Параметры модели примем следующими: $\alpha = 1{,}5$, $\beta = 0{,}25$, $r = 0{,}2$, $T = 5$. Будем считать, что производственная функция $R(y) = \sqrt{y}$.

Задача (36) решалась методом параметризации в классе постоянных управлений с управляемым разрывом фазовой траектории, кусочно постоянных управлений с управляемым разрывом фазовой траектории. Усложнение структуры управления происходило поэтапно: сперва решалась задача с постоянным управлением и одним разрывом фазовой траектории (4 переменные в задаче НП), затем вместо постоянного управления вводилось кусочно постоянное для каждого управления (8 переменных в задаче НП), после этого кусочно постоянное с двумя моментами переключения (12 переменных). При усложнении управления решение, полученное на предыдущем этапе, выбиралось как начальное для следующего этапа. Задачи Коши решались методом Рунге—Кутты второго порядка с шагом интегрирования 0,001. В таблице 3 приведены результаты решения для различных значений x_1^0.

В таблице 3 представлены управляющие функции, полученные на последнем (третьем) этапе усложнения структуры управления; τ — момент разрыва фазовой траектории; Δx — величина разрыва x_1: $x_1(\tau+) = x_1(\tau-) - \Delta x$, $x_2(\tau+) = x_2(\tau-) + \Delta x$.

Таблица 3. Результаты решения задачи (36).

x^0	u_1	u_2	Δx	τ	$x_2(T+)$	J_{1000}
1	$0{,}831, \quad 0 \leqslant t < 0{,}32$ $0{,}849, \quad 0{,}32 \leqslant t \leqslant 5$	$0{,}351, \quad 0 \leqslant t < 0{,}48$ $0{,}536, \quad 0{,}48 \leqslant t \leqslant 5$	0,0368	5	2,715	−2,715
10	$2{,}091, \quad 0 \leqslant t < 0{,}22$ $0{,}895, \quad 0{,}22 \leqslant t < 0{,}42$ $1,065, \quad 0,42 \leqslant t \leqslant 5$	$0, \quad 0 \leqslant t < 3{,}43$ $1, \quad 3{,}43 \leqslant t \leqslant 5$	8,1618	$1 \cdot 10^{-13}$	11,79	−11,71
100	$16{,}788, \quad 0 \leqslant t < 1{,}27$ $3{,}818, \quad 1{,}27 \leqslant t < 1{,}45$ $2{,}058, \quad 1{,}45 \leqslant t \leqslant 5$	$0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 5$	74,005	0	97,249	−97,249

Анализируя результаты в таблице 3, можно отметить, что во всех экспериментах управление u_2, несмотря на то, что искалось в классе кусочно постоянных функций с двумя переключениями, представлено управлением более простой стуктуры. Если начальное значение x_1^0 большое (100), то компании нет смысла брать кредит ($u_2 \equiv 0$). Компания в начальный момент переводит часть капитала на депозит, оставшееся время ждет, пока приведенный капитал не станет равным нулю в конечный момент $x_1(T) = 0$. При умеренном начальном значении $x_1^0 = 10$ компания также часть капитала в начальный момент переводит на депозит, затем до определенного момента не берет кредит, а после этого момента и до конца за счет кредита приходит к состоянию $x_1(T) = 0$. Такой подход объясняется тем, что вес средств на депозите в начале периода планирования существенно выше, чем в конце. Если же в начале приведенный капитал мал $x_1^0 = 1$, компания в течении периода планирования кредитуется, в конечный момент остаток средств выше долга переводит на депозит.

5. Выводы. Теоремы 1, 2 дают алгоритм вычисления производных первого порядка целевой функции в задаче нелинейного программирования (14), аппрокисимирующей задачу ОУ с постоянным запаздыванием, и в задаче (12), аппроксимирующей задачу ОУ с постоянным запаздыванием и управляемыми разрывами фазовой траектории. Это открывает возможность применения методов решения задач ОУ на основе методов дифференцируемой оптимизации первого порядка, при этом получаемые задачи НП имеют относительно невысокую размерность.

Представленные алгоритмы решения задач ОУ с запаздыванием и разрывом фазовой траектории были применены при анализе модели управления экономической системой в условиях массового заболевания (см. [5, 6, 9]). Алгоритмы решения задач ОУ с постоянным запаздыванием применялись при анализе инвестиционной модели двухсекторной экономики (см. [5]).

В данной работе приведены вычислительные эксперименты для двух задач ОУ с управляемым разрывом фазовой траектории. Результаты экспериментов показывают работоспособность предлагаемого подхода к решению таких задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Будак Б. М., Беркович Е. М., Соловьева Е. П.* О сходимости разностных аппроксимаций для задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1969. — *9*, № 3. — С. 522–547.
2. *Горбунов В. К.* О сведении задач оптимального управления к конечномерным// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1978. — *18*, № 5. — С. 1083–1095.
3. *Горбунов В. К.* Метод параметризации задач оптимального управления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1979. — *19*, № 2. — С. 292–303.
4. *Дыхта В. А., Самсонюк О. Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями. — М.: Физматлит, 2000.
5. *Лутошкин И. В.* Динамические модели экономических систем и методы их анализа. — Ульяновск: УлГУ, 2024.

6. *Лутошкин И. В., Рыбина М. С.* Оптимизация в модели управления социально-экономической системой в условиях массового заболевания// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2024. — № 49. — С. 16—31.
7. *Максимов В. П.* Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики// Прикл. мат. вопр. управл. — 2019. — № 4. — С. 124–135.
8. *Aubin J.-P.* Time and Money. How Long and How Much Money is Needed to Regulate a Viable Economy. — Cham, 2014.
9. *Lutoshkin I. V., Rybina M. S.* Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2023. — *23*, № 2. — С. 264–273.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-28-00542).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Лутошкин Игорь Викторович (Lutoshkin Igor Viktorovich)
Ульяновский государственный университет, Ульяновск
(Ul'yanovsk State University, Ul'yanovsk, Russia)
E-mail: `lutoshkiniv@ulsu.ru`

Рыбина Мария Сергеевна (Rybina Maria Sergeevna)
Ульяновский государственный университет, Ульяновск
(Ul'yanovsk State University, Ul'yanovsk, Russia)
E-mail: `rybina_maria@icloud.com`