ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 30–39
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-30-39

УДК 519.1, 519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАДАВАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЕЛ ЛАХА И ОБОБЩЕННЫХ ЧИСЕЛ ЛАХА

© 2025 г. **Н. А. КОЛОКОЛЬНИКОВА**

Аннотация. Рассматриваются вероятностные распределения, описываемые с помощью чисел Лаха и обобщённых чисел Лаха. Исследуются корни производящих функций. Находятся числовые характеристики. Изучается асимптотическое поведение распределений.

Ключевые слова: числа Лаха, Ф-схема последовательных испытаний, распределение, производящая функция, математическое ожидание, дисперсия.

PROBABILITY DISTRIBUTIONS DEFINED BY LAH NUMBERS AND GENERALIZED LAH NUMBERS

© 2025 **N. A. KOLOKOLNIKOVA**

Abstract. Probability distributions described by means of Lah numbers and generalized Lah numbers are considered. Roots of generating functions are examined and numerical characteristics are found. The asymptotic behavior of distributions is studied.

Keywords and phrases: Lah numbers, Φ-scheme of sequential trials, distributions, generating function, expectation, variance.

AMS Subject Classification: 05A15, 60E05

1. Введение. Числа Лаха l_k^n были введены в рассмотрение в 1955 г. в [10], а затем информация о них и некоторых их свойствах была приведена в [9, с. 56–57]. Данные числа связывают возрастающие $x^{(n)}$ и убывающие $(x)_n$ факториалы. Если это знакоположительные числа l_k^n, то

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k l_k^n x^{(k)}, \quad x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} l_k^n (x)_k,$$

где

$$x^{(n)} = x(x+1)\dots(x+n-1), \quad (x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

Числа Лаха могут быть выражены следующим образом через числа Стирлинга:

$$l_k^n = \sum\nolimits_{i=k}^{n} b_i^n a_k^i,$$

где b_i^n — модули чисел Стирлинга первого рода, a_k^i — числа Стирлинга второго рода.

Существуют различные обобщения чисел Стирлинга. В первую очередь следует отметить числа B_k^n и A_k^n, детально описанные в [3,8], которые строятся из элементов так называемых базовых последовательностей (баз) и при конкретном задании баз превращаются в обычные числа Стирлинга. Пусть

$$\Phi_k^n = \sum_{i=k}^{n} B_i^n A_k^i, \tag{1}$$

где B_i^n — обобщённые числа Стирлинга первого рода, строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, A_k^i — обобщённые числа Стирлинга второго рода, строящиеся на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$. При этом

$$\Phi_n^n = 1,\ n = 1, 2, \dots, \quad \Phi_k^n = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Заметим, что числа B_i^n, строящиеся на базе $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$B_k^n = B_{k-1}^{n-1} + \alpha_{n-1} B_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и дополнительных условий

$$B_n^n = 1,\ n = 0, 1, \dots, \quad B_k^n = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Числа A_i^n, строящиеся на базе $\{\gamma_i\}_{i=0}^{n-1}$, могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$A_k^n = A_{k-1}^{n-1} + \gamma_k A_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а также условий

$$A_n^n = 1,\ n = 0, 1, \dots, \quad A_k^n = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Если $\alpha_i = i$, $\gamma_i = i$ при всех i, то $B_k^n = b_k^n$, $A_k^n = a_k^n$, т.е. тогда $\Phi_k^n = l_k^n$. Таким образом, числа Φ_k^n являются обобщёнными числами Лаха. Рекуррентная формула для этих чисел имеет вид

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + (\alpha_{n-1} + \gamma_k)\Phi_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

В данной работе с использованием результатов работ [4–6] исследуются некоторые вероятностные распределения, описываемые с помощью чисел l_k^n и Φ_k^n.

2. Числа Лаха и связанное с ними вероятностное распределение.

2.1. Упорядоченные разбиения и числа Лаха. Пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Это множество разбивается на непустые подмножества. Если число таких подмножеств равно k, где $k = 0, 1, \dots, n$, то число разбиений равно l_k^n, где l_k^n — знакоположительное число Лаха (см. [10]). Как известно, числа Лаха могут быть определены рекуррентным соотношением

$$l_k^n = l_{k-1}^{n-1} + (n - 1 + k) l_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

При этом полагают

$$l_n^n = 1,\ n = 1, 2, \dots, \quad l_k^n = 0,\ \text{если } n < k \text{ или } k < 0.$$

Очевидно, что $l_0^n = 0$, если $n > 0$, и $l_1^n = n!$, $n = 1, 2, \dots$.

2.2. Вероятностное распределение. Предположим, что исходное множество было разбито на случайное число упорядоченных подмножеств. Рассмотрим случайную величину ξ_n — число подмножеств, на которые было разбито n-множество. Считаем, что при каждом n все разбиения являются равновозможными. Тогда распределение величины ξ_n имеет вид

$$P\{\xi_n = k\} = l_k^n \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^n\right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{4}$$

Введем обозначение

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i^n. \tag{5}$$

Изучим асимптотическое поведение распределения (4). Для этого рассмотрим производящую функцию чисел Лаха

$$l_n(x) = \sum_{k=1}^{n} l_i^n x^k,$$

а затем и производящую функцию исследуемого распределения

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P\{\xi_n = k\} x^k.$$

Лемма 1. *При любом натуральном n все корни многочлена $l_n(x)$ различны, действительны и неположительны.*

Доказательство проведем методом математической индукции. Поскольку $l_1(x) = x$, $l_2(x) = x(x+2)$, то убеждаемся, что при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение справедливо.

Предположим, что при некотором натуральном n многочлен $l_n(x)$ имеет n действительных неположительных корней. Покажем, что тогда многочлен $l_{n+1}(x)$ имеет $n+1$ действительных неположительных корней. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$H_n(x) = x^n e^x l_n(x). \tag{6}$$

Продифференцируем функцию $H_n(x)$:

$$H_n'(x) = \left((x+n)l_n(x) + x l_n'(x)\right) x^{n-1} e^x.$$

На основании рекуррентного соотношения (3) $H_n'(x) = x^{n-1}e^x l_{n+1}(x)$. В силу формулы (6) имеем $H_{n+1}(x) = x^{n+1}e^x l_{n+1}(x)$. Следовательно, $H_{n+1}(x) = x^2 H_n'(x)$. По теореме Ролля функция $H_n'(x)$ имеет корни в промежутках между корнями функции $H_n(x)$. Таким образом, $H_n'(x)$ имеет $2n$ неположительных действительных корней, т.е. число таких корней у функции $H_{n+1}(x)$ равно $2n+2$. Поскольку

$$l_{n+1}(x) = x^{-n-1}e^{-x} H_{n+1}(x),$$

то очевидно, что этот многочлен имеет $n+1$ действительных неположительных корней, что и требовалось доказать. □

Замечание. Так как производящая функция изучаемого распределения (2) имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{l_n} l_n(x),$$

то ее корни совпадают с корнями функции $l_n(x)$, а значит, являются действительными и неположительными. Отсюда следует, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. Поэтому асимптотическое поведение распределения (4) зависит от поведения дисперсии рассматриваемой случайной величины ξ_n. Если при $n \to \infty$ дисперсия этой величины неограниченно возрастает, то величина асимптотически нормальна.

2.3. Числовые характеристики. Найдем математическое ожидание и дисперсию величины ξ_n. Имеем:

$$E\xi_n = \frac{1}{l_n} \sum_{k=1}^{n} k l_k^n.$$

Используя рекуррентную формулу (1), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} k l_k^n = \sum_{k=1}^{n} \left(l_k^{n+1} - l_{k-1}^n - n l_k^n\right) = l_{n+1} - (n+1) l_n,$$

т.е.

$$E\xi_n = \frac{l_{n+1}}{l_n} - n - 1. \tag{7}$$

Применяя дважды рекуррентную формулу к l_k^{n+2}, получим

$$l_k^{n+2} = l_{k+1}^{n+1} + (n+1) l_k^{n+1} + k l_{k-1}^n + kn l_k^n + k^2 l_k^n.$$

Выразив отсюда $k^2 l_k^n$, найдем

$$E\xi_n^2 = \frac{l_{n+2}}{l_n} - (3+2n)\frac{l_{n+1}}{l_n} + 2n + n^2,$$

т.е.

$$D\xi_n = \frac{l_{n+2}}{l_n} - \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 - \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1. \tag{8}$$

Для выяснения асимптотического поведения распределения величины ξ_n нужно изучить поведение дисперсии этой величины при $n \to \infty$.

2.4. Предельные теоремы. Сначала получим асимптотические формулы при $n \to \infty$ для l_{n+1}/l_n и l_{n+2}/l_n.

В [1] дано следующее определение допустимой функции. Пусть $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Если коэффициенты a_n степенного ряда функции $e^{p(t)}$ являются положительными числами для всех достаточно больших n, то функция $e^{p(t)}$ является допустимой. В этой же работе приведена следующая теорема.

Теорема 1. *Если $f(t)$ — допустимая целая функция со степенным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, то*

$$a_n \sim f(r_n) r_n^{-n} \left(2\pi b(r_n)\right)^{-1/2},$$

где $r_n > 0$, а функция b определяется равенствами

$$a(r_n) = n, \quad a(r) = r\frac{d}{dr}(\ln f(r)), \quad b(r) = r\frac{d}{dr}a(r).$$

Рассмотрим двойную производящую функцию чисел Лаха (см. [10]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} l_k^n x^k \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{\frac{xt}{1-t}\right\}.$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{\frac{t}{1-t}\right\}.$$

Итак, имеем разложение функции $e^{t/(1-t)}$ в степенной ряд с коэффициентами $a_n = l_n/n!$. Очевидно,

$$p(t) = \frac{t}{1-t} = \sum_{i=1}^{\infty} t^i,$$

т.е. $p(t)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Так как $a_n > 0$ при $n > 0$, то функция $e^{t/(1-t)}$ является допустимой и можно применять теорему 1. Имеем:

$$l_n \sim n! \exp\left\{\frac{r_n}{1-r_n}\right\} r_n^{-n} (2\pi b(r_n))^{-12}, \tag{9}$$

$$a(r) = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad b(r) = a(r)\frac{1+r}{1-r}, \quad b(r_n) = n\frac{1+r}{1-r},$$

где

$$r_n = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{4n+1}}{2n}.$$

Найдём асимптотические разложения для r_n при $n \to \infty$:

$$r_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n\sqrt{n}} + \frac{1}{128n^2\sqrt{n}} - \frac{1}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right).$$

Запишем выражение (9) для $n+1$ и $n+2$:

$$l_{n+1} \sim (n+1)! \exp\left\{\frac{r_{n+1}}{1-r_{n+1}}\right\} r_{n+1}^{-(n+1)} \left(2\pi(n+1)\frac{1+r_{n+1}}{1-r_{n+1}}\right)^{-1/2},$$

$$l_{n+2} \sim (n+2)! \exp\left\{\frac{r_{n+2}}{1-r_{n+2}}\right\} r_{n+2}^{-(n+2)} \left(2\pi(n+2)\frac{1+r_{n+2}}{1-r_{n+2}}\right)^{-1/2}.$$

Очевидно, что r_{n+1} и r_{n+2} при $n \to \infty$ будут иметь разложения, отличные от разложения r_n, поэтому найдём их отдельно. Получим

$$r_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{23}{128n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{2n^3} + \frac{59}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right),$$
$$r_{n+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{7}{8n\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} - \frac{143}{128n^2\sqrt{n}} + \frac{2}{n^3} - \frac{1559}{1024n^3\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^3\sqrt{n}}\right),$$

поскольку

$$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{4n+5}}{2(n+1)}, \quad r_{n+2} = 1 + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{\sqrt{4n+9}}{2(n+2)}.$$

На основании данных результатов находим при $n \to \infty$

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} \sim (n+1)\exp\left\{\frac{1}{1-r_{n+1}} - \frac{1}{1-r_n}\right\} r_{n+1}^{-(n+1)} r_n^n \left(\frac{(n+1)\,(1+r_{n+1})\,(1-r_n)}{n\,(1-r_{n+1})\,(1+r_n)}\right)^{-1/2}.$$

Логарифмируя последнее выражение и используя разложение в ряд, приходим к соотношению

$$\ln\frac{l_{n+1}}{l_n} = \ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} - \frac{7}{24n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Значит,

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = n\exp\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4n} - \frac{7}{24n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\},$$

т.е.

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = n + \sqrt{n} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)^2 = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{5}{2}n + \frac{7}{4}\sqrt{n} + O\left(1\right). \tag{11}$$

Аналогичным образом проводя рассуждения, находим:

$$\frac{l_{n+2}}{l_n} = n^2 + 2n\sqrt{n} + \frac{7}{2}n + \frac{13}{4}\sqrt{n} + O\left(1\right). \tag{12}$$

Подставляя асимптотические разложения (10), (11), (12) в формулы (7) и (8), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$E\xi_n = \sqrt{n} - \frac{1}{4} + o(1), \quad D\xi_n = \frac{\sqrt{n}}{2} + O(1).$$

Следовательно, $D\xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$, т.е. доказана следующая теорема.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{D\xi_n}P\left\{\xi_n = k\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x_{nk}^2}{2}\right\} \to 0,$$

где $x_{nk} = (k - E\xi_n)/\sqrt{D\xi_n}$.

3. Обобщённые числа Лаха и Ф-схема последовательных испытаний.

3.1. Описание схемы. Ф-распределение. Корни производящей функции. Пусть проводятся испытания типа «успех-неуспех». Обозначим через ξ_n число успехов в n испытаниях. Предполагаем, что условные вероятности успехов имеют такую структуру:

$$p_{ni} = P\{\xi_n = i+1|\xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1}\beta_i,$$
$$q_{ni} = 1 - p_{ni} = P\{\xi_n = i|\xi_{n-1} = i\} = \alpha_{n-1}(\delta_{n-1} + \gamma_i),$$
$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Эта схема проведения испытаний называется Ф-схемой.

Теорема 4 (см. [6]). *Если последовательные испытания проводятся в условиях Ф-схемы, то распределение случайной величины ξ_n может быть записано в виде*

$$P\{\xi_n = 0\} = \Phi_0^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i,$$
$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \beta_j, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Распределение (13) называется Ф-распределением. Комбинаторные числа Φ_k^n, участвующие в распределении (13), строятся на базах $\{\delta_i\}_{i=0}^{n-1}$ и $\{\gamma_i\}_{i=0}^{k-1}$.

Очевидно, что при разных способах задания α_{n-1} и β_i могут получаться распределения с отличающимися свойствами. Детально изучен случай, когда $\beta_i = N - i$, где N — некоторое большое натуральное число, которое может неограниченно возрастать (см. [6]). Остановимся на его рассмотрении.

Пусть $\beta_i = N - i$, $\gamma_i = i$, т.е. $\delta_i = 1/\alpha_i - N$. Тогда формула (2) запишется в виде

$$\Phi_k^n = \Phi_{k-1}^{n-1} + \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} - N + k\right)\Phi_k^{n-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Распределение (13) примет вид

$$P\{\xi_n = k\} = \Phi_k^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i \cdot (N)_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \min(n, N), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 2. *При любых натуральных N, n все m корней многочлена*

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} P\{\xi_n = k\}\, x^k,$$

где $m = \min(N, n)$, действительны и неположительны.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. При этом используется тот факт, что производящая функция распределения (13) удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$\Phi_m(x) = \alpha_{m-1}(\delta_{m-1} + Nx)\Phi_{m-1}(x) + x(1-x)\frac{d}{dx}\Phi_{m-1}(x), \quad m \geqslant 1,$$

а функция $H_{m-1}(x)$ имеет вид

$$H_{m-1}(x) = x^{\delta_{m-1}}(1-x)^{-\delta_{m-1}-N}\Phi_{m-1}(x).$$

На основании леммы 2 можем утверждать, что величина ξ_n представима в виде суммы независимых случайных индикаторов. Поэтому для выяснения условий, при выполнении которых изучаемое распределение сходится к тому или иному предельному распределению, следует получить асимптотические формулы для характеристик.

3.2. Числовые характеристики. Предельные распределения. Как следует из [6], математическое ожидание $E\xi_n$ и дисперсия $D\xi_n$ случайной величины, имеющей описанное выше Ф-распределение, при любом натуральном n имеют вид

$$E\xi_n = N\left(1 - \prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i)\right),$$

$$D\xi_n = N(N-1)\prod_{i=0}^{n-1}(1-2\alpha_i) + N\prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i) - N^2\prod_{i=0}^{n-1}(1-\alpha_i)^2.$$

Асимптотические формулы для этих характеристик и предельные распределения зависят от вида последовательности $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, определяющей значения условных вероятностей p_{ni}. Введем обозначения

$$A = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i, \quad B = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^2.$$

Устремим N и n к бесконечности. Тогда

$$E\xi_n = N\left(1 - e^{-A}\left(1 - \frac{B}{2}\right)\right)(1+o(1)). \tag{14}$$

Если $Ne^{-A} \to \infty$ или $Ne^{-A} \to \lambda < \infty$ (за исключением случая $A = o(1)$,$A - NB = O(1)$) при $N, n \to \infty$, то для $D\xi_n$ имеет место асимптотическое представление

$$D\xi_n = Ne^{-A}\big(1 - e^{-A}(NB+1)\big)(1+o(1)). \tag{15}$$

При изучении различных вариантов предельных распределений при $N, n \to \infty$, могут возникнуть следующие случаи:

(i) $A \to \infty$;
(ii) $A \to \text{const}$;
(iii) $A \to 0$, $NA \to \infty$;
(iv) $A \to 0$, $NA \to \text{const}$;
(v) $NA \to 0$.

(i). Если $A \to \infty$, то и $n/N \to \infty$ (поскольку $A \leqslant n/N$, так как $\alpha_i \leqslant 1/N$). Следовательно, $N = o(n)$. Формула (15) может быть записана в виде

$$D\xi_n = Ne^{-A}(1+o(1)). \tag{16}$$

Таким образом, если $Ne^{-A} \to \infty$ при $N, n \to \infty$, то величина ξ_n асимптотически нормальна (имеет место утверждение теоремы 3).

Предположим теперь, что $Ne^{-A} \to \lambda = \text{const}$ при $N, n \to \infty$. Тогда, как установлено в [6],

$$D\xi_n = D(N-\xi_n) > E(N-\xi_n)\left(1 - E(N-\xi_n)\left(\frac{NA}{(N-1)^2} + \frac{1}{N}\right)\right). \tag{17}$$

Пусть

$$p_\lambda(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left|P\{\xi = k\} - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|$$

— расстояние по вариации между распределением величины ξ и распределением Пуассона с параметром λ. Известно (см., например, [2]), что представление случайной величины в виде суммы независимых индикаторов даёт возможность оценить $p_{E(N-\xi_n)}(N-\xi_n)$ следующим образом:

$$p_{E(N-\xi_n)}(N-\xi_n) \leqslant E(N-\xi_n) - D(N-\xi_n).$$

Положив $\lambda_n = E(N-\xi_n)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Если $E(N-\xi_n) = \lambda_n$, то*

$$p_{\lambda_n}(N-\xi_n) \leqslant \lambda_n e^{-A}\left(\left(\frac{N}{N-1}\right)^2 A + 1\right). \tag{18}$$

Следствие. Пусть $Ne^{-A} \to \lambda < \infty$ при $N, n \to \infty$. Тогда распределение величины $N - \xi_n$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ.

Доказательство. При $A \to \infty$ формулу (14) можно переписать в виде

$$E\xi_n = N - Ne^{-A} + o(Ne^{-A}).$$

Кроме того,

$$\frac{A}{N} = o(\frac{e^A}{N}) = o(1),$$

поэтому в (18) получим

$$p_\lambda(N - \xi_n) \leqslant \lambda \cdot o(1) = o(1),$$

что и требовалось доказать. □

(ii). Если $A \to \text{const}$ при $N, n \to \infty$, то

$$0 < \varepsilon \leqslant 1 - (1 + NB)e^{-A} < 1,$$

т.е. в силу (15) $D\xi_n \to \infty$, что означает асимптотическую нормальность величины ξ_n.

(iii). Если $A \to 0$ при $N, n \to \infty$, то при этом могут возникнуть разные случаи:

(a) $NA \to \infty$;
(b) $NA \to \text{const}$;
(c) $NA \to 0$.

Все эти случаи описаны в [6]. Приведём некоторые результаты этой работы. Для этого перейдём к схеме серий и будем считать, что $p_i = p_{ni}$, $q_i = q_{ni}$.

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, где при $n \to \infty$

$$I_1 = \{i : p_{ni} = o(1)\}\,, \quad I_2 = \{i : p_{ni} = \varepsilon_i,\ 0 < \varepsilon_i < 1\}\,, \quad I_3 = \{i : p_{ni} = 1 - \alpha,\ \alpha = o(1)\}\,,$$
$$|I_1| = n_1, \quad |I_2| = n_2, \quad |I_3| = n_3, \quad n_1 + n_2 + n_3 = n.$$

Введем обозначения

$$\xi_{n1} = \sum_{i \in I_1} \chi_i, \quad \xi_{n2} = \sum_{i \in 2} \chi_i, \quad \xi_{n3} = \sum_{i \in 3} \chi_i,$$

где χ_i — индикатор успеха в i-м испытании. Используя рассуждения, приведенные в [6], приходим к следующим утверждениям.

Теорема 6. *Если при $n \to \infty$ выполнены условия*

$$n_2 = 0, \quad n_3 \leqslant c = \text{const}, \quad \sum_{i \in I_1} p_{ni} \to \lambda < \infty,$$

то

$$P\{\xi_n = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Теорема 7. *Если при $n \to \infty$ выполнены условия*

$$n_2 = 0, \quad n_1 \leqslant c = \text{const}, \quad \sum_{i \in I_3} p_{ni} \to \mu < \infty,$$

то

$$P\{n - \xi_n = k\} = P\{n_3 - \xi_{n3}\} \to \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Теорема 8. *Если при $n \to \infty$ выполнены условия*

$$n_2 = 0, \quad \sum_{i \in I_1} p_{ni} \to \lambda < \infty, \quad \sum_{i \in I_3} p_{ni} \to \mu < \infty,$$

то

$$P\big\{\xi_{n1} + n_3 - \xi_{n3} = k\big\} \to \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

При анализе всех возможных случаев (рассмотрении различного поведения n_1, n_2, n_3 при $n \to \infty$) было установлено, что в качестве предельных для Ф-распределений могут выступать нормальное распределение, распределение Пуассона, композиция распределения Пуассона и распределения суммы конечного числа независимых случайных индикаторов.

4. Пример применения Ф-схемы. Размещение частиц комплектами. Ф-Схема последовательных испытаний может применяться при решении различных задач, в частности, связанных со случайным размещением частиц по ячейкам. В качестве иллюстрации рассмотрим размещение частиц комплектами одинакового объёма.

Имеется N ячеек, в которых случайным образом размещают r комплектов, каждый из которых содержит m частиц. Частицы любого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все $\binom{N}{m}$ возможных размещений считаются равновероятными. Этот случай описан в книге [7] и изучался, например, в [2]. Будем изучать случайную величину μ_0 — число ячеек, оставшихся пустыми после размещения всех комплектов.

Опишем размещение частиц по ячейкам, используя Ф-схему последовательных испытаний. Будем считать, что частицы по одной бросаются в ячейки. Сначала размещаются частицы первого комплекта. Они, как было указано выше, займут m ячеек. Затем поочередно размещаются частицы второго, потом третьего комплекта и т. д. Считаем успехом попадание частицы в пустую ячейку, неуспехом — попадание её в ячейку, где уже находится по меньшей мере одна частица. Начнем нумерацию испытаний и успехов с размещения частиц второго комплекта. Имеем

$$p_{nk} = \frac{N-m-k}{N-n+[\frac{n-1}{m}]m+1}, \quad q_{nk} = \frac{m-n+[\frac{n-1}{m}]m+k+1}{N-n+[\frac{n-1}{m}]m+1},$$
$$k = 0, 1, \dots, \min(n-1, N-m), \quad n = 1, 2, \dots, m(r-1);$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x. Структура вероятностей p_{nk} и q_{nk} соответствует описанной выше Ф-схеме испытаний. При этом

$$\{\alpha_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1} = \left\{\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \dots, \frac{1}{N-m+1}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N-m+1}, \dots, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N-m+1}\right\}; \tag{19}$$

$$\{\beta_i\}_{i=0}^{m(r-1)-1} = \{N-m-i\}_{i=0}^{m(r-1)-1}. \tag{20}$$

Если размещены r комплектов, каждый из которых имеет объем m, то $n = rm$. Поскольку $\mu_0 = N - m - \xi_n$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *При равновероятном размещении r комплектов одинакового объема m по N ячейкам распределение числа пустых ячеек имеет вид*

$$P\{\mu_0 = k\} = P\{\xi_{mr} = N-m-k\} = \Phi^{mr}_{N-m-k}(N-m)_k \prod_{i=0}^{m(r-1)-1} \alpha_i, \quad k = 0, 1, \dots, N-m. \tag{21}$$

Для нахождения значения Φ^{mr}_{N-m-k} и $\prod\limits_{i=0}^{m(r-1)-1} \alpha_i$ в формуле (21) используются конечные последовательности (19) и (20).

Результат, обобщающий (21), может быть получен для случая, когда размещаются комплекты разного объема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бендер Э. А.* Асимптотические методы в теории перечислений// в кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа. — М.: Мир, 1979. — С. 266–310.
2. *Ватутин В. А., Михайлов В. Г.* Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами// Теор. вероят. примен. — 1982. — *27*, № 4. — С. 684–692.
3. *Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В., Платонов М. Л.* Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
4. *Колокольникова Н. А.* Распределение, выражаемое через числа Лаха// Мат. 6 Междунар. конф. «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения». — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2024. — С. 169–172.

5. *Колокольникова Н. А.* О суммировании дискретных случайных величин// в кн.: Актуальные задачи прикладной дискретной математики. Т. 10. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2024. — С. 41–48.
6. *Колокольникова Н. А.* Предельные теоремы для числа успехов в одной схеме зависимых испытаний. — М.: Деп. в ВИНИТИ РАН, 649В92, 1992.
7. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. — М.: Наука, 1976.
8. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений. — М.: Наука, 1979.
9. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
10. *Lah I.* Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik// Mitt. Math. Stat. — 1955. — *7*. — P. 203–212.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Колокольникова Наталья Арсеньевна (Kolokolnikova Natalia Arsen’evna)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: `k_n_a_05@mail.ru`