ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 241 (2025). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-241-3-12

УДК 517.91:519.6

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ АДДИТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФОРМУЛЫ КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

© 2025 г. **С. Г. БУЛАНОВ**

Аннотация. Получены критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе аддитивных преобразований разностных схем и формулы конечных приращений. Математическая конструкция критериев влечет возможность программной реализации. Для вычисления приближенных значений решения системы применяется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением. Определение точек Лагранжа основано на вычислении минимума модуля функции при помощи устойчивой адресной сортировки слиянием. Применение критериев на практике позволяет выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

STABILITY CRITERIA OF SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON ADDITIVE TRANSFORMATIONS OF THE FORMULA OF FINITE INCREMENTS

© 2025 **S. G. BULANOV**

Abstract. Based on additive transformations of difference schemes and the formula of finite increments, we obtain criteria for the Lyapunov stability of systems of ordinary differential equations. The mathematical structure of the criteria admits the possibility of software implementation. Approximate solutions of the system can be computed by the piecewise interpolation method with iterative refinement. The search for Lagrange points is based on calculating the minimum of the modulus function using the sorting by stable address merging. Practical applications of the criteria allow one to perform the stability analysis in real-time mode.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer stability analysis, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Анализ устойчивости решений систем дифференциальных уравнений остается актуальным направлением исследований (см. [8, 11]). Традиционно исследование устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений выполняется на основе построения функций Ляпунова (см. [10]). Потребность выполнять анализ устойчивости в режиме реального времени и отсутствие строгого алгоритма построения функций Ляпунова влечет необходимость разработки критериев устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих программную реализацию (см. [9]). В работе предлагается подход к анализу устойчивости решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе рекуррентных преобразований разностных схем в аддитивной форме. Целью преобразований является получение зависимости величины возмущения решения от возмущения начальных данных с некоторым коэффициентом пропорциональности, поведение которого определяет характер устойчивости решения системы. На этой основе формулируются критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий.

Далее с помощью аддитивных преобразований формулы конечных приращений конструируются новые разновидности критериев с фиксированным, не стремящимся к нулю, шагом численного решения системы. Это позволяет существенно увеличить длину промежутка исследования и устанавливать асимптотические свойства решения при анализе устойчивости на компьютере. Вместе с тем применяемый в работе алгоритм нахождения точек Лагранжа из формулы конечных приращений требует построения непрерывного высокоточного приближения решения и правой части системы. Последнее достигается на основе кусочно интерполяционного метода с итерационным уточнением.

2. Критерии устойчивости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что в области $R = \{t_0 \leqslant t < \infty;\, \tilde{Y}(t), Y(t)\colon \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta,\ \delta > 0\}$ для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения, функция $F(t, Y)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t (см. [4]). Требуется получить критерии устойчивости по Ляпунову для системы (1) на основе аддитивных преобразований разностных схем и формулы конечных приращений.

Представим точное решение системы (1) в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге:

$$y_{k(i+1)} = y_{ki} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где q_{ki} — остаточные члены формулы Тейлора для k-й компоненты решения. Шаг h предполагается равномерным, для произвольно выбранной независимой переменной $t \in [t_0, \infty)$ имеют место соотношения $h = (t - t_0)/(i + 1)$, $i = 0, 1, \ldots,$ $t_{j+1} = t_j + h$, $0 \leqslant j \leqslant i$ (см. [1]). Далее, если не оговорено иное, k предполагается произвольно фиксированным.

Преобразование выражения (2) в аддитивной форме влечет соотношение

$$y_{k(i+1)} = y_{k(i-1)} + hf_k(t_{i-1}, Y_{i-1}) + q_{k(i-1)} + hf_k(t_i, Y_i) + q_{ki},$$

или

$$y_{k(i+1)} = y_{k0} + \sum_{l=0}^{i} hf_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) + \sum_{l=0}^{i} q_{k(i-l)}, \quad y_{k0} = y_k(t_0).$$

С учетом оценки остаточных членов величина возмущения решения на промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i\to\infty} \sum_{l=0}^{i} h\left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l})\right) \quad \forall t \in [t_0, \infty) \tag{3}$$

(см. [2]. Выделим в (3) возмущение начальных данных в виде множителя:

$$\tilde{y}_k(t) - y_k(t) = \frac{1}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \left[\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim_{i\to\infty} \sum_{l=0}^{i} h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right) \right] \times \\ \times (\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)) \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

Теорема 1. *Для устойчивости решения системы* (1) *необходимо и достаточно существование такого* Δ, $0 < \Delta \leqslant \delta$, *что для всех* $\tilde{Y}(t)$, *удовлетворяющих условию* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta$, *соотношение*

$$\left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{l=0}^{i} h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| \leqslant \tilde{c}_1,$$

выполняется для всех $t \in [t_0, \infty)$, *где* $\tilde{c}_1 = \mathrm{const}$. *Для асимптотической устойчивости решения системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво и существовало такое* $\Delta_1 \leqslant \Delta$, *что неравенство* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta_1$ *влечет выполнение соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) + \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{l=0}^{i} h \left(f_k(t_{i-l}, \tilde{Y}_{i-l}) - f_k(t_{i-l}, Y_{i-l}) \right)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \right| = 0.$$

Получены критерии устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1) в аддитивной форме. Критерии инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, длины промежутка и шага численного решения. Форма критериев создает предпосылки для компьютерного анализа устойчивости по ходу приближенного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Далее, по аналогии с описанной выше схемой, конструируются критерии устойчивости на основе аддитивных преобразований формулы конечных приращений.

Пусть на полуоси последовательными индексами отмечены равные по длине отрезки с общими границами

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, t_{i+1}], \quad t_{i+1} = t_i + h_c, \quad h_c = \mathrm{const}, \tag{4}$$

где h_c задается произвольно. Построение критериев устойчивости опирается на теорему Лагранжа о среднем, применяемую к каждому отрезку из (4).

Применяются следующие разновидности формул средних значений:

$$y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l) = f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl}))(t_{l+1} - t_l), \quad \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1}), \quad \forall l = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

$$y_k(t) - y_k(t_l) = f_k(\theta_{kl}, Y(\theta_{kl}))(t - t_l), \qquad \forall t \in (t_l, t_{l+1}), \quad \theta_{kl} \in (t_l, t), \quad \forall l = 0, 1, \dots. \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl}) = f_k\big(\tilde{\xi}_{kl}, \tilde{Y}(\tilde{\xi}_{kl})\big) - f_k\big(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl})\big),$$
$$\Delta f_k(\tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl}) = f_k\big(\tilde{\theta}_{kl}, \tilde{Y}(\tilde{\theta}_{kl})\big) - f_k\big(\theta_{kl}, Y(\theta_{kl})\big).$$

Теорема 2. *Решение системы* (1) *устойчиво, если при любом выборе* $h_c = \mathrm{const}$ *найдется такое* $\Delta > 0$, *что для любого* $\tilde{Y}(t)$, *удовлетворяющего условию* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta$, *и любого*

$k = 1, 2, \dots, n$ *неравенства*

$$\left|\frac{\sum\limits_{l=0}^{i} \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1}),$$

$$\left|\frac{\Delta f_k(\tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \tilde{\theta}_{kl}, \theta_{kl} \in (t, t_{l+1}), \quad \forall t \in (t_l, t_{l+1}),$$

выполняются для всех $l = 0, 1, \dots, i$ *и всех* $i = 0, 1, \dots$.

Доказательство. Для функций $y_k(t)$, $\tilde{y}_k(t)$ выполнены условия теоремы Лагранжа о среднем на каждом отрезке из (4). При произвольном выборе h_c из (4) и при $l = i$ из (5) следует

$$y_k(t_{i+1}) = y_k(t_i) + h_c f_k(\xi_{ki}, Y(\xi_{ki})), \quad \xi_{ki} \in (t_i, t_{i+1}), \quad \forall i = 0, 1, \dots. \tag{7}$$

Преобразуя (7), получим

$$y_k(t_{i+1}) = y_k(t_0) + h_c f_k(\xi_{k0}, Y(\xi_{k0})) + \dots + h_c f_k(\xi_{ki}, Y(\xi_{ki})).$$

Следовательно

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant h_c \left|\frac{\sum\limits_{l=0}^{i} \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| + 1.$$

Отсюда

$$\big|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})\big| \leqslant (c_2 h_c + 1)\big|\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)\big|. \tag{8}$$

При каждом $t \in (t_i, t_{i+1})$ величину $|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)|$ оценим из неравенства

$$|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)| \leqslant \Big|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1}) - \big(\tilde{y}_k(t) - y_k(t)\big)\Big| + \big|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})\big|. \tag{9}$$

Первое слагаемое из правой части (9) с учетом (6) оценим из неравенства

$$\Big|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - \big(y_k(t_{i+1}) - y_k(t)\big)\Big| \leqslant \big|\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})\big||t_{i+1} - t|, \quad \tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki} \in (t, t_{i+1}).$$

Следовательно

$$\Big|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - \big(y_k(t_{i+1}) - y_k(t)\big)\Big| \leqslant c_3 h_c \big|\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)\big|.$$

С учетом (8) справедливо неравенство

$$\big|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)\big| \leqslant \tilde{c}\big|\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)\big|,$$

где $\tilde{c} = (c_2 + c_3)h_c + 1$. В итоге получаем

$$\left|\frac{\tilde{y}_k(t) - y_k(t)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)}\right| \leqslant \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

что свидетельствует об устойчивости решения системы (1). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Решение системы* (1) *асимптотически устойчиво, если выполнены условия теоремы* 2 *и существует такое* $\Delta_1 > 0$, $0 < \Delta_1 \leqslant \Delta$, *что при любом выборе* $h_c = \mathrm{const}$ *из* (4) *для любого* $\tilde{Y}(t)$, *удовлетворяющего условию* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta_1$, *выполняются соотношения*

$$\frac{h_c \sum\limits_{l=0}^{i} \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \to 0, \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i \to \infty, \quad t \to \infty,$$

$\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$ *для всех* $l = 0, 1, \dots, i$, *и* $f_k(\tilde{t}, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \to 0$ *для всех* $\tilde{t}$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Для фиксированного $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место соотношение

$$\frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} = \frac{h_c \sum\limits_{l=0}^{i} \Delta f_k(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1.$$

Согласно условию теоремы

$$\frac{\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} \to 0, \quad i \to \infty, \quad t \to \infty.$$

Следовательно, $\bigl|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - y_k(t_{i+1})\bigr| \to 0$. Величина возмущения решения для каждого $t \in (t_i, t_{i+1})$, $t \to \infty$, оценивается из неравенства (9). Второе слагаемое из правой части (9) стремится к нулю. Оценим величину первого слагаемого из неравенства

$$\Bigl|\tilde{y}_k(t_{i+1}) - \tilde{y}_k(t) - \bigl(y_k(t_{i+1}) - y_k(t)\bigr)\Bigr| \leqslant \bigl|\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})\bigr| h_c, \quad \tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki} \in (t, t_{i+1}),$$
$$\bigl|\Delta f_k(\tilde{\theta}_{ki}, \theta_{ki})\bigr| \leqslant \max_{t, \tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]} \bigl|\Delta f_k(\tilde{t}, t)\bigr|.$$

Из условия теоремы вытекает, что $f_k(\tilde{t}, \tilde{Y}) - f_k(t, Y) \to 0$ при всех $\tilde{t}$, $t \to \infty$; следовательно, и первое слагаемое в (9) стремится к нулю. Окончательно получаем

$$\bigl|\tilde{y}_k(t) - y_k(t)\bigr| \to 0, \quad t \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

для всех $\tilde{Y}(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta_1$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для устойчивости решения системы* (1) *необходимо и достаточно существование такого* $\Delta > 0$, *что для любого* $\tilde{Y}(t)$, *удовлетворяющего условию* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta$, *при каждом* $k = 1, 2, \ldots, n$ *имеет место соотношение*

$$\left| \frac{\Delta f_k\bigl(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)}\bigr)(t - t_{i+1}) + h_c \sum\limits_{l=0}^{i} \Delta f_k\bigl(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl}\bigr)}{\tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0)} + 1 \right| \leqslant \tilde{c}_2, \quad \tilde{c}_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \tag{10}$$

где $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$, $i = 0, 1, \ldots;$ $\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, $l = 0, 1, \ldots, i;$ $\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$.

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (10) *и существовало такое* Δ_1, $0 < \Delta_1 \leqslant \Delta$, *что для любого* $\tilde{Y}(t)$, *удовлетворяющего условию* $0 < \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \Delta_1$ *выполняются соотношения*

$$\Delta f_k\bigl(\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)}\bigr)(t - t_{i+1}) + h_c \sum_{l=0}^{i} \Delta f_k\bigl(\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl}\bigr) + \tilde{y}_k(t_0) - y_k(t_0) \to 0, \tag{11}$$

$t \to \infty$ $(i \to \infty)$, $\tilde{\xi}_{kl}, \xi_{kl} \in (t_l, t_{l+1})$, $\tilde{\theta}_{k(i+1)}, \theta_{k(i+1)} \in (t_{i+1}, t_{i+2})$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$.

Для нахождения приближенных значений решения и правой части системы (1) на практике используется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением (см. [3]). В качестве приближающего полинома используется полином Лагранжа, преобразованный описанным ниже способом.

В формуле полинома Лагранжа

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t - t_r) \Big/ \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{n_0} (t_j - t_r)$$

выполним следующие преобразования. Пусть $x = (t - t_0)h^{-1}$, $t_j = t_0 + jh$; тогда

$$\prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t - t_r) = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(x - r)h, \quad \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t_j - t_r) = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(j - r)h.$$

В результате

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\frac{P_{n_0 j}(x)}{G_{n_0 j}(j)},$$

где

$$P_{n_0}(x) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(x - x_r), \quad G_{n_0 j}(j) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(j - x_r), \quad x_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r+1, & r \geqslant j. \end{cases}$$

Переменную $P_{n_0 j}(x)$ можно представить в виде полинома

$$P_{n_0 j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \dots + d_{n_0 j}x^{n_0};$$

по аналогии $G_{n_0 j}(j)$ преобразуется к виду

$$G_{n_0 j}(j) = d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{n_0 j}j^{n_0} \quad \text{или} \quad G_{n_0 j}(j) = (-1)^{n_0 - j}\, j!(n_0 - j)!.$$

Для вычисления коэффициентов полинома по его корням можно использовать следующий алгоритм. Пусть рассматривается полином

$$P_{n_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} d_l x^l$$

с коэффициентом $d_{n_0} = 1$ и корнями $x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}$, так что

$$\sum_{l=0}^{n_0} d_l x^l = \prod_{r=0}^{n_0-1}(x - x_r).$$

Если $P_1(x) = x - x_0$, то полагаем $P_1(x) = d_{11}x + d_{01}$, где $d_{11} = 1$, $d_{01} = -x_0$. Если уже вычислены коэффициенты полинома

$$P_{k-1}(x) = d_{(k-1)(k-1)}x^{k-1} + d_{(k-2)(k-1)}x^{k-2} + \dots + d_{1(k-1)}x + d_{0(k-1)},$$

то

$$P_k(x) = \prod_{r=0}^{k-1}(x - x_r), \quad k \geqslant 2, \quad P_k(x) = P_{k-1}(x)\cdot(x - x_{k-1}).$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях влечет

$$\begin{cases} d_{kk} = d_{(k-1)(k-1)}, \\ d_{(k-1)k} = d_{(k-2)(k-1)} - d_{(k-1)(k-1)}x_{k-1}, \\ d_{(k-2)k} = d_{(k-3)(k-1)} - d_{(k-2)(k-1)}x_{k-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{(k-l)k} = d_{(k-l-1)(k-1)} - d_{(k-l)(k-1)}x_{k-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{0k} = -d_{0(k-1)}x_{k-1}, \end{cases}$$

$l = 1, 2, \dots, k-1$. При $k = n$ левые части совпадут с искомыми значениями коэффициентов полинома. Таким образом,

$$P_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\frac{d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \dots + d_{n_0 j}x^{n_0}}{d_{0j} + d_{1j}j + d_{2j}j^2 + \dots + d_{n_0 j}j^{n_0}}. \tag{12}$$

При компьютерной реализации числитель и знаменатель в (12) можно вычислить по схеме Горнера

$$P_{n_0j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \cdots + d_{n_0j}x^{n_0} =$$
$$= \Big(b\big(\ldots(d_{n_0j}x + d_{n_0-1j})x + d_{n_0-2j}\big)x + \cdots + d_{1j}\Big)x + d_{0j}.$$

Из соотношения (12) следует, что полином Лагранжа всегда можно представить в виде

$$P_{n_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} c_l x^l, \quad c_l = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j)d_{lj}}{G_{n_0j}(j)}.$$

Приближение решения и правой части (1) на $[a,b] = \bigcup\limits_{i=0}^{2^{k0}-1}[a_i,b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах; при этом будем обозначать через $P_{kin_0}(x)$ полином, приближающий правую часть k-го уравнения системы (1) на i-м подынтервале.

Для интерполяции правой части системы (1) в $f_k(t,Y)$ подставляются приближенные значения y_k, вначале $y_k \approx y_{k0}$. Функция $f_k(t,Y_0)$ приближается полиномами вида (12) по изложенной выше схеме. При фиксированных n_0 и k_0 на отрезке $[a_i,b_i]$, $i=0$, затем аналогично при $i=1,2,\ldots$, выполняется итерационное уточнение, которое состоит в следующем. Пусть

$$P_{kin_0}(x) = \sum_{l=0}^{n_0} c_{kil}x^l;$$

тогда

$$f_k(t,Y_0) \approx P_{kin_0}(x), \quad x = (t-a_i)h_i^{-1},$$

h_i — шаг интерполяции на $[a_i,b_i]$.

Первообразную

$$P_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t) = y_{k0(i-1)} + h_i \int\limits_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P_{kin_0}(x)\,dx = y_{k0(i-1)} + h_i \sum_{l=0}^{n_0} \frac{c_{kil}}{l+1}x^{l+1}$$

принимаем за приближение решения $y_k(t) \approx P_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t)$, $t \in [a_i,b_i]$. Далее полагаем $f_k(t,Y) \approx f_k(t,P_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t))$ и при том же n_0 на том же отрезке строим интерполяционный полином вида (12) для приближения полученной функции:

$$P^{(1)}_{kin_0}(x) \approx f_k(t,P_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t)).$$

От этого полинома снова вычисляем первообразную с тем же значением константы

$$P^{(1)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t) = y_{k0(i-1)} + h_i \int\limits_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P^{(1)}_{kin_0}(x)\,dx,$$

подставляем в правую часть, $f_k(t,Y) \approx f_k(t,P^{(1)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t))$, которую затем интерполируем аналогично:

$$P^{(2)}_{kin_0}(x) \approx f_k(t,P^{(1)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t)).$$

Фактически итерации

$$P^{(l)}_{kin_0}(x) \approx f_k(t,P^{(l-1)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t)),$$
$$P^{(l)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(t) = y_{k0(i-1)} + h_i \int\limits_0^{(t-a_i)h_i^{-1}} P^{(l)}_{kin_0}(x)\,dx, \quad l = 1,2,\ldots,$$

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (14)

t	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
s_1	2,359	2,459	2,504	2,531	2,550	2,563	2,574	2,582	2,588	2,593
s_2	5,568	6,049	6,275	6,414	6,511	6,583	6,639	6,685	6,724	6,756

продолжаются до заданной границы $l \leqslant q = \text{const}$. Выше за значение $y_{k0(i-1)}$ принимается $P^{(q)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(b_{i-1})$. По окончании итераций на $[a_i, b_i]$ выполняется переход к $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где за значение y_{k0i} принимается $P^{(q)}_{k(\mathrm{int})\,i\,(n_0+1)}(b_i)$ (см. [5]).

Практическая реализация критериев (10), (11) заключается в возможности определить значения ξ_{kl} в $f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl}))$ с высокой точностью.

Из (5) следует, что

$$h_c^{-1}\big(y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l)\big) - f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl})) = 0.$$

Далее можно найти ξ_{kl} как минимум модуля левой части равенства

$$\min_{\xi_{kl}\in[t_l,t_{l+1}]} \Big| h_c^{-1}\big(y_k(t_{l+1}) - y_k(t_l)\big) - f_k(\xi_{kl}, Y(\xi_{kl}))\Big| = 0. \tag{13}$$

Минимум модуля любой функции на любом конечном отрезке с высокой точностью определяется с помощью программы на основе алгоритма сортировки (см. [6]).

3. Программный и численный эксперимент. Программный и численный эксперимент проводился с помощью ПК на базе процессора Intel(R) Core(TM) i5-4460 в среде программирования Delphi. На основе кусочно интерполяционного метода с итерационным уточнением строится непрерывное приближение решения и правой части исследуемой системы. Далее на каждом отрезке из (4) для всех уравнений системы находятся точки ξ_{kl}, удовлетворяющие равенству (13). После этого для каждого уравнения системы вычисляется значение модуля выражения из левой части критериев (10), (11) (в таблицах ниже соответственно s_1 и s_2). По численному поведению этих значений делается вывод об устойчивости решений системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, монотонное стремление к нулю характеризует асимптотическую устойчивость, неограниченный рост является признаком неустойчивости.

Пример 1. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = 0{,}5\, y_1 \frac{1}{\sqrt{t^3}} - \frac{1}{t^2} y_1 y_2^2 \left(\sum_{l=0}^{3} t^l \sum_{l=0}^{3} y_2^{2l}\right), \quad y_2' = y_2 \frac{1}{\sqrt{t^3}}, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \tag{14}$$

на отрезке $[1, 500]$, $h_c = 1$. Ранее было аналитически установлено, что нулевое решение системы (14) устойчиво (см. [7]). Начальные значения компонент возмущенного решения $\tilde{y}_{10} = 10^{-5}$, $\tilde{y}_{20} = 2\cdot 10^{-5}$. Результаты анализа устойчивости представлены в таблице 11. Значения s_1 и s_2 ограничены константой, что в соответствии с критерием (10) свидетельствует об устойчивости решения системы. Время работы программы ≈ 26 с.

Пример 2. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = -0{,}5\, y_1 \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\left(\sum_{l=0}^{3} t^l \sum_{l=0}^{3} y_2^{2l}\right) \frac{y_1^3}{y_2^2+1}, \quad y_2' = -y_2 \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \tag{15}$$

при значениях длины промежутка, шага и возмущения начальных данных из примера 1. Аналитически установлено, что нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво (см. [7]). Результаты анализа устойчивости представлены в таблице 2. Значения s_1 и s_2 стремятся к нулю, что свидетельствует об асимптотической устойчивости решения системы (15).

Таблица 2. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (15)

t	50	100	150	200	250
s_1	$2{,}308 \times 10^{-3}$	$1{,}234 \times 10^{-4}$	$1{,}304 \times 10^{-5}$	$1{,}961 \times 10^{-6}$	$3{,}699 \times 10^{-7}$
s_2	$5{,}330 \times 10^{-6}$	$1{,}523 \times 10^{-8}$	$1{,}701 \times 10^{-10}$	$3{,}903 \times 10^{-12}$	$1{,}948 \times 10^{-13}$
t	300	350	400	450	500
s_1	$8{,}222 \times 10^{-8}$	$2{,}093 \times 10^{-9}$	$6{,}149 \times 10^{-9}$	$2{,}211 \times 10^{-11}$	$1{,}075 \times 10^{-9}$
s_2	$6{,}506 \times 10^{-14}$	$5{,}881 \times 10^{-14}$	$5{,}842 \times 10^{-14}$	$5{,}839 \times 10^{-14}$	$5{,}839 \times 10^{-14}$

Таблица 3. Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (16)

t	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
s_1	2,439	4,302	7,867	19,341	134,627
s_2	$5{,}999 \times 10^{4}$	$1{,}399 \times 10^{5}$	$2{,}399 \times 10^{5}$	$3{,}599 \times 10^{5}$	$4{,}999 \times 10^{5}$
t	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5
s_1	$1{,}659 \times 10^{5}$	$4{,}155 \times 10^{20}$	$4{,}557 \times 10^{96}$	$1{,}240 \times 10^{389}$	$2{,}952 \times 10^{1026}$
s_2	$6{,}599 \times 10^{5}$	$8{,}399 \times 10^{5}$	$1{,}039 \times 10^{6}$	$1{,}259 \times 10^{6}$	$1{,}499 \times 10^{6}$

Пример 3. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы

$$y_1' = 0{,}5\, y_1 \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t^2} y_1 y_2^2 \left(\sum_{l=0}^{3} t^l \sum_{l=0}^{3} y_2^{2l} \right), \quad y_2' = -t, \quad y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0 \tag{16}$$

на отрезке $[0{,}5; 2{,}5]$, $h_c = 0{,}1$. Начальные значения компонент возмущенного решения из примера 1. Ранее с помощью аналитических оценок и анализа на основе мультипликативных критериев было установлено, что решение системы (16) неустойчиво (см. [7]). Результаты анализа устойчивости по критериям (10), (11) представлены в таблице 3. Монотонный рост значений s_1 и s_2 свидетельствует о неустойчивости нулевого решения системы (16).

4. Заключение. Представлены критерии устойчивости по Ляпунову систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в форме необходимых и достаточных условий. Критерии получены на основе аддитивных преобразований разностных схем численного интегрирования и формулы конечных приращений в условиях существования и единственности решения, непрерывности и непрерывной дифференцируемости правой части системы. Форма критериев влечет возможность программной реализации. Для повышения достоверности анализа устойчивости по полученным критериям необходимо высокоточное вычисление решения и правой части системы, Лагранжевых точек. Для этого используется кусочно интерполяционный метод с итерационным уточнением и алгоритм вычисления минимума модуля функции на основе устойчивой адресной сортировки слиянием. Результаты программного и численного эксперимента свидетельствуют о целесообразности применения предложенного подхода на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов С. Г.* Критерии устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *225.* — С. 28–37.
2. *Буланов С. Г.* Критерии устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений в мультипликативной и аддитивной форме// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *234.* — С. 108–117.

3. *Джанунц Г. А., Ромм Я. Е.* Варьируемое кусочно интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 10. — С. 1641–1660.
4. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоемк. технол. — 2021. — *7*. — С. 42–60.
5. *Ромм Я. Е., Джанунц Г. А.* Кусочная интерполяция функций, производных и интегралов с приложением к решению обыкновенных дифференциальных уравнений// Совр. наукоемк. технол. — 2020. — *12*, № 2. — С. 291–316.
6. *Ромм Я. Е.* О границах идентификации корней полиномов на основе устойчивой адресной сортировки// Совр. наукоемк. технол. — 2021. — *12*. — С. 84–108.
7. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Киберн. сист. анал. — 2015. — *51*, № 3. — С. 107–124.
8. *Akhmet M. U., Arugaslan D., Yilmaz E.* Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay// J. Comp. Appl. Math. — 2011. — *235*, № 16. — P. 4554–4560.
9. *Ameur O., Massioni P., Scorletti G., Brun X., Smaoui M.* Lyapunov stability analysis of switching controllers in presence of sliding modes and parametric uncertainties with application to pneumatic systems// IEEE Trans. Control Syst. Technol. — 2016. — *24*, № 6. — P. 1953–1964.
10. *Okereke R. N.* Lyapunov stability analysis of certain third order nonlinear differential equations// Appl. Math. — 2016. — *7*, № 16. — P. 1971–1977.
11. *Sene N.* Exponential form for Lyapunov function and stability analysis of the fractional differential equations// J. Math. Comp. Sci. — 2018. — *18*, № 4. — P. 388–397.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич (Bulanov Sergey Georgievich)
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал)
Ростовского государственного экономического университета, Таганрог
(Anton Chekhov Taganrog State Institute (branch)
of the Rostov State University of Economics, Rostov-on-Don, Russia)
E-mail: bulanovtgpi@mail.ru