ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 39–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-39-48

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© 2025 г. **М. В. ФАЛАЛЕЕВ, И. В. ЗАХАРОВА**

Аннотация. Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных, содержащие малый параметр при одной из старших производных. Установлена связь между решением сингулярно возмущенной подобным способом задачи и решениями предельной системы, в которой параметр возмущения обращается в нуль. Исследовано влияние матричного пучка, составленного из коэффициентов уравнений системы, на разрешимость как исходной, так и предельной задач. Сформулированы достаточные условия для предельного перехода по параметру от возмущенной системы к предельной. Векторно-матричными методами получены явные формулы для решений рассматриваемых задач.

Ключевые слова: малый параметр, задача Коши, предельная задача, матричный пучок, индекс регулярности.

ON THE SOLVABILITY AND LIMITING PROPERTIES OF SOME SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER IN THE PRINCIPAL PART

© 2025 **M. V. FALALEEV, I. V. ZAKHAROVA**

Abstract. In this paper, we consider linear systems of partial differential equations involving a small parameter as the coefficient of one of higher derivatives and establish a relationship between solutions of the singularly perturbed problem and solutions of the limit system in which the perturbation parameter is equal to zero. We examine the influence of the matrix pencil composed of the coefficients of the equations on the solvability of both original and limit problems and state sufficient conditions for the passage to the limit in terms of the parameter from the perturbed system to the limit system. Using vector-matrix methods, we obtain explicit formulas for solutions of the problems considered.

***Keywords and phrases*:** small parameter, Cauchy problem, limit problem, matrix pencil, regularity index.

***AMS Subject Classification*:** 35A20

1. Введение. При исследовании проблем разрешимости различных типов дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) параллельно возникают вопросы о разрешимости возмущенных задач для этих же уравнений. Возмущения могут быть как регулярными, так и сингулярными. В последнем случае соотношения между решениями исходной и возмущенной задачами могут быть весьма различными: от абсолютной несовместимости до «перетекания»

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

одного в другое через предельный переход. Ряд примеров такого рода можно найти, например, в работе А. И. Янушаускаса [8]. Естественно ожидать ещё большего разнообразия для сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Причем, если для одного дифференциального уравнения необходимо учитывать только свойства дифференциального оператора, то при исследовании систем дифференциальных уравнений на их разрешимость существенно влияет также матричная структура из коэффициентов системы. В данной работе представлены некоторые классы сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений в частных производных, предложена методика их исследования, получены теоремы о связи решений возмущенной и предельной задач. Статья является продолжением исследований авторов, начатых в [5, 6].

2. Системы, сводящиеся к уравнениям гиперболического типа. Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}-a_{ij}\left(\epsilon\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)\right)=h_i(x,t), \tag{1}$$

$$u_i(x,0,\epsilon)=f_i(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0,\epsilon)=g_i(x),\quad i=1,\dots,n, \tag{3}$$

где $u_i(x,t,\epsilon)\in C^2(t>0)\cap C^1(t\geqslant 0)$, $f_i(x)\in C^1(\mathbb{R})$, $g_i(x)\in C(\mathbb{R})$, $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h_i(x,t)$ абсолютно интегрируемы по x на $\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\epsilon>0$ — малый параметр.

Задачу (1)–(3) можно переписать в следующей векторно-матричной форме:

$$\mathbb{B}\frac{\partial^2\bar u}{\partial x^2}-\mathbb{A}\left(\epsilon\frac{\partial^2\bar u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial\bar u}{\partial t}\right)=\bar h(x,t),$$

$$\bar u(x,0,\epsilon)=\bar f(x),\quad \frac{\partial\bar u}{\partial t}(x,0,\epsilon)=\bar g(x);$$

здесь $\mathbb{B}=\|b_{ij}\|$, $\mathbb{A}=\|a_{ij}\|$,

$$\bar u(x,t,\epsilon)=\begin{pmatrix}u_1(x,t,\epsilon)\\ u_2(x,t,\epsilon)\\ \dots\dots\dots\\ u_n(x,t,\epsilon)\end{pmatrix},\ \bar h(x,t)=\begin{pmatrix}h_1(x,t)\\ h_2(x,t)\\ \dots\dots\\ h_n(x,t)\end{pmatrix},\ \bar f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \dots\dots\\ f_n(x)\end{pmatrix},\ \bar g(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ g_2(x)\\ \dots\dots\\ g_n(x)\end{pmatrix}.$$

Очевидно, разрешимость задачи (1)–(3) зависит как от свойств дифференциального оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\left(\epsilon\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$, так и от свойств матричного пучка $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$. Отследить влияние каждого из этих факторов является задачей данного исследования. При этом для матричного пучка $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ возможны два существенно разных случая: обратимости и необратимости матрицы $\mathbb{B}$. Финальная цель исследования — установить связь между решениями исходной (возмущенной) задачи (1)–(3) и предельной (при $\epsilon=0$) задачи (1)–(2), а также получить условия существования этих решений.

2.1. Случай обратимости матрицы $\mathbb{B}$. Пусть в матричном пучке $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B}$ обратима; тогда без ограничения общности можно считать ее единичной: $\mathbb{B}=\mathbb{E}_n$.

Известно (см. [3]), что для любой квадратной матрицы $\mathbb{A}$ размерности n существует такая невырожденная матрица $\mathbb{T}$, что

$$\mathbb{T}\mathbb{A}\mathbb{T}^{-1}=\mathbb{J}_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\mathbb{E}_{q_1}+\mathbb{N}_{q_1} & 0 & 0\ \dots & 0\\ 0 & \lambda_2\mathbb{E}_{q_2}+\mathbb{N}_{q_2} & 0\ \dots & 0\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\\ 0 & 0 & 0\ \dots & \lambda_\mu\mathbb{E}_{q_\mu}+\mathbb{N}_{q_\mu}\end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{diag}\left\{\lambda_1\mathbb{E}_{q_1}+\mathbb{N}_{q_1},\ \lambda_2\mathbb{E}_{q_2}+\mathbb{N}_{q_2},\ \dots,\ \lambda_\mu\mathbb{E}_{q_\mu}+\mathbb{N}_{q_\mu}\right\}; \tag{4}$$

здесь $q_1 + q_2 + \cdot + q_\mu = n$, индекс q_i при единичных квадратных матрицах $\mathbb{E}_{q_i}$ и при жордановых нильпотентных блоках $\mathbb{N}_{q_i}$ означает их размерность q_i,

$$\mathbb{N}_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots \mu, \quad \mathbb{N}_{q_i}^{q_i} = \mathbb{O}_{q_i}. \tag{5}$$

Относительно матрицы $\mathbb{A}$ будем предполагать выполненным следующее условие:

(A) $\det \mathbb{A} \neq 0$ и все ее собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **(A)** невырожденной заменой переменных $\bar{v} = T\bar{u}$ задача (1)–(3) приводится к следующему блочно-диагональному виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \mathbb{J}_n \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = \bar{H}(x,t), \tag{6}$$

$$\bar{v}(x, 0, \epsilon) = \bar{F}(x) = \mathbb{T}\bar{f}(x), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}(x, 0, \epsilon) = \bar{G}(x) = \mathbb{T}\bar{g}(x), \tag{8}$$

$$\bar{H}(x,t) = \mathbb{T}\bar{h}(x,t),$$

т.е. распадается на μ независимых систем уравнений гиперболического типа (в соответствии с жордановыми «ящиками» $\lambda_i \mathbb{E}_{q_i} + \mathbb{N}_{q_i}$). Рассмотрим первый блок из q_1 уравнений системы (6)–(8) (остальные блоки исследуются аналогично):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_1}{\partial t} \right) + v_2 = H_1(x,t), \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_2}{\partial t} \right) + v_3 = H_2(x,t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_{q_1-1}}{\partial t} \right) + v_{q_1} = H_{q_1-1}(x,t), \\ \dfrac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial x^2} - \lambda_1 \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_{q_1}}{\partial t} \right) = H_{q_1}(x,t). \end{cases} \tag{9}$$

Решая последнее q_1-е уравнение этой системы (например, по методике работы [6]), находим:

$$\begin{aligned} v_{q_1}(x,t,\epsilon) = M\Big(x, t, \lambda_1, F_{q_1}(x), G_{q_1}(x), H_{q_1}(x,t)\Big) = \\ = \exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right) \left\{ \frac{1}{2} \left[F_{q_1}\left(x - \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) + F_{q_1}\left(x + \frac{t}{\sqrt{\lambda_1 \epsilon}}\right) \right] + \right. \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_1\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_1\epsilon}} \left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2 - \lambda_1 \epsilon \xi^2}\right) \left(\sqrt{\lambda_1 \epsilon} G_{q_1}(x-\xi) + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}} F_{q_1}(x-\xi) \right) + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2 - \lambda_1\epsilon\xi^2}\right) \cdot \frac{\alpha\sqrt{\lambda_1} t}{2\sqrt{\epsilon}\sqrt{t^2 - \lambda_1\epsilon\xi^2}}\, F_{q_1}(x-\xi) \right] d\xi \right\} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\epsilon}} \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{2\epsilon}\right) \int\limits_{x - \frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}}^{x + \frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}} \mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{(t-\tau)^2 - \lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}\right) H_{q_1}(\xi,\tau) d\xi\, d\tau; \end{aligned} \tag{10}$$

здесь $\mathcal{J}_0(ix)$ и $\frac{1}{i}\mathcal{J}_1(ix)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка мнимого аргумента.

В [6] было доказано предельное соотношение

$$\exp\left(-\frac{\alpha t}{2\epsilon}\right)\left\{\frac{1}{2}\left[F_{q_1}\left(x-\frac{t}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}\right)+F_{q_1}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}\right)\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-t/\sqrt{\lambda_1\epsilon}}^{t/\sqrt{\lambda_1\epsilon}}\left[\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_1\epsilon\xi^2}\right)\left(\sqrt{\lambda_1\epsilon}G_{q_1}(x-\xi)+\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\epsilon}}F_{q_1}(x-\xi)\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{i}\mathcal{J}_1\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_1\epsilon\xi^2}\right)\cdot\frac{\alpha\sqrt{\lambda_1}t}{2\sqrt{\epsilon}\sqrt{t^2-\lambda_1\epsilon\xi^2}}F_{q_1}(x-\xi)\right]d\xi\right\}\xrightarrow{\epsilon\to0+}$$
$$\xrightarrow{\epsilon\to0+}\frac{\sqrt{\alpha\lambda_1}}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1(x-\xi)^2}{4t}\right)\cdot F_{q_1}(\xi)d\xi=v_j^0(x,t).$$

Следуя методике той же работы [6], получаем следующее асимптотическое представление (см. [4]):

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\epsilon}}\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{2\epsilon}\right)\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}\right)\approx$$
$$\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\lambda_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}}\cdot\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1(x-\xi)^2}{2\left(\sqrt{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}+(t-\tau)\right)}\right)\cdot\Big[1+O(\epsilon)\Big],$$

из которого получаем

$$-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\epsilon}}\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{2\epsilon}\right)\int\limits_{x-\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}}^{x+\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}}\mathcal{J}_0\left(\frac{\alpha i}{2\epsilon}\sqrt{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}\right)H_{q_1}(\xi,\tau)d\xi d\tau\approx$$
$$\approx-\int\limits_0^t\int\limits_{x-\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}}^{x+\frac{t-\tau}{\sqrt{\lambda_1\epsilon}}}\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\lambda_1}\sqrt[4]{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1(x-\xi)^2}{2\left(\sqrt{(t-\tau)^2-\lambda_1\epsilon(x-\xi)^2}+(t-\tau)\right)}\right)H_{q_1}(\xi,\tau)\cdot\Big[1+O(\epsilon)\Big]d\xi\,d\tau\xrightarrow{\epsilon\to0+}$$
$$\xrightarrow{\epsilon\to0+}-\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\lambda_1(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)H_{q_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Таким образом доказано предельное равенство

$$\lim_{\epsilon\to0+}v_{q_1}(x,t,\epsilon)=M_0\Big(x,t,\lambda_1,F_{q_1}(x),H_{q_1}(x,t)\Big)=\frac{\sqrt{\lambda_1\alpha}}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\lambda_1\alpha(x-\xi)^2}{4t}\right)F_{q_1}(\xi)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_1\alpha(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{\lambda_1\alpha(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)H_{q_1}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=v_{q_1}^0(x,t).\quad(11)$$

Полученная в пределе функция $v^0_{q_1}(x,t)$ является решением задачи Коши для предельного q_1-го уравнения системы (9):

$$\begin{cases}\alpha\lambda_1\dfrac{\partial v_{q_1}}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial x^2}-H_{q_1}(x,t),\\ v_{q_1}(x,0)=F_{q_1}(x).\end{cases}$$

Решая (q_1-1)-е уравнение системы (9) по формуле (10), находим

$$v_{q_1-1}(x,t,\epsilon)=M\Big(x,\ t,\ \lambda_1,\ F_{q_1-1}(x),\ G_{q_1-1}(x),\ H_{q_1-1}(x,t)-v_{q_1}(x,t,\epsilon)\Big),$$

и после предельного перехода по формуле (11)

$$\lim_{\epsilon\to 0+}v_{q_1-1}(x,t,\epsilon)=M_0\Big(x,\ t,\ \lambda_1,\ F_{q_1-1}(x),\ H_{q_1-1}(x,t)-v^0_{q_1}(x,t)\Big)=v^0_{q_1-1}(x,t)$$

получаем решение предельной задачи для (q_1-1)-го уравнения системы (9) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если в матричном пучке $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B}=\mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы $\mathbb{A}$ выполнено условие **(A)**, то для решения задачи* (1)–(3) *справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\bar u(x,t,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0+}\mathbb{T}^{-1}\bar v(x,t,\epsilon)=\mathbb{T}^{-1}\bar v^0(x,t)=\bar u^0(x,t),$$

где $\bar u^0(x,t)$ — решение предельной $(\epsilon=0)$ задачи (1)–(2).

2.2. Случай необратимости матрицы $\mathbb{B}$. В этом случае будем предполагать, что матричный пучок $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ регулярен (см. [2,7]), т.е. $\det(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})\neq 0$. Тогда существует такая пара невырожденных матриц $\mathbb{P}$ и $\mathbb{Q}$ размерности n, что

$$\mathbb{P}(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})\mathbb{Q}=\lambda\begin{pmatrix}\mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)}\\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{N}_{n-d}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)}\\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{E}_{n-d}\end{pmatrix},$$

где $\mathbb{E}_d$ и $\mathbb{E}_{n-d}$ — единичные квадратные матрицы, $\mathbb{O}_{d\times(n-d)}$ и $\mathbb{O}_{(n-d)\times d}$ — нулевые прямоугольные матрицы указанных размерностей, $\mathbb{N}_{n-d}=\mathrm{diag}\{\mathbb{N}_{m_1},\ \mathbb{N}_{m_2},\ \ldots,\ \mathbb{N}_{m_j},\}$, $\mathbb{N}_{m_i}$ —- жордановы нильпотентные блоки размерности m_i (см. (5)), $n-d=m_1+m_2+\cdots+m_j$; $\mathbb{J}_d$ — квадратная матрица размерности d жордановой структуры; $q_1+q_2+\cdots+q_\mu=d$ в обозначениях формулы (4). Если $\det\mathbb{A}\neq 0$, то все $\lambda_i\neq 0$, $i=1,\ldots,\mu$. Величину $\tilde m=\max(m_1,m_2,\ldots,m_j)$ называют индексом регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ (см. [2,7]).

Итак, относительно матричного пучка $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ будем предполагать выполненным условие

(B) пучок $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ регулярен, $\det\mathbb{A}\neq 0$ и все числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_\mu$ положительны.

При выполнении условия **(B)** невырожденной заменой $\bar u=\mathbb{Q}\bar v$ задача (1)–(3) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\begin{pmatrix}\mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)}\\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{N}_{n-d}\end{pmatrix}\frac{\partial^2\bar v}{\partial x^2}-\begin{pmatrix}\mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)}\\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{E}_{n-d}\end{pmatrix}\left(\epsilon\frac{\partial^2\bar v}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial\bar v}{\partial t}\right)=\tilde H(x,t), \tag{12}$$

$$\bar v(x,0,\epsilon)=\tilde F(x)=\mathbb{Q}^{-1}\bar f(x),\quad \frac{\partial\bar v}{\partial t}(x,0,\epsilon)=\tilde G(x)=\mathbb{Q}^{-1}\bar g(x),\quad \tilde H(x,t)=\mathbb{P}\bar h(x,t). \tag{13}$$

Первые d уравнений системы (12) имеют такой же блочный вид, как система (6), поэтому в силу теоремы 1 для них задача (12)–(13) обладает предельным свойством. Оставшиеся $(n-d)$ уравнений системы (12) распадаются на j независимых блоков. Как и выше для системы (6)–(8) , исследуем один из блоков, а именно, последний (j-й); остальные исследуются аналогично.

Выпишем подсистему из последних m_j уравнений системы (12):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j+2}}{\partial x^2} - \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_{n-m_j+1}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x,t), \\ \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial x^2} - \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_{n-m_j}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x,t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-1}(x,t), \\ -\left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \alpha \dfrac{\partial v_n}{\partial t}\right) = \tilde{H}_n(x,t). \end{cases} \tag{14}$$

Решением последнего уравнения системы (14) является функция

$$v_n(x,t,\epsilon) = \tilde{M}\Big(x,\ t,\ \tilde{F}_n(x),\ \tilde{G}_n(x),\ \tilde{H}_n(x,t)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_0^t \Big(1 - \exp\Big(-\frac{\alpha}{\epsilon}(t-\tau)\Big)\Big)\, \tilde{H}_n(x,\tau)\, d\tau + \frac{\epsilon}{\alpha}\Big(1 - \exp\Big(-\frac{\alpha}{\epsilon}t\Big)\Big)\, \tilde{G}_n(x) + \tilde{F}_n(x). \tag{15}$$

В результате предельного перехода

$$\lim_{\epsilon\to 0+} v_n(x,t,\epsilon) = \tilde{M}_0\Big(x,\ t,\ \tilde{F}_n(x),\ \tilde{H}_n(x,t)\Big) = \tilde{F}_n(x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^t \tilde{H}_n(x,\tau)\, d\tau = v_n^0(x,t) \tag{16}$$

получаем решение предельного (при $\epsilon = 0$) уравнения (для последнего уравнения системы (14)).

Решением предпоследнего уравнения системы (14) в соответствии с формулой (15) является функция

$$v_{n-1}(x,t,\epsilon) = \tilde{M}\left(x,\ t,\ \tilde{F}_{n-1}(x),\ \tilde{G}_{n-1}(x),\ \tilde{H}_{n-1}(x,t) - \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right),$$

т.е. для разрешимости системы (14) требуется повышенная гладкость по пространственной переменной от входных данных задачи (1)–(3), а именно, $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h(x,t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(\mathbb{R})$, где $\tilde{m}$ — индекс регулярности матричного пучка $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$ (см. [2,7]). После предельного перехода в соответствии с формулой (16) получаем решение

$$\lim_{\epsilon\to 0+} v_{n-1}(x,t,\epsilon) = \tilde{M}_0\left(x,\ t,\ \tilde{F}_{n-1}(x),\ \tilde{H}_{n-1}(x,t) - \frac{\partial^2 v_n^0}{\partial x^2}\right) = v_{n-1}^0(x,t)$$

предельной задачи для предпоследнего уравнения системы (14) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если для матричного пучка* $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ *выполнено условие* ***(B)***, $f_i(x)$, $g_i(x)$, $h(x,t) \in C^{2(\tilde{m}-1)}(\mathbb{R}^1)$, *где* $\tilde{m}$ — *индекс регулярности матричного пучка* $(\lambda\mathbb{B} + \mathbb{A})$, *то для решения задачи* (1)–(3) *справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \bar{u}(x,t,\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0+} \mathbb{Q}\bar{v}(x,t,\epsilon) = \mathbb{Q}\bar{v}^0(x,t) = \bar{u}^0(x,t),$$

где $\bar{u}^0(x,t)$ — *решение предельной* $(\epsilon = 0)$ *задачи* (1)–(3).

Замечание 1. Повышенная гладкость на входные данные задачи является проявлением свойства необратимости матрицы $\mathbb{B}$. В случае нарушения этих условий задача (1)–(3) окажется неразрешимой в данных условиях, но можно ставить вопрос о ее разрешимости в пространстве распределений (см. [1]).

Замечание 2. Очевидно, для разрешимости предельной задачи условие (3) не нужно.

3. Системы, сводящиеся к уравнениям эллиптического типа. Изложенная методика применима к исследованию задачи Дирихле в полупространстве $t > 0$ для системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2}\right)+a_{ij}\left(\epsilon\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)\right)=h_i(x_1,x_2,t), \tag{17}$$

$$u_i(x_1,x_2,0,\epsilon)=f_i(x_1,x_2),\quad i=1,\dots,n, \tag{18}$$

где $u_i(x_1,x_2,t,\epsilon)\in C^2(t>0)\cap C(t\geqslant 0)$, $f_i(x_1,x_2)\in C(\mathbb{R}^2)$, $h_i(x_1,x_2,t)\in C(\mathbb{R}^3)$, $f_i(x_1,x_2)$, $h_i(x_1,x_2,t)$ абсолютно интегрируемы по x_1, x_2 на $\mathbb{R}^2$, $\alpha>0$, $\epsilon>0$ — малый параметр.

Перепишем задачу (17)–(18) в векторно-матричном виде:

$$\mathbb{B}\Delta_2\bar{u}+\mathbb{A}\left(\epsilon\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)=\bar{h}(x_1,x_2,t),\quad \bar{u}(x_1,x_2,0,\epsilon)=\bar{f}(x_1,x_2),$$

где, как и выше, $\mathbb{B}=\|b_{ij}\|$, $\mathbb{A}=\|a_{ij}\|$, $\Delta_2=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$,

$$\bar{u}(x_1,x_2,t,\epsilon)=\begin{pmatrix}u_1(x_1,x_2,t,\epsilon)\\u_2(x_1,x_2,t,\epsilon)\\\dots\dots\dots\dots\\u_n(x_1,x_2,t,\epsilon)\end{pmatrix},\ \bar{h}(x_1,x_2,t)=\begin{pmatrix}h_1(x_1,x_2,t)\\h_2(x_1,x_2,t)\\\dots\dots\dots\\h_n(x_1,x_2,t)\end{pmatrix},\ \bar{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2)\\f_2(x_1,x_2)\\\dots\dots\dots\\f_n(x_1,x_2)\end{pmatrix}.$$

3.1. Случай обратимости матрицы $\mathbb{B}$. Пусть в матричном пучке $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ матрица $\mathbb{B}=\mathbb{E}_n$ единичная, а для матрицы $\mathbb{A}$ выполнено условие **(A)**. Заменой переменных $\bar{v}=T\bar{u}$ задача (17)–(18) приводится к блочно-диагональному виду:

$$\Delta_2\bar{v}+\mathbb{J}_n\left(\epsilon\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2}-\alpha\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}\right)=\bar{H}(x_1,x_2,t), \tag{19}$$

$$\bar{v}(x_1,x_2,0,\epsilon)=\bar{F}(x_1,x_2)=\mathbb{T}\bar{f}(x_1,x_2), \tag{20}$$

$$\bar{H}(x_1,x_2,t)=\mathbb{T}\bar{h}(x_1,x_2,t),$$

т.е. распадается на μ независимых систем уравнений эллиптического типа. Рассмотрим первый блок из q_1 уравнений системы (19)–(20):

$$\begin{cases}\Delta_2 v_1+\lambda_1\left(\epsilon\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}-\alpha\dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right)+v_2=H_1(x_1,x_2,t),\\ \Delta_2 v_2+\lambda_1\left(\epsilon\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}-\alpha\dfrac{\partial v_2}{\partial t}\right)+v_3=H_2(x_1,x_2,t),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Delta_2 v_{q_1-1}+\lambda_1\left(\epsilon\dfrac{\partial^2 v_{q_1-1}}{\partial t^2}-\alpha\dfrac{\partial v_{q_1-1}}{\partial t}\right)+v_{q_1}=H_{q_1-1}(x_1,x_2,t),\\ \Delta_2 v_{q_1}+\lambda_1\left(\epsilon\dfrac{\partial^2 v_{q_1}}{\partial t^2}-\alpha\dfrac{\partial v_{q_1}}{\partial t}\right)=H_{q_1}(x_1,x_2,t).\end{cases} \tag{21}$$

Решением последнего уравнения системы (21) является функция следующего вида:

$$v_{q_1}(x_1,x_2,t,\epsilon)=V\Big(x_1,x_2,t,F_{q_1}(x_1,x_2),H_{q_1}(x_1,x_2,t)\Big)=$$
$$=\frac{\lambda_1 t}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_{q_1}(y_1,y_2)\frac{2\epsilon+\alpha\sqrt{\lambda_1\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}}{\left(\sqrt{\lambda_1\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}\right)^3}\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)}{2\left(t+\sqrt{\lambda_1\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+t^2}\right)}\right)dy_1\,dy_2-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{q_1}(y_1,y_2,\tau)}{\left(\sqrt{\lambda_1\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+(t-\tau)^2}\right)^3}\times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)}{2\left(t-\tau+\sqrt{\lambda_1\epsilon\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)+(t-\tau)^2}\right)}\right)dy_1\,dy_2\,d\tau. \quad (22)$$

Отсюда после предельного перехода получаем

$$\lim_{\epsilon\to 0+}v_{q_1}(x_1,x_2,t,\epsilon)=V_0\Big(x_1,x_2,t,F_{q_1}(x_1,x_2),H_{q_1}(x_1,x_2,t)\Big)=$$

$$=\frac{\alpha\lambda_1}{4\pi t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F_{q_1}(y_1,y_2)\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1}{4t}\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)\right)dy_1\,dy_2-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_{q_1}(y_1,y_2,\tau)}{(t-\tau)}\exp\left(-\frac{\alpha\lambda_1}{4(t-\tau)}\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big)\right)dy_1\,dy_2\,d\tau=$$

$$=v^0_{q_1}(x_1,x_2,t). \quad (23)$$

Очевидно, функция $v^0_{q_1}(x_1,x_2,t)$ является решением следующей задачи Коши для уравнения теплопроводности, которое является предельным для q_1-го уравнения системы (21):

$$\begin{cases}\alpha\lambda_1\dfrac{\partial v_{q_1}}{\partial t}=\Delta_2 v_{q_1}-H_{q_1}(x_1,x_2,t),\\ v_{q_1}(x_1,x_2,0)=F_{q_1}(x_1,x_2).\end{cases}$$

Выпишем далее по формуле (22) решение (q_1-1)-го уравнения системы (21):

$$v_{q_1-1}(x_1,x_2,t,\epsilon)=V\Big(x_1,\ x_2,\ t,\ F_{q_1-1}(x_1,x_2),\ H_{q_1-1}(x_1,x_2,t)-v_{q_1}(x_1,x_2,t,\epsilon)\Big).$$

Осуществив предельный переход по формуле (23), получим решение

$$\lim_{\epsilon\to 0+}v_{q_1-1}(x_1,x_2,t,\epsilon)=V_0\Big(x_1,\ x_2,\ t,\ F_{q_1-1}(x_1,x_2),\ H_{q_1-1}(x_1,x_2,t)-v^0_{q_1}(x_1,x_2,t)\Big)=v^0_{q_1-1}(x_1,x_2,t)$$

предельной задачи для (q_1-1)-го уравнения системы (21) и т. д. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если в матричном пучке* $(\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})$ *матрица* $\mathbb{B}=\mathbb{E}_n$ *единичная, а для матрицы* $\mathbb{A}$ *выполнено условие* ***(A)****, то для решения задачи* (17)–(18) *справедливо предельное равенство*

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\bar{u}(x_1,x_2,t,\epsilon)=\lim_{\epsilon\to 0+}\mathbb{T}^{-1}\bar{v}(x_1,x_2,t,\epsilon)=\mathbb{T}^{-1}\bar{v}^0(x_1,x_2,t)=\bar{u}^0(x_1,x_2,t),$$

где $\bar{u}^0(x_1,x_2,t)$ *— решение предельной* $(\epsilon=0)$ *задачи* (17)–(18).

Замечание 3. Теоремы 1 и 3 обобщают результаты авторов, представленные в [6]. А именно, во-первых, в [6] рассматривались системы уравнений с нулевой правой частью (т.е. однородные); во-вторых, предполагалось, что все элементарные делители матрицы $\mathbb{A}$ имеют степень 1. В этом случае жорданова форма матрицы $\mathbb{A}$ имеет диагональный вид и соответственно системы (1)–(3) и (17)–(18) после описанных выше невырожденных замен переменных распадаются на n независимых уравнений.

3.2. Случай необратимости матрицы $\mathbb{B}$. В этом случае при сформулированных условиях для задачи (17)–(18) предельные соотношения не выполняются. Действительно, предполагая выполненным условие **(B)**, невырожденной заменой переменных $\bar{u} = \mathbb{Q}\bar{v}$ задачу (17)–(18) сведем к блочно-диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{N}_{n-d} \end{pmatrix} \Delta_2 \bar{v} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_d & \mathbb{O}_{d\times(n-d)} \\ \mathbb{O}_{(n-d)\times d} & \mathbb{E}_{n-d} \end{pmatrix} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right) = \tilde{H}(x_1, x_2, t), \tag{24}$$

$$\bar{v}(x_1, x_2, 0, \epsilon) = \tilde{F}(x_1, x_2) = \mathbb{Q}^{-1}\bar{f}(x_1, x_2), \quad \tilde{H}(x_1, x_2, t) = \mathbb{P}\bar{h}(x_1, x_2, t). \tag{25}$$

Очевидно, блок из первых d уравнений системы (24) имеет вид задачи (19)–(20), а значит, обладает предельным свойством, но оставшиеся j блоков из $(n-d)$ уравнений (именно они заключают в себе влияние необратимости матрицы $\mathbb{B}$) уже не обладают требуемыми предельными свойствами. Это легко увидеть исследовав, например, как и выше, последний j-й блок уравнений системы (24). Он имеет вид

$$\begin{cases} \Delta_2 v_{n-m_j+2} + \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j+1}}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial v_{n-m_j+1}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x_1, x_2, t), \\ \Delta_2 v_{n-m_j+1} + \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-m_j}}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial v_{n-m_j}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-m_j+1}(x_1, x_2, t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_2 v_n + \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial v_{n-1}}{\partial t}\right) = \tilde{H}_{n-1}(x_1, x_2, t), \\ \left(\epsilon \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \alpha \dfrac{\partial v_n}{\partial t}\right) = \tilde{H}_n(x_1, x_2, t). \end{cases}$$

Решением последнего уравнения этой системы является функция

$$v_n(x_1, x_2, t, \epsilon) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \left(\exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon}(t-\tau)\right) - 1\right) \tilde{H}_n(x_1, x_2, \tau)\, d\tau + \\ + \frac{\epsilon}{\alpha}\left(\exp\left(\frac{\alpha}{\epsilon} t\right) - 1\right) \dot{v}_n(x_1, x_2, 0, \epsilon) + \tilde{F}_n(x_1, x_2) \xrightarrow{\epsilon \to 0+} \infty.$$

Замечание 4. Эффекты такого рода встречаются и для отдельных типов уравнений в частных производных (и не только); примеры можно найти в [8].

4. Заключение. Таким образом, можно утверждать, что среди задач для систем уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части, существуют специальные класс систем, имеющих регулярную асимптотику, и, как следствие, допускающие применение методов регулярной теории возмущений для построения их асимптотического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
2. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
4. *Двайт Г. Б.* Таблица интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
5. *Захарова И. В.* О некоторых задачах для уравнений с частными производными, содержащих малый параметр в главной части// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *183*. — С. 61–72.
6. *Захарова И. В., Фалалеев М. В.* О некоторых системах дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в главной части// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2024. — *234*. — С. 50–58.
7. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003.

8. *Янушаускас А. И.* О зависящих от малого параметра уравнениях с частными производными// в кн.: Сборник научных трудов Иркутского университета. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. — С. 94–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фалалеев Михаил Валентинович (Falaleev Mikhail Valentinovich)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: mvfalaleev@gmail.com

Захарова Ирина Валентиновна (Zakharova Irina Valentinovna)
Иркутский государственный университет, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: zair@math.isu.ru