



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 29–38
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-29-38

УДК 517.956

КЛАССИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКИХ И МЯГКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

© 2025 г. Ю. А. МАРКОВ, М. А. МАРКОВА, Н. Ю. МАРКОВ

Аннотация. В рамках подхода Захарова—Шульмана определена классическая матрица рассеяния для простейшего процесса взаимодействия жестких и мягких возбуждений в кварк-глюонной плазме. Вычисления проведены в близкой аналогии с методами квантовой теории поля, с заменой квантового коммутатора от квантовопольевых операторов полей на так называемую скобку Ли—Пуассона от классических переменных. Классическая $\mathcal{S}$ -матрица определена в виде наиболее общего интегро-степенного ряда по степеням асимптотических значений нормальных бозонных переменных $c_k^a(t)$, $c_k^{*a}(t)$, описывающих мягкие глюонные возбуждения системы, и цветного заряда $Q^a(t)$ жесткой частицы при $t \rightarrow \infty$. Найден первый нетривиальный вклад в данную $\mathcal{S}$ -матрицу.

Ключевые слова: гамильтонов формализм, скобка Ли—Пуассона, классическая матрица рассеяния, неабелева плазма, плазмон, цветозаряженная частица.

CLASSICAL SCATTERING MATRIX FOR HARD AND SOFT EXCITATIONS IN A PLASMA WITH NON-ABELIAN INTERACTION

© 2025 Yu. A. MARKOV, M. A. MARKOVA, N. Yu. MARKOV

ABSTRACT. Within the framework of the Zakharov–Shulman approach, we determine the classical scattering matrix for the simplest process of interaction between hard and soft excitations in a quark-gluon plasma. Calculations are performed in close analogy with the methods of quantum field theory, with the replacement of the quantum commutator of quantum field operators by the so-called Lie–Poisson bracket of classical variables. The classical $\mathcal{S}$ -matrix is determined in the form of the most general integro-power series in asymptotic values of the normal bosonic variables $c_k^a(t)$ and $c_k^{*a}(t)$ describing the soft gluon excitations of the system and the color charge $Q^a(t)$ of the hard particle at $t \rightarrow \infty$. The first nontrivial contribution to the given $\mathcal{S}$ -matrix is obtained.

Keywords and phrases: Hamiltonian formalism, Lie–Poisson bracket, classical scattering matrix, non-Abelian plasma, plasmon, color-charged particle.

AMS Subject Classification: 81U20, 82D10

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

1. Введение. В [12] была разработана гамильтонова теория для коллективных продольно поляризованных бозе-возбуждений (плазмонов), взаимодействующих с классической высокоэнергетической цветозаряженной частицей, распространяющейся через горячую кварк-глюонную плазму (КГП). Для этого применялся общий формализм построения теории волн в нелинейных средах, основанный на классической гамильтоновой теории систем с распределёнными параметрами, предложенный в свое время В. Е. Захаровым (см. [4, 5]) и подробно представленный на многочисленных примерах конкретных физических систем в обзоре [6] и в монографии [18] (см. также [8, 9, 13]).

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие гамильтонова подхода в описании нелинейных волновых систем и является первой из двух статей цикла. Здесь предложен формализм для определения явного вида так называемой классической матрицы рассеяния для процесса взаимодействия плазмона с жесткой цветозаряженной частицей. Понятие классической $\mathcal{S}$ -матрицы впервые было введено в рассмотрение В. Е. Захаровым (см. [16]) для гамильтоновых волновых систем и затем развито в работах В. Е. Захарова и Е. И. Шульмана (см. [7, 17]). Однако в этих работах данная матрица рассеяния была определена только для мягкого сектора возбуждений физических систем. Здесь нами впервые предложен подход к определению классической матрицы рассеяния в случае движущихся в сильно неравновесной среде инжектируемых извне жестких цветных частиц. Ввиду сложности задачи мы ограничились в данной работе самым простым процессом взаимодействия: упругим рассеянием одной энергичной частицы на плазмоне; тем не менее данная задача имеет важное прикладное значение.

Во второй статье будет показано, как, зная классическую $\mathcal{S}$ -матрицу для произвольного процесса рассеяния жесткой цветной частицы на мягких возбуждениях кварк-глюонной плазмы, определить выражение для потери энергии, которую испытывает данная частица при рассеянии. Потери энергии играют важную роль в диагностике КГП в современных экспериментах по столкновению тяжелых ультрарелятивистских ионов.

2. Гамильтониан взаимодействия плазмонов и жесткой цветной частицы. Для удобства дальнейших ссылок в данном разделе приводятся необходимые в дальнейшем изложении сведения из [12]. В частности, в указанной работе был получен явный вид эффективного гамильтониана четвертого порядка $\mathcal{H}^{(4)}$, который описывает упругое рассеяние плазмона на жесткой частице:

$$\mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} = i \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{*a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{a_2} \mathcal{Q}^a, \quad (2.1)$$

где полная эффективная амплитуда $\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)a a_1 a_2} = f^{a a_1 a_2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} = & T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_2} \right) \phi_{\mathbf{k}_1}^* \phi_{\mathbf{k}_2} + \\ & + i \left[\left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \phi_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l + \omega_{\mathbf{k}_1}^l} \right) \mathcal{V}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \phi_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \right]. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь f^{abc} — антисимметричные структурные константы цветовой алгебры Ли $\mathfrak{su}(N_c)$, $a, b, c = 1, \dots, N_c$; $\omega_{\mathbf{k}}^l$ — дисперсионное соотношение продольной моды коллективных возбуждений КГП, $\mathbf{v}$ — скорость жесткой частицы, которую считаем фиксированной. Амплитуды $c_{\mathbf{k}}^{*a}$ и $c_{\mathbf{k}}^a$ — так называемые нормальные переменные, описывающие мягкую бозонную степень свободы системы, а $\mathcal{Q}^a$ — цветной заряд жесткой частицы, который является функцией времени t . Данные переменные подчиняются соответствующим уравнениям Гамильтона:

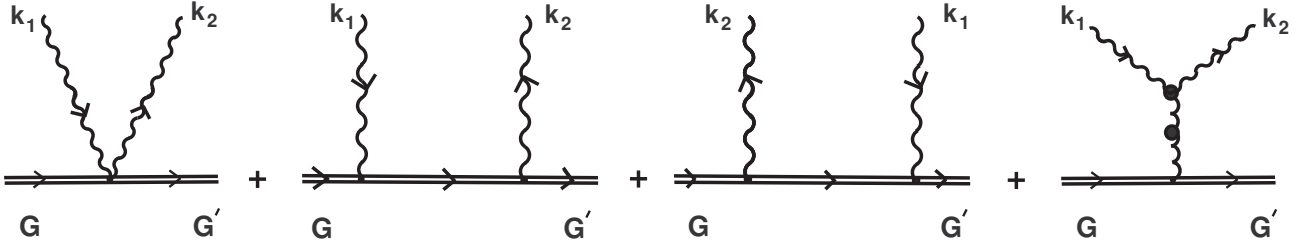


Рис. 1. Эффективная амплитуда $\tilde{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 a}$ для процесса упругого рассеяния плазмона на жесткой цветной частице. Черные точки обозначает HTL-суммирование, а двойная линия — жесткую частицу.

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= -i \left\{ c_{\mathbf{k}}^{*a}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, \quad \frac{\partial c_{\mathbf{k}'}^{a'}}{\partial t} = -i \left\{ c_{\mathbf{k}'}^{a'}, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, \\ \frac{d\mathcal{Q}^a}{dt} &= -i \left\{ \mathcal{Q}^a, \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)} \right\}, \quad \mathcal{Q}^a(t) \Big|_{t=t_0} = \mathcal{Q}_0^a, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\mathcal{H}^{(0)} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) c_{\mathbf{k}}^{*a} c_{\mathbf{k}}^a \quad (2.4)$$

— гамильтониан свободного поля, фигурные скобки обозначают скобку Ли—Пуассона

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^a} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*a}} - \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{*a}} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^a} \right\} + i \frac{\partial F}{\partial \mathcal{Q}^a} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{Q}^b} f^{abc} \mathcal{Q}^c. \quad (2.5)$$

Первый член в правой части — это стандартная каноническая скобка для систем с распределенными параметрами.

На рис. 1 дана диаграммная интерпретация различных членов в фигурных скобках в эффективной амплитуде (2.2). Второй и третий графики представляют собой комптоновское рассеяние мягких бозонных возбуждений на жесткой пробной частице, индуцированное вторым членом в правой части выражения (2.2). Линии входящей и исходящей волны на рис. 1 соответствуют нормальным переменным $c_{\mathbf{k}_1}^{a_1}$ и $c_{\mathbf{k}_2}^{*a_2}$, а горизонтальная двойная линия между двумя вершинами взаимодействия соответствует «пропагатору» жесткой частицы $1/(\omega_{\mathbf{k}_1}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_1)$, который входит в (2.2) в симметризованном виде. Вершины взаимодействия соответствуют функциям $\phi_{\mathbf{k}_1}^*$ или $\phi_{\mathbf{k}_2}$. Последний график на рис. 1 связан с взаимодействием жесткой частицы с плазмонами через трехплазмонную вершинную функцию $\mathcal{V}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ с промежуточным «виртуальным» колебанием, которому в (2.2) соответствует фактор вида

$$\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l}.$$

Этот фактор также можно записать в более простой форме $1/(\omega_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^l - \omega_{\mathbf{k}_1}^l + \omega_{\mathbf{k}_2}^l)$, если так называемая «резонансная разность частот» равна нулю:

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = 0.$$

Наконец, первый член $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}$ в правой части (2.2) связан с процессом прямого взаимодействия двух плазмонов с жесткой частицей; ему отвечает первый график на рис. 1. В конкретной рассматриваемой физической системе не существует двойной контактной вершинной функции, которая описывала бы этот процесс рассеяния, и поэтому мы должны просто полагать этот член равным нулю: $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} \equiv 0$.

В заключение данного раздела отметим также, что гамильтониан (2.1) является вещественной функцией даже без использования условия резонанса $\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = 0$.

3. Классическая матрица рассеяния. Данный раздел посвящен определению классической $\mathcal{S}$ -матрицы для процесса рассеяния жесткой цветозаряженной частицы на мягких бозонных возбуждениях среды. Дальнейшее рассмотрение будет основано на работах В. Е. Захарова и Е. И. Шульмана [7, 16, 17].

В нашем случае следующая система динамических уравнений является исходной при построении классической матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} &= -i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})c_{\mathbf{k}}^a - i\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta c_{\mathbf{k}}^{*a}}, \\ \frac{\partial c_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})c_{\mathbf{k}}^{*a} + i\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{int}}}{\delta c_{\mathbf{k}}^a}, \\ \frac{dQ^a}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{int}}}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Эти уравнения представляют собой следствие системы (2.3), определения свободного гамильтониана (2.4) и скобки Ли—Пуассона (2.5). Здесь $\mathcal{H}_{\text{int}}$ — гамильтониан взаимодействия. Следуя рассуждениям [7, 16, 17], рассмотрим систему с взаимодействием, которое адиабатически выключается при $t \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} e^{-\epsilon|t|}, \quad \epsilon > 0.$$

Решение системы уравнений (3.1) асимптотически переходит в решение уравнений свободного поля:

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) \rightarrow c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t) \equiv c_{\mathbf{k}}^{\pm a} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad Q^a(t) \rightarrow Q^{\pm a},\tag{3.2}$$

где в правой части величины $c_{\mathbf{k}}^{\pm a}$ и $Q^{\pm a}$ — некоторые постоянные. Отметим, что отображения (3.2) являются формальным каноническим преобразованием, и в новых переменных *полный* гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{k} (\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})(c_{\mathbf{k}}^{\pm a})^* c_{\mathbf{k}}^{\pm a}.$$

Функции $(c_{\mathbf{k}}^{-a}, Q^{-a})$ и $(c_{\mathbf{k}}^{+a}, Q^{+a})$ не являются независимыми. Существует нелинейный оператор $\hat{S}_\epsilon$, связывающий так называемые in- и out-поля и асимптотические цветные заряды. Здесь обозначение «in-» связывается с состоянием, которому приписывается знак «-», а обозначение «out-» связывается с состоянием со знаком «+». Иногда мы будем использовать эту удобную терминологию, принятую в квантовой теории поля для обозначений асимптотических in- и out-полевых операторов, определенных соответственно в областях при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ (см., например, [11]). Данные операторы, в частности, удовлетворяют перестановочным соотношениям и уравнениям для свободных полей. Для дальнейшего анализа перейдем к так называемому «представлению взаимодействия»:

$$c_{\mathbf{k}}^a(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}, \quad c_{\mathbf{k}}^{*a}(t) = \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) e^{i(\omega_{\mathbf{k}}^l - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k})t}.$$

Уравнения движения (3.1) принимают в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a}{\partial t} &= -i\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}} e^{-\epsilon|t|}, \\ \frac{\partial \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}}{\partial t} &= i\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a} e^{-\epsilon|t|}, \\ \frac{dQ^a}{dt} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\partial Q^b} f^{abc} Q^c e^{-\epsilon|t|},\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ — гамильтониан взаимодействия, выраженный в терминах новых переменных $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$. Эти уравнения эквивалентны интегральным уравнениям, определяющим временную эволюцию рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) &= c_{\mathbf{k}}^{-a} - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(\tau)} e^{-\epsilon|\tau|}, \\
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) &= (c_{\mathbf{k}}^{-a})^* + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\delta \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(\tau)} e^{-\epsilon|\tau|}, \\
 \mathcal{Q}^a(t) &= \mathcal{Q}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}_{\text{int}}}{\partial \mathcal{Q}^b(\tau)} f^{abc} \mathcal{Q}^c(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Решения этих интегральных уравнений можно формально представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) &= S_{\epsilon}(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \\
 \tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}(t) &= S_{\epsilon}^*(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \\
 \mathcal{Q}^a(t) &= S_{\epsilon}(-\infty, t) [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}].
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь и далее, чтобы не водить новые обозначения, интегральные операторы в правых частях для решений $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t)$ и $\mathcal{Q}^a(t)$ записаны с помощью одного и того же символа $S_{\epsilon}(-\infty, t)[\dots]$, хотя это не вполне корректно.

При конечных ϵ и достаточно малых $c_{\mathbf{k}}^{-a}$ и $\mathcal{Q}^{-a}$ интегральный оператор $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ может быть получен в виде сходящегося ряда путем итерации предыдущих интегральных уравнений. В [17] ряд, полученный для оператора $S_{\epsilon}(-\infty, t)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, был назван *классической матрицей перехода*. Определен предел каждого члена ряда при $\epsilon \rightarrow 0$, а полученное таким образом выражение является конечным в смысле обобщенных функций.

Далее, полагая $t \rightarrow +\infty$, находим из (3.4)

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = S_{\epsilon} [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad (c_{\mathbf{k}}^{+a})^* = S_{\epsilon}^* [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \quad \mathcal{Q}^{+a} = S_{\epsilon} [c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}], \tag{3.5}$$

где $S_{\epsilon} \equiv S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$. Соответствующий предел интегрального оператора S_{ϵ} при $\epsilon \rightarrow +0$

$$S = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} S_{\epsilon}(-\infty, +\infty)$$

получил название *классической матрицы рассеяния*.

4. Рассеяние плазмона на жесткой цветозаряженной частице. Определим структуру классической матрицы рассеяния в простейшем случае квадратичного по полевым переменным $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a$ и $\tilde{c}_{\mathbf{k}}^{*a}$ и линейного по цветному заряду $\mathcal{Q}^a$ гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathcal{H}_{gG \rightarrow gG}^{(4)}$, заданного выражением (2.1). В представлении взаимодействия первое и третье интегральные уравнения в (3.3) принимают вид

$$\tilde{c}_{\mathbf{k}}^a(t) = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(\tau) \mathcal{Q}^b(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \tau - \epsilon|\tau|}, \tag{4.1}$$

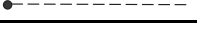
$$\mathcal{Q}^a(t) = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int_{-\infty}^t d\tau \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)ba_1a_2} \tilde{c}_{\mathbf{k}_1}^{*a_1}(\tau) \tilde{c}_{\mathbf{k}_2}^{a_2}(\tau) \mathcal{Q}^c(\tau) e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tau - \epsilon|\tau|}, \tag{4.2}$$

где в показателе экспонент появляется «резонансная разность частот»

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \equiv \omega_{\mathbf{k}_1}^l - \omega_{\mathbf{k}_2}^l - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \tag{4.3}$$

уже упомянутая в разделе 2. Интегральные уравнения (4.1) и (4.2) можно символически представить в графической форме, как показано на рис. 2. Пояснения к графическим элементам даны в таблице 1.

Таблица 1. Элементы диаграмм графической интерпретации уравнений (4.1) и (4.2).

Название	Элемент диаграммы	Фактор в уравнениях
неизвестная нормальная полевая переменная	a, k 	$\tilde{c}_k^a(t)$
неизвестный цветной заряд	a 	$Q^a(t)$
асимптотическая амплитуда поля	a, k 	c_k^{-a}
асимптотический цветной заряд	a 	Q^{-a}
экспоненциальный множитель	a — a' 	$\delta^{aa'} e^{i\tau \Delta\omega_{k,k_1} - \epsilon \tau }$
полная эффективная амплитуда		$\mathcal{T}_{k,k_1}^{(2)baa_1}$
антисимметричные структурные константы		f^{abc}

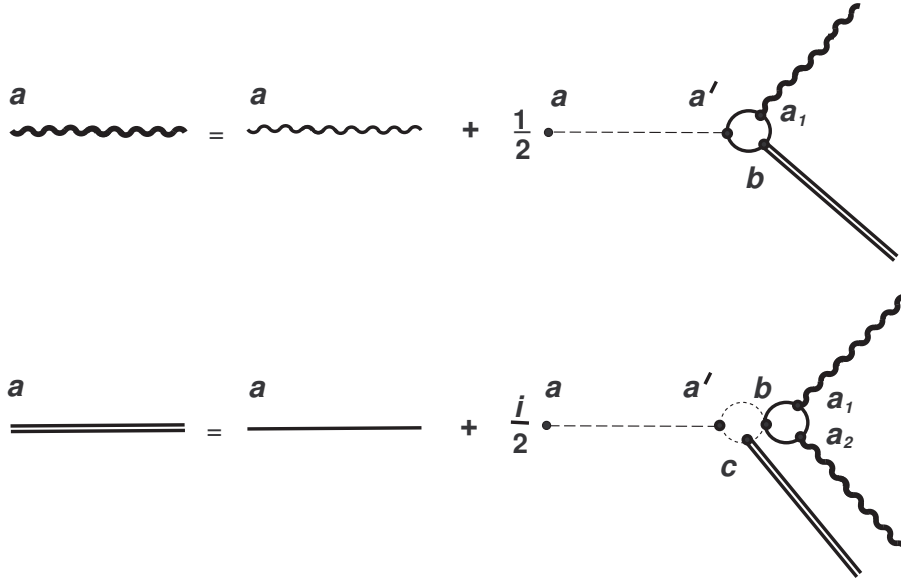


Рис. 2. Графическое представление двух взаимодействующих уравнений (4.1) и (4.2).

Графическое представление удобно тем, что дает возможность соотнести с каждым членом ряда, возникающим в результате итерации интегральных уравнений (4.1) и (4.2), определенную графическую диаграмму.

Для наших целей достаточно определить итерацию первого порядка. Для уравнения (4.1) это просто означает, что в правой части следует сделать замену $\tilde{c}_k^a(\tau) \rightarrow c_k^{-a}$ и $Q^a(\tau) \rightarrow Q^{-a}$; тогда

$$\tilde{c}_k^a(t) = c_k^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \left(\int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{k,k_1}\tau - \epsilon|\tau|} \right) \mathcal{T}_{k,k_1}^{(2)baa_1} c_{k_1}^{-a_1} Q^{-b}. \quad (4.4)$$

Зависимость от времени собирается здесь в отдельный множитель. Проанализируем интеграл по переменной τ . Для определенности предположим, что $t > 0$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau + \epsilon\tau} + \int_0^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon\tau} = \\ &= \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + \epsilon} + \left(\frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon} e^{(i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon)t} - \frac{1}{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon} \right) = \\ &= \frac{2\epsilon}{(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1})^2 + \epsilon^2} + \frac{1}{i} \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} + i\epsilon} e^{(i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} - \epsilon)t}. \end{aligned}$$

Используя пределы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi\delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{ixt}}{x + i\epsilon} = 0$$

(см. [3]), находим требуемый предел для нашего интеграла:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}\tau - \epsilon|\tau|} = 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}).$$

Таким образом, полагая $\epsilon \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$, находим из (4.4):

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_1 \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}^{(2)baa_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} \mathcal{Q}^{-b} 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1}) \equiv S[c_{\mathbf{k}}^{-a}, (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*, \mathcal{Q}^{-a}]. \quad (4.5)$$

Это выражение определяет классическую матрицу рассеяния в первом нетривиальном приближении. Аналогичные рассуждения для второго интегрального уравнения (4.2) в том же порядке итераций приводят нас к следующему соотношению:

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{2} f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}^{(2)ba_1a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-c} 2\pi\delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}). \quad (4.6)$$

5. Явный вид классической матрицы рассеяния. Во второй части работы нам понадобится понятие эффективного классического тока, связанного с процессом рассеяния жесткой цветной частицы на плазмоне. Для его определения необходимо знать явный вид классической матрицы рассеяния, тогда как в выражениях (4.5) и (4.6) она представлена в форме некоторого интегрального оператора. Попробуем определить явную форму классической матрицы рассеяния по аналогии с квантовой теорией поля. Как хорошо известно, связь между асимптотическими состояниями in- и out-полевых операторов задается квантовополевой S -матрицей (см. [1, 2, 11]):

$$\hat{\phi}^{\text{out}}(x) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}^{\text{in}}(x) \hat{S}.$$

Далее, если представить общую форму квантовой S -матрицы как экспоненту от некоторой фазовой матрицы $\hat{T}$ (см., например, [14]),

$$\hat{S} = e^{i\hat{T}}, \quad (5.1)$$

где $\hat{T}$ — эрмитов оператор, то последнее соотношение можно переписать в виде ряда коммутаторов

$$\hat{\phi}^{\text{out}}(x) = e^{-i\hat{T}} \hat{\phi}^{\text{in}}(x) e^{i\hat{T}} = \hat{\phi}^{\text{in}}(x) + \frac{i}{1!} [\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}] + \frac{i^2}{2!} [[\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}], \hat{T}] + \frac{i^3}{3!} [[[\hat{\phi}^{\text{in}}, \hat{T}], \hat{T}], \hat{T}] + \dots \quad (5.2)$$

По аналогии с (5.1) будем искать классическую $\mathcal{S}$ -матрицу в виде экспоненциальной функции

$$\mathcal{S} = e^{i\mathcal{T}}, \quad (5.3)$$

где теперь $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, а квантовые коммутаторы в (5.2) заменим на скобку Ли–Пуассона: $[\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}$, как она была определена уравнением (2.5). Выпишем ее в новых асимптотических переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и $\mathcal{Q}^{-a}$:

$$\{F, G\} = \int d\mathbf{k}' \left\{ \frac{\delta F}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \frac{\delta G}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} - \frac{\delta F}{\delta (c_{\mathbf{k}'}^{-c})^*} \frac{\delta G}{\delta c_{\mathbf{k}'}^{-c}} \right\} + i \frac{\partial F}{\partial \mathcal{Q}^{-a}} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{Q}^{-b}} f^{abc} \mathcal{Q}^{-c}.$$

Тогда правые части первого и последнего соотношений в (3.5) в пределе при $\epsilon \rightarrow +0$ можно формально представить в виде следующих рядов:

$$c_{\mathbf{k}}^{+a} = c_{\mathbf{k}}^{-a} + \frac{i}{1!} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{Q}^{+a} = \mathcal{Q}^{-a} + \frac{i}{1!} \{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\} + \frac{i^2}{2!} \{\{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \frac{i^3}{3!} \{\{\{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\}, \mathcal{T}\} + \dots \quad (5.5)$$

Эти ряды фактически представляют собой некоторое каноническое преобразование. Обсуждение таких преобразований в случае аналитической механики можно найти в [10, 15]. Они тесно связаны с однопараметрическими подгруппами общих канонических преобразований, в которых функция $\mathcal{T}$ (в нашем случае, функционал) играет роль *генератора* некоторой подгруппы. Однако в примерах, рассмотренных в [10, 15], предполагается, что $\mathcal{T}$ — это функция с заданной функциональной зависимостью. В нашем рассмотрении функционал $\mathcal{T}$ сам является неизвестной величиной, которую необходимо определить.

Будем искать $\mathcal{T}$ в виде наиболее общего интегро-степенного разложения по степеням нормальных in-полевых переменных $c_{\mathbf{k}}^{-a}$, $(c_{\mathbf{k}}^{-a})^*$ и асимптотического цветного заряда $\mathcal{Q}^{-a}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & F^a \mathcal{Q}^{-a} + \int d\mathbf{k}_1 [g_{\mathbf{k}_1}^{a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + g_{\mathbf{k}_1}^{*a} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a})^*] + \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] \mathcal{Q}^{-b} + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + g_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

В рамках нашего приближения достаточно рассмотреть только второй член в правых частях (5.4) и (5.5), тогда будем иметь, соответственно,

$$\begin{aligned} \{c_{\mathbf{k}}^{-a}, \mathcal{T}\} = & \frac{\delta \mathcal{T}}{\delta (c_{\mathbf{k}}^{-a})^*} = g_{\mathbf{k}}^{*a} + f_{\mathbf{k}}^{*ab} \mathcal{Q}^{-b} + \int d\mathbf{k}_1 \left[g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2g_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \right] + \\ & + \int d\mathbf{k}_1 \left[G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) a a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + 2G_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{*(1) a a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* \right] \mathcal{Q}^{-b} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \{\mathcal{Q}^{-a}, \mathcal{T}\} = & \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathcal{Q}^{-b}} f^{abc} \mathcal{Q}^{-c} = f^{abc} F^b \mathcal{Q}^{-c} + f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 [f_{\mathbf{k}_1}^{a_1 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} + f_{\mathbf{k}_1}^{*a_1 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^*] \mathcal{Q}^{-c} + \\ & + f^{abc} \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \left[G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1) a_1 a_2 b} c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1} c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} + G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{*(1) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* (c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2})^* \right] \mathcal{Q}^{-c} + \dots \end{aligned}$$

Два полученных выше выражения следует подставить в (5.4) и (5.5) соответственно и сравнить с асимптотическими соотношениями (4.5) и (4.6). В результате получаем первую отличную от нуля коэффициентную функцию в представлении (5.6):

$$G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} = -\frac{i}{2} \mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) b a_1 a_2} 2\pi \delta(\Delta\omega_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}), \quad (5.7)$$

и поэтому вместо (5.6) можно теперь написать

$$\mathcal{T} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b} (c_{\mathbf{k}_1}^{-a_1})^* c_{\mathbf{k}_2}^{-a_2} \mathcal{Q}^{-b} + \dots \quad (5.8)$$

В силу определения (5.7) функции $G_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a_1 a_2 b}$ и свойства

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2) a a_1 a_2} = -\mathcal{T}_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{*(2) a a_2 a_1}$$

полной эффективной амплитуды (2.2), которое, напомним, является следствием требования вещественности эффективного гамильтониана, видно, что функция $\mathcal{T}$ вещественна, как и должно быть.

В заключение этого раздела отметим, что асимптотические амплитуды $c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t)$, определенные в (3.2), могут быть выражены через исходные амплитуды $c_{\mathbf{k}}^a(t)$, $c_{\mathbf{k}}^{*a}(t)$ и цветной заряд $\mathcal{Q}^a(t)$. В ведущем приближении это соотношение имеет вид

$$c_{\mathbf{k}}^{\pm a}(t) = c_{\mathbf{k}}^a(t) + \frac{i}{2} \int d\mathbf{k}_1 \frac{1}{\Delta\omega_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \pm i0} \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{(2) b a a_1} c_{\mathbf{k}_1}^{a_1}(t) \mathcal{Q}^b(t) + \dots$$

6. Заключение. В данной работе при помощи уравнений Гамильтона для нормальной бозонной переменной поля и цветного заряда пробной частицы была определена классическая матрица рассеяния для процесса взаимодействия жесткой цветной частицы с мягкими бозе-возбуждениями кварк-глюонной плазмы. Для этой цели был использован известный подход Захарова—Шульмана, развитый при формализации описания так называемых гамильтоновых волновых систем различной физической природы. Достаточная универсальность этого подхода позволила разработать метод построения классической $\mathcal{S}$ -матрицы для такого сложного объекта, каким является существенно неравновесная кварк-глюонная плазма, взаимодействующая с жесткими цветозаряженными партонами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.
2. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. — М.: Наука, 1987.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
4. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для гидродинамических моделей плазмы// ЖЭТФ. — 1971. — 60. — С. 1714–1726.
5. Захаров В. Е. Гамильтонов формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией// Изв. вузов. Радиофизика. — 1974. — 17. — С. 431–453.
6. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. Гамильтонов формализм для нелинейных волн// Усп. физ. наук. — 1997. — 167. — С. 1137–1167.
7. Захаров В. Е., Шульман Е. И. О матрице рассеяния и интегрируемости волновых систем, обладающих дополнительным интегралом движения// Докл. АН СССР. — 1985. — 283, № 6. — С. 1325–1328.
8. Красицкий В. П. О каноническом преобразовании в теории слабонелинейных волн с нераспадным законом дисперсии// ЖЭТФ. — 1990. — 98. — С. 1644–341.
9. Марков Ю. А., Маркова М. А., Марков Н. Ю., Гитман Д. М. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия// ЖЭТФ. — 2020. — 157. — С. 327–341.
10. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. — М.: Наука, 1977.
11. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1963.
12. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Bose excitations in a plasma with a non-Abelian interaction, I: Plasmon – hard particle scattering// Nucl. Phys. A. — 2024. — 1048. — 122903.
13. Markov Yu. A., Markova M. A., Markov N. Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction// Int. J. Mod. Phys. A. — 2023. — 38. — 2350015.
14. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W. On the formulation of quantized field theories, II// Nuovo Cim. — 1957. — 6. — P. 319–333.
15. Sudarshan E. C. G., Mukunda N. Classical Dynamics: A Modern Perspective. — New York: Wiley, 1974.

16. *Zakharov V. E.* Integrable systems in multidimensional spaces// Lect. Notes Phys. — 1983. — 153. — P. 190–216.
17. *Zakharov V. E., Schulman E. I.* On additional motion invariants of classical Hamiltonian wave systems// Phys. D. — 1988. — 29. — P. 283–320.
18. *Zakharov V. E., L'vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence, I. Wave Turbulence. — Springer-Verlag, 1992.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механики жидкости и газа» (№ 12104130005-1). Работа Н. Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-24-303.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марков Юрий Адольфович (Markov Yuri Adolfovich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markov@icc.ru

Маркова Маргарита Анатольевна (Markova Margarita Anatolievna)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@icc.ru

Марков Никита Юрьевич (Markov Nikita Yurievich)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
Иркутский государственный университет, Иркутск
(V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: NYumarkov@gmail.com