



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 19–28
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-19-28

УДК 517.957

ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С НУЛЕВЫМИ ФРОНТАМИ

© 2025 г. А. Л. КАЗАКОВ, Л. Ф. СПЕВАК

Аннотация. Рассматривается квазилинейная параболическая система второго порядка, известная в литературе как модель популяционной биологии «хищник-жертва». Предметом исследования являются точные и приближенные решения с двумя нулевыми фронтами, на которых одна или обе искомые функции обращаются в нуль, а на интервале между фронтами обе функции положительны. Точные решения ищутся в виде многочленов по степеням пространственной переменной с коэффициентами, зависящими от времени. Для построения приближенных решений предложен численный алгоритм, сочетающий метод коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций и разностную аппроксимацию производных по времени. Для верификации алгоритма проводятся иллюстрирующие численные расчеты для модельных примеров, которые соответствуют найденным точным решениям.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, система хищник-жертва, вырождение, нулевой фронт, точное решение, приближенное решение, метод коллокаций, радиальные базисные функции, вычислительный эксперимент.

EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS TO THE QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEM “PREDATOR-PREY” WITH ZERO FRONTS

© 2025 А. Л. KAZAKOV, L. F. SPEVAK

ABSTRACT. In this paper, we consider the second-order quasilinear parabolic system known in population biology as the predator-prey model and examine exact and approximate solutions with two zero fronts on which at least one of two unknown functions vanish; both these functions are positive between the fronts. We search for exact solutions in the form of polynomials in powers of the spatial variable with the coefficients depending on time. To construct approximate solutions, we propose a numerical algorithm, which is a combination of the collocation method based on the expansion of the right-hand sides by the radial basis functions and the finite-difference approximation of the derivatives in time. The algorithm is verified by model examples; the results obtained are consistent with the exact solutions found.

Keywords and phrases: nonlinear parabolic system, predator-prey system, degeneration, zero front, exact solution, approximate solution, collocation method, radial basis functions, computational experiment.

AMS Subject Classification: 35K55, 35K65

Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

1. Введение. Уравнения и системы параболического типа (см. [10]) представляют собой содержательный класс моделей различных процессов в физике высоких температур (см. [3, 8]), гидрологии и гидродинамике (см. [1, 2]), экологии (см. [14]) и др. Особую распространенность подобные математические объекты приобрели в последние десятилетия, начиная с классических работ [9, 20] в области популяционной биологии (см. [26]). В последние годы предпочтение обычно отдается нелинейным моделям (см. [13, 15]). Отдельное место в этом ряду занимают квазилинейные уравнения и системы с вырождением, поскольку они позволяют описать возмущения, которые распространяются по покоящемуся (нулевому) фону с конечной скоростью. Подобное, как известно, невозможно при использовании линейных и полулинейных уравнений параболического типа (см. [19]). Применительно к физическим задачам, такие решения называют, в зависимости от интерпретации, тепловыми (см. [11]), фильтрационными (см. [12]) или диффузионными (см. [22]) волнами. Насколько известно авторам, для задач биологии подобные математические объекты ранее не исследовались, хотя имеют вполне логичную и естественную интерпретацию с точки зрения предметной области. Настоящая работа призвана заполнить данный пробел.

Рассматривается нелинейная (квазилинейная) параболическая система, предложенная в известной монографии Д. Мюррея [24] в качестве модели популяционной биологии, для которой строятся точные (см. [7]) и приближенные решения с двумя нулевыми фронтами. Точные решения имеют вид многочленов по степеням пространственной переменной с коэффициентами, зависящими от времени. Для построения приближенных решений предлагается пошаговый численный алгоритм с разностной аппроксимацией по времени. На каждом шаге по времени решение строится итерационно методом коллокаций (см. [18]), основанным на разложении правых частей по системе радиальных базисных функций ((см. [17, 21, 23])). Выполнены численные расчеты, результаты которых верифицированы при помощи построенных точных решений. Рассмотренный пример интерпретируется в терминах динамики популяций.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему двух квазилинейных уравнений параболического типа

$$u_t = \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \quad v_t = \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(u, v). \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$, $v(t, x)$ — искомые функции; t (время) и x (координата) — независимые переменные; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — константы, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$. Известные функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются достаточно гладкими. Система (1) предложена в монографии [24] в качестве математической модели взаимодействия двух популяций, в которой u и v — численности популяций «жертв» и «хищников».

Предметом настоящего исследования являются нетривиальные решения системы (1) с нулевыми фронтами, т.е. удовлетворяющие условиям

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (2)$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ предполагаются достаточно гладкими и могут быть как известными, так и искомыми. Дополнительно будем предполагать, что $a(0) = b(0) = 0$, т.е. $u(0, 0) = v(0, 0)$.

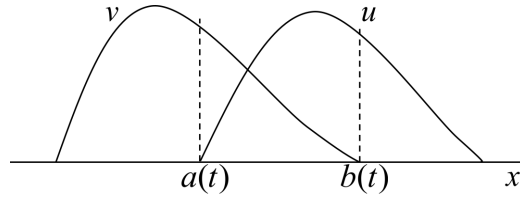
Можно убедиться, что на каждом нулевом фронте обращается в нуль множитель перед (хотя бы) одной из старших производных, т.е. параболический тип системы вырождается. Отметим, что ранее для случая $a(t) = b(t)$ была доказана теорема существования и единственности (см. [4]) нетривиального решения задачи (1), (2).

Примем, что

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0. \quad (3)$$

Это обуславливает наличие у системы (1) решения $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ и позволяет рассматривать решение с нулевым фронтом как часть *диффузионной волны* (см. [22]). Отметим, что упомянутая выше теорема из [4] не обеспечивает существование решений с подобными свойствами. Напротив, искомые функции всюду, за исключением общего нулевого фронта, имеют разные знаки, что не позволяет предложить содержательную интерпретацию данного утверждения с точки зрения предметной области.

В связи с вышесказанным сосредоточимся, в отличие от наших предыдущих работ [4–6, 22], на рассмотрении случая, когда в каждый момент времени $t > 0$ графики функций u и v в некоторой точке между нулевыми фронтами $a(t)$ и $b(t)$ пересекаются и имеют разные направления

Рис. 1. Взаимодействие популяций «хищников» (v) и «жертв» (u).

монотонности (см. рис. 1). Тогда решение естественным образом интерпретируется как динамика численности двух популяций, взаимодействующих в области $a(t) < x < b(t)$, за пределами которой популяции существуют автономно и эволюция каждой из них описывается линейным неоднородным уравнением переноса.

3. Точные решения. В данном разделе исследуются точные решения системы (1), имеющие вид многочленов по степеням пространственной переменной, коэффициенты которых в общем случае определяются при решении системы дифференциально-алгебраических уравнений. Рассматривается также частный случай, в котором система интегрируется в квадратурах и решение получается в явном виде, включая уравнения для нулевых фронтов (2).

3.1. Редукция к системе дифференциально-алгебраических уравнений. Будем искать точные решения системы (1) в виде многочленов по степеням пространственной переменной x с коэффициентами, зависящими от времени t :

$$u = \sum_{k=0}^n A_k(t)x^k, \quad v = \sum_{k=0}^n B_k(t)x^k, \quad (4)$$

где степень многочленов n подлежит определению.

Пусть функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются аналитическими, т.е. могут быть представлены в виде кратного ряда Тейлора. С учетом условия (3) их тейлоровские разложения можно записать в виде

$$f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v + \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij} u^i v^j, \quad g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v + \sum_{i,j=1}^{\infty} g_{ij} u^i v^j. \quad (5)$$

Подставив представление (4) в (1), и приравняв с учетом (5) коэффициенты при одинаковых степенях x , можно убедиться, что в общем случае искомое решение существует только тогда, когда все $f_{ij} = g_{ij} = 0$, т.е.

$$f(u, v) = \gamma_1 u + \eta_1 v, \quad g(u, v) = \gamma_2 u + \eta_2 v, \quad (6)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \eta_1, \eta_2$ — константы, и при выполнении равенств $A_k(t) \equiv 0, B_k(t) \equiv 0$ для $k > 2$ (ненулевые значения возможны только в вырожденных частных случаях, которые не рассматриваются).

Для коэффициентов $A_k(t), B_k(t)$ при $k \leq 2$ имеем три системы уравнений:

$$\begin{cases} \gamma_1 A_2 + 6\beta_1 A_2 B_2 + \eta_1 B_2 = 0, \\ \gamma_2 A_2 - 6\beta_2 A_2 B_2 + \eta_2 B_2 = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} A_1'(t) = (\gamma_1 + 4\beta_1 B_2)A_1 + (\eta_1 + 2\beta_1 A_2)B_1 + 2\alpha_1 A_2, \\ B_1'(t) = (\gamma_2 - 2\beta_2 B_2)A_1 + (\eta_2 - 4\beta_2 A_2)B_1 + 2\alpha_2 B_2; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} A_0'(t) = (\gamma_1 + 2\beta_1 B_2)A_0 + \eta_1 B_0 + A_1(\alpha_1 + \beta_1 B_1), \\ B_0'(t) = \gamma_2 A_0 + (\eta_2 - 2\beta_2 A_2)B_0 + B_1(\alpha_2 - \beta_2 A_1). \end{cases} \quad (9)$$

Ясно, что (7) — система алгебраических уравнений, (8) и (9) — системы дифференциальных уравнений первого порядка. Совместно (7)–(9) образуют систему дифференциально-алгебраических уравнений, состоящую из двух алгебраических и четырех дифференциальных уравнений.

Из проведенных рассуждений вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. Пусть функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ удовлетворяют системе (6). Тогда система (1) имеет точное решение вида (4), где $n = 2$; A_0 , B_0 удовлетворяют системе алгебраических уравнений (7); A_1 , B_1 , A_2 , B_2 удовлетворяют системе дифференциальных уравнений первого порядка (8)–(9).

Следствие. Для функций $f(u, v)$, $g(u, v)$, не удовлетворяющих (6), система (1) решений вида (4) не имеет.

3.2. Построение решения системы дифференциально-алгебраических уравнений. Система дифференциально-алгебраических уравнений (7)–(9) является распадающейся и может быть решена по нижеследующей процедуре, состоящей из трех этапов.

1. Можно видеть, что (7) — система квадратных уравнений, которая всегда имеет хотя бы одно (тривиальное) решение $A_2 = 0$, $B_2 = 0$. Второе решение имеет вид

$$A_2 = \frac{\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1}{6(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}, \quad B_2 = -\frac{\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1}{6(\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1)}, \quad (10)$$

где $\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0$, $\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0$. Таким образом, A_2 , B_2 — константы, которые, вообще говоря, определяются неоднозначно, причем из равенства числителей следует, что они будут равны или не равны нулю одновременно.

2. Если A_2 , B_2 известны, то (8) — система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $A_1(t)$, $B_1(t)$, которая может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1'(t) = \frac{3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1)}A_1 + \frac{3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}B_1 + \frac{\alpha_1(\gamma_1\eta_2 - \gamma_2\eta_1)}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}, \\ B_1'(t) = \frac{3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1)}A_1 + \frac{3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2}{3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)}B_1 + \frac{\alpha_2(\gamma_2\eta_1 - \gamma_1\eta_2)}{3(\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1)}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\beta_1\eta_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0$, $\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 \neq 0$. При этом в системе (11) неоднородности являются константами. Ее без труда можно решить методом вариации произвольной постоянной или численно (при задании начальных условий).

3. Найдя $A_1(t)$, $B_1(t)$ и подставив их в (9), получим систему первого порядка относительно $A_0(t)$, $B_0(t)$, которую можно решить стандартным методом вариации произвольной постоянной. Выражения для $A_1(t)$, $B_2(t)$, а тем более для $A_0(t)$, $B_0(t)$ являются весьма громоздкими и здесь не приводятся. При задании начальных данных полученную задачу Коши можно также проинтегрировать численно.

3.3. Пример точного решения. Поскольку общее решение систем (7)–(9) не слишком удобно для рассмотрения из-за громоздкости и большого количества произвольных постоянных, разберем в качестве примера один конкретный случай. Положим для определенности, что

$$3\beta_2\gamma_1\eta_1 + 2\beta_1\gamma_2\eta_1 + \beta_1\gamma_1\eta_2 = 0, \quad 3\beta_1\gamma_2\eta_2 + 2\beta_2\gamma_2\eta_1 + \beta_2\gamma_1\eta_2 = 0. \quad (12)$$

Тогда в правой части системы (8) обращаются в нуль коэффициенты перед искомыми функциями $A_1(t)$, $B_1(t)$, и она существенно упрощается:

$$A_1'(t) = 2\alpha_1 A_2, \quad B_1'(t) = 2\alpha_2 B_2,$$

откуда следует, что

$$A_1(t) = 2\alpha_1 A_2 t + c_1, \quad B_1(t) = 2\alpha_2 B_2 t + c_2,$$

где A_1 , B_2 определяются из (10), а c_1 , c_2 — произвольные константы. В свою очередь, система (9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} A_0'(t) &= \frac{\gamma_1}{2} A_0 + \eta_1 B_0(t) + (2\alpha_1 A_2 t + c_1)[\alpha_1 + \beta_1(2\alpha_2 B_2 t + c_2)], \\ B_0'(t) &= \gamma_2 A_0 + \frac{\eta_2}{2} B_0(t) + (2\alpha_2 B_2 t + c_2)[\alpha_2 - \beta_2(2\alpha_1 A_2 t + c_1)]. \end{aligned}$$

Выберем конкретные значения входящих констант, при которых, в частности, выполняются равенства (12). Пусть

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta > 0, \quad \gamma_1 = 2\gamma > 0, \quad \gamma_2 = -\gamma\beta, \quad \eta_1 = \eta > 0, \quad \eta_2 = -2\beta\eta.$$

Тогда система (1) имеет следующее точное решение вида (4), удовлетворяющее условиям $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\eta}{2}x^2 + (c_1 - \alpha\eta t)x - \frac{\alpha^2\eta}{2}t^2 + \alpha c_1 t + \frac{c_1 c_2}{\gamma - \beta\eta} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1], \\ v &= -\frac{\gamma}{2}x^2 + (c_2 - \alpha\gamma t)x - \frac{\alpha^2\gamma}{2}t^2 + \alpha c_2 t - \frac{c_1 c_2 \beta}{\gamma - \beta\eta} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1], \end{aligned} \quad (13)$$

где c_1, c_2 — произвольные константы, $\gamma - \beta\eta \neq 0$. В этом случае уравнения

$$\begin{aligned} x_1^\pm(t) &= \frac{c_1 - \alpha\eta t}{\eta} \pm \sqrt{\frac{(c_1 - \alpha\eta t)^2}{\eta^2} - \alpha^2 t^2 + \frac{2\alpha c_1}{\eta} t + \frac{2c_1 c_2}{\eta(\gamma - \beta\eta)} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1]}, \\ x_2^\pm(t) &= \frac{c_2 - \alpha\gamma t}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{(c_2 - \alpha\gamma t)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 t^2 + \frac{2\alpha c_2}{\gamma} t - \frac{2\beta c_1 c_2}{\gamma(\gamma - \beta\eta)} [\exp((\gamma - \beta\eta)t) - 1]} \end{aligned}$$

определяют нулевые фронты для функций u и v соответственно.

Пусть $\alpha = 1, \gamma = \eta = 2$. Если принять $c_2 < -1, c_1\beta > 1$, то $x_1^-(0) = 0, (x_1^-)'(0) > 0; x_2^+(0) = 0, (x_2^+)'(0) > 0$, что может быть интерпретировано как динамика численности популяций «жертв» и «хищников» в общей области обитания.

4. Приближенные решения.

4.1. Алгоритм численного решения. Найти аналитическое решение задачи (1), (2) на заданном промежутке времени в общем случае вряд ли возможно вследствие нелинейности и наличия вырождения. В связи с этим встает вопрос построения приближенных решений. Спектр численных методов решения уравнений и систем параболического типа довольно широк. Исторически наиболее распространенными являются метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов. В последние десятилетия все большую популярность приобретают бессеточные методы (см. [25]), особенно при решении нелинейных задач.

Опыт авторов показал, что для решения нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением хорошие результаты дают применение метода двойственной взаимности в сочетании с методом граничных элементов и метод коллокаций при разностной аппроксимации по времени. В обоих случаях используется аппроксимация радиальными базисными функциями (см. [16, 18]). При этом для решения систем более подходящим является метод коллокаций (см. [5, 6]), который обеспечивает более стабильную сходимость итерационных процессов.

В данной работе, аналогично упомянутым статьям, построим пошаговый итерационный численный алгоритм, рассмотрев на этот раз, как и в предыдущих разделах, содержательный с точки зрения динамики популяций случай, проиллюстрированный на рис. 1. Последнее означает, что в каждый момент времени необходимо найти решение в интервале между нулевыми фронтами $a(t)$ и $b(t)$.

Примем для определенности, что $a(0) = b(0)$, $a(t) < b(t)$ на некотором интервале $t \in [0, T]$, и будем искать решение задачи (1), (2) в области взаимодействия двух популяций, $x \in [a(t), b(t)]$. Представим в этой области систему (1) в произвольный момент времени в виде двух уравнений Пуассона

$$u_{xx} = \frac{\alpha_2 v_x - \beta_2 u_x v_x - v_t + g(u, v)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{-\alpha_1 u_x - \beta_1 u_x v_x + u_t - f(u, v)}{\beta_1 u}. \quad (14)$$

Взяв в условиях (2) полные производные по времени, получим следующие соотношения, связывающие производные искомых функций по времени и по пространственной координате на нулевых фронтах:

$$(u_t + u_x a'(t)) \Big|_{x=a(t)} = 0, \quad (v_t + v_x b'(t)) \Big|_{x=b(t)} = 0. \quad (15)$$

Выразив u_t и v_t из уравнений (15) и подставив их в (1), получим дополнительные граничные условия на нулевых фронтах:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=b(t)} &= \overline{U}(t) = \frac{1}{\beta_2} \left(\alpha_2 + b'(t) + \frac{g(u(b(t), 0))}{v_x(t, b(t))} \right), \\ v_x|_{x=a(t)} &= \overline{V}(t) = -\frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_1 + a'(t) + \frac{f(0, v(a(t)))}{u_x(t, a(t))} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, в произвольный момент времени имеем краевую задачу (14), (2), (16). Решение этой задачи на каждом шаге $t_k = kh$, где h — размер шага, будем искать на отрезке $x \in [l_k, L_k]$, $l_k = a(t_k)$, $L_k = b(t_k)$, в виде

$$u(t_k, x) = u_p(x) + u_h(x), \quad v(t_k, x) = v_p(x) + v_h(x), \quad (17)$$

где $u_p(x)$, $v_p(x)$ — частное решение системы (14), $u_h(x)$, $v_h(x)$ — решение подходящей задачи для однородной системы,

$$\begin{aligned} u_h'' &= 0, & u_h(l_k) &= -u_p(l_k), & u_h'(L_k) &= \overline{U}(t_k) - u_p'(L_k); \\ v_h'' &= 0, & v_h(L_k) &= -v_p(L_k), & v_h'(l_k) &= \overline{V}(t_k) - v_p'(l_k). \end{aligned} \quad (18)$$

При известном частном решении задача (18) имеет решение вида

$$u_h = u_h'[x - l_k] - u_p(l_k), \quad v_h = v_h'[x - L_k] - v_p(L_k). \quad (19)$$

Здесь значения u_h' , v_h' — решение системы уравнений, получаемой из условий (16) после нижеследующих подстановок с учетом (19):

$$\begin{aligned} u &= u_p + u_h, & v &= v_p + v_h, \\ u_x &= u_p' + u_h', & v_x &= v_p' + v_h'. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение на шаге t_k будем строить по следующей итерационной процедуре, в которой $u^{(n)}$, $u_{p(n)}$, $u_{h(n)}$, $v^{(n)}$, $v_{p(n)}$, $v_{h(n)}$ — n -е итерации решений.

I. Задаем тривиальное частное решение на начальной итерации:

$$u_{p(0)} \equiv 0, \quad v_{p(0)} \equiv 0. \quad (21)$$

II. На n -й итерации, при известном частном решении $u_{p(n)}$, $v_{p(n)}$, решение задачи (18) имеет вид

$$u_{h(n)} = u_{h(n)}'[x - l_k] - u_{p(n)}(l_k), \quad v_{h(n)} = v_{h(n)}'[x - L_k] - v_{p(n)}(L_k). \quad (22)$$

Подставив (22) в условия (16), с учетом (20) получим систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_{h(n)}'$ и $v_{h(n)}'$:

$$\begin{aligned} u_{p(n)}'(L_k) + u_{h(n)}' &= \frac{1}{\beta_2} \left(\alpha_2 + b'(t_k) + \frac{g(u_{p(n)}(L_k) + u_{h(n)}'[L_k - l_k] - u_{p(n)}(l_k), 0)}{v_{p(n)}'(L_k) + v_{h(n)}'} \right), \\ v_{p(n)}'(l_k) + v_{h(n)}' &= -\frac{1}{\beta_1} \left(\alpha_1 + a'(t_k) + \frac{f(0, v_{p(n)}(l_k) + v_{h(n)}'[l_k - L_k] - v_{p(n)}(L_k))}{u_{p(n)}'(l_k) + u_{h(n)}'} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Решив систему (23) и определив таким образом $u_{h(n)}'$ и $v_{h(n)}'$, найдем соответствующую итерацию решения задачи (14), (2), (16):

$$u^{(n)} = u_{p(n)} + u_{h(n)}'[x - l_k] - u_{p(n)}(l_k), \quad v^{(n)} = v_{p(n)} + v_{h(n)}'[x - L_k] - v_{p(n)}(L_k). \quad (24)$$

III. Находим следующую итерацию частного решения как решение системы

$$\begin{aligned} u_{p(n+1)}'' &= \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}}, \\ v_{p(n+1)}'' &= \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}}, \end{aligned} \quad (25)$$

и переходим к шагу II.

Система (25) может быть решена методом коллокаций через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \varphi_i(x), \\ \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}} &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \varphi_i(x). \end{aligned} \quad (26)$$

где $\varphi_i(x) = \varphi_i(|x - x_i|)$ — радиальные базисные функции, $x_1, x_2, \dots, x_N$ — точки коллокации, расположенные на отрезке $[l_k, L_k]$. Для каждой функции φ_i существует такая функция ψ_i , что $\varphi_i = \psi_i''$. Коэффициенты $c_i^{(n+1)}$, $d_i^{(n+1)}$, $i = 1, \dots, N$, определяются из решения двух систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} \right|_{x=x_k} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \varphi_i(x_k), \quad k = 1, \dots, N; \\ \left. \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}} \right|_{x=x_k} &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \varphi_i(x_k), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (27)$$

Производные по времени в левых частях (27) вычисляются методом конечных разностей, с использованием результатов решения на предыдущем шаге.

Решив (27), найдем следующую итерацию частного решения системы (14):

$$u_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \psi_i(x), \quad v_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \psi_i(x). \quad (28)$$

Итерационный процесс (21)–(28) останавливается, если $(n+1)$ -я итерация достаточно близка к n -й. В результате получим решение задачи (1), (2) в момент времени $t = t_k$, непрерывное по x на отрезке $x \in [l_k, L_k]$:

$$u(t_k, x) = u_{p(n+1)}(x) + u_{h(n+1)}(x), \quad v(t_k, x) = v_{p(n+1)}(x) + v_{h(n+1)}(x). \quad (29)$$

4.2. Пример численного решения. Верификация алгоритма. Рассмотрим задачу (1), (2) для случая, описанного в разделе 3.3. Пусть $\alpha = 1$, $\beta = 1,1$, $\gamma = 1$, $\eta = 1$, $c_1 = 1,55$, $c_2 = -1,1$. Тогда при $a(t) = x_1^-(t)$, $b(t) = x_2^+(t)$ задача (1), (2) имеет точное решение (13), которое может быть использовано в качестве тестового для оценки корректности предложенного в предыдущем разделе алгоритма.

Поскольку в рассматриваемом случае функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются линейными, алгебраические уравнения в системе (23) приводятся к билинейному виду. Решение этой системы методом подстановки сводится к решению квадратного уравнения. Например, выразив из первого уравнения $u'_{h(n)}$ и подставив во второе, получим квадратное уравнение относительно $v'_{h(n)}$, имеющее положительный дискриминант в случае, когда область $x \in [l_k, L_k]$ не пуста. С учетом того, что функция v убывающая, отрицательный корень квадратного уравнения будет искомым значением $v'_{h(n)}$. Тогда $u'_{h(n)}$ находится однозначно из первого уравнения системы (23).

На рис. 2 сравниваются результаты расчетов и решение (13). Сравнение демонстрирует хорошее совпадение приближенного решения с точным.

Интерпретируем полученные результаты с точки зрения взаимодействия популяций «хищников» (функция $v(t, x)$) и «жертв» (функция $u(t, x)$). На начальном этапе численность «жертв» выше численности «хищников» (рис. 2(a), (b)), при этом с течением времени область взаимодействия (отрезок $[a(t), b(t)]$) увеличивается. Далее численности двух популяций выравниваются (рис. 2(c)), после чего начинается преобладание «хищников» и сокращение области взаимодействия (рис. 2(d), (e)).

Отметим, что начиная с момента времени $t \approx 0,44$ области обитания двух популяций не пересекаются, т.е. хищники и жертвы перестают взаимодействовать. Далее поведение каждой из

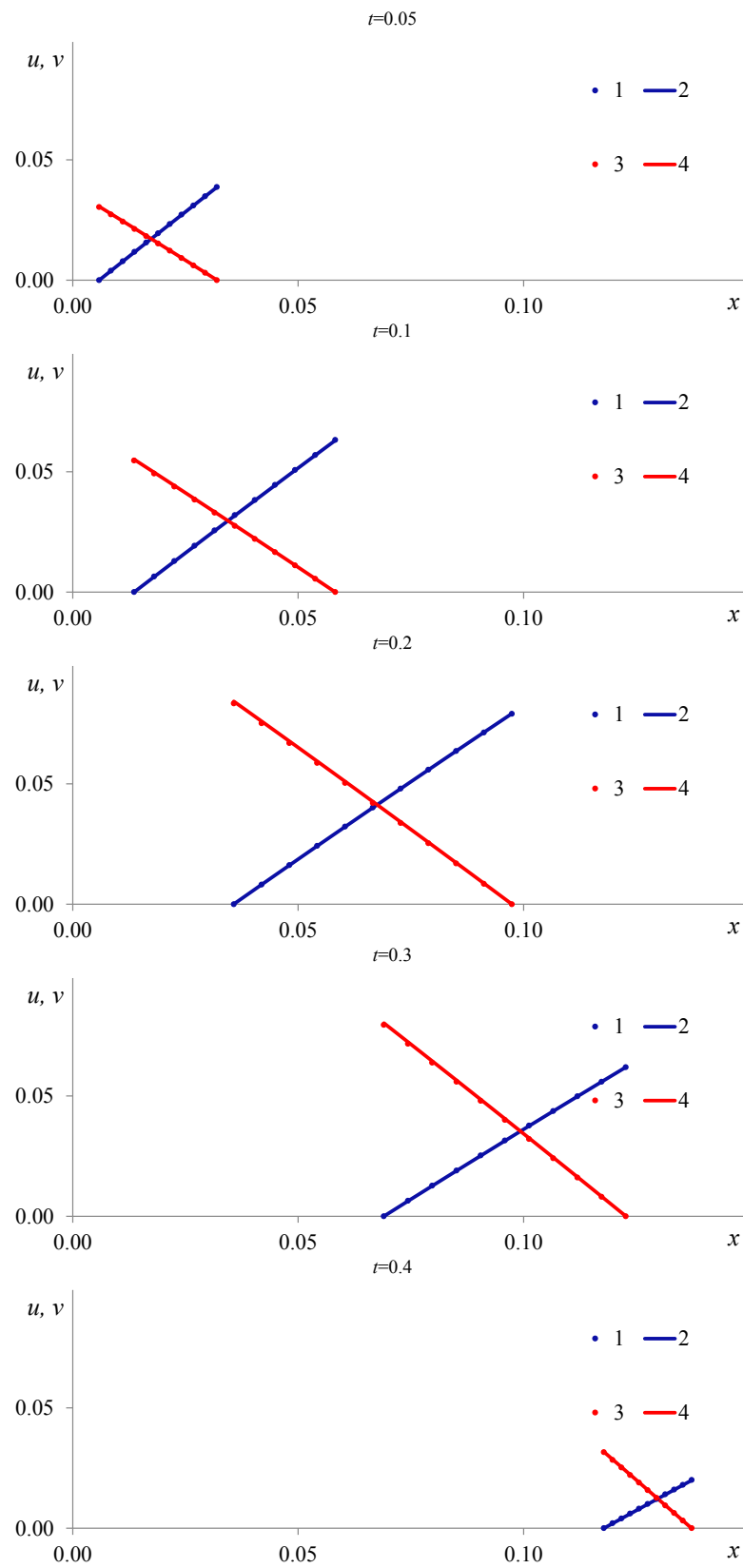


Рис. 2. Сравнение численного и точного решений в различные моменты времени: (а) $t = 0,05$; (b) $t = 0,1$; (с) $t = 0,2$; (d) $t = 0,3$; (е) $t = 0,4$. Цифровые обозначения графиков: 1 — численное решение $u(t, x)$; 2 — точное решение $u(t, x)$; 3 — численное решение $v(t, x)$; 4 — точное решение $v(t, x)$.

популяций описывается неоднородным полулинейным (в общем случае) уравнением переноса: $u_t = \alpha_1 u_x + f(u, 0)$ («жертвы») и $v_t = \alpha_2 v_x + g(0, v)$ («хищники»).

5. Заключение. Настоящая работа продолжает исследования коллектива авторов (см. [4]) по изучению модели популяционной динамики, предложенной Д. Мюрреем в [24], которая является квазилинейной параболической системой второго порядка. Получен новый класс точных решений, имеющих вид многочленов второй степени с переменными коэффициентами, определяемыми при решении системы дифференциально-алгебраических уравнений, для решения которой предложен специальный аналитический подход.

Для построения приближенных решений разработан оригинальный вычислительный алгоритм, основанный на методе коллокаций с использованием разложения правых частей по системе радиальных базисных функций. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты, для верификации результатов которых использованы точные решения.

Наиболее важным научным результатом, который был получен в ходе проведенной работы, по мнению авторов, является то, что удалось частично решить проблему, возникшую ранее при доказательстве теоремы существования (см. [4, с. 1496]), и получить осмысленные с точки зрения предметной области решения: с двумя нулевыми фронтами, между которыми обе искомые функции положительны, что можно интерпретировать как динамику численности двух взаимодействующих популяций («жертв» и «хищников») в общей области обитания, за пределами которой популяции эволюционируют автономно друг от друга, вследствие чего модель меняется принципиальным образом.

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с построением новых классов точных решений с искомыми свойствами (с нулевыми фронтами). Еще одной важной, хотя, вероятно, и трудно решаемой проблемой, является распространение теоремы существования из [4] на задачу (1), (2) общего вида, когда нулевые фронты для искомых функций различны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. — М.: Физматлит, 2008.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. Н., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Наука, 1984.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматлит, 1966.
4. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Аналитические решения с нулевым фронтом для нелинейной вырождающейся параболической системы // Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1461–1470.
5. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Задача об иницировании диффузионной волны для нелинейной параболической системы второго порядка // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2023. — 29, № 2. — С. 67–86.
6. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Точные и приближенные решения вырождающейся системы реакция-диффузия // Прикл. мех. техн. физ. — 2021. — 62, № 4. — С. 169–180.
7. Казаков А. Л., Орлов С. С. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2016. — 22, № 1. — С. 112–123.
8. Ковалев В. А., Куретова Е. Д., Куркина Е. С. О формировании нитеподобных структур на ранней фазе солнечных вспышек // Физика плазмы. — 2020. — 46, № 4. — С. 351–357.
9. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. — М.: ОНТИ, 1937.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
11. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
12. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. — М.: Физматлит, 2001.
13. Ха Д. Т., Цибуллин В. Г. Уравнения диффузии-реакции-адвекции для системы «хищник-жертва» в гетерогенной среде // Компьютер. исслед. модел. — 2021. — 13, № 6. — С. 1161–1176.

14. Шагапов В. Ш., Мухаметшин С. М., Галиаскарова Г. Р. Распространение тяжелых атмосферных выбросов с учетом ландшафта местности// Инж.-физ. ж. — 2005. — 78, № 2. — С. 99–103.
15. Achouri T., Ayadi M., Habbal A., Yahyaoui B. Numerical analysis for the two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovski–Piskunov equation with mixed boundary condition// J. Appl. Math. Comput. — 2021. — 68. — P. 1–26.
16. Al-Bayati S. A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection–diffusion–reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions// Int. J. Mech. Sci. — 2018. — 145. — P. 367–377.
17. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
18. Chen C. S., Chen W., Fu Z. J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Method. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2013.
19. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. — New York: Interscience, 2008.
20. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes// Ann. Eugenics. — 1937. — 7. — P. 353–369.
21. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions// Acta Num. — 2015. — 24. — P. 215–258.
22. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Lempert A. A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type// Symmetry. — 2020. — 12, № 6. — 999.
23. Kazakov A. L., Lempert A. A., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term// Symmetry. — 2020. — 12, № 6. — 921.
24. Murray J. D. Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications.. — New York: Springer, 2003.
25. Nguyen V. P., Rabczuk T., Bordas S., Duflot M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects// Math. Comput. Simul. — 2008. — 79, № 3. — P. 763–813.
26. Perthame B. Parabolic Equations in Biology. Growth, Reaction, Movement and Diffusion. — New York: Springer, 2015.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (проект № 121041300058-1).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Казakov Александр Леонидович (Kazakov Aleksandr Leonidovich)
 Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
 Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск;
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург
 (V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
 Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: kazakov@icc.ru

Спевак Лев Фридрихович (Spevak Lev Fridrihovich)
 Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова
 Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург
 (Institute of Engineering Science
 of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia)
 E-mail: lfs@imach.uran.ru