



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 240 (2025). С. 3–18
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-240-3-18

УДК 517.977; 534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СКОРОСТЕЙ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ ГРАНИЧНОЙ ЭНЕРГИИ

© 2025 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША, Е. В. МАРКОВА

Аннотация. Для уравнения колебания струны с заданными начальными и конечными условиями рассматриваются задачи оптимального граничного управления с заданными промежуточными условиями на значения скоростей с критериями качеств интегралов граничных энергий. Управление осуществляется смещениями концов струны. Интегралы граничных энергий рассматриваются на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимальных граничных управлений колебаниями струны, использующий методы разделения переменных и проблем моментов. Проведен вычислительный эксперимент и сделан анализ полученных результатов.

Ключевые слова: граничное управление, оптимальное управление колебаниями, промежуточные условия, интеграл граничной энергии, разделение переменных.

OPTIMAL BOUNDARY CONTROL OF OSCILLATIONS OF A STRING WITH GIVEN INTERMEDIATE VALUES OF THE SPEED FOR MINIMIZING BOUNDARY ENERGY

© 2025 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA, E. V. MARKOVA

ABSTRACT. For the equation of oscillation of a string with given initial and terminal conditions, we consider optimal boundary control problems with given intermediate conditions on the values of the speed with criteria for the qualities of the integrals of the boundary energies. The control is performed by displacements of ends of the string. Boundary energy integrals are considered over the entire time interval. We propose a constructive approach to constructing optimal boundary controls for oscillations based on the methods of separation of variables and moment problems. A computational experiment was carried out and the results obtained were analysed.

Keywords and phrases: boundary control, optimal vibration control, intermediate conditions, boundary energy integral, separation of variables.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Задачи оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями исследованы, в частности, в [1, 5, 6, 9, 17]. В работах [2–4, 7, 10–16] рассмотрены задачи для динамических (как с распределенными, так и с сосредоточенными параметрами) процессов, в которых наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями заданы также многоточечные промежуточные (как разделенные, так и

Исследование С. В. Солодуши и Е. В. Марковой выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, №AAAA-A21-121012090034-3).

неразделенные) условия. Задачи оптимального граничного управления колебательными процессами с многоточечными промежуточными условиями и функционалом интеграла от квадратов граничных смещений исследованы, в частности, в [2, 3, 15, 16].

В настоящей работе рассматриваются задачи оптимального управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и промежуточными значениями скоростей точек струны с критериями качеств интегралов граничных энергий, заданными на весь промежуток времени. Предложен конструктивный подход построения для каждой задачи, функции оптимального граничного управления, с использованием метода разделения переменных и проблем моментов, который допускает распространение на другие неоднородные колебательные системы. Благодаря конструктивности проведены численные расчеты и сделан анализ полученных результатов.

2. Постановка задачи. Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т.е. отклонение от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

с начальными и конечными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

и граничными условиями:

(а) при смещении левого конца при закреплённом правом конце

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

(б) или при смещении обоих концов

$$Q(0, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — граничные управления, $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение, а ρ — плотность струны.

Пусть в промежуточные моменты времени t_k ($k = 1, \dots, m$), $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$,

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad j = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Минимизируемые интегралы граничной энергии имеют следующий вид:

(а) при смещении левого конца при закреплённом правом конце

$$\int_0^T [\dot{\mu}(t)]^2 dt, \quad (7)$$

(б) или при смещении обоих концов

$$\int_0^T \left\{ [\dot{\mu}(t)]^2 + [\dot{\nu}(t)]^2 \right\} dt. \quad (8)$$

Предположим, что выполнены условия $Q(x, t) \in C^2(\Omega)$, где $\Omega = \{(x, t), x \in [0, l], t \in [0, T]\}$, $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[0, l]$, $\psi_j(x) \in C^1[0, l]$, $j = 0, 1, \dots, m+1$. Предполагается также, что все функции удовлетворяют следующим условиям согласования:

(а) для задач со смещением левого конца при закрепленном правом конце:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= \varphi_0(0), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(0), & \varphi_0(l) &= \psi_0(l) = 0, \\ \dot{\mu}(t_j) &= \psi_j(0), & j &= 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(0), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(0), & \varphi_T(l) &= \psi_T(l) = 0;\end{aligned}\tag{9}$$

(б) для задач со смещением обоих концов:

$$\begin{aligned}\mu(0) &= \varphi_0(0), & \dot{\mu}(0) &= \psi_0(0), & \nu(0) &= \varphi_0(l), & \dot{\nu}(0) &= \psi_0(l), \\ \dot{\mu}(t_j) &= \psi_j(0), & \dot{\nu}(t_j) &= \psi_j(l), & j &= 1, \dots, m, \\ \mu(T) &= \varphi_T(0), & \dot{\mu}(T) &= \psi_T(0), & \nu(T) &= \varphi_T(l), & \dot{\nu}(T) &= \psi_T(l).\end{aligned}\tag{10}$$

Сформулируем следующие задачи оптимального граничного управления колебаниями струны.

Задача 1 (смещение левого конца при закрепленном правом конце). Требуется найти оптимальное граничное управление $\mu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение промежуточных условий (6) и минимизируя функционал (7).

Задача 2 (смещение двух концов). Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которых колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (2) переходит в конечное состояние (3), обеспечивая выполнение промежуточных условий (6) и минимизируя функционал (8).

3. Сведение исходных задач к задачам с нулевыми граничными условиями. Поставленные задачи, описываемые однородным уравнением (1) с неоднородными (ненулевыми) граничными условиями ((4) или (5)), сводятся к задачам оптимального управления с распределенными воздействиями (описываемым неоднородным уравнением) с нулевыми граничными условиями. Подробности указанного сведения с выкладками здесь не приводим, так как они приведены, в частности, в [4, 11]. Для корректного изложения дальнейших построений решения напомним используемые формулы.

3.1. Сведение неоднородных граничных условий к нулевым граничным условиям. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t),\tag{11}$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция с граничными условиями

$$V(0, t) = V(l, t) = 0.\tag{12}$$

При граничных условиях (4) (т.е. $Q(0, t) = \mu(t)$, $Q(l, t) = 0$) имеем

$$W(0, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = 0.\tag{13}$$

При граничных условиях (5) (т.е. $Q(0, t) = \mu(t)$, $Q(l, t) = \nu(t)$) имеем

$$W(0, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t).\tag{14}$$

Функция $W(x, t)$ для граничных условий (13) и (14), соответственно, представляется в виде

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu(t),\tag{15}$$

$$W(x, t) = (\nu(t) - \mu(t)) \frac{x}{l} + \mu(t).\tag{16}$$

Для определения функции $V(x, t)$ получим следующее неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t),\tag{17}$$

где для задачи со смещением левого конца при закрепленном правом конце с функцией $W(x, t)$ вида (15)

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) \ddot{\mu}(t),\tag{18}$$

а для задачи со смещением двух концов с функцией $W(x, t)$ вида (16)

$$F(x, t) = (\ddot{\mu}(t) - \ddot{\nu}(t)) \frac{x}{l} - \ddot{\mu}(t). \quad (19)$$

3.2. *Сведение начальных, промежуточных и конечных условий к соответствующим условиям для неоднородного уравнения.* Учитывая выражения (15), (16) для функции $W(x, t)$ и условия согласования (9), (10), из начальных (2), промежуточных (6) и конечных условий (3) получим соответствующие условия для функции $V(x, t)$.

Для задачи оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением левого конца при закреплённом правом конце, т.е. для функции $V(x, t)$, получим следующие начальные условия:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_0(0), \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_0(0), \quad (20)$$

промежуточные условия

$$\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=t_j} = \psi_j(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (21)$$

конечные условия

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_T(0), \quad \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_T(0). \quad (22)$$

Для задачи оптимального граничного управления колебаниями струны со смещением двух концов, т.е. для функции $V(x, t)$, получим следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} V(x, 0) &= \varphi_0(x) - (\varphi_0(l) - \varphi_0(0)) \frac{x}{l} - \varphi_0(0), \\ \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi_0(x) - (\psi_0(l) - \psi_0(0)) \frac{x}{l} - \psi_0(0), \end{aligned} \quad (23)$$

промежуточные условия

$$\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=t_j} = \psi_j(x) - (\psi_j(l) - \psi_j(0)) \frac{x}{l} - \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (24)$$

конечные условия

$$\begin{aligned} V(x, T) &= \varphi_T(x) - (\varphi_T(l) - \varphi_T(0)) \frac{x}{l} - \varphi_T(0), \\ \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=T} &= \psi_T(x) - (\psi_T(l) - \psi_T(0)) \frac{x}{l} - \psi_T(0). \end{aligned} \quad (25)$$

4. Применение метода разделения переменных и сведение решения задач к проблеме моментов. Решение уравнения (17) ищем в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (26)$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ и $\psi_j(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x, t)$ в уравнения (17)–(19) и в условия (20)–(25), получим:

$$\ddot{V}_k^{(s)}(t) + \lambda_k^2 V_k^{(s)}(t) = F_k^{(s)}(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$F_k^{(1)}(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t), \quad (28)$$

$$F_k^{(2)}(t) = \frac{2a}{\lambda_k l} [\ddot{\nu}(t)(-1)^k - \ddot{\mu}(t)]. \quad (29)$$

Здесь и далее значение буквы «s» в верхнем индексе характеризует при $s = 1$ задачу 1 и при $s = 2$ задачу 2.

Для задач со смещением левого конца при закреплённом правом конце начальные, промежуточные и конечные условия представляются в виде

$$V_k^{(1)}(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k^{(1)}(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \quad (30)$$

$$\dot{V}_k^{(1)}(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_j(0), \quad j = 1, \dots, m, \quad (31)$$

$$V_k^{(1)}(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k^{(1)}(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0). \quad (32)$$

Для задач со смещением двух концов начальные, промежуточные и конечные условия представляются в виде

$$V_k^{(2)}(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\varphi_0(0) - \varphi_0(l)(-1)^k], \quad \dot{V}_k^{(2)}(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_0(0) - \psi_0(l)(-1)^k], \quad (33)$$

$$\dot{V}_k^{(2)}(t_j) = \psi_k^{(j)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_j(0) - \psi_j(l)(-1)^k], \quad j = 1, \dots, m, \quad (34)$$

$$V_k^{(2)}(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\varphi_T(0) - \varphi_T(l)(-1)^k], \quad \dot{V}_k^{(2)}(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} [\psi_T(0) - \psi_T(l)(-1)^k]. \quad (35)$$

Через $F_k^{(s)}(t)$, $V_k^{(s)}(t)$, $\varphi_k^{(0)}$, $\varphi_k^{(T)}$ и $\psi_k^{(j)}$, $s = 1, 2$, обозначены коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $F(x, t)$, $V(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ и $\psi_j(x)$.

Общее решение уравнения (27) и ее производная имеют вид

$$V_k^{(s)}(t) = V_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(s)}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad (36)$$

$$\dot{V}_k^{(s)}(t) = -\lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(t - \tau) d\tau, \quad s = 1, 2.$$

Учитывая начальные, промежуточные и конечные условия, из (36) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\int_0^T F_k^{(s)}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{1k}^{(s)}(T), \quad \int_0^T F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}^{(s)}(T), \quad (37)$$

$$\int_0^{t_j} F_k^{(s)}(\tau) \cos \lambda_k(t_j - \tau) d\tau = \tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad s = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}^{(s)}(T) &= \lambda_k V_k^{(s)}(T) - \lambda_k V_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}^{(s)}(T) &= \dot{V}_k^{(s)}(T) + \lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j) &= \dot{V}_k^{(s)}(t_j) + \lambda_k V_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t_j, \end{aligned} \quad (38)$$

$j = 1, \dots, m$. Для задачи со смещением левого конца при закреплённом правом конце, подставляя выражение функции $F_k^{(1)}(t)$ из (28) в соотношения (37) и интегрируя по частям с учетом условий согласования, получим, что функции $\dot{\mu}(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим

интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}^{(1)}(T), & \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}^{(1)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{2k}^{(1)}(t_1), & \dots, & \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(m)}(\tau) d\tau = C_{2k}^{(1)}(t_m), \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}^{(1)}(T) &= \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \sin \lambda_k T - \frac{l}{2a} \tilde{C}_{1k}^{(1)}(T), \\ C_{2k}^{(1)}(T) &= \frac{\psi_T(0)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k T + \frac{l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(1)}(T), \\ C_{2k}^{(1)}(t_j) &= \frac{\psi_j(0)}{\lambda_k} - \frac{\psi_0(0)}{\lambda_k} \cos \lambda_k t_j + \frac{l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(1)}(t_j), \\ g_k^{(j)}(\tau) &= \begin{cases} \sin \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

Для дальнейшей компактной записи интегральных соотношений (39) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{H}_k^{(1)}(\tau) &= \left(\cos \lambda_k(T - \tau) \quad \sin \lambda_k(T - \tau) \quad g_k^{(1)}(\tau) \quad \dots \quad g_k^{(m)}(\tau) \right)', \\ C_k^{(1)}(t_1, \dots, t_m, T) &= \left(C_{1k}^{(1)}(T) \quad C_{2k}^{(1)}(T) \quad C_{2k}^{(1)}(t_1) \quad \dots \quad C_{2k}^{(1)}(t_m) \right)'; \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь и далее «'» в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Теперь для задачи со смещением двух концов, подставляя выражение функции $F_k^{(2)}(t)$ из (29) в соотношения (37) и интегрируя по частям с учетом условий согласования (10), получим, что функции $\dot{\mu}(t)$ и $\dot{\nu}(t)$ для каждого k должны удовлетворять следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}^{(2)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}^{(2)}(T), \\ \int_0^T \dot{\mu}(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau - \int_0^T \dot{\nu}(\tau) (-1)^k g_k^{(j)}(\tau) d\tau &= C_{2k}^{(2)}(t_j), \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[-\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}^{(2)}(T) - (-1)^k \psi_0(l) \sin \lambda_k T + \psi_0(0) \sin \lambda_k T \right], \\ C_{2k}^{(2)}(T) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(2)}(T) + (-1)^k \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \psi_T(0) - (-1)^k \psi_T(l) - \psi_0(0) \cos \lambda_k T \right], \\ C_{2k}^{(2)}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}^{(2)}(t_j) - (-1)^k \psi_j(l) + \psi_j(0) + (-1)^k \psi_0(l) \cos \lambda_k t_j - \psi_0(0) \cos \lambda_k t_j \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$j = 1, \dots, m$. Отметим, что выражения $\tilde{C}_{1k}^{(s)}(T)$, $\tilde{C}_{2k}^{(s)}(T)$, $\tilde{C}_{2k}^{(s)}(t_j)$ и $g_k^{(j)}(\tau)$ приведены в (38) и (40).

Для компактной записи интегральных соотношений (42) введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k^{(2)}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \cos \lambda_k(T - \tau) \\ \sin \lambda_k(T - \tau) & (-1)^{k+1} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ g_k^{(1)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(1)}(\tau) \\ \dots & \dots \\ g_k^{(m)}(\tau) & (-1)^{k+1} g_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k^{(2)}(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}^{(2)}(T) \\ C_{2k}^{(2)}(T) \\ C_{2k}^{(2)}(t_1) \\ \dots \\ C_{2k}^{(2)}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

На практике обычно выбираются несколько первых n гармоник колебаний и с помощью методов теории управления конечномерными системами решается задача синтеза управлений. В дальнейших построениях будем придерживаться этого подхода.

Учитывая введенные обозначения (41) и (44), для первых n гармоник соотношения (39) и (42) запишем следующим образом:

$$\int_0^T H_n^{(s)}(\tau) U_n^{(s)}(\tau) d\tau = \eta_n^{(s)}, \quad s = 1, 2, \quad (45)$$

где

$$U_n^{(1)}(\tau) = \dot{\mu}_n^{(1)}(\tau) = \dot{\mu}(\tau), \quad U_n^{(2)}(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_n^{(2)}(\tau) \\ \dot{\nu}_n^{(2)}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}(\tau) \\ \dot{\nu}(\tau) \end{pmatrix},$$

$$H_n^{(s)}(\tau) = \left(\bar{H}_1^{(s)}(\tau) \quad \bar{H}_2^{(s)}(\tau) \quad \dots \quad \bar{H}_n^{(s)}(\tau) \right)', \quad (46)$$

$$\eta_n^{(s)} = \left(C_1^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \quad C_2^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \quad \dots \quad C_n^{(s)}(t_1, \dots, t_m, T) \right)';$$

размеры матриц $H_n^{(s)}(\tau)$ и $\eta_n^{(s)}$ равны соответственно $(n(m+2) \times s)$ и $(n(m+2) \times 1)$. Таким образом, интегральные условия (39) и (42) представлены условием (45). Из (45) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Первые n гармоник системы (27) с условиями (30)–(32) (или (33)–(35)) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора $\eta_n^{(s)}$ из (46) можно найти управление $U_n^{(s)}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (45).*

5. Решение задач. Отметим, что левая часть условия (45) — линейная операция, порожденная функцией управления $U_n^{(s)}(\tau)$ на промежутке времени $[0, T]$, а функционалы (7) или (8) являются нормами некоторого пространства L_2 . Следовательно, задачи оптимального управления с интегральным условием (45) при функционале (7) или (8) можно рассматривать как проблему моментов, а решение этих задач следует искать с помощью алгоритма решения проблемы моментов (см. [8]). Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов для задачи 1 с функционалом (7) и интегральными условиями (39) (или (45) при $s = 1$) нужно найти величины $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right] = 1, \quad (47)$$

для которых

$$(\rho_{1n})^2 = \min_{(47)} \int_0^T (h_{1n})^{(2)}(\tau) d\tau, \quad (48)$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (49)$$

Для определения величин $p_k^{(1)0}$, $q_k^{(1)0}$, $\sigma_{ik}^{(1)0}$, $k = 1, \dots, n$, минимизирующих (48) и удовлетворяющих (47), введем функцию

$$f_{1n} = \int_0^T (h_{1n}(\tau))^2 d\tau + \beta_{1n} \left[\sum_{k=1}^n \left(p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right) - 1 \right],$$

где β_{1n} — неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные функции f_{1n} по $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и приравнявая их к нулю, с учетом обозначения (49), (40), после присоединения к полученным уравнениям условия (47), получим замкнутую систему $2n + mn + 1$ алгебраических уравнений относительно стольких же неизвестных величин $p_k^{(1)}$, $q_k^{(1)}$, $\sigma_{ik}^{(1)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и β_{1n} :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[a_{jk}^{(1)} p_j^{(1)} + b_{jk}^{(1)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m c_{jk}^{(1\alpha)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{1k}^{(1)}(T), \\ \sum_{j=1}^n \left[d_{jk}^{(1)} p_j^{(1)} + e_{jk}^{(1)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m f_{jk}^{(1\alpha)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{2k}^{(1)}(T), \\ \sum_{j=1}^n \left[a_{jk}^{(1i)} p_j^{(1)} + b_{jk}^{(1i)} q_j^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^m \vartheta_{jk}^{(1\alpha i)} \sigma_{\alpha j}^{(1)} \right] &= -\frac{\beta_{1n}}{2} C_{2k}^{(1)}(t_i), \\ \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)} C_{1k}^{(1)}(T) + q_k^{(1)} C_{2k}^{(1)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)} C_{2k}^{(1)}(t_i) \right] &= 1, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} a_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, & b_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ c_{jk}^{(1\alpha)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau, & d_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ e_{jk}^{(1)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, & f_{jk}^{(1\alpha)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau, \\ a_{jk}^{(1i)} &= \int_0^T \cos \lambda_j(T - \tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau, & b_{jk}^{(1i)} &= \int_0^T \sin \lambda_j(T - \tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau, \\ \vartheta_{jk}^{(1\alpha i)} &= \int_0^T g_j^{(\alpha)}(\tau) g_k^{(i)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (51)$$

Пусть величины $p_k^{(1)0}$, $q_k^{(1)0}$, $\sigma_{ik}^{(1)0}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, и β_{1n}^0 являются решением замкнутой системы алгебраических уравнений (50). Тогда согласно (48), (49) будем иметь

$$\begin{aligned} (\rho_{1n}^0)^2 &= \int_0^T (h_{1n}^0(\tau))^2 d\tau, \\ h_{1n}^0(\tau) &= \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Оптимальные функции $\dot{\mu}_n^{(1)0}(\tau)$ и $\dot{\mu}_n^{(1)0}(t)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ представляются в виде

$$\dot{\mu}_n^{(1)0}(\tau) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} h_{1n}^0(\tau), \quad \mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau + S_1, \quad t \in [0, T], \quad (53)$$

где S_1 — постоянная интегрирования. Учитывая, что $\mu_n^{(1)0}(0) = S_1$, то из условия согласования (9) получим $S_1 = \varphi_0(0)$.

Для явного выражения оптимального управления $\mu_n^{(1)0}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, надо вычислить следующий интеграл:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) \right] d\tau + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

При $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) \right] d\tau = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - t) \right] + \left[p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T \right] \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Согласно (40) для второго интеграла будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[\sum_{i=1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_1} \left[\sum_{i=1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=2}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{j-2}}^{t_{j-1}} \left[\sum_{i=j-1}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_{j-1}}^t \left[\sigma_{jk}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_j - \tau) \right] d\tau \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \left[\int_{t_{s-1}}^{t_s} \left(\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_i - \tau) \right) d\tau \right] + \int_{t_{j-1}}^t \left[\sigma_{jk}^{(1)0} \sin \lambda_k(t_j - \tau) \right] d\tau \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \left[\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{j-1}) \right] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{jk}^{(1)0} \left[\cos \lambda_k(t_j - t) - \cos \lambda_k(t_j - t_{j-1}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau &= \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - \tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] \right\} d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T - t) \right] + \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k(t_j - t) \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T - \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k (t_j - t_{j-1}) + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{j-1})) \right] \right\}. \quad (55)$$

Рассмотрим случай, когда $t_m < t \leq t_{m+1} = T$:

$$\int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^t \left[p_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - \tau) + q_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - \tau) \right] d\tau + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}.$$

Значение первого интеграла представляется формулой (54), а для второго интеграла согласно (40) будем иметь

$$\sum_{k=1}^n \left[\int_0^t \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) d\tau \right] = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\}, \\ \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau = \int_0^{t_1} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=2}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \\ + \dots + \int_{t_{m-2}}^{t_{m-1}} \left[\sum_{i=m-1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left[\sigma_{mk}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_m - \tau) \right] d\tau = \\ = \sum_{s=1}^m \left\{ \int_{t_{s-1}}^{t_s} \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \sin \lambda_k (t_i - \tau) \right] d\tau \right\} = \\ = \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{i=s}^m \frac{1}{\lambda_k} \sigma_{ik}^{(1)0} [\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})] \right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^{t_m} \left[\sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(1)0} g_k^{(i)}(\tau) \right] d\tau \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \frac{1}{\lambda_k} \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})) \right] \right\}.$$

Таким образом, при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$ имеем

$$\int_0^t h_{1n}^0(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} (\cos \lambda_k (t_i - t_s) - \cos \lambda_k (t_i - t_{s-1})) \right] \right\} + \\ + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k (T - t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k (T - t) \right] + \left[p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T \right] \right\}. \quad (56)$$

Итак, оптимальное управление $\mu_n^{(1)0}(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, согласно формулам (55) и (56), представляется в следующем виде:

$$\mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ \left. + G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(0), \quad (57)$$

$$F_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) = \\ = \left[-p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T-t) \right] + \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k(t_j - t),$$

$$G_{jk}^{(1)} \left(p_k^{(1)0}, q_k^{(1)0}, \sigma_{jk}^{(1)0}, \lambda_k, T, t_i \right) = p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T - \\ - \sigma_{jk}^{(1)0} \cos \lambda_k(t_j - t_{j-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(1)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{j-1}) \right) \right]$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$ и

$$\mu_n^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_{1n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(1)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(1)0} \cos \lambda_k(T-t) + p_k^{(1)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ \left. - q_k^{(1)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(1)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(0) \quad (58)$$

при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$. Таким образом, решение задачи 1 представлено формулами (57) и (58).

Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \dots, n$) проблемы моментов для задачи 2 с функционалом (8) и интегральными условиями (42) (или (39) при $s = 2$) нужно найти величины $p_k^{(2)}$, $q_k^{(2)}$, $\sigma_{ik}^{(2)}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)} C_{1k}^{(2)}(T) + q_k^{(2)} C_{2k}^{(2)}(T) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} C_{2k}^{(2)}(t_i) \right] = 1, \quad (59)$$

для которых

$$(\rho_{2n})^2 = \min_{(59)} \int_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau) \right] d\tau, \quad (60)$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)} \cos \lambda_k(T-\tau) + q_k^{(2)} \sin \lambda_k(T-\tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} g_k^{(i)}(\tau) \right], \\ h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[p_k^{(2)} \cos \lambda_k(T-\tau) + q_k^{(2)} \sin \lambda_k(T-\tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (61)$$

Решая по аналогии с вышеизложенным задачу минимизации функционала (60) с условием (59), находим искомые величины $p_k^{(2)0}$, $q_k^{(2)0}$, $\sigma_{ik}^{(2)0}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$. Далее из (60) и (61) будем иметь

$$(\rho_{2n}^0)^2 = \int_0^T \left[(h_{1n}^0(\tau))^2 + (h_{2n}^0(\tau))^2 \right] d\tau,$$

где

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-\tau) + q_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-\tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)0} g_k^{(i)}(\tau) \right], \\ h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[p_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-\tau) + q_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-\tau) + \sum_{i=1}^m \sigma_{ik}^{(2)0} g_k^{(i)}(\tau) \right]. \quad (62)$$

Таким образом, оптимальные управления $\mu_n^{(2)0}(t)$ и $\nu_n^{(2)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, согласно формулам (40) и (62), представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ &\quad \left. + G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(0), \\ \nu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left[F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) + \right. \\ &\quad \left. + G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) \right] + \varphi_0(l)\end{aligned}\quad (63)$$

при $t_{j-1} < t \leq t_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$, где

$$\begin{aligned}F_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i, t \right) &= \\ &= \left[-p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) \right] + \sigma_{jk}^{(2)0} \cos \lambda_k(t_j - t), \\ G_{jk}^{(2)} \left(p_k^{(2)0}, q_k^{(2)0}, \gamma_{jk}^{(2)0}, \lambda_k, T, t_i \right) &= p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T - \\ &- \sigma_{jk}^{(2)0} \cos \lambda_k(t_j - t_{j-1}) + \sum_{s=1}^{j-1} \left[\sum_{i=s}^j \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{j-1}) \right) \right];\end{aligned}$$

при $t_m < t \leq t_{m+1} = T$ оптимальные управления имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) + p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ &\quad \left. - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(0), \\ \nu_n^{(2)0}(t) &= \frac{1}{(\rho_{2n}^0)^2} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k} \left\{ -p_k^{(2)0} \sin \lambda_k(T-t) + q_k^{(2)0} \cos \lambda_k(T-t) + p_k^{(2)0} \sin \lambda_k T - \right. \\ &\quad \left. - q_k^{(2)0} \cos \lambda_k T + \sum_{s=1}^m \left[\sum_{i=s}^m \sigma_{ik}^{(2)0} \left(\cos \lambda_k(t_i - t_s) - \cos \lambda_k(t_i - t_{s-1}) \right) \right] \right\} + \varphi_0(l).\end{aligned}\quad (64)$$

Решение задачи 2 представлено формулами (63) и (64).

Таким образом, имея явные виды функций оптимальных граничных управлений $\mu_n^{(s)0}(t)$ и $\nu_n^{(s)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, $s = 1, 2$, можно построить соответствующую функцию прогиба $Q_n^{(s)0}(x, t)$. Подставляя полученные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^{(s)0}(t)$ и $\nu_n^{(s)0}(t)$, $\tau \in [0, T]$, $s = 1, 2$, в (28) и (29), а найденное для $F_k^{(s)0}(t)$ выражение — в (36), получим функцию $V_k^{(s)0}(t)$, $t \in [0, T]$, $s = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$. Далее из формулы (26) будем иметь

$$V_n^{(s)0}(x, t) = \sum_{k=1}^n V_k^{(s)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad (65)$$

где

$$V_k^{(s)0}(t) = V_k^{(s)}(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k^{(s)}(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k^{(s)0}(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau,$$

а из (15) и (16) следует, что функции $W_n^{(s)0}(x, t)$, $s = 1, 2$, принимают следующий вид:

$$W_n^{(1)0}(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \mu_n^{(1)0}(t), \quad W_n^{(2)0}(x, t) = \left[\nu_n^{(2)0}(t) - \mu_n^{(2)0}(t) \right] \frac{x}{l} + \mu_n^{(2)0}(t). \quad (66)$$

Далее, согласно (11), с учетом (65) и (66) будем иметь

$$\begin{aligned} Q_n^{(1)0}(x, t) &= \sum_{k=1}^n V_k^{(1)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^{(1)0}(t), \\ Q_n^{(2)0}(x, t) &= \sum_{k=1}^n V_k^{(2)0}(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \left[\nu_n^{(2)0}(t) - \mu_n^{(2)0}(t)\right] \frac{x}{l} + \mu_n^{(2)0}(t). \end{aligned} \quad (67)$$

Таким образом, для первых n гармоник оптимальные функции прогиба струны $Q_n^{(1)0}(x, t)$ и $Q_n^{(2)0}(x, t)$ имеем выражения (67).

6. Пример с вычислительным экспериментом в случае $m = 1$. Приведем иллюстрацию вышеизложенного для задачи 1. Предположим, что в промежуточный момент времени t_1 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$) заданы значения скоростей точек струны в виде

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (68)$$

Применяя предложенный выше подход, построим оптимальное граничное управление $\mu_n^0(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). В этом случае для определения значения величин p_1 , q_1 , σ_{11} и β_1 , согласно (50) и (51), будем иметь следующую систему алгебраических уравнений ($i = 1$, $\alpha = 1$):

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{11}^{(1)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(T), & d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{11}^{(1)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(T), \\ a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + g_{11}^{(11)}\sigma_{11} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_1), & C_{11}(T)p_1 + C_{21}(T)q_1 + C_{21}(t_1)\sigma_{11} &= 1, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & b_{11} &= d_{11} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, & e_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \\ a_{11}^{(1)} &= c_{11}^{(1)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1), \\ b_{11}^{(1)} &= f_{11}^{(1)} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ g_{11}^{(11)} &= \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1. \end{aligned}$$

Здесь для простоты записи индекс 1, характеризующий задачу 1, опущен.

Положим $a = 1/6$, $t_1 = 2l/a$, $T = 4l/a$, $l = 1$. Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ заданы в виде

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x, \quad \psi_0(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{4}{5}x.$$

Пусть при $t = t_1 = 12$ задано промежуточное состояние струны в виде функции (68) в форме

$$\psi_1(x) = \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}x,$$

а при $t = T = 24$ задано следующее конечное состояние: $\varphi_T(x) = 0$, $\psi_T(x) = 0$. Из (69) имеем

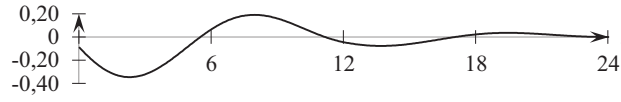
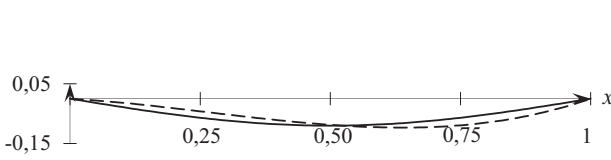
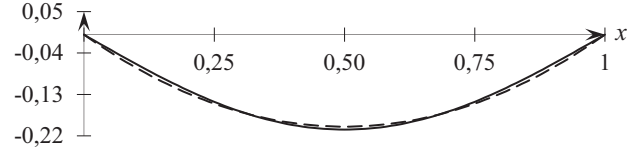
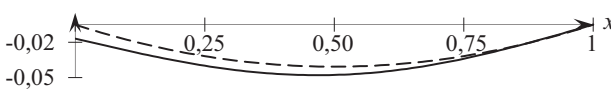
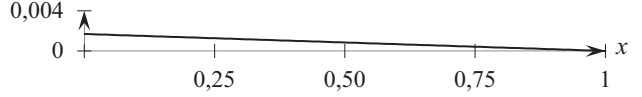
$$\begin{aligned} 12p_1 - \frac{7}{10\pi^2} &= 0, & 12q_1 + 6\sigma_{11} + \frac{48}{5\pi^3} &= 0, \\ 6q_1 + 6\sigma_{11} + \frac{276}{35\pi^3} &= 0, & -\frac{7}{5\pi^2}p_1 + \frac{96}{5\pi^3}q_1 + \frac{552}{35\pi^3}\sigma_{11} &= 1. \end{aligned} \quad (70)$$

Решение системы (70)

$$p_1^0 = -\frac{1715}{638208 + 2401\pi^2}\pi^4, \quad q_1^0 = \frac{8400}{638208 + 2401\pi^2}\pi^3, \quad \sigma_{11}^0 = -\frac{29400}{638208 + 2401\pi^2}\pi^6,$$

так что

$$(\rho_k^0)^2 = \frac{14700}{638208 + 2401\pi^2}\pi^6.$$

Рис. 1. График функции $V_1^0(t)$.Рис. 2. Графики $Q_1^0(x, 0)$ и $\varphi_0(x)$.Рис. 3. Графики $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ и $\psi_0(x)$.Рис. 4. Графики $\dot{Q}_1^0(x, 12)$ и $\psi_1(x)$.Рис. 5. Графики $Q_1^0(x, 24)$ и $\varphi_T(x) = 0$.

Для функции колебания $Q_1^0(x, t)$ получаем:

$$Q_1^0(x, t) = \begin{cases} V_1^{(1)0}(t) \sin \pi x + (1-x)\mu_1^{(1)0}(t) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ V_1^{(2)0}(t) \sin \pi x + (1-x)\mu_1^{(2)0}(t) & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

где функция управления $\mu_1^0(t)$ равна

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \frac{552}{35\pi^4} \left(\cos \frac{\pi t}{6} - 1 \right) - \frac{7}{10\pi^3} \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{24}{7\pi^4} \left(\cos \frac{\pi t}{6} - 1 \right) - \frac{7}{10\pi^3} \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

а $V_1^0(t)$ имеет вид

$$V_1^0(t) = \begin{cases} \left(\frac{7t}{60\pi^3} - \frac{14}{5\pi^3} \right) \cos \frac{\pi t}{6} + \left(\frac{92t}{35\pi^4} - \frac{391}{10\pi^4} \right) \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ \left(\frac{7t}{60\pi^3} - \frac{14}{5\pi^3} \right) \cos \frac{\pi t}{6} + \left(\frac{4t}{7\pi^4} - \frac{1009}{70\pi^4} \right) \sin \frac{\pi t}{6}, & \text{при } t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

График $V_1^0(t)$ представлен на рис. 1. Выражения и графики функций прогиба струны и ее производной представлены на рис. 2–5. При $t = 0$ функции $Q_1^0(x, 0)$ и $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ равны соответственно

$$Q_1^0(x, 0) = -\frac{14}{5\pi^3} \sin \pi x, \quad \left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\frac{32}{5\pi^3} \sin \pi x.$$

При $t = t_1 = 12$ и $t = T = 24$ функции $\dot{Q}_1^0(x, 12)$, $Q_1^0(x, 24)$, $\dot{Q}_1^0(x, 24)$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=12} = -\frac{8}{7\pi^3} \sin \pi x - \frac{7}{60\pi^2} (1-x), \quad Q_1^0(x, 24) = 0, \quad \left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=24} = -\frac{7}{60\pi^2} (1-x).$$

На рис. 2–5 графики функций $Q_1^0(x, 0)$, $\dot{Q}_1^0(x, 0)$, $\dot{Q}_1^0(x, 12)$, $Q_1^0(x, 24)$ изображены сплошной линией, а $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ — пунктирной линией. Для сравнительного анализа полученных

результатов введем обозначения

$$\varepsilon_1(x, t_i) = \left| Q_1^0(x, t_i) - \varphi_i(x) \right|, \quad \widehat{\varepsilon}_1(x, t_j) = \left| \dot{Q}_1^0(x, t_j) - \psi_j(x) \right|,$$

где $i = 0, j = 0, 1, 2$ ($i = j = 2$ соответствуют моменту времени $t_2 = T$). Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &\approx 0,027, \quad \int_0^1 \varepsilon_1(x, 0) dx \approx 0,016, \\ \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,012, \quad \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 12) \approx 0,012, \quad \max_{0 \leq x \leq 1} \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) \approx 0,012, \\ \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,006, \quad \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 12) dx \approx 0,006, \quad \int_0^1 \widehat{\varepsilon}_1(x, 24) dx \approx 0,006. \end{aligned}$$

7. Заключение. Предложен конструктивный метод построения оптимального граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными промежуточными условиями на значения скоростей точек струны с критерием качества, являющимся интегралом граничной энергии, заданным на всем промежутке времени. Проведенный вычислительный эксперимент и сравнительный анализ подтверждают эффективность подхода. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления колебаниями в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдукаримов М. Ф. Об оптимальном граничном управлении, производимом смещением процесса вынужденных колебаний на одном конце струны при свободном втором // Докл. АН Респ. Таджикистан. — 2014. — 57, № 4. — С. 280–286.
2. Барсегян В. Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 36–47.
3. Барсегян В. Р. Задачи граничного управления и оптимального управления колебаниями струны с многоточечными промежуточными условиями на функции состояния // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2022. — 28, № 3. — С. 38–52.
4. Барсегян В. Р., Солодуша С. В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2020. — 25, № 130. — С. 131–146.
5. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Усп. мат. наук. — 2005. — 6, № 6 (366). — С. 89–114.
7. Корзюк В. И., Козловская И. С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2011. — 19, № 1. — С. 62–70.
8. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. Моисеев Е. И., Холмеева А. А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием // Диффер. уравн. — 2013. — 49, № 5. — С. 667–671.
10. Barsegyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav J. Oper. Research. — 2012. — 22, № 1. — P. 31–39.
11. Barsegyan V. R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time // Mech. Solids. — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
12. Barsegyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conf.) (Moscow, Russia, June 1–3, 2016). — IEEE, 2016. — P. 1–4.
13. Barsegyan V. R., Solodusha S. V. Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection form at an intermediate moment of time // Axioms. — 2022. — 11, № 4. — P. 157–174.

14. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 1847, № 1. — 012016.
15. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, Russia, September 5–11, 2021). — IEEE, 2021. — P. 343–349.
16. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// Mathematics. — 2022. — 23, № 10. — 4444.
17. *Yang K. J., Hong K. S., Matsuno F.* Robust adaptive boundary control of an axially moving string under a spatiotemporally varying tension// J. Sound Vibration. — 2004. — 273, № 4-5. — P. 1007–1029.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши и Е. В. Марковой выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, №АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafaelovich)
Институт механики НАН Армении, Ереван;
Ереванский государственный университет
(Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia;
Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia)
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
(L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Маркова Евгения Владимировна (Markova Evgeniya Vladimirovna)
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
(L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: markova@isem.irk.ru