



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 62–97
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-62-97

УДК 517.9; 531.01

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ. IV. СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к многообразию меньшей размерности. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм. Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 236. — С. 72–88. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 237. — С. 49–75. Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — 238. — С. 69–100.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, первый интеграл с существенно особыми точками, инвариантная дифференциальная форма.

INVARIANTS OF HOMOGENEOUS DYNAMIC SYSTEMS OF ARBITRARY ODD ORDER WITH DISSIPATION. IV. NINTH-ORDER SYSTEMS

© 2025 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present new examples of integrable dynamical systems of the ninth order that are homogeneous in part of the variables. In these systems, subsystems on the tangent bundles of lower-dimensional manifolds can be distinguished. In the cases considered, the force field is partitioned into an internal (conservative) part and an external part. The external force introduced by a certain unimodular transformation has alternate dissipation; it is a generalization of fields examined earlier. Complete sets of first integrals and invariant differential forms are presented. The first part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **236** (2024), pp. 72–88. The second part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **237** (2024), pp. 49–75. The third part of the paper: *Itoги Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory*, **238** (2024), pp. 69–100.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, first integral with essential singular points, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

4. Инварианты однородных систем девятого порядка	63
4.1. Введение	63
4.2. Некоторые примеры из динамики пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил	64
4.3. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля	72
4.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов	82
4.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования	83
4.6. Системы со знакопеременной диссипацией	85
Список литературы	93

4. ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

4.1. Введение. Как известно (см. [14, 15, 83]), нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов) облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомым инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками.

Как и в разделах 1–3, наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с четырьмя степенями свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [50, 51, 58, 75]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических на четырехмерной поверхности, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы по такой поверхности, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

Хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние

энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она таковыми обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-либо знака и, как следствие, у системы наблюдается наличие хотя бы одного первого интеграла (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической пространственной динамики твердого тела.

В данном разделе 4 приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система с четырьмя степенями свободы на своем восьмимерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

4.2. Некоторые примеры из динамики пятимерного твердого тела в неконсервативном поле сил. Рассмотрим движение однородного осесимметричного пятимерного твердого тела с передним плоским торцом (четырёхмерным диском) в неконсервативном поле сил в условиях квазистационарности. Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — (обобщенные) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твердого тела (D — центр четырёхмерного диска, лежащий на оси симметрии тела),

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

— тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \dots x_5$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, \dots, Dx_5$ лежат в гиперплоскости диска, $I_1, I_2, I_3 = I_2, \dots, I_5 = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе, и в случае аналитических функций Чаплыгина [8, 19]), которые описывают движение центра масс и соответствуют пространству $\mathbb{R}^5$, при котором касательные силы воздействия среды на четырёхмерный диск отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} & \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \omega_{10} v \sin \alpha \cos \beta_1 + \omega_9 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \omega_7 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \omega_4 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\ & + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_x}{m}, \\ & \dot{v} \sin \alpha \cos \beta_1 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 + \\ & + \omega_{10} v \cos \alpha - \omega_8 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_6 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \\ & - \omega_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_9 \omega_8 + \omega_6 \omega_7 + \omega_3 \omega_4) - \sigma \dot{\omega}_{10} = 0, \\ & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \\ & - \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - \omega_9 v \cos \alpha + \omega_8 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \sigma(\omega_8 \omega_{10} - \omega_5 \omega_7 - \omega_2 \omega_4) + \sigma \dot{\omega}_9 = 0, \\ & \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \\ & + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \omega_7 v \cos \alpha - \omega_6 v \sin \alpha \cos \beta_1 + \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_5 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \sigma(\omega_6 \omega_{10} + \omega_5 \omega_9 - \omega_1 \omega_4) - \sigma \dot{\omega}_7 = 0, \\
& \dot{v} \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\alpha} v \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_1 v \sin \alpha \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \\
& + \dot{\beta}_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_3 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \omega_4 v \cos \alpha + \omega_3 v \sin \alpha \cos \beta_1 - \\
& - \omega_2 v \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + \omega_1 v \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \sigma(\omega_3 \omega_{10} + \omega_2 \omega_9 + \omega_1 \omega_7) + \sigma \dot{\omega}_4 = 0,
\end{aligned}$$

где $F_x = -S$, $S = s(\alpha)v^2$, $\sigma = CD$, $v > 0$.

Вспомогательная матрица для вычисления момента неконсервативной силы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & x_{3N} & x_{4N} & x_{5N} \\ -S & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.2)$$

тогда та часть динамических уравнений движения тела, которые описывают движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathfrak{so}(5)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
& (\lambda_4 + \lambda_5)\dot{\omega}_1 + (\lambda_4 - \lambda_5)(\omega_4 \omega_7 + \omega_3 \omega_6 + \omega_2 \omega_5) = 0, \\
& (\lambda_3 + \lambda_5)\dot{\omega}_2 + (\lambda_5 - \lambda_3)(\omega_1 \omega_5 - \omega_3 \omega_8 - \omega_4 \omega_9) = 0, \\
& (\lambda_2 + \lambda_5)\dot{\omega}_3 + (\lambda_2 - \lambda_5)(\omega_4 \omega_{10} - \omega_2 \omega_8 - \omega_1 \omega_6) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_5)\dot{\omega}_4 + (\lambda_5 - \lambda_1)(\omega_3 \omega_{10} + \omega_2 \omega_9 + \omega_1 \omega_7) = -x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_7 \omega_9 + \omega_6 \omega_8 + \omega_1 \omega_2) = 0, \\
& (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_6 + (\lambda_4 - \lambda_2)(\omega_5 \omega_8 - \omega_7 \omega_{10} - \omega_1 \omega_3) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_4)\dot{\omega}_7 + (\lambda_1 - \lambda_4)(\omega_1 \omega_4 - \omega_6 \omega_{10} - \omega_5 \omega_9) = x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_2 + \lambda_3)\dot{\omega}_8 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_9 \omega_{10} + \omega_5 \omega_6 + \omega_2 \omega_3) = 0, \\
& (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_9 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_8 \omega_{10} - \omega_5 \omega_7 - \omega_2 \omega_4) = -x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \\
& (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_{10} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_8 \omega_9 + \omega_6 \omega_7 + \omega_3 \omega_4) = x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2.
\end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (4.2.1), (4.2.3) 15-го порядка является прямое произведение пятимерного многообразия на алгебру Ли $\mathfrak{so}(5)$: $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^4 \times \mathfrak{so}(5)$.

Сразу же заметим, что система (4.2.1), (4.2.3), в силу имеющейся динамической симметрии $I_2 = I_3 = I_4 = I_5$, обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \omega_2 \equiv \omega_2^0, \omega_3 \equiv \omega_3^0, \omega_5 \equiv \omega_5^0, \omega_6 \equiv \omega_6^0, \omega_8 \equiv \omega_8^0. \quad (4.2.4)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \quad (4.2.5)$$

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства ($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [78])

$$\mathbf{V}_C \equiv \text{const}, \quad (4.2.6)$$

то в системе (4.2.1), (4.2.3) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил: $T - s(\alpha)v^2 \equiv 0$.

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (4.2.7)$$

Случай (4.2.7) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы восьмого порядка после некоторого преобразования системы 15-го порядка (4.2.1), (4.2.3).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину T :

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega) =$$

$$= \sum_{i,j=0, i \leq j}^4 \tau_{i,j} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) \omega_{r_i} \omega_{r_j} = T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2, \quad \omega_{r_0} = v. \quad (4.2.8)$$

Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1} = \omega_4, \dots, \omega_{r_4} = \omega_{10}$ посредством композиции трех поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{34}(-\beta_1) \circ \mathbf{T}_{23}(-\beta_2) \circ \mathbf{T}_{12}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \quad (4.2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{34}(\beta_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ 0 & 0 & \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{23}(\beta_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ 0 & \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_{12}(\beta_3) &= \begin{pmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 & 0 & 0 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos \beta_3 + \omega_7 \sin \beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \cos \beta_2 + \omega_9 \sin \beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos \beta_3 + \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 + \omega_9 \cos \beta_2] \cos \beta_1 + \omega_{10} \sin \beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos \beta_3 - \omega_4 \sin \beta_3) \sin \beta_2 - \omega_9 \cos \beta_2] \sin \beta_1 + \omega_{10} \cos \beta_1. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Систему (4.2.1), (4.2.3) в случаях (4.2.4), (4.2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{v} + \sigma \left(\sum_{s=1}^4 z_s^2 \right) \cos \alpha - \sigma \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha) v^2}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} v + z_4 v - \sigma \left(\sum_{s=1}^4 z_s^2 \right) \sin \alpha - \sigma \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= \\ = \frac{s(\alpha) v^2 - T_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\dot{\beta}_1 \sin \alpha - z_3 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0. \quad (4.2.14)$$

$$\dot{\beta}_2 \sin \alpha \sin \beta_1 + z_2 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (4.2.15)$$

$$\dot{\beta}_3 \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 - z_1 \cos \alpha - \frac{\sigma v}{3I_2} s(\alpha) \cdot \Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = 0, \quad (4.2.16)$$

$$\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.17)$$

$$\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.18)$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha), \quad (4.2.19)$$

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha). \quad (4.2.20)$$

Здесь введены следующие функции:

$$\Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \beta_3 \right) \rangle,$$

$$\Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3 \right) \rangle,$$

$$\Delta_{v,3} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \beta_3 + \frac{\pi}{2} \right) \rangle,$$

здесь $\langle \dots, \dots \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^5$, а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= |\mathbf{r}_N| = \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \rangle = \\ &= 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^5 x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) i_{sN}(\beta_1, \beta_2, \beta_3). \end{aligned}$$

И теперь здесь $i_{sN}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $s = 1, \dots, 5$, ($i_{1N}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \equiv 0$) — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N}, x_{5N}\}$ на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Таким образом,

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \right),$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta_1 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 \\ \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \end{pmatrix}$$

— единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$.

Введя далее новые фазовые переменные и дифференцирование по формулам $z_k = n_1 v Z_k$, $k = 1, \dots, 4$, $\langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle$, $n_1 > 0$, $n_1 = \text{const}$, система (4.2.12)–(4.2.20) приведет к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_4 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \cos \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} Z_4' &= \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \{ -Z_3 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &\quad - Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \} - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \\ Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \times \\ &\times \left\{ Z_4 \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_2 \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \right. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$+ Z_1 \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \Big\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.24)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left[-Z_4 + Z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \right] + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left[-Z_1 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right] + \\ + \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.25)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \left\{ Z_4 - Z_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_2 \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \right\} - \\ - \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.26)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.27)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.28)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \quad (4.2.29)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + \\ + \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha) \sin \alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе девятого порядка (4.2.21)–(4.2.29) может быть выделена независимая подсистема восьмого порядка (4.2.22)–(4.2.29), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем восьмимерном фазовом пространстве. В частности, при выполнении условия (4.2.7) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

Система (4.2.21)–(4.2.29) содержит динамические уравнения движения пятимерного твердого тела. При отсутствии силового поля (формально при $s(\alpha) \equiv T_1(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0$) она примет вид

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -\sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.30)$$

$$\alpha' = -Z_4 + \sigma n_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha, \quad (4.2.31)$$

$$Z'_4 = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_1 Z_4 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.32)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \sigma n_1 Z_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.33)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \sigma n_1 Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.34)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ + \sigma n_1 Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha, \quad (4.2.35)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.2.36)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.2.37)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \quad (4.2.38)$$

4.2.1. *Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости.* Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19], динамические функции s , x_{2N} , x_{3N} , x_{4N} и x_{5N} примем в следующем виде:

$$s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{2N0}(\alpha, \beta_1) = A \sin \alpha \cos \beta_1, \quad (4.2.39)$$

$$x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3,$$

$$x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) = x_{5N0}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0,$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$).

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (4.2.21)–(4.2.29), примут следующий вид:

$$\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) = R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Тогда, благодаря условиям (4.2.6), (4.2.39) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.2.21)–(4.2.29)) примет вид аналитической системы

$$v' = v \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \quad (4.2.40)$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha, \quad (4.2.41)$$

$$Z'_4 = \sin \alpha \cos \alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + b Z_4 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - b Z_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.42)$$

$$Z'_3 = Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + b Z_3 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - b Z_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.43)$$

$$Z'_2 = Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + b Z_2 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - b Z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.44)$$

$$Z'_1 = Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + b Z_1 (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - b Z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (4.2.45)$$

$$\beta'_1 = Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (4.2.46)$$

$$\beta'_2 = -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \quad (4.2.47)$$

$$\beta'_3 = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}, \quad (4.2.48)$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая, как и выше, безразмерный параметр b и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/3I_2$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (4.2.40)–(4.2.48) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1 \{v\} \times T\mathbb{S}^4 \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$,

т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$.

Теорема 4.1. Система (4.2.40)–(4.2.48) обладает шестью независимыми первыми интегралами (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–3) необходимо привести важное замечание. Дело в том, что с точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы.

4.2.2. Случай зависимости момента неконсервативных сил от тензора угловой скорости. Дальнейший пример посвящен случаю движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости. Поэтому введем такую зависимость. Отметим, что данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для тел произвольной размерности.

Пусть $x = (x_{1N}, \dots, x_{5N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на четырехмерный диск, $Q = (Q_1, \dots, Q_5)$ — компоненты силы $\mathbf{S}$ воздействия среды, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \dots, x_{5N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Итак, примем следующую зависимость: $x = Q + R$, где $R = (R_1, \dots, R_5)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости — гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}. \quad (4.2.49)$$

Здесь $(h_1, \dots, h_5)$ — некоторые положительные параметры.

Теперь, применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, то $x_{2N} = Q_2 - h_1\omega_{10}/v$, $x_{3N} = Q_3 + h_1\omega_9/v$, $x_{4N} = Q_4 - h_1\omega_7/v$, $x_{5N} = Q_5 + h_1\omega_4/v$.

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [8, 19] допустим равенства $Q_2 = A \sin \alpha \cos \beta_1$, $Q_3 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2$, $Q_4 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3$, $Q_5 = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3$, $A > 0$, а динамические функции s , x_{2N} , x_{3N} , x_{4N} и x_{5N} примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= B \cos \alpha, \quad B > 0, \\ x_{2N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \cos \beta_1 - h \frac{\omega_{10}}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{3N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2 + h \frac{\omega_9}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{4N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - h \frac{\omega_7}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ x_{5N} \left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v} \right) &= A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - h \frac{\omega_4}{v}, \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

убеждающем нас в том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т.е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости). Причем $h_2 = \dots = h_5$ в силу динамической симметрии тела.

При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Omega/v)$, $s = 1, 2, 3$, входящие в систему (4.2.22)–(4.2.29), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= A \sin \alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h_1}{v} z_3, \\ \Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= -\frac{h_1}{v} z_2, \\ \Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) &= \frac{h_1}{v} z_1.\end{aligned}\tag{4.2.51}$$

Тогда, благодаря условиям (4.2.6), (4.2.50) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (4.2.21)–(4.2.29)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\tag{4.2.52}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \sin \alpha + b \sin \alpha \cos^2 \alpha - bH_1 Z_4 \cos^2 \alpha,\tag{4.2.53}$$

$$\begin{aligned}Z_4' &= \sin \alpha \cos \alpha - (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ &+ bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_4 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_4^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_4 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.54}$$

$$\begin{aligned}Z_3' &= (1 + bH_1)Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (1 + bH_1)(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + \\ &+ bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_3 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_3 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.55}$$

$$\begin{aligned}Z_2' &= (1 + bH_1)Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - (1 + bH_1)Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_2 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_2 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.56}$$

$$\begin{aligned}Z_1' &= (1 + bH_1)Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (1 + bH_1)Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + (1 + bH_1)Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} + \\ &+ bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha - bZ_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ bH_1 Z_1 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 Z_1 \cos \alpha,\end{aligned}\tag{4.2.57}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\tag{4.2.58}$$

$$\beta_2' = -(1 + bH_1)Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1},\tag{4.2.59}$$

$$\beta_3' = (1 + bH_1)Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3},\tag{4.2.60}$$

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) \cos \alpha + b \sin^2 \alpha \cos \alpha - bH_1 Z_4 \sin \alpha \cos \alpha,$$

при этом выбирая безразмерные параметры b , H_1 и постоянную n_1 следующим образом: $b = \sigma n_0$, $n_0^2 = AB/3I_2$, $H_1 = Bh/3I_2 n_0$, $n_1 = n_0$.

Итак, система (4.2.52)–(4.2.60) может быть рассмотрена на своем фазовом девятимерном многообразии $W_1 = \mathbb{R}_+^1\{v\} \times TS^4\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, 0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$, т.е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырехмерной сфере $S^4\{0 < \alpha < \pi, 0 < \beta_1 < \pi, 0 < \beta_2 < \pi, 0 \leq \beta_3 < 2\pi\}$.

Теорема 4.2. Система (4.2.52)–(4.2.60) обладает шестью независимыми первыми интегралами (полным набором), пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом эти интегралы выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.

Здесь (как и в разделах 1–3) необходимо повторить важное замечание. С точки зрения теории элементарных функций полученный первый интеграл является трансцендентным (т.е. не алгебраическим). В данном же случае трансцендентность понимается в смысле теории функций комплексного переменного, когда у функции, после ее формального продолжения в комплексную область, имеются существенно особые точки, соответствующие притягивающим и отталкивающим предельным множествам рассматриваемой динамической системы, хотя рассматриваемые первые интегралы являются действительными функциями.

4.3. Системы девятого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{v}, \dot{z}_4, \dots, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, v\dot{\beta}_2, v\dot{\beta}_3)^T &= A(\alpha, \beta)P, \\ P^T &= (v^2, vz_4, \dots, vz_1, z_4^2, z_4z_3, z_4z_2, z_4z_1, z_3^2, z_3z_2, z_3z_1, z_2^2, z_2z_1, z_1^2), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 9×15 (система, аналогичная (1.3.1), (2.3.1), (3.3.1)).

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt$, $d/dq = \langle' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые переменные $Z_k, z_k = Z_k v, k = 1, \dots, 4, Z = (Z_1, \dots, Z_4)$, систему (4.3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q, \\ Q^T &= (1, Z_4, \dots, Z_1, Z_4^2, Z_4Z_3, Z_4Z_2, Z_4Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$(Z_4', \dots, Z_1', \alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3')^T = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_4\Psi(\alpha, Z), \dots, Z_1\Psi(\alpha, Z), 0, 0, 0, 0)^T, \quad (4.3.3)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (4.3.2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать восемь оставшихся уравнений в качестве системы (4.3.3) на восьмимерном фазовом многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

В данном разделе мы ограничимся следующим важным частным случаем системы (4.3.2), (4.3.3) девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha), \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4.3.4)$$

$$\alpha' = f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha),$$

$$\begin{aligned} Z_4' &= -f_4(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z) = \zeta_4(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_3 Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z) = \zeta_3(Z; \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2 Z_4 - f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] Z_2 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_1 Z_4 - f_1(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] Z_1 Z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha) g_1(\alpha) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'_1 &= Z_3 f_1(\alpha), \\ \beta'_2 &= Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),\end{aligned}$$

$DQ(\xi) = d \ln |Q(\xi)| / d\xi$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $\dots$, $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$ — некоторые гладкие функции, и будем рассматривать систему (4.3.4), (4.3.5) как *систему при отсутствии внешнего поля сил*.

Уравнение (4.3.4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (4.3.5) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, см. также [36, 38]).

Система (4.3.4), (4.3.5) имеет более общий вид, чем система (4.2.30)–(4.2.38), взятая из динамики пятимерного твердого тела, и при $b = \sigma n_1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, а также при

$$\begin{aligned}f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_4(\alpha) \equiv -1, \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \quad h(\beta_2) = -\frac{1}{\sin \beta_2}, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \quad \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2, \\ \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\ \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) = -\sin \beta_2 \cos \beta_2,\end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Рассмотрим структуру системы (4.3.5). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с 13 ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (в частности, на расслоении (четырехмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

Действительно, выбрав новые координаты $z_1, \dots, z_4$ в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= z_4 f_4(\alpha), \\ \dot{\beta}_1 &= z_3 f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (4.3.5)):

$$Z'_k = \zeta_k(Z; \alpha, \beta), \quad k = 1, \dots, 4,\tag{4.3.8}$$

при этом уравнения (4.3.6) почти всюду эквивалентны совокупности (4.3.7), (4.3.8), которая, прежде всего, присутствует в системе (4.3.5). Здесь для полной ясности лучше изменить независимую переменную и вместо (4.3.7) выбрать равенства

$$\begin{aligned}\alpha' &= Z_4 f_4(\alpha), \\ \beta'_1 &= Z_3 f_1(\alpha), \\ \beta'_2 &= Z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2).\end{aligned}$$

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (4.3.6).

(a) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного пятимерного твердого тела.

(b) Системы на касательном расслоении более общей четырехмерной поверхности вращения.

(c) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (4.3.4), (4.3.5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системах (1.3.5), (1.3.6), (2.3.4), (2.3.5) и (3.3.4), (3.3.5), они не нарушают консервативности, поскольку система (4.3.4), (4.3.5) обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов.

4.3.1. О количествах неизвестных функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ функций при $n = 4$, т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (4.3.7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь тринадцатью ($n(n-1)+1$ функцией при $n = 4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (4.3.6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 7 ($n(n-1)/2 + 1$ функция при $n = 4$). Таким образом, мы имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(4)$) на имеющиеся $A(4) = 20$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ функции при $n = 4$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 20, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(4)$, тем больше разность $A(4) - B(4)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(4) = 16$ условий на имеющиеся $A(4) = 20$ функций. Число $B(4)$ складывается из трех слагаемых: $B(4) = B_1(4) + B_2(4) + B_3(4)$.

Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \quad (4.3.9)$$

т.е. $B_1(4) = 3$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$).

Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \\ \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

т.е. $B_2(4) = 6$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$).

Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned}
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \equiv 0,
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

т.е. $B_3(4) = 7$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$).

Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned}
B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1,
\end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества произвольных функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(4) - B(4) = 4$.

Замечание 4.1. Пусть выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), при этом реализуется система дифференциальных равенств (4.3.11). Тогда справедливы следующие 7 ($n(n-1)/2 + 1$ при $n = 4$) тождеств:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2), \\
& \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^1(\beta_1), \quad \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \\
& \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^2(\beta_2), \\
& \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha),
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

а также 3 ($(n-1)(n-2)/2$ при $n = 4$) тождества

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\
& \Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2).
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых трех равенств из (4.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Из (4.3.14) следуют первая строка тождеств из (4.3.12) и первая строка тождеств из (4.3.13). Далее, в условиях замечания вторая группа из двух равенств из (4.3.11) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
& \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\
& \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

И, наконец, в условиях замечания третья группа из одного равенства из (4.3.11) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (4.3.16)$$

Из (4.3.16) следует третья строка тождеств из (4.3.12).

Из последней строки (4.3.11) также следует последняя строка тождеств из (4.3.12). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 4.1.

Замечание 4.2. Пусть выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), при этом реализуются 10 тождеств (4.3.12) и (4.3.13). Тогда система дифференциальных равенств (4.3.11) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) &\equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2)h^2(\beta_2), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) &+ \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) &+ \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Таким образом, при выполнении 9 условий (4.3.9), (4.3.10) 7 условий (4.3.11) и 7 условий (4.3.17) в упомянутом смысле эквивалентны.

4.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы девятого порядка достаточно знать, вообще говоря, восемь независимых инвариантов.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4.3.4), (4.3.5) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

И то, что полный набор состоит из шести, а не из восьми, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (4.3.6), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (4.3.18)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (4.3.19)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (4.3.7) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (4.3.6).

Теорема 4.3. Если выполнены условия (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17), то система (4.3.4), (4.3.5), рассмотренная на произведении $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, обладает полным набором, состоящим из шести гладких первых интегралов вида

$$\Phi_0(v; Z_4; \alpha) = v^2(1 + 2bZ_4\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \quad (4.3.20)$$

$$\Phi_1(v; Z_4, \dots, Z_1) = v^2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) = C_1^2 = \text{const}; \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const};\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) &= v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\};\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \\ \Psi_2(\beta_2) &= h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\};\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}.\tag{4.3.25}$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}\tag{4.3.26}$$

и фазовых

$$\begin{aligned}w_4 &= Z_4, \quad w_3^* = \ln |w_3|, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, 2, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}\end{aligned}\tag{4.3.27}$$

— фазовый поток системы (4.3.4), (4.3.5) сохраняет фазовый объем с плотностью

$$\rho(v; \alpha) = \frac{v^3}{f_4(\alpha)}$$

на произведении $\mathbb{R}_+^1 \{v\} \times TM^4 \{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. сохраняется соответствующая внешняя дифференциальная форма

$$\frac{v^3}{f_4(\alpha)} dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

Доказательство. Докажем, для начала, вторую часть теоремы 4.3, а именно, сделаем замены (4.3.26) независимой переменной и (4.3.27) фазовых переменных. Тогда система (4.3.4), (4.3.5) при выполнении условий (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha),\tag{4.3.28}$$

$$\alpha' = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \Delta(\alpha),$$

$$w_4' = -\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) e^{2w_3^*} - w_4 \Psi_1(\alpha, w),\tag{4.3.29}$$

$$w_3'^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_4 - \Psi_1(\alpha, w),$$

$$w_2^* = \pm e^{w_3^*} \frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right],\tag{4.3.30}$$

$$\dot{\beta}_2 = \pm \frac{W_2(w_2^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1),$$

$$w_1^* = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \quad (4.3.31)$$

$$\dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)},$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (4.3.32)$$

где

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1, 2,$$

в силу замены (4.3.27), при этом в составной системе (4.3.28)–(4.3.32) штрихом обозначена также производная по новому независимому переменному τ .

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.3.28)–(4.3.32) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.3.29), по одному — для систем (4.3.30), (4.3.31) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (4.3.28) и (4.3.32) (т.е. всего *шесть*).

Как было указано выше, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; \alpha, \beta; w)$ дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (4.3.28)–(4.3.32) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля $\rho(v; \alpha, \beta, w) W_0(v; \alpha, \beta; w)$ преобразованной системы (т.е. системы (4.3.28)–(4.3.32), умноженной на $\rho(v; \alpha, \beta; w)$) после замены $\rho(v; \alpha, \beta; w) d/dt_1 = d/dt_2$ старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (4.3.28)–(4.3.32).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $W_0(v; \alpha, \beta; w)$ системы (4.3.28)–(4.3.32) функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24), (2.6.1), (2.6.2) и других). Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [v^3 W_0(v; \alpha, \beta; w)] &= -4v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\ &+ v^3 b(e^{2w_3^*} + 3w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_3^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании шести первых интегралов.

Действительно, дифференцирование функции (4.3.20) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) при выполнении условий (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) дает

$$2bv^2 f_4(\alpha) (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \equiv 0,$$

поскольку следующее тождество

$$\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) \quad (4.3.33)$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено второе уравнение из (4.3.22).

Дифференцирование функции (4.3.21) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_1^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) Z_1^2 Z_3 \left\{ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\alpha)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) g(\beta_1) Z_1^2 Z_2 \left\{ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\alpha)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) \right\} - \\ & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_2^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} - \\ & - 2v^2 f(\alpha) Z_2^2 Z_3 \left\{ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\alpha)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_2) \Gamma_{22}^1(\beta_1) \right\} - \\ & - \frac{2v^2}{f_4(\alpha)} Z_3^2 Z_4 \left\{ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_4(\alpha) \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование функции Φ_2 из (4.3.22) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$-v^2 f_4(\alpha) \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} Z_4 \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\}.$$

Но, благодаря второму уравнению из (4.3.22), функция $\Delta(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (4.3.33), что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.22).

Дифференцирование функции (4.3.23) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} Z_4 \Psi_1(\beta_1) - \\ & -v^2 f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} Z_3 \Delta(\alpha). \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (4.3.33) и

$$\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1), \quad (4.3.34)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.23).

И, наконец, дифференцирование функции (4.3.24) в силу системы (4.3.4), (4.3.5) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} & -v^2 f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Delta(\alpha) - \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha} \right\} Z_1 Z_4 \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) - \\ & -v^2 f(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} Z_1 Z_3 \Delta(\alpha) \Psi_2(\beta_2) - \\ & -v^2 f(\alpha) g(\beta_1) \left\{ \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2) - \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} \right\} Z_1 Z_2 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1). \end{aligned}$$

Но функции $\Delta(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям (4.3.33), (4.3.34) и

$$\frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} = \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2), \quad (4.3.35)$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.3.24).

Далее, рассмотрим два уровня C_3 и C_4 первых интегралов (4.3.23) и (4.3.24) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \quad (4.3.36)$$

Но угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (4.3.5):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{Z_1}{Z_2} h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (4.3.36), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (4.3.25).

Теорема полностью доказана. $\square$

Заметим также, что равенства (4.3.11) могут трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (4.3.21). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны. Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 4.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса (a)), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha, \\ \alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \sin \alpha, \\ Z_4' &= -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_3 \frac{1}{\sin \alpha}, \\ \beta_2' &= -Z_2 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ \beta_3' &= Z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Пример 4.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [47, 49], задача класса (a)), система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \sin \alpha, \\
Z_4' &= -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= Z_3 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= Z_2 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= Z_1 Z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\
\beta_2' &= -Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\
\beta_3' &= Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2}.
\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

Пример 4.3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского (с координатами $x = \beta_1$, $y = \beta_2$, $z = \beta_3$, $w = \alpha$, задача класса (с)) система девятого порядка, при получении которой использованы уравнения геодезических

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2 - \dot{\beta}_3^2) &= 0, \\
\ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 &= 0, \\
\ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 &= 0, \\
\ddot{\beta}_3 - \frac{2}{\alpha} \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.41}$$

и имеющая первые интегралы (4.3.20)–(4.3.25), примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v \Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{1}{\alpha^2}, \\
\alpha' &= Z_4 \alpha + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \frac{1}{\alpha}, \\
Z_4' &= -Z_3^2 - Z_2^2 - Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= Z_3 Z_4 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= Z_2 Z_4 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= Z_1 Z_4 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3 \alpha, \\
\beta_2' &= Z_2 \alpha, \\
\beta_3' &= Z_1 \alpha.
\end{aligned} \tag{4.3.42}$$

Может показаться излишним нахождение инвариантных дифференциальных форм после нахождения полного набора (а именно, шести) первых интегралов рассматриваемой системы, поскольку она уже интегрируема в квадратурах (точно интегрируема). Но, как известно, не всегда можно найти полный набор первых интегралов, а полный набор инвариантных дифференциальных форм фазового объема может быть найден независимо от первых интегралов, что также будет свидетельствовать о точной интегрируемости системы. Другое дело, что из полного набора функционально независимых дифференциальных форм фазового объема можно будет получить некоторые первые интегралы.

4.4. Добавление внешнего силового поля и гладкость первых интегралов. Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (4.3.4), (4.3.5) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) (лишь в уравнение на Z'_4) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$), при этом пусть, в частности, $f_4(\alpha) \equiv -1$.

Исследуем вопрос устойчивости по Ляпунову тривиального решения рассматриваемой системы (для этого некоторые коэффициенты необходимо доопределить по непрерывности) по части переменных $\alpha, Z_4, \dots, Z_1$. Пять соответствующих уравнений на $\alpha', Z'_4, \dots, Z'_1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha' &= -Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\ Z'_4 &= F(\alpha) + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)(Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2) + bZ_4(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_3 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_3Z_4 - f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)(Z_2^2 + Z_1^2) + bZ_3(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_2 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_2Z_4 + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_2Z_3 - f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1^2 + \\ &\quad + bZ_2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha), \\ Z'_1 &= -f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)Z_1Z_4 + f(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1)Z_1Z_3 + f(\alpha)g(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2)Z_1Z_2 + \\ &\quad + bZ_1(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\delta}(\alpha).\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

Может создаться впечатление, что система осталась консервативной (что, действительно, имеет место при $b = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность подтвердилась бы наличием в системе шести гладких (автономных) первых интегралов.

Рассмотрим следующую функцию (Ляпунова) для уравнений (4.4.1):

$$W(Z_4, \dots, Z_1; \alpha) = Z_1^2 + \dots + Z_4^2 + 2 \int_0^\alpha F(\xi) d\xi, \quad F(0) = 0, \quad \frac{dF(0)}{d\alpha} > 0,\tag{4.4.2}$$

которая в проколотой окрестности начала координат положительна и равна нулю только в самом начале координат.

Предложение 4.1. *Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ строго одного знака в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — либо притягивающая, либо отталкивающая точка.*

Доказательство. Полная производная функции (4.4.2) в силу уравнений (4.4.1) равна

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)^2\tilde{\delta}(\alpha) + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)F(\alpha)\delta(\alpha).\tag{4.4.3}$$

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно отрицательны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — притягивающая точка.

Если функции $\tilde{\delta}(\alpha)$ и $F(\alpha)\delta(\alpha)$ одновременно положительны в проколотой окрестности начала координат, то начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — отталкивающая точка.

Два последних утверждения следуют из теорем Ляпунова и Четаева. $\square$

Следствие 4.1. *В условиях предложения 4.1 рассматриваемая система, содержащая уравнения (4.4.1), не может обладать полным набором гладких первых интегралов.*

Следствие 4.2. *В динамике пятимерного твердого тела (см. также раздел 4.2) в системах, где присутствуют уравнения вида (4.4.1), функции $\delta(\alpha)$ и $F(\alpha)$ имеют следующий вид: $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$. Таким образом, величина (4.4.3) переписывается в виде*

$$b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \cos \alpha [Z_1^2 + \dots + Z_4^2 + \sin^2 \alpha].$$

Видно, что в данном случае начало координат для рассматриваемой системы, содержащей уравнения (4.4.1), — отталкивающая точка.

Таким образом, добавляя в систему (4.3.4), (4.3.5) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) (лишь в уравнение на Z'_4) внешнее гладкое силовое поле $-F(\alpha)f_4(\alpha)$, $F(0) = 0$, $dF(0)/d\alpha > 0$, при наличии внутреннего ($b > 0$) рассматриваемая система, вообще говоря, *перестает быть консервативной*.

4.5. Введение внешнего силового поля с диссипацией через унимодулярные преобразования. Модифицируем систему (4.3.4), (4.3.5) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_4(\alpha)$ в уравнение на Z'_4 системы (4.5.1), (4.5.2) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет (как показано в предыдущем разделе 4.4) при дополнительном условии: $b = 0$.

Мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного t на τ по формуле $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \quad \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}, \\ Z'_4 &= F(\alpha) - [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_3 &= -[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_2 &= -[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] Z_2Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] Z_2Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)f_4(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z'_1 &= -[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] Z_1Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] Z_1Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\alpha)[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta'_1 &= Z_3\frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \\ \beta'_2 &= Z_2\frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1(\beta_1), \\ \beta'_3 &= Z_1\frac{f_3(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Напомним, что система (4.5.1), (4.5.2) фактически является образом следующей системы при замене $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ независимой переменной:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)f_4(\alpha), \\
Z_4' &= F(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha)[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)]Z_4 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \\
&\quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z), \\
Z_3' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)]Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\
&\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\
Z_2' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)]Z_2Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)]Z_2Z_3 - \\
&\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\
Z_1' &= -f_4(\alpha)[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)]Z_1Z_4 - f_1(\alpha)[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)]Z_1Z_3 - \\
&\quad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\
\beta_1' &= Z_3f_1(\alpha), \\
\beta_2' &= Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\
\beta_3' &= Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2).
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Также напомним, что выше (раздел 4.4) мы ввели подобное поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_4' системы (4.4.1), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$ (отсутствие внутреннего силового поля).

Но мы будем рассматривать одновременное присутствие двух силовых полей в системе, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча $\mathbb{R}_+^1\{v\}$ и касательного расслоения $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ приняла вид (4.5.1), (4.5.2).

Только что было введено составное силовое поле со знакопеременной диссипацией (или с диссипацией переменного знака) с помощью некоторого *унимодулярного преобразования*.

Система (4.5.3), (4.5.4) имеет более общий вид, чем система (4.2.40)–(4.2.48), взятая из динамики пятимерного твердого тела, и при $b = -b_1$, $\mu = 1$, $\delta(\alpha) = \sin \alpha$, $F(\alpha) = -\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha)$,

$$\begin{aligned}
f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad f_4(\alpha) \equiv -1, \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = -\frac{1}{\sin \beta_1}, \quad h(\beta_2) = -\frac{1}{\sin \beta_2}, \\
\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \quad \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1, \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2, \\
\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = -\sin \beta_1 \cos \beta_1, \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \\
\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &= -\sin \beta_1 \cos \beta_1 \sin^2 \beta_2, \quad \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) = -\sin \beta_2 \cos \beta_2,
\end{aligned}$$

в частности, они совпадают.

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию.

4.6. Системы со знакопеременной диссипацией.

4.6.1. *Первые интегралы и инвариантные дифференциальные формы.* Перейдем теперь к интегрированию системы девятого порядка (4.5.1), (4.5.2) при выполнении свойств (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4.5.1), (4.5.2) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.4 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Тогда после замены фазовых переменных (4.3.27) система (4.5.1), (4.5.2) при условиях (4.3.9), (4.3.10), (4.3.17) распадается следующим образом:

$$v' = v\Psi_0(\alpha, w), \quad \Psi_0(\alpha, w) = -b(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \quad (4.6.1)$$

$$\alpha' = w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha),$$

$$w_4' = F(\alpha) - \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3^2 - w_4\Psi_0(\alpha, w), \quad (4.6.2)$$

$$w_3' = \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3w_4 - w_3\Psi_0(\alpha, w),$$

$$w_2' = \pm w_3\sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}f(\alpha)g(\beta_1)\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d\ln|h(\beta_2)|}{d\beta_2}\right], \quad (4.6.3)$$

$$\beta_2' = \pm \frac{w_2w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1),$$

$$w_1' = \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}f(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right], \quad (4.6.4)$$

$$\beta_1' = \pm \frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}f(\alpha),$$

$$\beta_3' = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \quad (4.6.5)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.6.1)–(4.6.5) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.6.2), по одному — для систем (4.6.3), (4.6.4) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, привязывающих уравнения (4.6.1) и (4.6.5) (т.е. всего *шесть*).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (4.6.6)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (4.6.7)$$

Условие (4.6.6) назовем «геометрическим», а условие (4.6.7) — «энергетическим».

Условие (4.6.6) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения.

Условие (4.6.7) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию.

Теорема 4.4. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия (4.6.6) и (4.6.7). Тогда система (4.6.1)–(4.6.5) обладает полным набором — шестью (одним гладким и пятью, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает шестью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Доказательство. Для доказательства теоремы 4.4 для начала сопоставим системе третьего порядка (4.6.2) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3^2/f_4^2(\alpha) + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_4F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3w_4/f_4^2(\alpha) + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) - b_1w_3F(\alpha)\Delta(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4.6.9)$$

приводим систему (4.6.8) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 &= \\ &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4^2(\alpha) + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_2F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 &= \\ &= \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4^2(\alpha) + bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tilde{\Delta}(\alpha)\Delta^3(\alpha) - b_1u_1F(\alpha)\Delta^2(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

которая переписывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{F(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha)u_2^2 - b_1\mu u_2F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)/f_4^2(\alpha) - \tilde{\Delta}(\alpha)/\Delta(\alpha)]\Delta^2(\alpha)u_1u_2 - b_1\mu u_1F(\alpha)}{u_2\Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^3(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha)}, \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

здесь и далее напомним, что

$$\tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}.$$

Теперь для интегрирования системы (4.6.11) нам потребуется выполнение геометрического и энергетического условий (4.6.6) и (4.6.7).

Действительно, после их выполнения из системы (4.6.11) вытекают следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (4.6.13)$$

Уравнение (4.6.13) имеет вид уравнения Абеля [10, 82] и его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$ данное уравнение имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.6.14)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1 \left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_3 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (4.6.15)$$

Система (4.6.1)–(4.6.5) является динамической системой с переменной диссипацией. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (или в систему (4.3.4), (4.3.5), в которой необходимо перейти к новой независимой переменной по формуле (4.3.26), или в систему (4.3.28)–(4.3.32), в которой уже введены фазовые переменные (4.3.27)). Так система (4.3.4), (4.3.5), в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (4.3.21), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$).

Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (4.6.1)–(4.6.5) при условии (4.6.7) обладает первым интегралом вида

$$\Theta \Big|_{B=0} (B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (4.6.16)$$

где

$$\Theta(B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + B \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha))$$

— семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.6.16), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) также является первым интегралом системы (4.6.1)–(4.6.5) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta \Big|_{B=b_1} (B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)) = \text{const} \quad (4.6.17)$$

и (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) по отдельности не является первым интегралом системы (4.6.1)–(4.6.5). Однако отношение функций (4.6.17), (4.3.22) ($Z \rightarrow w$) является первым интегралом (4.6.15) системы (4.6.1)–(4.6.5) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.6.2) при $\kappa = -1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.6.14) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_1 \lambda \mu}{2} \right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2}{4} + \lambda. \quad (4.6.18)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_1^2 \lambda^2 \mu^2 + C_1^2 + 4\lambda \geq 0, \quad (4.6.19)$$

и фазовое пространство системы (4.6.2) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.6.18).

Таким образом, в силу соотношения (4.6.14) первое уравнение системы (4.6.11) при условиях (4.6.6) и (4.6.7) можно переписать в виде

$$\Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1 \lambda \mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (4.6.20)$$

Тогда дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (4.6.2) при $\kappa = -1$ найдется из следующего уравнения Бернулли:

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)}, \quad (4.6.21)$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\}, \quad u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2,$$

при этом постоянная C_1 выбирается из условия (4.6.19).

Замечание 4.3. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть выражения (4.6.14).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}. \quad (4.6.22)$$

Выражение первого интеграла (4.6.22) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы девятого порядка (4.6.1)–(4.6.5) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (4.6.2). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти два первых интеграла — по одному для систем (4.6.3), (4.6.4) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимых переменных, а также еще два (дополнительных) первых интеграла, привязывающих уравнения (4.6.1) и (4.6.5).

Первые интегралы для систем (4.6.3), (4.6.4) выглядят следующим образом:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (4.6.23)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (4.3.23), (4.3.24).

Действительно, системам (4.6.3), (4.6.4) можно сопоставить, соответственно, следующие уравнения первого порядка:

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} [2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + Dj(\beta_s)], \quad s = 1, 2, \quad j = g, h,$$

интегрирование которых и дает искомые первые интегралы (4.6.23).

В переменных Z первые интегралы (4.6.23) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta'_3(Z_3, Z_2, Z_1; \beta_1) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \\ \Theta'_4(Z_2, Z_1; \beta_2) &= \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

Для получения искомого первого интеграла, привязывающего уравнение (4.6.5), рассмотрим уровень C_4 первого интеграла (4.6.23). На этом уровне справедливо равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \mp \frac{1}{\sqrt{C_4^2 \Psi_2^2(\beta_2) - 1}}. \quad (4.6.25)$$

Но угол β_3 будем искать из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений системы (4.5.2):

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{Z_1}{Z_2} h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (4.6.25), и получаем требуемое утверждение о наличии следующего первого интеграла, привязывающего уравнение (4.6.5):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{h(b)}{\sqrt{C_4^2 \Psi_2^2(b) - 1}} db = C_5 = \text{const}. \quad (4.6.26)$$

И наконец, нетрудно проверить, что у системы (4.6.1)–(4.6.5) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (1.5.17), (2.6.27) и другими), который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(1 + 2bw_4\Delta(\alpha) - b^2\mu(w_3^2 + w_4^2)) = C_0 = \text{const} \quad (4.6.27)$$

и привязывает уравнение (4.6.1).

Продолжим доказательство теоремы 4.4.

I. Составная рассматриваемая система (4.6.1)–(4.6.5) при выполнении свойств (4.6.6), (4.6.7) имеет следующий вид ($w_3^* = \ln |w_3|$, $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$):

$$v' = X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v\Psi_1(\alpha, w), \quad \Psi_1(\alpha, w) = -b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1\lambda\Delta^2(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha), \quad (4.6.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b(e^{2w_3^*} + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1\lambda\Delta(\alpha)(\mu - \Delta^2(\alpha)), \\ w_4' &= X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}e^{2w_3^*} - w_4\Psi_1(\alpha, w), \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

$$w_3'^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_4 - \Psi_1(\alpha, w),$$

$$w_2'^* = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \quad (4.6.30)$$

$$\begin{aligned} \beta_2' &= X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm \frac{W_2(w_2^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1), \\ w_1'^* &= X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \end{aligned} \quad (4.6.31)$$

$$\beta_1' = X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) = \pm \frac{W_1(w_1^*)e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)},$$

$$\beta_3' = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1)h(\beta_2), \quad (4.6.32)$$

при этом в составной системе (4.6.28)–(4.6.32) величины $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, — функции в силу замен выше (или см. также (4.3.27)).

В принципе, замены $w_s \rightarrow w_s^*$, $s = 1, 2, 3$, носят технический характер, и при этом можно использовать как переменные w_s^* , так и переменные w_s .

Для составной системы (4.6.28)–(4.6.32) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения с частными производными:

$$\text{div} [\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)] = 0, \quad (4.6.33)$$

где

$$\begin{aligned} X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \\ &= \{X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ &X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\ &X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2)\} \end{aligned} \quad (4.6.34)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (4.6.28)–(4.6.32) в координатах

$$(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Уравнение (4.6.33) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
& X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha) \rho_v + X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_4} + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_3^*} + \\
& + X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{w_2^*} + X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) \rho_{\beta_2} + \\
& + X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) \rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) \rho_{\beta_1} + X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{\beta_3} = \\
& = -\rho \operatorname{div} X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3).
\end{aligned} \tag{4.6.35}$$

Как было указано выше для систем меньшего порядка, вычисление с некоторым множителем $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (4.6.28)–(4.6.32) есть не что иное, как вычисление дивергенции векторного поля

$$\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

преобразованной системы (т.е. системы (4.6.28)–(4.6.32), умноженной на $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$) после замены $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) d/dt_1 = d/dt_2$ старой независимой переменной t_1 при переходе к новой независимой переменной t_2 в системе (4.6.28)–(4.6.32).

Используем для вычисления дивергенции векторного поля $X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ системы (4.6.28)–(4.6.32) функцию $\rho_2(v) = v^3$ из (1.3.18) (полученную ранее для системы (1.3.10), (1.3.11) без внешнего поля сил, а также используемую для систем (1.5.1), (1.5.2), (2.3.23), (2.3.24) и других систем). Имеем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} [v^3 X(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)] &= -4v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + v^3 b(e^{2w_3^*} + w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
&+ v^3 b(e^{2w_3^*} + 3w_4^2) \tilde{\Delta}(\alpha) + 2v^3 b e^{2w_3^*} \tilde{\Delta}(\alpha) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 4v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) + \\
&+ v^3 b_1 \lambda \tilde{\Delta}(\alpha) (\mu - 3\Delta^2(\alpha)) - v^3 b_1 \lambda \Delta^2(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha).
\end{aligned}$$

Тогда преобразованная система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
v' &= v^3 X_v(v; w_4, w_3^*; \alpha), \\
\alpha' &= v^3 X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_4' &= v^3 X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_3'^* &= v^3 X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\
w_2'^* &= v^3 X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \\
\beta_2' &= v^3 X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \\
w_1'^* &= v^3 X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), \\
\beta_1' &= v^3 X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), \\
\beta_3' &= v^3 X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \\
\rho' &= -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho
\end{aligned} \tag{4.6.36}$$

(здесь штрихом обозначено дифференцирование по новой независимой переменной).

У системы, состоящей из первых девяти уравнений системы (4.6.36), уже найдены шесть первых интегралов (4.6.27), (4.6.15), (4.6.22), (4.6.23) и (4.6.26) (полный набор). Найдем и дополнительный первый интеграл, привязывающий уравнение (последнее уравнение системы (4.6.36)) на функцию ρ .

Действительно, из системы уравнений (4.6.36) можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b(w_3^2 + w_4^2) \Delta(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))}, \tag{4.6.37}$$

тогда, вводя в рассмотрение однородные координаты (4.6.9), имеем:

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu] \tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2 \Delta(\alpha) + b(u_1^2 + u_2^2) \Delta^3(\alpha) + b_1 \lambda \Delta(\alpha) (\mu - \Delta^2(\alpha))} \tag{4.6.38}$$

или

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}. \quad (4.6.39)$$

Теперь, из соотношения (4.6.39) и первого соотношения (4.6.12) вытекает следующее дифференциальное равенство (при $\kappa = -1$):

$$\frac{d\rho}{du_2} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 + u_1^2}, \quad (4.6.40)$$

а из него — следующая квадратура:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-[b_1\lambda\mu]du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1U(C_1, u_2) \quad (4.6.41)$$

(о функциях $u(u_2)$ и $U(C_1, u_2)$ см. (4.6.21)).

Становится справедливым следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3, \quad u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

Ну а общее решение линейного дифференциального уравнения (4.6.35) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5], \quad (4.6.42)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5]$ — произвольная гладкая функция шести аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5$ — шесть независимых первых интегралов (4.6.27), (4.6.15), (4.6.22), (4.6.23) и (4.6.26) соответственно.

В частности, за шесть функционально независимых решений линейного уравнения (4.6.35) в частных производных можно взять следующие функции ($u_2 = w_4/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_3/\Delta(\alpha)$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$):

$$\rho_0(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_0(v; w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.43)$$

$$\rho_1(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.44)$$

$$\rho_2(v; w_4, w_3^*; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_4, w_3^*; \alpha), \quad (4.6.45)$$

$$\rho_3(v; w_4, w_2^*; \alpha, \beta_2) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_2^*; \beta_2), \quad (4.6.46)$$

$$\rho_4(v; w_4, w_1^*; \alpha, \beta_1) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_4(w_1^*; \beta_1), \quad (4.6.47)$$

$$\rho_5(v; w_4; \alpha, \beta_2, \beta_3) = v^3 \exp \left\{ -b_1\lambda\mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3). \quad (4.6.48)$$

II. Рассмотрим далее системы (4.6.3) и (4.6.4). Поскольку они могут быть приведены к независимым подсистемам, проведем рассуждения об «автономном» поиске инвариантных дифференциальных форм, хотя общий подход для поиска таких форм уже освещен выше.

После некоторого их приведения — замен независимых переменных в них

$$\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d}{dt} = \pm w_3 \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \frac{d}{d\tau} \quad (4.6.49)$$

— системы (4.6.3) и (4.6.4) можно объединить следующим образом:

$$\begin{aligned} w'_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1 + w_s^2} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \beta'_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad s = 1, 2, \quad j = h, g, \end{aligned} \quad (4.6.50)$$

при этом в системе (4.6.50) штрихом обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

Для каждого $s = 1, 2$ для системы (4.6.50) будем искать интегральный инвариант с плотностью $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующей дифференциальной форме площади $\rho(w_s; \beta_s)dw_s \wedge d\beta_s$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_s; \beta_s)X(w_s; \beta_s)] = 0, \quad (4.6.51)$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \{X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\} \quad (4.6.52)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (4.6.50) в координатах $(w_s; \beta_s)$.

Уравнение (4.6.51) переписется в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s)\rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s), \quad (4.6.53)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \quad (4.6.54)$$

Тогда система уравнений характеристик (для каждого $s = 1, 2$) линейного дифференциального уравнения (4.6.53) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\beta}_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\rho} &= -\rho \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+2}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \end{aligned} \quad (4.6.55)$$

У системы, состоящей из первых двух уравнений системы (4.6.55), уже найден первый интеграл (4.6.23) (для любого $s = 1, 2$). Найдем дополнительный независимый первый интеграл для системы (4.6.55) уравнений характеристик.

Сопоставим двум последним уравнениям системы (4.6.55) следующее неавтономное уравнение:

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad s = 1, 2. \quad (4.6.56)$$

Последнее уравнение дает следующее инвариантное соотношение:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s; \rho) = \rho \cdot \Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \operatorname{const}, \quad (4.6.57)$$

которое является вторым, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (4.6.55) (для каждого $s = 1, 2$). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (4.3.23), (4.3.24).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.6.53) (для каждого $s = 1, 2$) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]}{\Psi_s(\beta_s)}, \quad (4.6.58)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольная гладкая функция одного аргумента (для каждого $s = 1, 2$), при этом Θ_{s+2} , $s = 1, 2$, — первый интеграл (4.6.23).

В частности, если в качестве функции $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_{s+2}] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad (4.6.59)$$

то за решение линейного уравнения (4.6.53) (для каждого $s = 1, 2$) в частных производных можно взять следующую функцию:

$$\rho_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}}. \quad (4.6.60)$$

Теорема 4.4 доказана. □

Заметим, что все найденные в разделе 4.6.1 инвариантные внешние дифференциальные формы для систем (4.5.1), (4.5.2) позволяют выписать соответствующие дифференциальные формы и для систем (4.5.3), (4.5.4). Для этого все найденные формы надо поделить на $f_4(\alpha)$ (т.е. вернуться к старой независимой переменной t).

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данном разделе 4 предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем девятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат исключительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.

18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.

44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
55. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
57. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
60. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
61. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. II. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 215. — С. 81–94.
63. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
64. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.

65. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
66. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
67. Шамоллин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
68. Шамоллин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
69. Шамоллин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
70. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
72. Шамоллин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
73. Шамоллин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
74. Шамоллин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
75. Шамоллин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
76. Шамоллин М. В. Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 514, № 1. — С. 98–106.
77. Шамоллин М. В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 512, № 1. — С. 10–17.
78. Шамоллин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
79. Шамоллин М. В. Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы// Диффер. уравн. — 2024. — 60, № 3. — С. 322–345.
80. Шамоллин М. В. Инварианты однородных динамических систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2024. — 516, № 1. — С. 65–74.
81. Шамоллин М. В. Инварианты систем с малым числом степеней свободы, обладающих диссипацией// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 2. — С. 3–15.
82. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. — New York: Chapman and Hall, 2017.
83. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
84. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
85. Shamolin M. V. Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms (Vasilyev V., ed.). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru