ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 53–61
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-53-61

УДК 517.95; 532.5

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СМЕШАННЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2025 г. **В. Н. ХАНХАСАЕВ, С. И. МУНЯЕВ**

Аннотация. В работе рассматривается вычислительная модель для смешанного нелинейного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода, описывающая процесс коммутационного отключения электрической дуги с добавлением периода устойчивого горения её до момента отключения и заменой строго гиперболического уравнения теплопроводности гиперболо-параболическим. Численный расчет проведен ведется в пакете MathCad-15 по неявной разностной схеме методом теплового баланса. Доказана корректность постановки первой краевой задачи для некоторого нелинейного уравнения высокого порядка.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейное уравнение смешанного типа, неявная разностная схема, третье краевое условие, метод теплового баланса, уравнение высокого порядка.

INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR SOME NONLINEAR MIXED HEAT CONDUCTIVITY OPERATORS

© 2025 **V. N. KHANKHASAEV, S. M. MUNYAEV**

Abstract. In this paper, we consider a computational model for a mixed nonlinear heat equation with boundary conditions of the third kind that describes the process of switching off an electric arc including the interval of its stable combustion until the moment of switching off and replacing the strictly hyperbolic heat equation with a hyperbolic-parabolic equation. The numerical simulation of this problem based on an implicit difference scheme and the heat balance method was performed by using the MathCad-15 software. Also, we prove the well-posedness of the first boundary-value problem for some high-order nonlinear equation.

Keywords and phrases: hyperbolic heat equation, nonlinear equation of mixed type, implicit difference scheme, third boundary condition, heat balance method, high order equations.

AMS Subject Classification: 65M06, 80-10

1. Введение. Пылеугольное топливо для получения тепловой и электрической энергии используется уже более столетия. Для его воспламенения и дальнейшего сжигания в определенном режиме необходимо довести температуру парового котла до нужного уровня. До недавнего времени это достигалось при помощи дорогостоящего и вредного для окружающей среды топочного мазута. Сегодня в развитых странах применяются современные плазменно-топливные технологии; при этом используемая плазма, по сути, аналогична дуговому разряду короткого замыкания, возникающих в высоковольтных сетях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

В таких кратковременных переходных процессах с очевидной нестационарностью классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной гипотезе Фурье, создают грубые искажения температурных полей, т.е. классические гипотезы о пропорциональности плотности потока тепла вектору градиента температуры приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Для разрешения этого парадокса многими учеными на основе молекулярно-кинетических представлений, учитывающих гипотезу о конечности времени соударения молекул и представление о длине свободного пробега, был получен новый обобщённый закон тепломассопереноса, в котором фигурирует дополнительный элемент — так называемое время релаксации, т.е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. При этом получается уравнение тепломассопереноса гиперболического типа.

2. Постановка начально-краевой задачи. Продолжая упомянутые исследования, рассмотрим нелинейное уравнение смешанного типа в частных производных второго порядка

$$k(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + c(x,t)u(x,t) + bu^r(x,t) + f(x,t) \qquad (1)$$

в области $G = [0,L] \times [-T_1, T_2]$; здесь коэффициент тепловой релаксации $k(x,t)$ удовлетворяет условиям $k(x,t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $k(x,t) > 0$ при $t > 0$; $\lambda(x,t)$ — коэффициент теплопроводности, $f(x,t)$ — переменный по пространственной и временной координатам внутренний источник тепла, $r > 1$ — целый параметр законов излучения.

Начально-краевая задача заключается в поиске решения уравнения (1) при выполнении следующих граничных условий третьего рода и заданного начального профиля температуры $u_0(x)$:

$$\left[\mp\lambda(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \alpha_{0,L}u(x,t)\right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t), \quad t \in [-T_1, T_2], \qquad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \qquad (3)$$

где $\alpha_{0,L}$ и $q_{0,L}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня (см. [4]). Расчет ведется по квазилинейной методике, описанной в [4] для нелинейных уравнений.

Для численного расчета поставленной задачи в пакете MathCad-15, зададим конкретные значения коэффициентов уравнения (1): $k(x,t) = k$ при $t > 0$, $a(x,t) = a > 0$, $\lambda(x,t) = x + 2$, $c(x,t) = c < 0$. Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + cu(x,t) + bu(x,t)^r + f(x,t). \qquad (4)$$

3. Численное решение поставленной задачи. Проведем дискретизацию по пространственной и временной переменным: $\{x_i\}_{i=1}^{N}$, $x_i = ih$, $h = L/N$; $\{\tau_j\}_{j=0}^{M=M_1+M_2}$, $\tau_1 = T_1/M_1$ при $t \leqslant 0$ и $\tau_2 = T_2/M_2$ при $t > 0$. Составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема ячейки $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$ на промежутке времени $[t_{j-1}, t_j]$ с использованием интегро-интерполяционного метода (см. [4]). В таком случае неявная разностная схема будет выглядеть следующим образом:

$$k\frac{(U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1})}{\tau^2} + a\frac{(U_i^{j+1} - U_i^j)}{\tau} = \left[W_{i+0,5} - W_{i-0,5}\right] + cU_i^{j+1} + b(U_i^j)^r + f\big(ih, (j+1)\tau\big), \quad (5)$$

где $x_{i\pm0,5} = (x_i \pm h/2)$, $W_{i\pm0,5}$ — потоки тепла. Основанием для расчета является обычный закон Фурье:

$$W_{i+0,5} \approx \lambda_{i+0,5}\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{h^2}, \quad W_{i-0,5} \approx \lambda_{i-0,5}\frac{U_i^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \qquad (6)$$

Эффективные теплопроводности $\lambda_{i\pm0,5}$ определим следующим образом:

$$\lambda_{i\pm0,5} = 2\frac{\lambda(x_i)\lambda(x_{i\pm1})}{\lambda(x_i) + \lambda(x_{i\pm1})}. \qquad (7)$$

Используя тот же метод конечных объемов, составляем разностные уравнения для краевых элементарных объемов [4], учитывая при этом тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из краевых условий (2):

$$-\lambda_{0,5}\frac{U_1^{j+1}-U_0^{j+1}}{h}+\alpha_0 U_0^{j+1}= \\ =q_0((j+1)\tau)+\frac{h}{2}\left[cU_0^{j+1}+b(U_0^j)^r+f\big(0,(j+1)\tau\big)-a\frac{U_0^{j+1}-U_0^j}{\tau}\right], \tag{8}$$

$$\lambda_{N-0,5}\frac{U_N^{j+1}-U_{N-1}^{j+1}}{h}+\alpha_L U_N^{j+1}= \\ =q_L((j+1)\tau)+\frac{h}{2}\left[cU_N^{j+1}+b(U_N^j)^r+f\big(Nh,(j+1)\tau\big)-a\frac{U_N^{j+1}-U_N^j}{\tau}\right]. \tag{9}$$

Полученная система является частным случаем системы канонического вида (см. [4]) для метода прогонки:

$$A_iU_{i-1}^{j+1}+B_iU_i^{j+1}+C_iU_{i+1}^{j+1}=F_i,\quad i=\overline{2,N-1}. \tag{10}$$

Получаем следующую схему:

$$\left[\frac{\lambda_{0,5}}{h}+\alpha_0-\frac{ch}{2}+\frac{ah}{2\tau}\right]U_0^{j+1}-\left[\frac{\lambda_{0,5}}{h}\right]U_1^{j+1}= \\ =q_0\big((j+1)\tau\big)+\frac{hb}{2}(U_0^j)^r+\frac{h}{2}f\big(0,(j+1)\tau\big)+\frac{ah}{2\tau}U_0^j; \tag{11a}$$

$$-\left[\frac{\lambda_{i-0,5}}{h^2}\right]U_{i-1}^{j+1}+\left[\frac{k}{\tau^2}+\frac{a}{\tau}+\frac{\lambda_{i+0,5}}{h^2}+\frac{\lambda_{i-0,5}}{h^2}-c\right]U_i^{j+1}-\left[\frac{\lambda_{i+0,5}}{h^2}\right]U_{i+1}^{j+1}= \\ =b(U_i^j)^r+f\big(ih,(j+1)\tau\big)+\frac{2k}{\tau^2}U_i^j-\frac{k}{\tau^2}U_i^{j-1}+\frac{a}{\tau}U_i^j; \tag{11b}$$

$$-\left[\frac{\lambda_{N-0,5}}{h}\right]U_{N-1}^{j+1}+\left[\frac{\lambda_{N-0,5}}{h}+\alpha_L-\frac{ch}{2}+\frac{ah}{2\tau}\right]U_N^{j+1}= \\ =q_L+\frac{bh}{2}(U_N^j)^r+f\big(Nh,(j+1)\tau\big)+\frac{ah}{2\tau}U_N^j. \tag{11c}$$

4. Формирование начальных условий для гиперболического этапа. Первоначально уравнение (4) соответствует параболическому типу, т.е. $k(x,t)=0$ при $t\leqslant 0$, где начальное условие для уравнения (4) имеет вид (3). Однако $k(x,t)>0$ при $0<t\leqslant T_2$, и уравнение (4) преобразуется в гиперболический вид, для которого требуется найти первое начальное условие $u(x,0)$ из предыдущего расчета для параболического этапа при $t=0$:

$$u(x_i,0)=U_i^{M_1},\quad 1\leqslant i\leqslant N. \tag{12}$$

Далее требуется определить второе начальное условие для гиперболического уравнения. Для этого указанное условие зададим с повышением порядка аппроксимации по времени до второго, в отличие от первого порядка для формулы

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t}=\frac{U_i^{M_1}-U_i^{M_1-1}}{\tau_2}. \tag{13}$$

Запишем ряд Тейлора на точном решении $u(x,t)$ по времени в окрестности $t=0$:

$$u(x_i,\tau_2)=u(x_i,0)+\tau_2\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t}+\frac{\tau_2^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,0)}{\partial t^2}+O(\tau_2^3), \tag{14}$$

где вторую производную выведем из уравнения (4):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{k}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + (x+2)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] - \frac{a}{k}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{c}{k}u(x,t) + \frac{b}{k}u^r(x,t) + \frac{1}{k}f(x,t). \tag{15}$$

Найдем отсюда неизвестное дискретное значение:

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} + \frac{\tau_2^2}{2}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial x} + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{\partial^2 u(x_i,0)}{\partial x^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{a}{k}\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} + \frac{c}{k}u(x_i,0) + \frac{b}{k}u^r(x_i,0) + \frac{1}{k}f(x_i,0)\right] + O(\tau_2^3),$$

т.е.

$$U_i^{M_1+1} = U_i^{M_1} + \tau_2\frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2^2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{b}{k}(U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k}f(ih, M_1\tau)\right] + O(\tau_2^3).$$

В результате получаем

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1+1} - U_i^{M_1}}{\tau_2} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} +$$
$$+\frac{\tau_2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{b}{k}(U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k}f(ih, M_1\tau)\right] + O(\tau_2^3).$$

Отсюда получаем второе начальное условие для расчета гиперболического этапа со вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} = \frac{U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1}}{\tau_1} + \frac{\tau_2}{2}\left[\frac{U_{i+1}^{M_1} - U_{i-1}^{M_1}}{2hk} + \frac{(x_i+2)}{k}\frac{(U_{i+1}^{M_1} - 2U_i^{M_1} + U_{i-1}^{M_1})}{h^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{a}{k}\frac{(U_i^{M_1} - U_i^{M_1-1})}{\tau_1} + \frac{c}{k}U_i^{M_1} + \frac{b}{k}(U_i^{M_1})^r + \frac{1}{k}f(ih, M_1\tau)\right]. \tag{16}$$

После установления всех необходимых компонентов уравнение (4) с начально-краевыми условиями (2)–(3) решается методом прогонки в среде Mathcad-15. Полученные температурные поля хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Результаты расчета представлены в виде графика на рис. 1.

5. Постановка задачи для нелинейного уравнения шестого порядка. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область с кусочно гладкой границей Γ, состоящей из конечного числа $(n-1)$-мерных поверхностей класса C^2, позволяющей для любой точки пересечения гладких кусков границы Γ выбрать некоторую окрестность этой точки и неособое преобразование $y = y(x)$ старых переменных x к новым переменным y класса C^2, при котором образом пересечения границы Γ с выбранной окрестностью является часть гиперплоскости $y_1 = 0$ и цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси y_1.

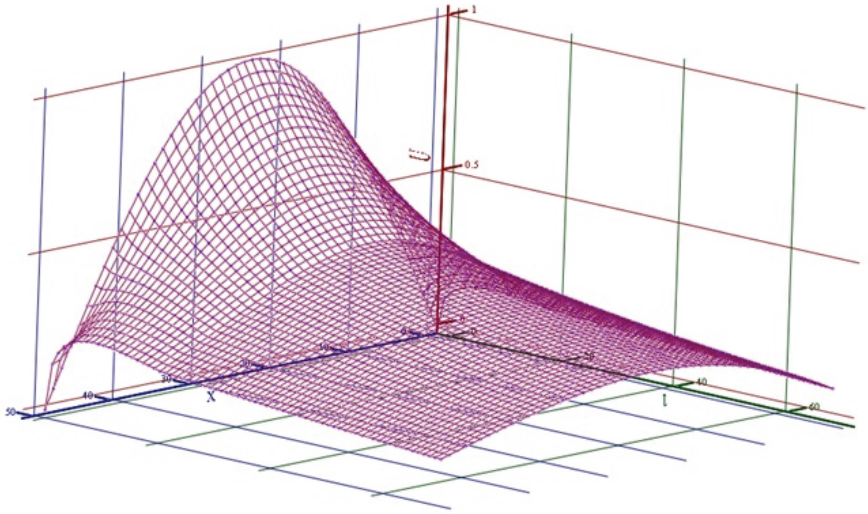

Рис. 1. Результаты расчета.

В области D рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка:

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{n} L_i^* A_i\big(x, D_\beta u, L_j u\big) + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} D_\alpha^* B_\alpha\big(x, D_\beta u, L_j u\big) = h(x), \tag{17}$$

$$|\beta| \leqslant 2, \quad j = \overline{0,n}, \quad L_0 = K, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i} K, \quad i = \overline{1,n}, \quad D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u\big|_\Gamma = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = f_2(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\Big|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = f_3(x), \tag{18}$$

где K — произвольный линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка:

$$Ku \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u, \tag{19}$$

с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющий неравенству

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \geqslant \alpha_1 \|u\|_{W_r^2(D)}, \quad m, r \geqslant 2, \tag{20}$$

для любых функций $u(x) \in C_K$ из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе Γ вместе с первой производной по нормали; $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ; Γ_0 — часть границы Γ, совпадающая с характеристической поверхностью оператора K:

$$\Gamma_0 = \left\{ x \in \Gamma : \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \nu_i \nu_j \right)(x) = 0 \right\}. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что широкий класс эллиптических, параболических и гиперболических операторов второго порядка, а также операторов с вырождением и операторов смешанного типа, в частности, введенный в [1] смешанный оператор теплопроводности при достаточно малой функции релаксации, удовлетворяют неравенству (20) для функций из C_K. В качестве конкретного оператора K вида (19) можно взять также линейный смешанный оператор теплопроводности (1) из второй части данной статьи с обобщением на n-мерный случай:

$$Ku \equiv k(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x,t) + c(x,t)u(x,t),$$

где переменная t играет роль переменной x_1, а переменная x изменяется в пространстве $\mathbb{R}^{(n-1)}$. При выполнении некоторых условий, приведенных в [2,5], показано, что неравенство (20) выполняется при $m = r = 2$.

Если же говорить о структуре всего уравнения (17), то первое слагаемое есть оператор шестого порядка, определяющий тип уравнения и энергетическое пространство; второе слагаемое есть подчиненный оператор, максимум четвертого порядка; условия на нелинейные функции A_i, $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$, $i, j = \overline{0,n}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant 2$, будут приведены далее.

Определим банаховы пространства H_+ и $H_\oplus$ с нормами

$$\|u\|_+ = \|Ku\|_{W_m^1(D)}, \quad \|u\|_\oplus = \|Ku\|_{W_m^1(D)} + \|u\|_{W_e^2(D)}, \quad e \geqslant 2,$$

полученные замыканием по этим нормам множества функций

$$C_L = \left\{ u \in C_K : \left. \frac{\partial u^2}{\partial \nu^2} \right|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Из (20) следует, что $\|\cdot\|_+$ — действительно норма, а пространства H_+ и $H_\oplus$ сепарабельны. Опираясь на работы [5,6], можно показать, что они также рефлексивны и для них имеет место следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $u(x) \in C_K$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое α_2, что выполнено неравенство*

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \geqslant \alpha_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \quad \Gamma_\varepsilon = \Big\{ x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 : \ \rho(x, \Gamma_0) > \varepsilon \Big\}. \tag{22}$$

Доказательство проводится с использованием теорем вложения Соболева, неравенства (19), аналогично схеме, приведенной в [5].

Из теорем вложения пространств Соболева и неравенства (19) непосредственно следует, что краевые условия класса функций C_K выполняются и для функций из пространств H_+ и $H_\oplus$. После введения непрерывного оператора следа для второй производной по нормали на $\Gamma \setminus \Gamma_0$ и продолжения его по непрерывности на пространство H_+ получаем, что по неравенству (22) дополнительное краевое условие класса функций C_L наследуется и для пространства H_+, т.е. для функций из H_+ выполнены однородные краевые условия (18).

В формулировках, приведённых ниже, выражения в скобках означают версии соответствующего утверждения для пространства $H_\oplus$, в отличие от основного варианта — для пространства H_+ (в случае $r \geqslant e$ в пространстве $H_\oplus$ нет необходимости).

Предположим, что функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ из (18) допускают продолжение $f(x)$ внутрь области D из пространства $W_m^3(D) \cap W_k^2(D)$, где $k = \max(r, e)$. Тогда совокупность функций вида $u(x) = z(x) + f(x)$, где $z(x) \in H_+$ $(H_\oplus)$, образует пространство $H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$.

Определение 1. Функцию $u(x) \in H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$ будем называть *слабым обобщенным решением* первой краевой задачи (17), (18), если для всех $v(x) \in C_L$, $j = \overline{0,n}$ и $|\beta| \leqslant 2$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(A_i(x, D_\beta u, L_j u) L_i v \Big) + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \Big(B_\alpha(x, D_\beta u, L_j u), D_\alpha v \Big) = (h, v).$$

Определение 2. Функцию $u(x) \in H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$ будем называть *сильным обобщенным решением* первой краевой задачи (17), (18), если существует такая последовательность функций $z_i(x) \in C_L$, что

$$\lim_{i \to \infty} \|z_i + f - u\|_{+(\oplus)} = \lim_{i \to \infty} \|L(z_i + f) - h\|_{-(\ominus)} = 0,$$

где H_-, $H_\ominus$ — негативные пространства к H_+ и $H_\oplus$, построенные относительно гильбертова пространства $L_2(D)$.

Приведем ряд предположений для различных уравнений вида (17), означающих условия на поведение нелинейных функций A_i, $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$, $i, j = \overline{0, n}$, $|\alpha|$, $|\beta| \leqslant 2$.

1^0. *Условия ограниченности и непрерывности* $L : H_+(f) \to H_-(D)$. Функции A_i, $B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, т.е. почти при всех $x \in D$ непрерывны по совокупности переменных ξ_β, η_j, при всех значениях ξ_β, η_j измеримы по x и удовлетворяют неравенствам

$$\big|A_i(x, \xi_\beta, \eta_j)\big| \leqslant \alpha_3 \left(a(x) + \sum_{|\beta| \leqslant 2} |\xi_\beta|^{p_{i\beta}} + \sum_{j=0}^{n} |\eta_j|^{p_{ij}} \right),$$

$$\big|B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)\big| \leqslant \alpha_3 \left(b(x) + \sum_{|\beta| \leqslant 2} |\xi_\beta|^{p_{\alpha\beta}} + \sum_{j=0}^{n} |\eta_j|^{p_{\alpha j}} \right),$$

где при $n > k$

$$\begin{array}{llll}
 & j = \overline{0, n}: & |\beta| = 2: & |\beta| < 2: \\
i = \overline{0, n}: & p_{ij} = m - 1; & p_{i\beta} = \dfrac{k}{m'}; & p_{i\beta} = \dfrac{kn}{m'(n-k)}; \\
|\alpha| = 2: & p_{\alpha j} = \dfrac{m}{k'}; & p_{\alpha\beta} = k - 1; & p_{\alpha\beta} = \dfrac{n(k-1)}{n-k}; \\
|\alpha| < 2: & p_{\alpha j} = \dfrac{m(n(k-1)+k)}{nk}; & p_{\alpha\beta} = \dfrac{n(k-1)+k}{n}; & p_{\alpha\beta} = \dfrac{n(k-1)+k}{n-k}
\end{array}$$

и $p_{i\beta}$, $p_{\alpha\beta}$ ($i = \overline{0, n}$, $|\alpha| \leqslant 2$, $|\beta| < 2$) — любые неотрицательные числа при $n \leqslant k$ и

$$a(x), b(x) \in L_{p'}(D), \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

2^0. *Условие коэрцитивности оператора* Lu. Для любой функции $u(x) \in H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(A_i\big(x, D_\beta u, L_j u\big), L_i u \Big) + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \Big(B_\alpha\big(x, D_\beta u, L_j u\big), D_\alpha u \Big) \geqslant \alpha_4 \|u\|_+^m - \alpha_5.$$

Для любой функции $u(x) \in H_\oplus(f)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=0}^{n} \Big(A_i\big(x, D_\beta u, L_j u\big), L_i u \Big) + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \Big(B_\alpha\big(x, D_\beta u, L_j u\big), D_\alpha u \Big) \geqslant \alpha_6 \Big(\|u\|_+^m + \|u\|_{W_e^2(D)}^e \Big) - \alpha_7,$$

где $j = \overline{0, n}$, $|\beta| \leqslant 2$.

3^0. *Условие полуограниченности вариации оператора* Lu. Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$ из шара $\|u\|_+ \leqslant R$ $(\|u\|_\oplus \leqslant R)$ справедливо неравенство

$$(Lu - Lv, u - v) \geqslant -c\big(R, \|u - v\|_{W_s^1(D)}\big),$$

где $c(R, \rho) \geqslant 0$ — такая непрерывная функция, что $c(R, \xi\rho)/\xi \xrightarrow[\xi \to +0]{} 0$ для любых R и ρ, $1 \leqslant s < kn/(n-k)$ при $n > k$, s — любое неотрицательное число при $n \leqslant k$.

4^0. *Условие строгой монотонности оператора* Lu. Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$, $u(x) \neq v(x)$, справедливо неравенство $(Lu - Lv, u - v) > 0$.

5^0. *Условие дефинитности вариации оператора Lu.* Для любых функций $u(x), v(x) \in H_+(f)$ имеет место неравенство

$$(Lu - Lv, u - v) \geqslant \alpha_8 \|u - v\|_+^m.$$

Для любых функций $u(x), v(x) \in H_\oplus(f))$ имеет место неравенство

$$((Lu - Lv, u - v) \geqslant \alpha_9 \Big(\|u - v\|_+^m + \|u - v\|_{W_e^2(D)}^e \Big).$$

Как и в работах [5,6], с помощью операторной теоремы (см. [3, с. 29]) доказывается следующий результат.

Теорема. *Если выполнены предположения 1^0–3^0, то первая краевая задача* (17), (18) *для любой функции $h(x) \in H_-$ $(H_\ominus)$ имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение из пространства $H_+(f)$ $(H_\oplus(f))$. Если выполнены предположения 1^0, 2^0, 4^0, то это решение единственно, а при выполнении условий 1^0, 2^0, 5^0 слабое решение совпадает с сильным, т.е. отображение*

$$L : H_+(f) \to H_- \qquad (L : H_\oplus(f) \to H_\ominus)$$

является гомеоморфизмом.

6. Заключение. При исследовании ряда прямых и обратных задач для линейных и нелинейных уравнений $Ku = h$ смешанного типа второго и третьего порядков бывает актуально получение корректных постановок краевых задач для уравнений четвертого и шестого порядков в связи с предложенным Ю. А. Дубинским подходом (см. [3]), когда с уравнением $Ku = h$, которое в общем случае неразрешимо для произвольной правой части h даже из вполне гладких пространств, связывается уравнение $K^*Ku = K^*h$, которое уже разрешимо всегда в этих пространствах. Тогда исходное уравнение разрешимо с точностью до ядра оператора K^*, которое может быть описано с помощью некоторых ортогональных условий на область значений оператора Ku, соответствующего первоначальной некорректной задаче. Если при этом при некоторых условиях на коэффициенты уравнения оператор K^*K осуществляет гомеоморфизм, как показано в настоящей работе даже в еще более общем случае, то численные приближения по методу Галеркина сходятся сильно к гладкому решению из соболевских пространств W_p^l, что очень важно для эффективности численного расчета, а также для доказательства устойчивости некоторых разностных схем для уравнений $Ku = h$.

В случае строгой эллиптичности оператора Ku постановка первой краевой задачи для уравнения (17) не вызывает проблем, и эта задача Дирихле в чистом виде входит частным случаем в данную работу (в частности, упомянем работы Ц. Б. Шойнжурова и его учеников, в которых исследуются различные аналогичные нелинейные эллиптические уравнения и для которых найдены минимумы функционалов погрешности кубатурных формул для численных расчетов в банаховых пространствах W_p^l. В работе В. Н. Врагова [2] для достаточно общих уравнений вида (19)) смешанного типа с помощью метода конечно-разностной аппроксимации доказана оценка (20) данной работы в гильбертовом случае. Кроме этого, в [2] даны оценки скорости сходимости сильных решений для гиперболо-параболических уравнений.

В работе [1], посвященной математическому моделированию процесса гашения электрической дуги в потоке газа, численно и аналитически решаются различные краевые задачи для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье. В [5] приведены обобщение этого оператора теплопроводности на смешанный тип и постановки первой краевой задачи для нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка. Так как энергетическое пространство в этой работе и в [5,6] строится не только для эллиптических операторов $K^*Ku = K^*h$, то для корректности постановки необходимо освободить характеристическую часть границы от некоторых краевых условий, что показано получением определенных априорных внутренних и граничных оценок и применением теорем вложения Соболева.

Кроме этого, обратные задачи для уравнений $Ku = h$ иногда переопределены из-за избыточной информации о решении на всей границе и получение самих решений, как численно, так и аналитически, затруднено вследствие некорректности постановки, тогда как наличие этих дополнительных краевых условий помогает численному решению корректно поставленной первой краевой задачи для уравнения $K^*Ku = K^*h$, для которой было бы интересным создание различных устойчивых разностных схем. В дальнейшем предполагается численное решение краевых задач для уравнений шестого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буянтуев С. Л., Ханхасаев В. Н.* Об одном обобщении уравнений Навье—Стокса// Электричество. — 1996. — *11.* — С. 17–23.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1983.
3. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки техн. Совр. пробл. мат. Нов. достиж. — 1976. — С. 1–130.
4. *Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В.* Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. — М.: Высшая школа, 1990.
5. *Ханхасаев В. Н.* К теории нелинейных уравнений смешанного типа четвертого порядка// в кн.: Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1988. — С. 154–165.
6. *Ханхасаев В. Н.* Разрешимость задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения смешанного типа 4-го порядка// в кн.: Динамика сплошной среды. — Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики СО РАН, 1982. — С. 172–177.
7. *Шашков А. Г.* Волновые явления теплопроводности. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00269).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ханхасаев Владислав Николаевич
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ;
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia;
Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: hanhvladnick@mail.ru

Муняев Сергей Иннокентьевич
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ
(East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: sergmoon1986@mail.ru