ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 43–52
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-43-52

УДК 517.977

МЕТОДЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2025 г. **Д. О. ТРУНИН**

Аннотация. В классе нелинейных по состоянию задач оптимального управления с ограничениями предлагается новый подход к улучшению управлений на основе решения специальных краевых задач. Для решения краевых задач рассматриваются методы возмущений, которые основаны на параметризации задачи оптимального управления с помощью параметра возмущения. Решение построенной невозмущенной краевой задачи сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра. Для решения возмущенной краевой задачи предлагается итерационный процесс, на каждой итерации которого решается задача, по трудоемкости аналогичная невозмущенной задаче.

Ключевые слова: управляемая система с ограничениями, краевая задача улучшения управления, метод возмущений, итерационные алгоритмы.

METHODS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR IMPROVING CONTROL IN SYSTEMS WITH CONSTRAINTS

© 2025 **D. O. TRUNIN**

Abstract. In the class of state-nonlinear optimal control problems with constraints, a new approach to improving controls is proposed. This approach is based on solving special boundary-value problems by perturbation methods and parametrization of the optimal control problem by the perturbation parameter. The solution of the constructed unperturbed boundary-value problem is reduced to the solution of an algebraic equation for one unknown parameter. To solve the perturbed boundary-value problem, an iterative process is proposed, at each iteration of which a problem is solved that is similar in complexity to the unperturbed problem.

Keywords and phrases: controlled system with constraints, boundary-value problem of control improvement, perturbation method, iterative algorithms.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Традиционным подходом к решению задач оптимального управления с ограничениями являются методы на основе штрафных и нагруженных, а также модифицированных функционалов Лагранжа (см. [1,4]). Данный подход основывается на сведении задачи оптимального управления с ограничений к последовательности задач без ограничений, к решению которых применяются соответствующие методы. Для повышения эффективности решения задач без ограничений разработаны различные специализированные методы.

В [5] в классе управляемых линейных по состоянию систем с квадратичным критерием оптимальности без ограничений были предложены методы нелокального улучшения управления. Эти методы основываются на специальных формулах приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений. Улучшение управления достигается в результате решения двух задач Коши. Такая особенность методов является существенным фактором для повышения эффективности решения задач оптимального управления.

В [2] в классах нелинейных задач были построены методы нелокального улучшения управления, развивающие и обобщающие ранее известные методы (см. [5]). Эти методы также основаны на нестандартных формулах приращения целевого функционала без остаточных членов разложений, для получения которых были разработаны специальные модификации сопряженной системы. Улучшение управления достигается в результате решения краевой задачи, которая существенно проще известной краевой задачи принципа максимума. В классе линейных по состоянию задач оптимального управления решение такой краевой задачи сводится к решению двух задач Коши, и рассматриваемые методы становятся эквивалентными методам, предложенным в [5]. В общем случае для решения указанной краевой задачи улучшения управления были разработаны итерационные алгоритмы на основе известного в математике подхода возмущений.

В [3] предложены методы улучшения управления для класса нелинейных по состоянию задач оптимального управления на основе задач о неподвижной точке. Задача улучшения управления рассматривается как задача о неподвижной точке оператора управления, для решения которой модифицируются известные методы неподвижных точек.

В [6] методы из [3] были обобщены на класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с терминальными ограничениями. Условие нелокального улучшения допустимого управления конструируется в форме системы функциональных уравнений в пространстве управлений с дополнительным алгебраическим уравнением, к решению которой применяется аппарат теории и методов неподвижных точек.

В данной статье рассматриваются новые методы для улучшения управления в системах с ограничениями на основе построения специальных краевых задач. Для решения конструируемых краевых задач улучшения управления предлагается подход, основанный на возмущении исходной задачи оптимального управления.

2. Постановка задачи. Рассматривается класс нелинейных по состоянию задач оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством:

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \to \min, \tag{2}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ — вектор состояния, $u = (u_1(t), u_2(t), \ldots u_r(t))$ — вектор управления; начальное состояние $x^0 \in \mathbb{R}^n$ задано; функция $f(x,u,t)$ нелинейна и дифференцируема по x, линейна по u и непрерывна по t на множестве $\mathbb{R}^n \times U \times T$; $U \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклое компактное множество; $c \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор, $c_1 = 0$; $x_1^1 \in \mathbb{R}$ — заданное число; интервал времени T фиксирован. К виду (1)–(3) могут быть приведены различные задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями.

Рассмотрим множество доступных управлений в задаче (1)–(3):

$$V = \big\{ u \in PC^r(T) : \ u(t) \in U, \ t \in T \big\}.$$

Для доступного управления $v \in V$ обозначим через $x(t,v)$, $t \in T$, решение задачи Коши (1) при $u = v(t)$, $t \in T$. Рассмотрим множество допустимых управлений:

$$W = \big\{ u \in V : \ x_1(t_1, u) = x_1^1 \big\}.$$

В задаче (1)–(3) функция Понтрягина имеет вид

$$H(p,x,u,t) = H_0(p,x,t) + \langle H_1(p,x,t), u \rangle.$$

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \Phi_0(u) + \lambda(x_1(t_1,u) - x_1^1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что для допустимого управления u

$$L(u,\lambda) = \Phi_0(u).$$

Пусть $u^0 \in V$, $v \in V$. В соответствии с [3] имеет место формула приращения функционала Лагранжа без остаточных членов приращений:

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int\limits_T \Big\langle H_1\big(p(t,u^0,v,\lambda), x(t,v), t\big),\ v(t) - u^0(t)\Big\rangle dt, \tag{4}$$

где $p(t,u^0,v,\lambda)$, $t \in T$ — решение модифицированной сопряженной системы

$$\begin{gathered}\dot p = -H_x\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t),\\ \Big\langle H_x\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x(t,v) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x(t,v) - x(t,u^0)\Big\rangle = \\ = H\big(p, x(t,v), u^0(t), t\big) - H\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\ p_1(t_1) = -\lambda, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\dots,n.\end{gathered}$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$, удовлетворяющее условию

$$\Phi_0(v) \leqslant \Phi_0(u^0).$$

3. Краевые задачи улучшения управления. Введем в рассмотрение экстремальное отображение

$$u^*(p,x,t) = \arg\max_{v\in U} H(p,x,v,t), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered}\dot x = f\big(x, u^*(p,x,t), t\big), \quad t \in T = [t_0,t_1],\\ \dot p = -H_x\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t),\\ \Big\langle H_x\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle = \\ = H\big(p, x(t), u^0(t), t\big) - H\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\ x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\dots,n.\end{gathered} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть $(x^*(t), p^*(t))$, $t \in T$, — решение краевой задачи* (5). *Сформируем выходное управление $v(t) = u^*(p^*(t), x^*(t), t)$, $t \in T$. Тогда выходное управление v обеспечивает улучшение целевого функционала*: $\Phi_0(v) \leqslant \Phi_0(u^0)$.

Доказательство. Введем обозначение $\lambda^* = -p_1^*(t_1)$. Тогда

$$p^*(t) = p(t,u^0,v,\lambda^*), \quad x^*(t) = x(t,v), \quad v(t) = u^*\big(p(t,u^0,v,\lambda^*), x(t,v), t\big), \quad t \in T.$$

С учетом формулы приращения (4) получаем $L(v,\lambda^*) \leqslant L(u^0,\lambda^*)$. В силу допустимости управлений u^0 и v имеем $\Phi_0(v) \leqslant \Phi_0(u^0)$, что и требовалось доказать. □

Для фиксированного параметра $\alpha > 0$ определим вектор-функцию

$$u^\alpha(p,x,t) = P_U\big(u^0(t) + \alpha H_1(p,x,t)\big), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad t \in T,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме. Имеет место следующая оценка (см. [5]):

$$\int\limits_T \Big\langle H_1(p,x,t),\ u^\alpha(p,x,t) - u^0(t)\Big\rangle dt \geqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_T \big\|u^\alpha(p,x,t) - u^0(t)\big\|^2 dt. \tag{6}$$

Тогда из (4) и (6) следует оценка приращения функционала

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) \leqslant -\frac{1}{\alpha}\int\limits_T \big\|u^\alpha(p,x,t) - u^0(t)\big\|^2 dt. \tag{7}$$

Рассмотрим краевую задачу улучшения

$$\begin{gathered}
\dot{x} = f\big(x, u^{\alpha}(p, x, t), t\big), \quad t \in T = [t_0, t_1], \\
\dot{p} = -H_x\big(p, x(t, u^0), u^0(t), t\big) - r(t), \\
\Big\langle H_x\big(p, x(t, u^0), u^0(t), t\big),\ x(t) - x(t, u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x(t) - x(t, u^0)\Big\rangle = \\
= H\big(p, x(t), u^0(t), t\big) - H\big(p, x(t, u^0), u^0(t), t\big), \\
x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \dots, n.
\end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $(x^{\alpha}(t), p^{\alpha}(t))$, $t \in T$ *— решение краевой задачи* (8). *Сформируем выходное управление*

$$v(t) = u^*\big(p^{\alpha}(t), x^{\alpha}(t), t\big), \quad t \in T.$$

Тогда выходное управление v *обеспечивает улучшение целевого функционала с оценкой*

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u^0) \leqslant -\frac{1}{\alpha} \int\limits_T \big\|v(t) - u^0(t)\big\|^2 dt.$$

Доказательство. Введем обозначение $\overline{\lambda} = -p_1^{\alpha}(t_1)$. Тогда

$$p^{\alpha}(t) = p\big(t, u^0, v, \overline{\lambda}\big), \quad x^{\alpha}(t) = x(t, v), \quad v(t) = u^{\alpha}\big(p(t, u^0, v, \overline{\lambda}), x(t, v), t\big), \quad t \in T.$$

С учетом (4), (6), (7) имеем

$$L(v, \overline{\lambda}) - L(u^0, \overline{\lambda}) \leqslant -\frac{1}{\alpha} \int\limits_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt.$$

В силу допустимости управлений u^0 и v имеем

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u^0) \leqslant -\frac{1}{\alpha} \int\limits_T \|v(t) - u^0(t)\|^2 dt,$$

что и требовалось доказать. □

4. Методы возмущений. К решению краевых задач улучшения (5), (8) применим подход возмущений, основанный на параметризации исходной задачи оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$.

Выделим в задаче (1)–(3) линейную по состоянию часть и представим ее в форме

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A_0(u, t)x + b_0(u, t) + f_1(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\
\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1)\rangle \to \min, \\
x_1(t_1) = x_1^1.
\end{gathered}$$

Рассмотрим возмущенную задачу оптимального управления с параметром возмущения $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\dot{x} = A_0(u, t)x + b_0(u, t) + \varepsilon f_1(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{9}$$

$$\Phi_0(u) = \langle c, x(t_1)\rangle \to \min, \tag{10}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \tag{11}$$

Для задачи (9)–(11) определим возмущенную функцию Понтрягина

$$H_{\varepsilon}(p, x, u, t) = \big\langle p, A_0(u, t)x + b_0(u, t)\big\rangle + \varepsilon\big\langle p, f_1(x, u, t)\big\rangle.$$

В силу линейности по u возмущенная функция Понтрягина имеет следующую структуру:

$$H_{\varepsilon}(p, x, u, t) = H_{\varepsilon 0}(p, x, u, t) + \langle H_{\varepsilon 1}(p, x, t), u\rangle.$$

Введем в рассмотрение возмущенное экстремальное отображение

$$u_{\varepsilon}^*(p, x, t) = \arg\max_{v \in U} H_{\varepsilon}(p, x, v, t), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T. \tag{12}$$

Определим возмущенное отображение на основе операции проектирования

$$u_\varepsilon^\alpha(p,x,t) = P_U\big(u^0(t) + \alpha H_{\varepsilon 1}(p,x,t)\big), \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha > 0, \quad t \in T, \tag{13}$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Краевую задачу улучшения на основе возмущенного экстремального отображения (12) в возмущенной задаче оптимального управления определим как возмущенную краевую задачу

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A_0(u_\varepsilon^*(p,x,t),t)x + b_0(u_\varepsilon^*(p,x,t),t) + \varepsilon f_1\big(x, u_\varepsilon^*(p,x,t),t\big), \quad t \in T = [t_0,t_1],\\
\dot{p} = -H_{\varepsilon x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t),\\
\Big\langle H_{\varepsilon x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle =\\
= H_\varepsilon\big(p, x(t), u^0(t), t\big) - H_\varepsilon\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\
x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{14}$$

Невозмущенная краевая задача улучшения получается из (14) при $\varepsilon = 0$ и имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A_0(u_0^*(p,x,t),t)x + b_0(u_0^*(p,x,t),t), \quad t \in T = [t_0,t_1],\\
\dot{p} = -H_{0x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\
x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{15}$$

Невозмущенная задача (15) сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра $\lambda = -p_1(t_1)$.

Для решения возмущенной краевой задачи (14) при $\varepsilon \in (0,1]$ предлагается итерационный процесс с индексом $k \geqslant 0$:

$$\begin{gathered}
\dot{x}^{k+1} = A_0\big(u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big)x^{k+1} + b_0\big(u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big) +\\
+ \varepsilon f_1\big(x^{k+1}, u_\varepsilon^*(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big), \quad t \in T,\\
x^{k+1}(t_0) = x^0, \quad x_1^{k+1}(t_1) = x_1^1,\\
\dot{p} = -H_{\varepsilon x}\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t),\\
\Big\langle H_{\varepsilon x}\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x^k(t) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x^k(t) - x(t,u^0)\Big\rangle =\\
= H_\varepsilon\big(p^{k+1}, x^k(t), u^0(t), t\big) - H_\varepsilon\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\
p_j^{k+1}(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{16}$$

Краевую задачу улучшения на основе возмущенного отображения (13) в возмущенной задаче оптимального управления определим как возмущенную

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A_0\big(u_\varepsilon^\alpha(p,x,t),t\big)x + b_0\big(u_\varepsilon^\alpha(p,x,t),t\big) + \varepsilon f_1\big(x, u_\varepsilon^\alpha(p,x,t),t\big), \quad t \in T = [t_0,t_1],\\
\dot{p} = -H_{\varepsilon x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t),\\
\Big\langle H_{\varepsilon x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x(t) - x(t,u^0)\Big\rangle =\\
= H_\varepsilon\big(p, x(t), u^0(t), t\big) - H_\varepsilon\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\
x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{17}$$

Невозмущенная краевая задача улучшения получается из (17) при $\varepsilon = 0$ и имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{x} = A_0\big(u_0^\alpha(p,x,t),t\big)x + b_0(u_0^\alpha(p,x,t),t), \quad t \in T = [t_0,t_1],\\
\dot{p} = -H_{0x}\big(p, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\\
x(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x_1^1, \quad p_j(t_1) = -c_j, \quad j = 2,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{18}$$

Невозмущенная задача (18) сводится к решению алгебраического уравнения относительно одного неизвестного параметра $\lambda = -p_1(t_1)$.

Для решения возмущенной краевой задачи (17) при $\varepsilon \in (0,1]$ предлагается итерационный процесс с индексом $k \geqslant 0$:

$$
\begin{gathered}
\dot{x}^{k+1} = A_0\big(u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big)x^{k+1} + b_0\big(u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big) + \\
+ \varepsilon f_1\big(x^{k+1}, u_\varepsilon^\alpha(p^{k+1}, x^{k+1}, t), t\big), \quad t \in T, \\
x^{k+1}(t_0) = x^0, \quad x_1^{k+1}(t_1) = x_1^1, \\
\dot{p} = -H_{\varepsilon x}\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big) - r(t), \\
\Big\langle H_{\varepsilon x}\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big),\ x^k(t) - x(t,u^0)\Big\rangle + \Big\langle r(t),\ x^k(t) - x(t,u^0)\Big\rangle = \\
= H_\varepsilon\big(p^{k+1}, x^k(t), u^0(t), t\big) - H_\varepsilon\big(p^{k+1}, x(t,u^0), u^0(t), t\big), \\
p_j^{k+1}(t_1) = -c_j, \quad j = 2, \ldots, n.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

В качестве начального приближения (x^0, p^0) итерационных процессов (16), (19) при $k = 0$ выбирается решение невозмущенной задачи. На каждой итерации процессов (16), (19) решается задача, по трудоемкости аналогичная невозмущенной задаче.

Итерационные процессы (16), (19) применяются до первого улучшения управления u^0. Если улучшение происходит, то для полученного управления строится новая краевая задача улучшения и процесс повторяется. Если же улучшение не происходит, то увеличиваем значение параметра возмущения. При этом в качестве начального приближения итерационного процесса выбирается решение возмущенной задачи при меньшем значении параметра возмущения.

Таким образом, на основе последовательного решения задач улучшения управления формируется соответствующий итерационный метод построения релаксационной последовательности управлений, удовлетворяющих терминальному ограничению в исходной задаче оптимального управления.

Отметим, что для построения релаксационной последовательности управлений начальное управление u^0 можно выбирать из класса доступных управлений, которое может не удовлетворять терминальному ограничению. Такая возможность является существенным фактором для повышения эффективности использования предлагаемых методов краевых задач.

5. Примеры. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие возможность улучшения допустимых и экстремальных управлений на основе решения краевых задач.

Пример 1.

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0,2], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T, \\
&\dot{x}_2 = x_1^2, \\
&x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\
&\Phi_0(u) = x_2(2) \to \min, \\
&x_1(2) = 1.
\end{aligned}
$$

Поставим задачу улучшения допустимого управления $u^0(t) \equiv 0$, $t \in T$. При этом $x_1(t,u^0) \equiv 1$, $x_2(t,u^0) = t$, $t \in T$, $\Phi_0(u^0) = 2$.

Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0,1]$:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0,2], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T, \\
&\dot{x}_2 = \varepsilon x_1^2, \\
&x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\
&\Phi_0(u) = x_2(2) \to \min, \\
&x_1(2) = 1.
\end{aligned}
$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$
H_\varepsilon(p, x, t) = p_1 u + \varepsilon p_2 x_1^2.
$$

Определим возмущенное отображение на основе операции максимизации (12)

$$u^*_\varepsilon(p_1) = \operatorname{sign} p_1, \quad p_1 \in \mathbb{R}.$$

Положим значение параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \operatorname{sign} p_1, \quad t \in T = [0, 2],\\
&\dot{x}_2 = x_1^2,\\
&\dot{p}_1 = -p_2(x_1 + 1),\\
&\dot{p}_2 = 0,\\
&x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(2) = 1, \quad p_2(2) = -1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Краевая задача (20) сводится к краевой задаче меньшей размерности

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \operatorname{sign} p_1, \quad t \in T = [0, 2],\\
&\dot{p}_1 = x_1 + 1,\\
&x_1(0) = 1, \quad x_1(2) = 1.
\end{aligned} \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \in [0, 1],\\ \ \ t - 1, & t \in [1, 2], \end{cases} \qquad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}, & t \in [0, 1],\\ \ \ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

является решением краевой задачи (21). Сформируем выходное управление:

$$v(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1),\\ \ \ 1, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0:

$$\Phi_0(v) = \frac{2}{3} < \Phi_0(u^0) = 2.$$

Следующие примеры иллюстрируют возможность строгого улучшения допустимого управления, удовлетворяющего принципу максимума.

Пример 2.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,\\
&\dot{x}_2 = -x_1^2,\\
&x_1(0) = x_2(0) = 0,\\
&\Phi_0(u) = x_2(\pi) \to \min,\\
&x_1(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим допустимое управление $u^0 \equiv 0$, $t \in T$. При этом $x_1(t, u^0) = x_2(t, u^0) \equiv 0$, $t \in T$. Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0,\ 1]$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0, \pi], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,\\
&\dot{x}_2 = -\varepsilon x_1^2,\\
&x_1(0) = x_2(0) = 0,\\
&\Phi_0(u) = x_2(\pi) \to \min,\\
&x_1(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(p, x, t) = p_1 u - \varepsilon p_2 x_1^2.$$

Определим возмущенное отображение на основе операции максимизации (12):

$$u_\varepsilon^*(p_1) = \operatorname{sign} p_1, \quad p_1 \in \mathbb{R}.$$

Положим значение параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \operatorname{sign} p_1, \quad t \in T = [0,\pi],\\
&\dot{x}_2 = -x_1^2,\\
&\dot{p}_1 = p_2 x_1,\\
&\dot{p}_2 = 0,\\
&x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0, \quad p_2(\pi) = -1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Краевая задача (22) сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = \operatorname{sign} p_1, \quad t \in T = [0,\pi],\\
&\dot{p}_1 = -x_1,\\
&x_1(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}],\\ -t+\pi, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases} \qquad p_1(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 + \frac{\pi^2}{8}, & t \in [0, \frac{\pi}{2}],\\ \frac{1}{2}t^2 - \pi t + \frac{3\pi^2}{8}, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \end{cases}$$

является решением краевой задачи (23). Сформируем выходное управление:

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{2}),\\ -1, t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0:

$$\Phi_0(v) = -\frac{\pi^3}{12} < \Phi_0(u^0) = 0.$$

Пример 3.

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0,\pi], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,\\
&\dot{x}_2 = -x_1^2,\\
&x_1(0) = x_2(0) = 0,\\
&\Phi_0(u) = x_2(\pi) \to \min,\\
&x_1(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим допустимое управление $u^0 \equiv 0$, $t \in T$. При этом $x_1(t,u^0) = x_2(t,u^0) \equiv 0$, $t \in T$. Параметризуем исходную задачу оптимального управления с помощью параметра возмущения $\varepsilon \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = u, \quad t \in T = [0,\pi], \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T,\\
&\dot{x}_2 = -\varepsilon x_1^2,\\
&x_1(0) = x_2(0) = 0,\\
&\Phi_0(u) = x_2(\pi) \to \min,\\
&x_1(\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Возмущенная функция Понтрягина

$$H_\varepsilon(p,x,t) = p_1 u - \varepsilon p_2 x_1^2.$$

Определим возмущенное отображение на основе операции проектирования (13):

$$u_\varepsilon^\alpha(p_1) = \begin{cases} 1, & \alpha p_1 > 1, \\ -1, & \alpha p_1 < -1, \\ \alpha p_1, & -1 \leqslant \alpha p_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Положим значение параметра проектирования $\alpha = 1$ и параметра возмущения $\varepsilon = 1$. Предположим, что $|p_1(t)| \leqslant 1$, $t \in T$. Тогда возмущенная краевая задача улучшения примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = p_1, \quad t \in T = [0, \pi], \\ &\dot{x}_2 = -x_1^2, \\ &\dot{p}_1 = p_2 x_1, \\ &\dot{p}_2 = 0, \\ &x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0, \quad p_2(\pi) = -1. \end{aligned} \tag{24}$$

Краевая задача (24) сводится к краевой задаче

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = p_1, \quad t \in T = [0, \pi], \\ &\dot{p}_1 = -x_1, \\ &x_1(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что пара функций

$$x_1(t) = \sin t, \quad p_1(t) = \cos t, \quad t \in T,$$

является решением краевой задачи (25) (условие $|p_1(t)| \leqslant 1$, $t \in T$ выполняется). Соответствующее выходное управление

$$v(t) = \cos t, \quad t \in T.$$

Таким образом, выходное управление v строго улучшает исходное u^0:

$$\Phi_0(v) = -\frac{\pi}{2} < \Phi_0(u^0) = 0.$$

6. Заключение. Предлагаемые методы краевых задач для нелокального улучшения допустимых управлений в рассматриваемом классе нелинейных задач с ограничениями характеризуются следующими свойствами.

1. Отсутствие трудоемкой процедуры варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов.
2. Точное выполнение терминального ограничения на каждой итерации последовательных приближений управления.
3. Возможность строгого улучшения неоптимальных экстремальных управлений.
4. Трудоемкость метода на каждой итерации определяется трудоемкостью решения вспомогательной конечномерной параметрической задачи.

Указанные свойства являются важными факторами для повышения эффективности решения задач оптимального управления с ограничениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987.
2. *Булдаев А. С.* Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008.
3. *Булдаев А. С.* Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления// Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — *1.* — С. 35–53.
4. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1994.
5. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
6. *Трунин Д. О.* Проекционные методы улучшения управлений в нелинейных управляемых системах с терминальными ограничениями// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — *224.* — С. 142–149.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.
Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Трунин Дмитрий Олегович (Trunin Dmitry Olegovich)
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)
E-mail: tdobsu@yandex.ru