



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 32–42
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-32-42

УДК 517.956

ВИХРЕВЫЕ МОДЕЛИ СДВИГОВЫХ ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

© 2025 г. В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

Аннотация. Обсуждается математическая модель ламинарных и турбулентных сдвиговых течений жидкости и газов в прямоугольных каналах на основе системы дифференциальных уравнений, описывающих продольное движение и вращение вихревых трубок. Показано, что в случае плоского стационарного течения данная система уравнений имеет двухпараметрические аналитические решения для распределений скорости в поперечном сечении канала, которые хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и результатами численного моделирования. В качестве примеров обсуждаются модельные аппроксимации профилей скорости ламинарных течений неньютоновской жидкости и развитых турбулентных потоков жидкостей и газов в прямоугольных каналах.

Ключевые слова: уравнение вихревых потоков, неньютоновская жидкость, турбулентность, тензор Рейнольдса, вихревая вязкость.

VORTEX MODELS OF SHEAR LAMINAR AND TURBULENT FLOWS

© 2025 V. L. MIRONOV, S. V. MIRONOV

ABSTRACT. We discuss a mathematical model of laminar and turbulent shear flows of liquids and gases in rectangular channels based on a system of differential equations describing the longitudinal motion and rotation of vortex tubes. We show that in the case of a plane steady flow, this system of equations has two-parameter analytical solutions for velocity distributions in the cross-section of the channel, which are in good agreement with known experimental data and the results of numerical simulations. Model approximations of velocity profiles of laminar flows of non-Newtonian liquids and developed turbulent flows of liquids and gases in rectangular channels are discussed as examples.

Keywords and phrases: equation of vortex flows, non-Newtonian liquid, turbulence, Reynolds tensor, eddy viscosity.

AMS Subject Classification: 35Q35; 76A05; 76F25

1. Введение. Характеристики потоков жидкостей и газов в прямоугольных каналах хорошо изучены и являются основой для верификации различных теоретических моделей. Однако несмотря на простоту постановки задачи математическое описание течений жидкостей с большой вязкостью, а также турбулентных потоков жидкостей и газов представляет собой сложную проблему. Действительно, в случае ламинарного потока жидкости с малой вязкостью под действием градиента давления (течение Пуазейля) профиль средней скорости в поперечном сечении канала хорошо изучен и описывается простой параболической функцией. Такие жидкости характеризуются линейной связью между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости (закон Ньютона) и называются ньютоновскими. К ним, например, относятся вода, водные растворы сахара и хлорида натрия, спирты, ароматические углеводороды. Однако увеличение вязкости жидкости приводит к изменению ее реологических свойств и, в первую очередь, это сказывается

на распределении скоростей в канале. Экспериментальные профили скорости в поперечном сечении канала перестают быть параболическими. Для описания течения жидкостей с повышенной вязкостью широко используют эмпирическое соотношение между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости, называемое степенным законом Оствальда—де Ваале (см. [2,7]). Такие жидкости называются неньютоновскими. К ним относятся, например, растворы и расплавы полимеров, суспензии и эмульсии. Основным недостатком модели Оствальда—де Ваале является то, что параметры, входящие в эту модель, существенно зависят от скорости движения жидкости и в этом смысле являются не характеристиками вязкой жидкости как таковой, а характеристиками динамических свойств потока (см. [2]).

С другой стороны, увеличение скорости истечения потока приводит к потере устойчивости ламинарного течения, и оно становится турбулентным (см. [6, 11, 19]). Теоретическое описание турбулентных течений основано на решении уравнения Навье—Стокса, усредненного по времени, в котором влияние флуктуирующей части скорости на средние характеристики течения учитываются тензором напряжений Рейнольдса (см. [12, 16]). Однако непосредственное вычисление компонент тензора Рейнольдса представляет собой очень сложную задачу, поэтому широкое применение находят различные феноменологические модели, устанавливающие связь данного тензора с поперечным градиентом скорости. Одна из основных идей заключается в представлении коэффициента связи (турбулентной / вихревой вязкости) в виде функции, зависящей от координат в потоке. Это предположение позволяет удовлетворительно согласовывать теоретические расчеты с экспериментальными данными, используя различные модели пограничного слоя (см. [6, 8, 10–12, 16, 19]). Однако в моделях такого типа турбулентная вязкость представляет собой очень сложную кусочно гладкую функцию, параметры которой также зависят от скорости истечения потока (числа Рейнольдса Re). Все вышеуказанное приводит к тому, что согласование теоретических моделей течений с результатами экспериментов сопряжено с большим объемом многопараметрических численных расчетов и фактически не вскрывает физическую сущность наблюдаемых в эксперименте особенностей.

Мы предлагаем альтернативные модели сдвиговых течений, основанные на системе дифференциальных уравнений, описывающих поступательное движение и вращение вихревых трубок (см. [13]). Эти уравнения были нами ранее применены для гидродинамического описания электронно-ионной плазмы, а также электронной жидкости в металлах и полупроводниках (см. [14, 15]). В настоящей работе данный подход применяется для описания стационарных ламинарных течений неньютоновской жидкости и полностью развитых турбулентных потоков жидкостей и газов.

2. Уравнения модели вихревого течения. В основе предлагаемой нами модели вихревого потока лежит концепция вихревых трубок Гельмгольца (см. [9]). Согласно этой концепции элементы жидкости совершают одновременно поступательное движение и поворот вокруг мгновенной оси вращения. При этом в потоке можно выделить поле вихревых линий, касательными к которым являются векторы мгновенной угловой скорости. Частицы, расположенные вдоль вихревых линий, образуют вихревые нити, которые движутся поступательно вместе с потоком. В свою очередь, пучки вихревых нитей образуют вихревые трубки, которые и являются основными структурными элементами вихревого потока. С математической точки зрения данная концепция приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида (см. [13]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{w} + \nabla u &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) u + \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \mathbf{w} - \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \xi &= 0, \\ \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) - \mu \Delta \right) \xi + \nabla \cdot \mathbf{w} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

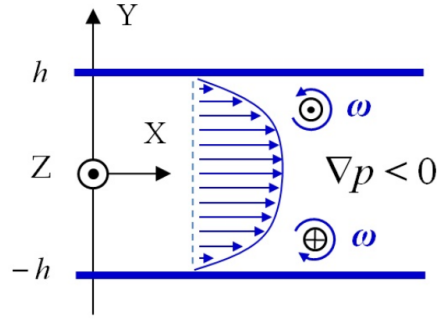


Рис. 1. Схематическое изображение стационарного течения Пуазейля в прямоугольном канале. Горизонтальными стрелками показано распределение скорости в поперечном сечении канала. Вертикальными стрелками обозначено направление вращения вихревых трубок в разных пристеночных областях течения.

Здесь c — скорость звука; μ — кинематическая вязкость жидкости; $\mathbf{v}$ — локальная скорость потока; u — энтальпия на единицу массы жидкости; $\mathbf{w}$ — вектор угла поворота вихревых трубок; ξ — параметр описывающий скручивание вихревых трубок (см. [13]). Первое уравнение системы (1) представляет собой модифицированное уравнение Навье—Стокса. Второе уравнение — это условие неразрывности потока с учетом самодиффузии в жидкости. Третье уравнение описывает динамику вращения вихревых трубок. Последнее уравнение описывает закручивание вихревых трубок. Получение общего решения данной системы представляет собой трудную задачу. Однако для плоского течения данная система уравнений существенно упрощается и допускает аналитические решения.

3. Плоское течение. В качестве базовой модели мы будем рассматривать плоское (в плоскости x, y) течение Пуазейля в прямоугольном канале шириной $2h$ под действием постоянного градиента давления ∇p (см. рис. 1).

В этом случае скорость потока $\mathbf{v}$ имеет только x компоненту и зависит только от координаты y и времени: $v_x = v_x(y, t)$. Аналогично, вектор $\mathbf{w}$ имеет только z компоненту и зависит также от координаты y и времени: $w_z = w_z(y, t)$. Кроме того, мы предполагаем, что вихревые трубки не закручиваются ($\xi = 0$), а энтальпия зависит только от координаты x и градиент энтальпии постоянен:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g.$$

Данный параметр определяется напором жидкости в канале. Тогда в проекциях на оси X и Z система (1) принимает следующую простую форму:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial w_z}{\partial y} - g &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial w_z}{\partial t} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial v_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В следующих разделах мы рассмотрим, как эта простая модель описывает ламинарные и турбулентные потоки.

4. Стационарный ламинарный поток неньютоновской жидкости. Для описания полностью развитого стационарного потока необходимо провести усреднение по времени уравнений (2). При этом для любой функции $a(y, t)$ усреднение сводится к следующей процедуре:

$$\bar{a}(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a(y, t) dt.$$

Для учета вращений трубок мы выделяем в функции $w_x(y, t)$ часть, описывающую регулярное вращение с частотой $\omega_z(y)$, и нерегулярную фазу $\varphi_z(y, t)$:

$$w_z(y, t) = 2c\omega_z(y)t + \varphi_z(y, t).$$

Тогда после усреднения имеем

$$-\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + 2\omega_z(y) = 0. \quad (3)$$

Здесь усредненные функции зависят только от координаты y и введена величина $\lambda = \mu/c$, представляющая собой характерный пространственный масштаб, определяемый вязкостью жидкости.

Течение Пуазейля характеризуется линейным законом распределения угловой скорости в потоке. Будем предполагать что $\omega_z(y) = \kappa y$. В этом случае система уравнений (3) принимает следующий вид:

$$-\lambda \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\kappa y = 0. \quad (4)$$

В качестве граничных условий принимаем условия полного прилипания жидкости к стенкам канала:

$$\bar{v}_x(h) = \bar{v}_x(-h) = 0, \quad \bar{\varphi}_z(h) = \bar{\varphi}_z(-h) = 0. \quad (5)$$

Тогда решение системы (4) с граничными условиями (5) записывается следующим образом:

$$\bar{v}_x = \eta gh \frac{\text{ch}(h/\lambda) - \text{ch}(y/\lambda)}{\text{sh}(h/\lambda)} + gh^2 \frac{(1 - \eta)}{2\lambda} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_z = -\eta gh \frac{\text{sh}(y/\lambda)}{\text{sh}(h/\lambda)} + \eta gy. \quad (7)$$

Здесь η — безразмерный параметр, определяемый поперечным градиентом угловой скорости, кинематической вязкостью и градиентом давления (величиной напора жидкости):

$$\eta = 1 - \frac{2\kappa\lambda}{g}. \quad (8)$$

Данный параметр описывает отклонение от ньютоновского закона для напряжения сдвига. Действительно, при $\eta = 0$ профиль скорости является параболическим и описывает течение ньютоновской жидкости. В этом случае все вихревые трубки вращаются в фазе ($\bar{\varphi}_z(y) = 0$), а градиент угловой скорости вращения вихревых трубок жестко связан с вязкостью жидкости и напором в потоке $\kappa = g/(2\lambda)$. При нарушении этого соотношения профиль скорости перестает быть параболическим.

При $\eta = 1$ профиль скорости является чисто гиперболическим. На рис. 2 приведены нормированные распределения средней скорости $\bar{v}_x/\bar{v}_0$ (где $\bar{v}_0$ — усредненная скорость потока при $y = 0$), рассчитанные по формуле (6) для нескольких значений параметра $\alpha = \lambda/h$. Из рисунка видно, что параметр α определяет в основном изменение профилей скорости вблизи стенок канала. На рис. 3 приведены нормированные распределения фазы $\bar{\varphi}_z/\bar{\varphi}_0$ (где $\bar{\varphi}_0$ — фаза при $y/h = -1$), рассчитанные по формуле (7) для нескольких значений параметра α . При значениях $\alpha < 0,05$ распределение фазы становится практически линейным.

Распределение скорости (6) можно использовать для аппроксимации результатов экспериментальных измерений. В качестве примера на рис. ?? приведены результаты фитинга экспериментальных распределений скорости (см. [7]) в прямоугольном канале для водного раствора полиакриламида с разной концентрацией полимера и при различных напорах жидкости в канале (различных числах Рейнольдса, соответствующих максимальной скорости потока на центральной линии канала). Как видно, наблюдается хорошее согласие между экспериментальными данными и модельными профилями скорости.

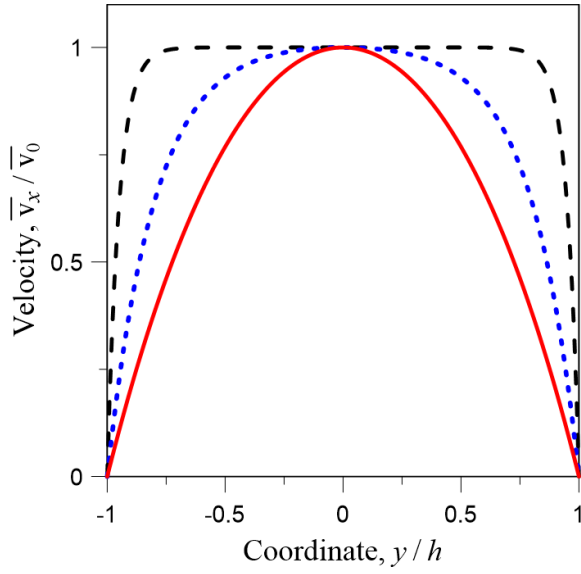


Рис. 2. Распределение усредненной скорости при различных параметрах α . Сплошная линия $\alpha = 0,9$; пунктирная линия $\alpha = 0,2$; штриховая линия $\alpha = 0,05$. Параметр $\eta = 1$.

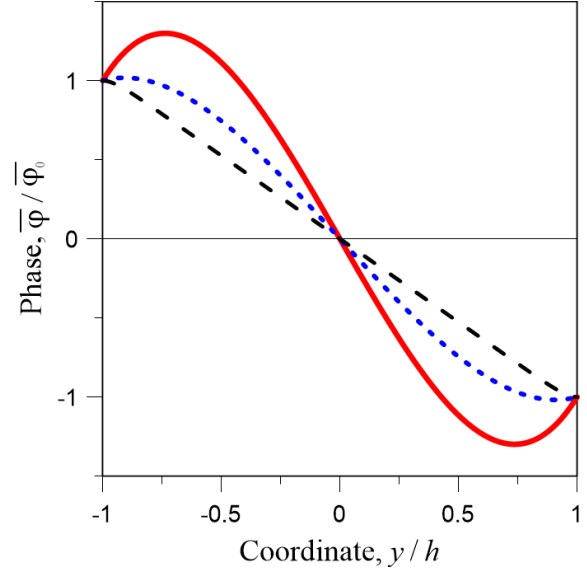


Рис. 3. Распределение фазы вращения вихревых трубок при различных параметрах α . Сплошная линия $\alpha = 0,9$; пунктирная линия $\alpha = 0,7$; штриховая линия $\alpha = 0,05$.

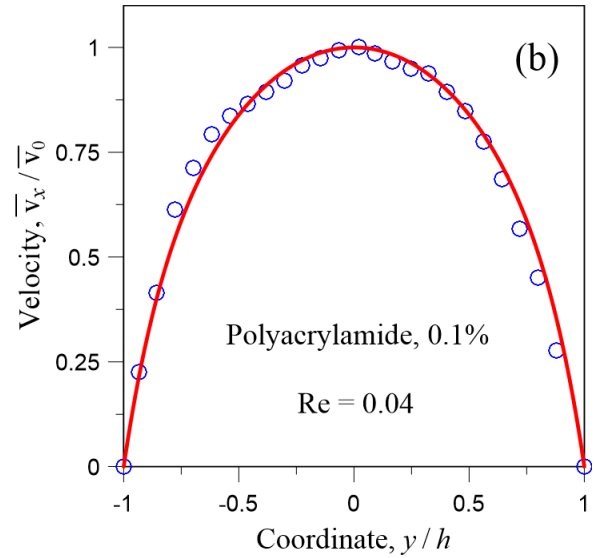
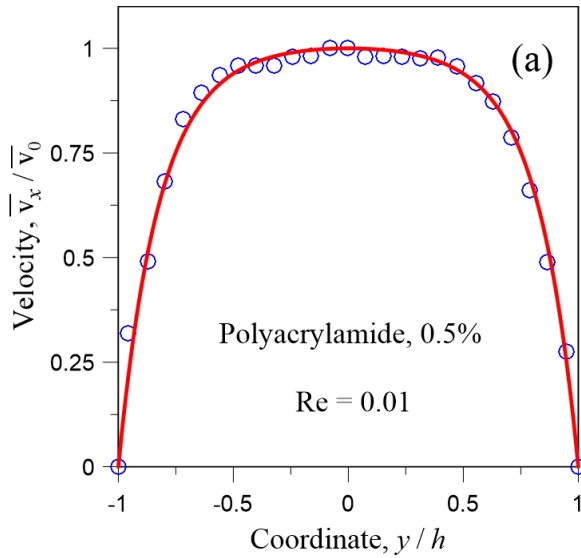


Рис. 4. Нормированные профили скорости для водного раствора полиакриламида с разной концентрацией полимера и при различных числах Рейнольдса. Экспериментальные данные показаны кружками (см. [7]). Результаты фитинга на основе выражения (6) показаны сплошными линиями.

Подгоночные параметры (a) $\alpha = 0,172$; $\eta = 0,98$; (b) $\alpha = 0,17$; $\eta = 0,7$.

5. Турбулентные потоки. Для построения модели турбулентных потоков необходимо учитывать флуктуации всех величин, описывающих движение жидкости. В частности, в рамках принятых приближений для скорости и вектора угла вращения имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}'(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) &= 2c\omega(\mathbf{r})t + \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (9)$$

где величины $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi'(\mathbf{r}, t)$ описывают пульсации скорости и фазы на фоне средних значений. После подстановки (9) в исходные уравнения (1) и усреднения по времени для плоского течения получаем следующие уравнения в проекциях на оси X и Z :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_x v'_y} + \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y} - g &= 0, \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_z}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\varphi'_z v'_y} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + 2\omega_z(y) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь корреляторы $\overline{v'_x v'_y}$ and $\overline{\varphi'_z v'_y}$ представляют собой компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Для их вычисления мы используем гипотезу Буссинеска (см. [3, 17]) о линейной связи между компонентами тензора Рейнольдса и поперечными градиентами скорости и фазы:

$$-\overline{v'_x v'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad (11)$$

$$-\overline{\varphi'_z v'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{\varphi}_z}{\partial y}, \quad (12)$$

где μ_T — кинематическая турбулентная вязкость (вихревая вязкость). В дальнейшем будем предполагать $\mu_T = \text{const}$ и $\omega_z(y) = \kappa y$, что приводит нас к очень простым уравнениям, описывающим турбулентный поток:

$$-\lambda_T \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} - g = 0, \quad -\lambda_T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\kappa y = 0. \quad (13)$$

Здесь величина

$$\lambda_T = (\mu + \mu_T) / c \quad (14)$$

является характерным пространственным масштабом турбулентности. По форме уравнения (13) совпадают с уравнениями для ламинарного потока (4), но имеют другой пространственный масштаб изменения функций, описывающих стационарный поток. В качестве граничных условий остаются условия полного прилипания жидкости к стенкам канала (5). С учетом всего этого для усредненной скорости турбулентного потока имеем следующее распределение:

$$\bar{v}_x = \sigma g h \frac{\text{ch}(h/\lambda_T) - \text{ch}(y/\lambda_T)}{\text{sh}(h/\lambda_T)} + g h^2 \frac{(1 - \sigma)}{2\lambda_T} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (15)$$

Здесь параметр σ определяется поперечным градиентом угловой скорости, вихревой вязкостью и величиной напора жидкости:

$$\sigma = 1 - \frac{2\kappa\lambda_T}{g}. \quad (16)$$

Для сравнения с экспериментальными данными использовалось нормированное распределение $\bar{v}_x/\bar{v}_0$, где $\bar{v}_0$ — усредненная скорость потока при $y = 0$. В этом случае нормированный профиль скорости зависит только от двух параметров $\beta = \lambda_T/h$ и σ , определяемого формулой (16). В качестве примера на рис. 5 приведено сравнение нормированных профилей усредненной скорости, рассчитанных по формуле (15), с экспериментальными кривыми для $\text{Re} = 3500$ (см. [19]) и $\text{Re} = 64600$ (см. [6]). На рис. 6 показаны результаты сравнения профилей средней скорости, рассчитанных с использованием формулы (15) и данных численного моделирования для $\text{Re} = 2013$ (см. [20]) и $\text{Re} = 41441$ (см. [1]). Как видно, во всех случаях аналитические профили хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

6. Обсуждение.

6.1. Неньютоновские жидкости. Для плоского стационарного течения уравнение Навье—Стокса в проекции на ось X записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}) + g = 0, \quad (17)$$

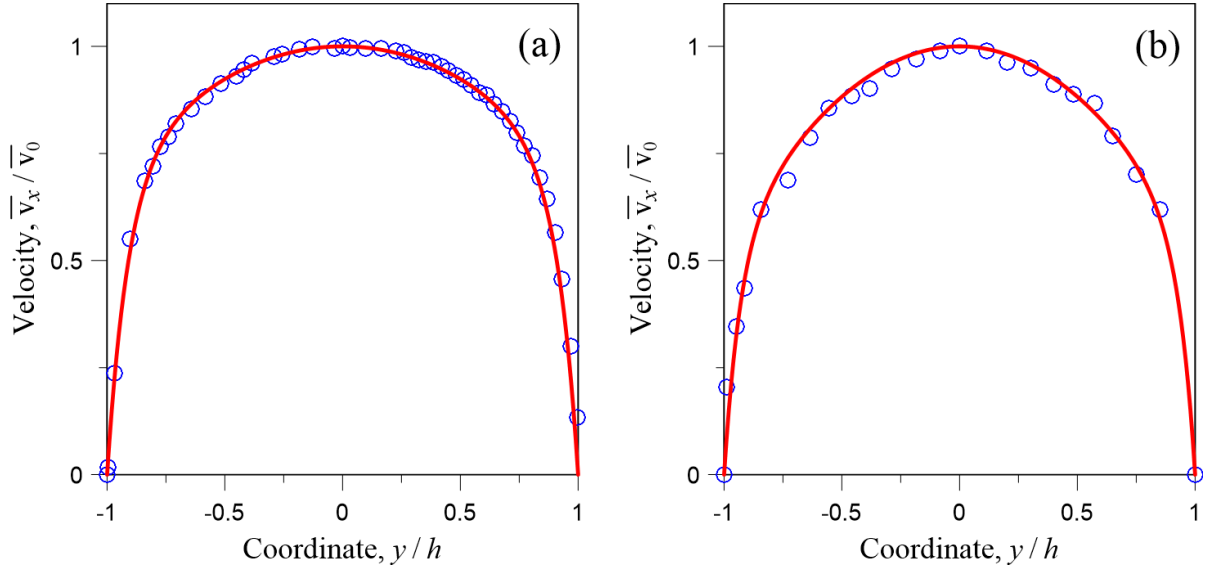


Рис. 5. Профили усредненной скорости. Экспериментальные данные (см. [6, 19]) показаны кружками, результаты подгонки по формуле (15) показаны сплошной линией. (a) $Re = 3500$ (см. [19]); подгоночные параметры $\beta = 0,08$; $\sigma = 0,93$. (b) $Re = 64600$ (см. [6]); подгоночные параметры $\beta = 0,08$; $\sigma = 0,87$.

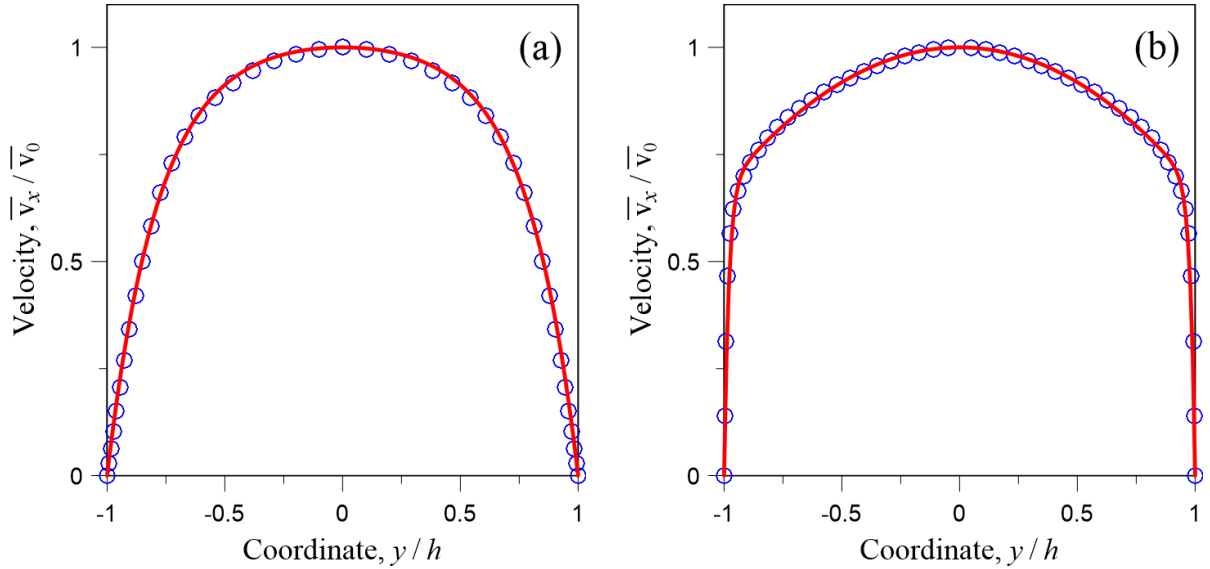


Рис. 6. Профили усредненной скорости. Данные численного моделирования (см. [1, 20]) показаны кружками, результаты подгонки по формуле (15) показаны сплошной линией. (a) $Re = 2013$ (см. [20]); подгоночные параметры $\beta = 0,21$; $\sigma = 0,975$. (b) $Re = 41441$ (см. [1]); подгоночные параметры $\beta = 0,02$; $\sigma = 0,981$.

где τ_{xy} — напряжение сдвига. Ньютоновские жидкости характеризуются линейной связью между напряжением сдвига и поперечным градиентом скорости (закон Ньютона):

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (18)$$

Подстановка (18) в (17) приводит к уравнению, описывающему параболический профиль скорости в поперечном сечении канала. В широко распространенной модели неньютоновской жидкости

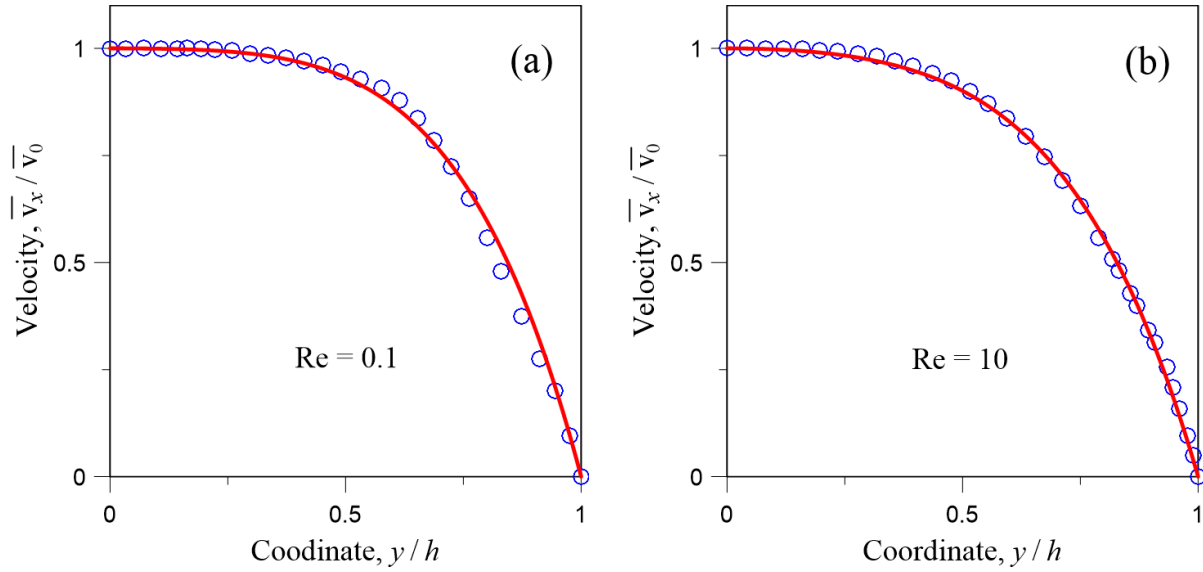


Рис. 7. Профили скорости в потоке раствора полиакриламида (0,4%) с различными Re . Круги — экспериментальные данные (см. [2]), сплошные линии — модельные профили (15). (a) $\alpha = 0,22$; $\sigma = 0,99$. Индекс $n = 0,34$. (b) $\alpha = 0,22$; $\sigma = 0,93$. Индекс $n = 0,4$.

соотношение между напряжением сдвига и градиентом скорости описывается эмпирическим степенным законом Оствальда—де Ваале

$$\tau_{xy} = K \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n, \quad (19)$$

где K — густота жидкости, а n — показатель степени ($0 < n < 1$). При этом эффективная вязкость жидкости оказывается зависящей от индекса n :

$$\mu_e = K \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^{n-1}. \quad (20)$$

Подстановка (19) в (17) приводит к тому, что профиль скорости описывается степенной функцией вида

$$\frac{v_x}{v_0} = 1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (21)$$

Это выражение достаточно хорошо описывает стационарные профили скорости неньютоновской жидкости.

Таким образом, реологические свойства такой неньютоновской жидкости, казалось бы, можно пытаться характеризовать индексом n в законе Оствальда—де Ваале. Однако, как показали эксперименты, для одной и той же жидкости индекс n определяется не только ее вязкостью, но и существенно зависит от напора жидкости в канале, т.е. от числа Рейнольдса (см. [2]). С этой точки зрения индекс n является характеристикой не столько вязких свойств самой жидкости, сколько характеристикой динамических свойств потока.

Предложенная нами двухпараметрическая модель вихревого течения позволяет аппроксимировать профили скорости в канале при разных Re одним и тем же параметром α , который определяется кинематической вязкостью жидкости. В качестве примера на рис. 7 показаны результаты аппроксимации экспериментальных профилей (см. [2]) для потоков водного раствора полиакриламида (0,4%) с существенно различными Re . Подгонка с помощью модельного распределения (21) на основе закона Оствальда—де Ваале показывает, что значения индекса n существенно различаются и составляют $n = 0,34$ для $Re = 0,1$ и $n = 0,4$ для $Re = 10$. С другой стороны, аппроксимация тех же профилей скорости с помощью модельного распределения (15) показывает, что в широком диапазоне чисел Re эта жидкость характеризуется одной и той же кинематической вязкостью

(параметр $\alpha = 0,22$), но разными значениями параметра σ , зависящими от напора жидкости и скорости вращения вихревых трубок.

6.2. Турбулентные потоки. При описании турбулентных течений ситуация еще более сложная. Один из широко используемых подходов к описанию турбулентного течения основан на решении усредненного по времени уравнения Навье—Стокса. В этой модели имеется только одно уравнение, которое для плоского течения Пуазейля имеет следующий вид:

$$-\frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_x v'_y} - g = 0.$$

В этом случае гипотеза Буссинеска (11) с постоянной (не зависящей от координат в потоке) турбулентной вязкостью не описывает профиль скорости турбулентного течения. Профиль остается параболическим. Поэтому для получения удовлетворительного согласия с экспериментальными данными в рамках данной модели принято считать, что турбулентная вязкость зависит от координат в потоке ($\mu_T = \mu_T(y)$). Это приводит к следующему уравнению:

$$\mu \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T(y) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) - cg = 0, \quad (22)$$

в котором главная проблема — выбор феноменологической модели профиля турбулентной вязкости $\mu_T(y)$. Аналитическое выражение для вихревой вязкости, которое обеспечивает хорошее совпадение с экспериментальными данными было предложено Сессом (см. [4]). Согласно модели Сесса профиль турбулентной вязкости в поперечном сечении канала можно представить в следующем виде (см. [18]):

$$\mu_T(y) = \frac{\mu}{2} \left\{ 1 + \frac{K^2 \text{Re}^2}{9} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(1 + 2 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right)^2 \left(1 - \exp \left[\left(\left| \frac{y}{h} \right| - 1 \right) \frac{\text{Re}}{A} \right] \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{\mu}{2}, \quad (23)$$

где Re — число Рейнольдса, K — константа Кармана логарифмического профиля скорости, A — постоянная Дрифта (см. [21]). Профиль усредненной скорости находится из уравнений (22) и (23) следующим образом:

$$\bar{v}_x(y) = \frac{cg}{h} \int_{-h}^y \frac{1 + y/h}{\mu + \mu_T(y)} dy, \quad (24)$$

где интеграл может быть рассчитан численными методами. Аппроксимация экспериментальных результатов функцией (24) представляет собой трудоемкую задачу.

В предлагаемой нами вихревой модели турбулентный поток описывается двумя уравнениями (10). В этом случае гипотеза Буссинеска (11) и (12) с постоянной (не зависящей от координат) вихревой вязкостью (см. уравнения (13) и (14)) немедленно дает комбинированный гиперболический-параболический профиль средней скорости (15) в аналитической форме. Распределение средней скорости определяется всего лишь двумя параметрами β и σ , зависящими от числа Рейнольдса.

Зависимости $\beta = \beta(\text{Re})$ и $\sigma = \sigma(\text{Re})$ могут быть использованы для оценки величины турбулентной вязкости μ_T по формуле (14) и поперечного градиента угловой скорости κ по формуле (16) с использованием экспериментальных значений скорости звука, кинематической вязкости, ширины канала и экспериментальных чисел Рейнольдса следующим образом:

$$\mu_T = \text{ch } \beta(\text{Re}) - \mu, \quad \kappa = \frac{1 - g\sigma(\text{Re})}{2h\beta(\text{Re})}.$$

Функции $\beta = \beta(\text{Re})$ и $\sigma = \sigma(\text{Re})$ могут быть протабулированы на основе либо экспериментальных данных, либо на основе результатов численного моделирования. В качестве примера на рис. 8 приведены зависимости параметров β и σ от числа Рейнольдса (показаны кружками), полученные посредством фитирования по формуле (15) профилей скорости, рассчитанных методом численного моделирования (см. [5]).

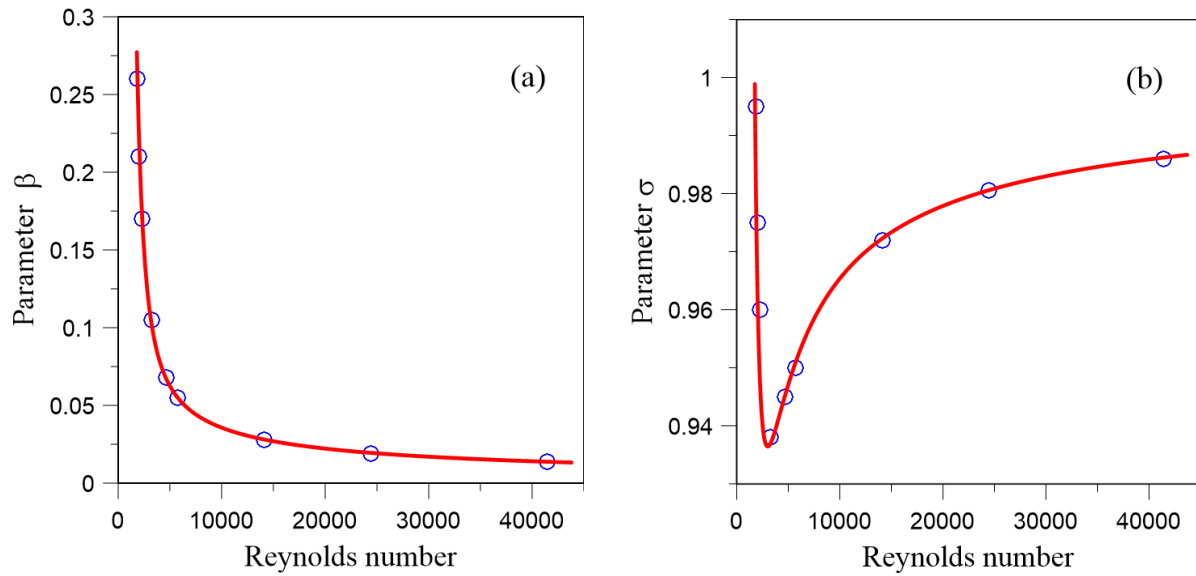


Рис. 8. Зависимости параметров β (a) и σ (b) от числа Рейнольдса. Кругами показаны результаты подгонки по формуле (15) профилей скорости, полученных в численном моделировании (см. [5]). Сплошные линии соответствуют степенным аппроксимирующим функциям (25) и (26).

Результаты фитирования (см. рис. 8) можно аппроксимировать, например, комбинацией степенных функций. Так, для параметра β возможна аппроксимация следующего вида:

$$\beta = \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-3} + 1,155 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-0,65}. \quad (25)$$

Данная зависимость представлена сплошной линией на рис. 8(a). Для параметра σ возможна аппроксимация следующего вида:

$$\sigma = 1 + 1,2 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-4} - 1,155 \left(\frac{\text{Re}}{1000}\right)^{-0,65}. \quad (26)$$

Данная зависимость представлена сплошной линией на рис. 8(b).

Аппроксимирующие функции (25) и (26) могут быть полезны для прогнозирования профилей распределения средней скорости в турбулентном потоке, а также для оценки турбулентной вязкости и градиента угловой скорости вращения вихревых трубок.

7. Заключение. Таким образом, мы показали, что при упрощающих предположениях предлагаемая модель вихревого плоского течения приводит к системе двух уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В случае стационарного течения Пуазейля в прямоугольном канале эти уравнения допускают аналитические решения. Распределение средней скорости в поперечном сечении канала представляется в виде комбинации степенной и гиперболической функций, зависящих от двух параметров. На основе данной модели рассмотрены ламинарные течения неньютоновской жидкости и стационарные полностью развитые турбулентные потоки. Показано, что рассчитанные профили скорости для данных течений хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abe H. Poi1020-4th-A-ver2.dat// in: DNS Data Base for Turbulent Channel Flow with Heat Transfer (Kawamura H., ed.). — https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/poi/text/Poi1020_4th_A_ver2.dat.
2. Ansari S., Rashid M., Waghmare P. R., Nobes D. S. Measurement of the flow behavior index of Newtonian and shear-thinning fluids via analysis of the flow velocity characteristics in a mini-channel// SN Appl. Sci. — 2020. — 2. — 1787.

3. *Boussinesq J.* Essai sur la th'eorie des eaux courantes// J. Math. Pures Appl. Ser. 3 — 1878. — 4. — P. 335–376.
4. *Cess R. D.* A Survey of the Literature on Heat Transfer in Turbulent Tube Flow. — Westinghouse Research Report No. 8-0529-R24, 1958.
5. DNS Database of Wall Turbulence and Heat Transfer. — <https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/>.
6. *El Telbany M. M. M., Reynolds A. J.* Velocity distributions in plane turbulent channel flows// J. Fluid Mech. — 1980. — 100. — P. 1–29.
7. *Fu T., Carrier O., Funfschilling D., Ma Y., Li H. Z.* Newtonian and Non-Newtonian flows in microchannels: inline rheological characterization// Chem. Eng. Technol. — 2016. — 39. — P. 987–992.
8. *Hanjalic K., Launder B. E.* A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows// J. Fluid Mech. — 1972. — 52. — P. 609–638.
9. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen// J. Reine Angew. Math. — 1858. — 55. — P. 25–55.
10. *Henry F. S., Reynolds A. J.* Analytical solution of two gradient-diffusion models applied to turbulent Couette flow// J. Fluids Eng. — 1984. — 106. — P. 211–216.
11. *Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C.* Measurements in fully developed turbulent channel flow// J. Fluids Eng. — 1975. — 97. — P. 568–578.
12. *McComb W. D.* Theory of turbulence// Rep. Progr. Phys. — 1995. — 58. — P. 1117–1206.
13. *Mironov V. L., Mironov S. V.* Generalized sedeonic equations of hydrodynamics// Eur. Phys. J. Plus. — 2020. — 135. — P. 708.
14. *Mironov V. L.* Self-consistent hydrodynamic two-fluid model of vortex plasma// Phys. Fluids. — 2021. — 33. — P. 037116.
15. *Mironov V. L.* Self-consistent hydrodynamic model of electron vortex fluid in solids// Fluids. — 2022. — 7. — P. 330.
16. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion// Phil. Trans. Roy. Soc. London A. — 1895. — 186. — P. 123–164.
17. *Schmitt F. G.* About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity// C. R. Méc. — 2007. — 335. — P. 617–627.
18. *Symon S., Madhusudanan A., Illingworth S. J., Marusic I.* Use of eddy viscosity in resolvent analysis of turbulent channel flow// Phys. Rev. Fluids. — 2023. — 8. — 064601.
19. *Thurlow E. M., Klewicki J. C.* Experimental study of turbulent Poiseuille–Couette flow// Phys. Fluids. — 2000. — 12. — P. 865–875.
20. *Tsukahara T.* Poi070-2nd-A.dat// in: DNS Data Base for Turbulent Channel Flow with Heat Transfer (*Kawamura H.*, ed.). — https://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/poi/text/Poi070_2nd_A.dat.
21. *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall// J. Aeronaut. Sci. — 1956. — 23. — P. 1007–1011.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Миронов Виктор Леонидович Mironov Viktor Leonidovich
Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород
(Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, Nizhnii Novgorod, Russia)
E-mail: mironov@ipmras.ru

Миронов Сергей Викторович Mironov Sergey Viktorovich
Институт физики микроструктур РАН, Нижний Новгород
(Institute for Physics of Microstructures, Russian Academy of Sciences, Nizhnii Novgorod, Russia)
E-mail: sermironov@rambler.ru