ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 25–31
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-25-31

УДК 517.972

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫРОЖДЕНИЙ

© 2025 г. **М. Дж. МАРДАНОВ, Т. К. МЕЛИКОВ**

Аннотация. Рассматривается вариационная задача с запаздыванием при вырождении условия Вейерштрасса. Получены необходимые условия типа равенства и неравенства как для сильного, так и для слабого локального минимума. Приведен конкретный пример, демонстрирующий эффективность полученных результатов.

***Ключевые слова*:** вариационная задача с запаздывающим аргументом, сильный (слабый) локальный минимум, необходимые условия типа равенства (неравенства), вырождение в точке.

NECESSARY CONDITIONS FOR A MINIMUM IN VARIATIONAL PROBLEMS WITH DELAY IN THE PRESENCE OF DEGENERACIES

© 2025 **M. J. MARDANOV, T. G. MELIKOV**

Abstract. This article examines the minimum of an extremal in the variational problem with delay under the degeneracy of the Weierstrass condition. We obtain necessary conditions of equality type and inequality type for a strong as well as for a weak local minimum. Necessary conditions of equality and inequality types are obtained for strong as well as weak local minimum. A specific example demonstrating the effectiveness of the results in this paper is provided.

***Keywords and phrases*:** variational problem with delayed argument, strong (weak) local minimum, necessary condition type equality (inequality), degeneration at the point.

***AMS Subject Classification*:** 49Kxx

1. Введение и постановка задачи. В настоящей работе рассматривается следующая векторная вариационная задача с запаздывающим аргументом:

$$S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t,\ x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t),\ \dot{x}(t-h)\big)dt \to \min_{x(\cdot)}, \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad x(t_1) = x_1, \quad x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство, t_0, $t_1 \in (-\infty, +\infty)$, x_0 и x_1 — заданные точки, $h = \mathrm{const} > 0$, $t_1 - t_0 > h$,

$$L\big(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}\big) : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad \varphi(t) \in C^1\big([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^n\big)$$

— заданные непрерывно дифференцируемые функции по совокупности аргументов, $y = y(t) = x(t-h)$, $\dot{y} := \dot{y}(t) = \dot{x}(t-h)$, $t \in I := [t_0, t_1]$; более того, $x(t) \in KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$, $\hat{I} := [t_0 - h, t_1]$ и $KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$ — класс кусочно гладких функций.

Функции $x(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (2), назовем допустимыми функциями.

Пусть $\overline{x}(\cdot)$ — допустимая функция. Для сокращения записи и удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{L}(\tau) &:= L\big(\tau,\ \bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \dot{\bar{x}}(\tau),\ \dot{\bar{y}}(\tau)\big), \\ \bar{L}\big(\tau,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) &:= L\big(\tau,\ \bar{x}(\tau),\ \bar{y}(\tau),\ \dot{\bar{x}}(\tau)+\xi,\ \dot{\bar{y}}(\tau)\big), \\ \bar{L}\big(\tau,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) &:= L\big(\tau,\ \bar{x}(t),\ \bar{y}(\tau),\ \dot{\bar{x}}(\tau),\ \dot{\bar{y}}(\tau)+\xi\big); \end{aligned} \tag{3}$$

аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{L}_x(\tau)$, $\bar{L}_y(\tau)$, $\bar{L}_{\dot{x}}(\tau)$, $\bar{L}_{\dot{y}}(\tau)$, $\bar{L}_x(\tau,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot))$ и $\bar{L}_y(\tau,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot))$, где $\tau \in I$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$\begin{aligned} E(\bar{L})\big(\tau,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) &:= \bar{L}\big(\tau,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\tau)\big) - \bar{L}(\tau) - \bar{L}^T_{\dot{x}}(\tau)\xi, \\ E(\bar{L})\big(\nu,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) &:= \bar{L}\big(\nu,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) - \bar{L}(\nu) - \bar{L}^T_{\dot{y}}(\nu)\xi; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Q_k(\bar{L})\big(\tau,\ \lambda,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) &:= \lambda^k E(\bar{L})\big(\tau,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + (1-\lambda^k)E(\bar{L})\left(\tau,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\right), \\ Q_k(\bar{L})\big(\nu,\ \lambda,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) &:= \lambda^k E(\bar{L})\big(\nu,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) + (1-\lambda^k)E(\bar{L})\left(\nu,\ \frac{\lambda}{\lambda-1}\xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda \in (0,1)$, $k = 1, 2$;

$$\begin{aligned} M(\bar{L}_x)\big(\tau,\lambda,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)\big) &:= \lambda\Big[\bar{L}^T_x\big(\tau,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)\big) - \bar{L}^T_x(\tau)\Big]\xi + (1-\lambda)\left[\bar{L}^T_x\left(\tau,\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)\right) - \bar{L}^T_x(\tau)\right]\xi, \\ M(\bar{L}_y)\big(\nu,\lambda,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)\big) &:= \lambda\Big[\bar{L}^T_y\big(\nu,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)\big) - \bar{L}^T_y(\nu)\Big]\xi + (1-\lambda)\left[\bar{L}^T_y\left(\nu,\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)\right) - \bar{L}^T_y(\nu)\right]\xi, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\tau, \nu \in \{t, t+h\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$.

Напомним некоторые понятия, необходимые в дальнейшем (см., например, [20, 22]). Допустимая функция $\overline{x}(\cdot)$ называется сильным (слабым) локальным минимумом в задаче (1)–(2), если существует такое число $\bar{\delta} > 0$ (соответственно, $\hat{\delta} > 0$), что неравенство $S(x(\cdot)) \geqslant S(\bar{x}(\cdot))$ выполняется для всех допустимых функций $x(\cdot)$, для которых

$$\big\|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\big\|_{C(\hat{I},\mathbb{R}^n)} = \hat{\delta};$$

соответственно,

$$\max\Big\{\big\|x(\cdot) - \bar{x}\big\|_{C(\hat{I},\mathbb{R}^n)},\ \big\|x(\cdot) - \dot{\bar{x}}(\cdot)\big\|_{L_\infty(\hat{I},\mathbb{R}^n)}\Big\} = \hat{\delta}.$$

Очевидно, что любой сильный локальный минимум одновременно является и слабым, но обратное верно не всегда (см. [20]).

Напомним также (см. [13]) некоторые известные необходимые условия сильного и слабого локального минимума для рассматриваемой задачи (1)-(2):

(a) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то вдоль функции $\bar{x}(\cdot)$ первая вариация функционала (1) равна нулю, т.е. с учетом (3) равенство

$$\delta S\big(\bar{x}(\cdot);\delta x(\cdot)\big) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\{\Big[\bar{L}^T_x(t) + \bar{L}^T_y(t+h)\Big]\delta x(t) + \Big[\bar{L}^T_{\dot{x}}(t) + \bar{L}^T_{\dot{y}}(t+h)\Big]\delta\dot{x}(t)\Big\}dt = 0 \tag{7}$$

выполняется для всех $\delta x(t) \in KC^1(\hat{I}, \mathbb{R}^n)$ и $\delta x(t) = 0$ при $t \in [t_0 - h, t_0] \cup \{t_1\}$ (см. [13]);

(b) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), а функция $\ddot{\bar{x}}(\cdot)$ непрерывна в точках множества $\widetilde{I} \subset I$, где $I \setminus \widetilde{I}$ является конечным множеством, причем функции $L(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных, то функция является решением уравнения Эйлера (см. [13]):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_x(t), && t \in \widetilde{I} \cap (t_1 - h, t_1], \\ &\frac{d}{dt}\big[\bar{L}_{\dot{x}}(t) + \bar{L}_{\dot{y}}(t+h)\big] = \bar{L}_x(t) + \bar{L}_y(t+h), && t \in \widetilde{I} \cap [t_0, t_1 - h); \end{aligned} \tag{8}$$

(c) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом в задаче (1)–(2), то вдоль нее выполняется аналог условия Вейерштрасса, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие неравенства (см. [22]):

$$\begin{aligned} &E(\bar{L})\big(t,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) \geqslant 0 && \forall\, t \in I^* \cap [t_1 - h, t_1], \\ &E(\bar{L})\big(t,\ \xi;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big(t+h,\ \xi;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) \geqslant 0 && \forall\, t \in I^* \cap [t_0, t_1 - h]; \end{aligned} \tag{9}$$

здесь $I^* \subseteq [t_0, t_1]$ — множество точек, в которых функции $\dot{\bar{x}}(\cdot)$ непрерывны; функции $E(\bar{L})(\cdot; \dot{x}(\cdot))$ и $E(\bar{L})(\cdot; \dot{y}(\cdot))$ определяются формулой (4);

(d) если допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то существует такое число $\delta > 0$, что для любого $\xi \in B_\delta(0)$ выполняются неравенства (9), где $B_\delta(0)$ — шар радиуса δ с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ (см. [22]).

Допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ называется экстремалью задачи (1)–(2), если она удовлетворяет уравнению (7). Следует отметить, что применение условия Вейерштрасса (9) как необходимого условия минимума более эффективно, если в каждой точке $t \in I$ неравенства (9) переходят в равенство только при $\xi = 0$. Однако может случиться так, что хотя бы в одной точке $\theta \in I$ неравенства (9) перейдут в равенство в нескольких точках $\xi \in \mathbb{R}^n$. В этом случае говорят, что условия Вейерштрасса (9) вырождаются в точке θ.

Ясно, что задача (1)–(2) в терминах теории оптимального управления принимает вид

$$S\big(x(\cdot), x_{n+1}(\cdot)\big) = x_{n+1}(t_1) \to \min_{u(\cdot)}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \quad u(t) \in KC(\widehat{I}, \mathbb{R}^n), \\ \dot{x}_{n+1}(t) = L\big(t,\ x(t),\ x(t-h),\ u(t),\ u(t-h)\big), \quad t \in (t_0, t_1]; \end{cases} \tag{11}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad u(t) = \dot{\varphi}(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad x(t_1) = x_1, \quad x_{n+1}(t_0) = 0, \tag{12}$$

где $KC(\widehat{I}, \mathbb{R}^n)$ — класс кусочно непрерывных функций.

Как известно, вырожденные случаи в теории оптимального управления изучаются в терминах особых управлений. Для оптимальности особых управлений в задачах управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, получен ряд важных результатов (см., например, [1,3–5,8,11,12,14–16,20]). В дальнейшем некоторые из этих результатов были существенно обобщены на задачи управления с запаздываниями только в фазовых переменных (см., например, [2,6,7,9,10,17–19,21]) и на задачи с запаздываниями в управлении (см., например, [6,17,19]).

2. Специальные вариации экстремали. Пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2) и $\upsilon := (\theta, \lambda, \xi) \in [t_0, t_1 - h] \times (0, 1) \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ — произвольная фиксированная точка. Следуя [21], введем следующие специальные вариации экстремали $\bar{x}(\cdot)$:

(i) вариация, введенная справа относительно точки $\theta \in [t_0, t_1 - h)$:

$$x^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \tag{13}$$

где функция $q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon)$ определена соотношением

$$q^{(+)}(t; \vartheta, \varepsilon) = \begin{cases} (t - \theta)\xi, & t \in [\theta, \theta + \lambda\varepsilon), \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta - \varepsilon)\xi, & t \in [\theta + \lambda\varepsilon, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \tag{14}$$

где $\lambda \in (0, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$, $\overline{\varepsilon} = \min\{h, t_1 - \theta - h\}$;

(ii) вариация, введенная слева относительно точки $\theta \in (t_0, t_1 - h]$:

$$x^{(-)}(t;\vartheta,\varepsilon) = \bar{x}(t) + q^{(-)}(t;\vartheta,\varepsilon), \quad t \in \hat{I}, \tag{15}$$

$$q^{(-)}(t;\vartheta,\varepsilon) = \begin{cases} (t-\theta)\xi, & t \in (\theta - \lambda\varepsilon, \theta], \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}(t - \theta + \varepsilon)\xi, & t \in (\theta - \varepsilon, \theta - \lambda\varepsilon], \\ 0, & t \in \hat{I} \setminus (\theta - \varepsilon, \theta], \end{cases} \tag{16}$$

где $\lambda \in (0,1)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\vartheta = (\theta, \lambda, \xi)$ и $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$, $\tilde{\varepsilon} = \min\{h, \theta - t_0\}$.

Далее вычисляются приращения функционала (1), соответствующие вариациям (13), (15), и доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функции $L(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов и допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является экстремалью задачи (1)–(2), вдоль которой для векторов $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\dfrac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1}\eta$, $\bar{\lambda} \in (0,1)$, условия Вейерштрасса в любой точке интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_1) \subset [t_0, t_1 - h]$ вырождаются, т.е. имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &E(\bar{L})\big(t,\ \eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big(t + h,\ \eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = 0 && \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1), \\ &E(\bar{L})\left(t,\ \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1}\eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\right) + E(\bar{L})\left(t,\ \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1}\eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\right) = 0 && \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1). \end{aligned} \tag{17}$$

Кроме того, пусть функция $\bar{x}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в интервалах $(\bar{t}_0 - h, \bar{t}_1 - h)$, $(\bar{t}_0, \bar{t}_1)$ и $(\bar{t}_0 + h, \bar{t}_1 + h)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *если функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом в задаче (1)–(2), то выполняется равенство*

$$M(\bar{L}_x)\big(t,\ \bar{\lambda},\ \eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + M(\bar{L}_y)\big(t + h,\ \bar{\lambda},\ \eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = 0 \quad \forall t \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1), \tag{18}$$

где функции $M(\bar{L}_x)\big(\cdot, \dot{\bar{x}}(\cdot)\big)$ и $M(\bar{L}_y)\big(\cdot, \dot{\bar{y}}(\cdot)\big)$ определяются по формуле (6);

(ii) *если функция $\bar{x}(\cdot)$ является слабым локальным минимумом в задаче (1)–(2), то существует число $\delta > 0$, при котором для каждого $\left(\overline{\lambda}, \eta, \dfrac{\overline{\lambda}}{\overline{\lambda} - 1}\eta\right) \in (0,1) \times B_\delta(0) \times B_\delta(0)$, удовлетворяющего условиям (17), выполняется равенство (18), где $B_\delta(0)$ — замкнутый шар радиуса δ с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$.*

Теорема 2. *Пусть функции $L(\cdot)$, $L_{\dot{x}}(\cdot)$ и $L_{\dot{y}}(\cdot)$ являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, а функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Кроме того, пусть допустимая функция $\bar{x}(\cdot)$ является сильным локальным минимумом задачи (1)–(2). Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $\theta \in [t_0, t_1 - h)$ ($\theta \in (t_0, t_1 - h]$) и функция $\bar{x}(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема в правой (левой) полуокрестности каждой из точек $\theta - h$, θ и $\theta + h$; кроме того, вдоль неё для числа $\bar{\lambda} \in (0,1)$, а также для векторов $\eta \neq 0$ и $(\bar{\lambda} - 1)^{-1}\overline{\lambda}\eta$ условия Вейерштрасса (9) вырождаются справа (слева) в точке θ, т.е. имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &E(\bar{L})\big(\theta_+,\ \eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big((\theta + h)_+,\ \eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = \\ &\quad = E(\bar{L})\big(\theta_+,\ \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big((\theta + h)_+,\ (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

или

$$\begin{aligned} &E(\bar{L})\big(\theta_-,\ \eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big((\theta + h)_-,\ \eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = \\ &\quad = E(\bar{L})\big(\theta_-,\ \bar{\lambda}(1 - \bar{\lambda})^{-1}\eta;\ \dot{\bar{x}}(\cdot)\big) + E(\bar{L})\big((\theta + h)_-,\ (1 - \bar{\lambda})^{-1}\bar{\lambda}\eta;\ \dot{\bar{y}}(\cdot)\big) = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

то выполняются следующие неравенства:

$$\bar\lambda\Big[M(\bar L_x)\big(\theta_+,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+M(\bar L_y)\big((\theta+h)_+,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)\Big]+ \\ +\frac{d}{dt}\Big[Q_2(\bar L)\big(\theta_+,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+Q_2(\bar L)\big((\theta+h)_+,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)\Big]\geqslant 0 \quad (21)$$

или

$$\bar\lambda\Big[M(\bar L_x)\big(\theta_-,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+M(\bar L_y)\big((\theta+h)_-,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)\Big]+ \\ +\frac{d}{dt}\Big[Q_2(\bar L)\big(\theta_-,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+Q_2(\bar L)\big((\theta+h)_-,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)\Big]\leqslant 0, \quad (22)$$

где $E(\bar L)(\cdot)$, $Q_2(\bar L)(\cdot)$, $M(\bar L_x)(\cdot)$ *и* $M(\bar L_y)(\cdot)$ *определяются по формулам* (4)–(6);

(ii) *если* $\theta\in(t_0,t_1-h)$, *функция* $\bar x(\cdot)$ *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности каждой из точек* $\theta-h$, θ *и* $\theta+h$; *кроме того, вдоль неё для числа* $\bar\lambda\in(0,1)$, *а также для векторов* $\eta\neq 0$ *и* $(\bar\lambda-1)^{-1}\bar\lambda\eta$ *условия Вейерштрасса вырождаются в точке* θ, *т.е. имеют место равенства*

$$\begin{gathered} E(\bar L)\big(\theta,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+E(\bar L)\big(\theta+h,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)=0,\\ E(\bar L)\big(\theta,\ (1-\bar\lambda)^{-1}\bar\lambda\eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+E(\bar L)\big(\theta+h,\ (1-\bar\lambda)^{-1}\bar\lambda\eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)=0, \end{gathered} \quad (23)$$

то справедливо равенство

$$M(\bar L_x)\big(\theta,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar x}(\cdot)\big)+M(\bar L_y)\big(\theta+h,\ \bar\lambda,\ \eta;\ \dot{\bar y}(\cdot)\big)=0. \quad (24)$$

Теорема 3. *Пусть функции* $L(\cdot)$, $L_{\dot x}(\cdot)$ *и* $L_{\dot y}(\cdot)$ *являются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов, функция* $\varphi(\cdot)$ *дважды непрерывно дифференцируема, а допустимая функция является слабым локальным минимумом задачи* (1)–(2)*. Тогда существует число* $\delta>0$, *при котором справедливы следующие утверждения*:

(i) *если выполняются предположения, сделанные в части* (i) *теоремы* 2, *то вдоль функции* $\bar x(\cdot)$ *для всех точек* $\big(\eta,\ (\bar\lambda-1)^{-1}\bar\lambda\eta,\ \bar\lambda\big)\in B_\delta(0)\times B_\delta(0)\times(0,1)$, *удовлетворяющих условию* (19) (*соответственно,* (20)), *имеет место неравенство* (21) (*соответственно,* (22));

(ii) *если выполняются предположения, сделанные в части* (ii) *теоремы* 2, *то для всех* $\big(\eta,\ (\bar\lambda-1)^{-1}\bar\lambda\eta,\ \bar\lambda\big)\in B_\delta(0)\times B_\delta(0)\times(0,1)$, *удовлетворяющих условию* (23), *имеет место равенство* (24).

Для показа эффективности полученных результатов, например, эффективности теоремы 1, рассмотрим следующий пример.

Пример. Рассмотрим задачу

$$S(x(\cdot))=\int_0^3\Big[(1-x)\dot x^2-(1+y)\dot y^2+\dot x\dot y\Big]dt\to\min_{x(\cdot)}, \quad (25)$$

$$x(t)=0,\quad t\in[-1,0], q\quad x(3)=0, \quad (26)$$

где $y=y(t)=x(t-1)$, $h=1$, $L(t,x,y,\dot x,\dot y)=(1-x)\dot x^2-(1+y)\dot y^2+\dot x\dot y$.

Исследуем на минимум допустимую функцию $\overline{x}(t) = 0$, $t \in [-1, 3]$. Вдоль этой функции с учетом (3), (4) и (6) проведем следующие вычисления:

$$\bar{L}(t) = \bar{L}_x(t) = \bar{L}_y(t) = \bar{L}_{\dot{x}}(t) = \bar{L}_{\dot{y}}(t) = 0, \qquad t \in [0,3],$$
$$\bar{L}_{\dot{y}}(t+1) = \bar{L}_y(t+1) = 0, \qquad t \in [0,2];$$
$$\bar{L}(t,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)) = \xi^2, \quad t \in [0,3]; \qquad \bar{L}\left(t+1,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)\right) = -\xi^2, \quad t \in [0,2];$$
$$\bar{L_x}(t,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)) = -\xi^2, \quad t \in [0,3]; \qquad \bar{L_y}(t+1,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\xi^2, \quad t \in [0,2];$$
$$E(\bar{L})(t,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)) = \xi^2, \quad t \in [0,3]; \qquad E(\bar{L})(t+1,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\xi^2, \quad t \in [0,2];$$
$$M(\bar{L}_x)(t,\lambda,\xi;\dot{\bar{x}}(\cdot)) = -\lambda\xi^2 - (1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi\right)^2 = -\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi^2, \qquad t \in [0,3];$$
$$M(\bar{L}_y)(t+1,\lambda,\xi;\dot{\bar{y}}(\cdot)) = -\lambda\xi^2 - (1-\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi\right)^2 = -\frac{\lambda}{\lambda-1}\xi^2, \qquad t \in [0,2].$$

В силу этих вычислений приходим к следующим выводам:

(a) в силу (7) или (8) допустимая функция $\bar{x}(\cdot) = 0$ является экстремалью задачи (25)–(26);

(b) функция $\bar{x}(\cdot) = 0$ удовлетворяет условиям Вейерштрасса (9):

$$\xi^2 \geqslant 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [2,3] \quad \text{и} \quad \xi^2 = 0 \ \forall t \in [0,2], \ \forall \xi \in \mathbb{R};$$

(c) ясно, что вдоль функции $\bar{x}(\cdot) = 0$ для всех точек $\left(\lambda, \eta, \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\eta\right) \in (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ условия Вейерштрасса (9) вырождаются в любой точке интервала $(0,2)$.

Отсюда, применяя теорему 2, заключаем, что утверждение (18) не выполняется:

$$\frac{2\lambda}{\lambda-1}\eta^2 = 0 \quad \forall (t,\lambda,\eta) \in (0,2) \times (0,1) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Поэтому в силу части (i) теоремы 1 экстремаль $\bar{x}(\cdot) = 0$ не может быть сильным локальным минимумом задачи (25)–(26).

Далее, так как для всех $\eta \neq 0$ и $\lambda \in (0,1)$ равенство (18) не выполняется, то ясно, что в силу части (ii) теоремы 1 экстремаль $\bar{x}(\cdot) = 0$ не является даже слабым локальным минимумом задачи (25)–(26).

Насколько нам известно, в теории особого оптимального управления аналоги теорем 1, 2 и 3 не доказаны.

Сравнивая данную работу с [21], легко приходим к заключению, что если в задаче (1)–(2) число $h = 0$, то теоремы 1, 2 и 3 совпадают с аналогичными результатами работы [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия// Мат. сб. — 1976. — *100*, № 142. — С. 610–643.
2. *Ащепков Л. Т., Эппель Д. С.* Аналог условия Келли в оптималных системах с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1974. — № 4. — С. 591–597.
3. *Габасов Р.* К теории необходимых условий оптимальности особых управлений// Докл. АН СССР. — 1968. — *183*, № 2. — С. 300–302.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
5. *Гороховик В. В., Гороховик С. Я.* Различные формы обобщенных условий Лежандра—Клебша// Автомат. телемех. — 1982. — № 7. — С. 28–33.
6. *Марданов М. Дж., Меликов Т. К.* К теории особых оптимальных управлений в динамических системах с запаздыванием в управлении// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 5. — С. 747–767.
7. *Меликов Т. К.* Рекуррентные условия оптимальности особых управлений в системах с запаздыванием// Докл. РАН. — 1992. — *322*, № 5. — С. 843–846.
8. *Меликов Т. К.* О необходимых условиях оптимальности высокого порядка// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1995. — *35*, № 7. — С. 1134–1138.

9. *Меликов Т. К.* Аналог условия Келли в оптимальных системах с последействием нейтрального типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1998. — *38*, № 9. — С. 1490–1499.
10. *Меликов Т. К.* Об оптимальности особых управлений в системах с последействием нейтрального типа// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2001. — *41*, № 9. — С. 1332–1343.
11. *Мордухович Б. Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — Наука: М., 1988.
12. *Срочко В. А.* Исследование второй вариации на особых управлениях// Диффер. уравн. — 1974. — *10*, № 6. — С. 1050–1066.
13. *Isayeva A. M.* Necessary conditions in delayed variational problems with free right end// Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. — 2022. — *42*, № 4. — P. 81.
14. *Kelley H. J.* A second variation test for singular extremals// AIAA J. — 1964. — *2*, № 8. — P. 1380–1382.
15. *Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G.* Singular extremals// in: Topics in Optimization (*G. Leitman*, ed.). — New York: Academic Press, 1967. — P. 63–101.
16. *Krener A.* The high order maximal principle and its application to singular extremals// SIAM J. Control Optim. — 1997. — *15*, № 2. — P. 256–293.
17. *Malik S. T.* On necessary optimality conditions for singular controls in dynamical system with a delay in control// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2018. — *39*, № 15. — P. 1669–1689.
18. *Mardanov M. J.* On optimality conditions for singular controls// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1980. — *253*, № 4. — P. 815–818.
19. *Mardanov M. J., Melikov T. K.* Analogue of the Kelley condition for optimal systems with retarded control// Int. J. Control. — 2017. — *90*, № 7. — P. 1299–1307.
20. *Mardanov M. J., Melikov T. K., Malik S. T.* Necessary conditions for the extremum in non-smooth problems of variational calculus// J. Comput. Appl. Math. — 2022. — *399*, № 2. — 113723.
21. *Mardanov M. J., Melikov T. K., Malik S. T.* Necessary conditions for a minimum in classical calculus of variations in the presence of various types of degenerations// J. Comput. Appl. Math. — 2023. — P. 418. — 114668.
22. *Melikov T. K., Hajiyeva G. V.* Necessary conditions for an extremum in nonsmooth variational problems involving retarded argument// Proc. 7th Int. Conf. on Control and Optimization with Industrial Applications (Baku, Azerbaijan, August 26–28, 2020), 2020. — P. 284–286.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Марданов Мисир Джумаил оглы (Mardanov Misir Jumail ogly)
Институт математики и механики Министерства науки и образования
Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан;
Бакинский государственный университет, Баку, Республика Азербайджан
(Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Science and Education
of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan;
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan)
E-mail: `misirmardanov@yahoo.com`

Меликов Телман Кули (Melikov Telman Kuli)
Институт математики и механики Министерства науки и образования
Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан;
Институт систем управления Министерства науки и образования
Республики Азербайджан, Баку, Республика Азербайджан
(Institute of Mathematics and Mechanics of the Ministry of Science and Education
of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan;
Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education
of the Republic of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan)
E-mail: `t.melik@rambler.ru`