ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 239 (2025). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-239-3-12

УДК 517.957

РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2025 г. **Е. Ю. ГРАЖДАНЦЕВА**

Аннотация. В работе предлагается решение типа бегущей волны одной смешанной задачи для нелинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа модуля. Определены условия согласования данных задачи, допускающие существование решения типа бегущей волны.

Ключевые слова: нелинейная гиперболическая система первого порядка, нелинейность модульного типа, смешанная задача, решение типа бегущей волны.

SOLUTION OF A TRAVELING-WAVE TYPE TO A MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR SYSTEM OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2025 **E. Yu. GRAZHDANTSEVA**

Abstract. In this paper, we propose a solution of a traveling-wave type to a mixed problem for a nonlinear hyperbolic system of first-order partial differential equations with a modulus-type nonlinearity and obtain conditions for the existence of a solution of a traveling-wave type.

Keywords and phrases: nonlinear first-order hyperbolic system, modulus-type nonlinearity, mixed problem, solution of a traveling-wave type.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L60

1. Введение. Дифференциальными уравнениями в частных производных и системами дифференциальных уравнений в частных производных описывают множество физических процессов. В частности, гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных и системами таких описывают всевозможные волновые процессы, происходящие в средах (жидкости, газе, в электромагнитном поле и тому подобные), эффект гидроудара в напорном трубопроводе и многие другие процессы. Библиография, посвященная исследованиям таких уравнений и систем весьма обширна. Появляются новые подходы к получению решений подобных уравнений и систем, а также связанных с ними задач ((см. например, [3, 4, 6, 10–13, 15]). Данная работа посвящена исследованию одной смешанной задачи для нелинейной однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейностью типа модуля. Для исследуемой задачи найдено решение типа бегущей волны.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Определение 1 (см. [8]). Решением типа бегущей волны называют функцию вида $w(x, y) = W(z)$, $z = kx - my$, где k и m — произвольные постоянные.

Замечание 1 (см. [8]). Величина m/k играет роль скорости распространения волны; m может быть любого знака. Если переменная x играет роль пространственной переменной, а переменная y — времени, то значение $m = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ отвечает пространственно однородному решению.

Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — функции свободных переменных x и y, дифференцируемые по каждой переменной и по совокупности переменных при всех $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — постоянные коэффициенты, причем $ac > 0$. Полагая $v > 0$, преобразуем систему (1) в систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv^2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

решение которой имеет вид

$$v = v(x, y) = \frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, \quad u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A$$

(см. [4]), где A, B, C — произвольные постоянные. При $v < 0$ система (1) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} - bv^2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

которая, в свою очередь, имеет решение вида

$$v = v(x, y) = -\frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, \quad u = u(x, y) = -\frac{B}{c} \cdot v(x, y) + A$$

(см. [4]), где A, B, C — произвольные постоянные. При $v = 0$ система (1) вырождается в систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

имеющую решение

$$v = v(x, y) = 0, \quad u = u(x, y) = A,$$

где A — произвольное число. Таким образом, обобщая выше изложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для произвольных $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ система* (1) *имеет решение типа бегущей волны, которое определяется совокупностью пар функций*

$$\left[\begin{array}{ll} v = v(x, y) = \dfrac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, & u = u(x, y) = -\dfrac{B}{c} \cdot v(x, y) + A, \\ v = v(x, y) = -\dfrac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)}, & u = u(x, y) = -\dfrac{B}{c} \cdot v(x, y) + A. \end{array}\right. \tag{2}$$

Доказательство. Убедиться в справедливости теоремы можно непосредственной подстановкой решений в уравнения системы (1). Действительно, для первой пары функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ совокупности (2) их частные производные имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(ac - B^2)B}{bc(y + Bx + C)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(ac - B^2)B^2}{bc^2(y + Bx + C)^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ac - B^2}{bc(y + Bx + C)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{B}{c} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(ac - B^2)B}{bc^2(y + Bx + C)^2}.$$

После подстановки этих функций в уравнения системы (1) получим следующие цепочки равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| = \frac{(ac-B^2)B^2}{bc^2(y+Bx+C)^2} - a\frac{ac-B^2}{bc(y+Bx+C)^2} + \\ + b\frac{(ac-B^2)^2}{b^2c^2(y+Bx+C)^2} = \frac{(ac-B^2)B^2 - ac(ac-B^2) + (ac-B^2)^2}{bc^2(y+Bx+C)^2} = \\ = \frac{acB^2 - B^4 - a^2c^2 + acB^2 + a^2c^2 - 2acB^2 + B^4}{bc^2(y+Bx+C)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{(ac-B^2)B}{bc(y+Bx+C)^2} + c\frac{(ac-B^2)B}{bc^2(y+Bx+C)^2} = \frac{-(ac-B^2)B + (ac-B^2)B}{bc(y+Bx+C)^2} = 0,$$

подтверждающие, что первая пара функций совокупности (2) является решением системы (1). Аналогично, после подстановки второй пары функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ совокупности (2) в уравнения системы (1) получаем цепочки равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial v}{\partial y} + bv|v| = -\frac{(ac-B^2)B^2}{bc^2(y+Bx+C)^2} + a\frac{ac-B^2}{bc(y+Bx+C)^2} = \\ - b\frac{(ac-B^2)^2}{b^2c^2(y+Bx+C)^2} = \frac{-(ac-B^2)B^2 + ac(ac-B^2) - (ac-B^2)^2}{bc^2(y+Bx+C)^2} = \\ = \frac{-acB^2 + B^4 + a^2c^2 - acB^2 - a^2c^2 + 2acB^2 - B^4}{bc^2(y+Bx+C)^2} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(ac-B^2)B}{bc(y+Bx+C)^2} - c\frac{(ac-B^2)B}{bc^2(y+Bx+C)^2} = \frac{(ac-B^2)B - (ac-B^2)B}{bc(y+Bx+C)^2} = 0,$$

которые показывают, что вторая пара функций совокупности (2) является решением системы (1), поскольку частные производные этих функций имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(ac-B^2)B}{bc(y+Bx+C)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{B}{c}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(ac-B^2)B^2}{bc^2(y+Bx+C)^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ac-B^2}{bc(y+Bx+C)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{B}{c}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(ac-B^2)B}{bc^2(y+Bx+C)^2}.$$

Теорема доказана. □

2. Основные результаты. Предполагая, что неизвестные функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$v(x_0, 0) = \varphi, \quad u(x_0, 0) = \psi, \tag{3}$$
$$v(x_*, y_*) = f, \quad u(x_*, y_*) = g, \tag{4}$$

где x_0, x_*, y_*, φ, ψ, f, g — действительные числа, удовлетворяющие условиям $x_0 \neq x_*$, $y_* \neq 0$, получаем смешанную задачу для гиперблической системы (1), (3), (4).

Для смешанной задачи (1), (3), (4)) справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть действительные числа x_0, x_*, y_*, φ, ψ, f, g, a, b, c таковы, что $x_0 \neq x_*$, $y_* \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $ac > 0$ и выполнены условия*

$$a(\varphi - f)^2 \neq c(g - \psi)^2, \tag{5}$$
$$\varphi f b(y_*(\varphi - f) + c(g-\psi)(x_* - x_0)) = a(\varphi - f)^2 - c(g-\psi)^2. \tag{6}$$

Тогда смешанная задача (1), (3), (4) имеет решение вида

$$v = v(x,y) = \frac{a(\varphi - f)^2 - c(g-\psi)^2}{bK(x,y)}, \tag{7}$$

$$u = u(x,y) = -\frac{g-\psi}{\varphi - f}v(x,y) + \frac{g\varphi - \psi f}{\varphi - f}, \tag{8}$$

где

$$K(x,y)=(\varphi-f)^2y+c(\varphi-f)(g-\psi)x+y_*f(\varphi-f)+c(g-\psi)(x_*f-x_0\varphi). \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot\frac{\partial K}{\partial x}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(\varphi-f)(g-\psi),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot\frac{\partial K}{\partial y}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(g-\psi)^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)(g-\psi),$$

то после подстановки функций (7) и (8) в уравнения системы (1) получим следующие цепочки равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial y}+bv|v|=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(g-\psi)^2-$$
$$-a\cdot\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)^2+b\cdot\left(\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK(x,y)}\right)^2=$$
$$=\frac{ac(\varphi-f)^2(g-\psi)^2-c^2(g-\psi)^4-a^2(\varphi-f)^4+ac(g-\psi)^2(\varphi-f)^2}{bK^2(x,y)}+$$
$$+\frac{\big(a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2\big)^2}{bK^2(x,y)}=0$$

так как

$$ac(\varphi-f)^2(g-\psi)^2-c^2(g-\psi)^4-a^2(\varphi-f)^4+ac(g-\psi)^2(\varphi-f)^2=$$
$$=-\big(a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2\big)^2; \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(\varphi-f)(g-\psi)+$$
$$+c\cdot\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)(g-\psi)=0.$$

Следовательно, функции (7) и (8) удовлетворяют уравнениям системы (1). Далее, обращаясь к условиям (3) и (4), имеем равенства:

$$v(x_0,0)=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK(x_0,0)},\quad u(x_0,0)=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot v(x_0,0)+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f},$$
$$v(x_*,y_*)=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK(x_*y_*0)},\quad u(x_*,y_*)=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot v(x_*,y_*)+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}.$$

Кроме того, для функции $K(x,y)$ вида (9) справедливы равенства

$$K(x_0,0)=c(\varphi-f)(g-\psi)x_0+y_*f(\varphi-f)+c(g-\psi)(x_*f-x_0\varphi)=$$
$$=c(g-\psi)(\varphi x_0-fx_0+x_*f-x_0\varphi)+y_*f(\varphi-f)=$$
$$=cf(g-\psi)(x_*-x_0)+y_*f(\varphi-f)=f(c(g-\psi)(x_*-x_0)+y_*(\varphi-f)),$$

$$\begin{aligned}K(x_*,y_*)&=(\varphi-f0)^2y_*+c(\varphi-f)(g-\psi)x_*+y_*f(\varphi-f)+c(g-\psi)(x_*f-x_0\varphi)=\\&=(\varphi-f)(\varphi y_*-fy_*+y_*f)+c(g-\psi)(\varphi x_*-fx_*+x_*f-x_0\varphi)=\\&=(\varphi-f)\varphi y_*+c\varphi(g-\psi)(x_*-x_0)=\varphi(c(g-\psi)(x_*-x_0)+y_*(\varphi-f)).\end{aligned}$$

Из условий (5), (6) следует равенство

$$c(g-\psi)(x_*-x_0)=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{\varphi fb}. \tag{11}$$

Следовательно, учитывая равенство (11), для функции $K(x,y)$ вида (9), получим равенства

$$K(x_0,0)=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{\varphi b},\quad K(x_*,y_*)=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{fb}.$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}v(x_0,0)=\varphi,\qquad u(x_0,0)&=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\varphi+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}=\psi,\\v(x_*,y_*)=f,\quad u(x_*,y_*)&=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}f+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}=g,\end{aligned}$$

которые подтверждают, что функции (7) и (8) удовлетворяют условиям (3) и (4). Таким образом, функции (7) и (8) являются решением задачи (1), (3), (4). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть действительные числа x_0, x_*, y_*, φ, ψ, f, g, a, b, c таковы, что $x_0\neq x_*$, $y_*\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $ac>0$ и удовлетворяют условию* (5) *и соотношению*

$$-\varphi fb(y_*(\varphi-f)+c(g-\psi)(x_*-x_0))=a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2. \tag{12}$$

Тогда смешанная задача (1), (3), (4) *имеет решение вида*

$$v=v(x,y)=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK(x,y)}, \tag{13}$$

$$u=u(x,y)=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}v(x,y)+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}, \tag{14}$$

где функция $K(x,y)$ определена формулой (9).

Доказательство. Поступая аналогично доказательству теоремы (2), учитывая условие (12), можно убедиться в том, что функции (13) и (14) являются решением задачи (1), (3), (4). Действительно, частные производные функций (13) и (14) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot\frac{\partial K}{\partial x}=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(\varphi-f)(g-\psi),\\\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot\frac{\partial K}{\partial y}=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)^2,\\\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(g-\psi)^2,\\\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)(g-\psi).\end{aligned}$$

Подставляя функции (13) и (14) в уравнения системы (1), получим следующие цепочки равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial v}{\partial y}+bv|v|=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(g-\psi)^2+$$
$$+a\cdot\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)^2-b\cdot\left(\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK(x,y)}\right)^2=$$
$$=\frac{-ac(\varphi-f)^2(g-\psi)^2+c^2(g-\psi)^4+a^2(\varphi-f)^4-ac(g-\psi)^2(\varphi-f)^2}{bK^2(x,y)}+$$
$$+\frac{\left(a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2\right)^2}{bK^2(x,y)}=0$$

согласно (10);

$$\frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot c(\varphi-f)(g-\psi)-$$
$$-c\cdot\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{bK^2(x,y)}\cdot(\varphi-f)(g-\psi)=0.$$

Следовательно, функции (13) и (14) удовлетворяют уравнениям системы (1). Далее, поскольку согласно условий (5) и (12) имеем

$$K(x_0,0)=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{\varphi b},\quad K(x_*,y_*)=-\frac{a(\varphi-f)^2-c(g-\psi)^2}{fb}.$$

Следовательно, для функций (12) и (13) справедливы следующие равенства:

$$v(x_0,0)=\varphi,\qquad u(x_0,0)=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}\varphi+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}=\psi,$$
$$v(x_*,y_*)=f,\quad u(x_*,y_*)=-\frac{g-\psi}{\varphi-f}f+\frac{g\varphi-\psi f}{\varphi-f}=g,$$

Таким образом, убеждаемся, что функции (12) и (13) удовлетворяют также условиям (3) и (4). Теорема доказана. □

Замечание 2. Условия (5), (6), (12) являются условиями согласования числовых данных задачи (1), (3), (4), допускающие для данной задачи существование решения типа бегущей волны.

Замечание 3. Нарушение условия (5) дает тривиальное решение задачи (1), (3), (4), которое принимает вид

$$v=v(x,y)=0,\quad u=u(x,y)=A,$$

где A — произвольное число.

Пример 1. Найти функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}+0{,}5\frac{\partial v}{\partial y}+8v|v|=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{15}$$

и условиям

$$v(1;0)=0,\quad u(1;0)=100,\quad v(2;10)=140,\quad u(2;10)=50.$$

Здесь $x_0=1$, $x_*=2$, $y_0=10$, $a=0{,}5$, $b=8$, $c=4$, $\varphi=0$, $\psi=100$, $f=140$, $g=50$.

Условие (5) и условие (6) из теоремы 2 выполнены. Следовательно, согласно теореме 2 искомые функции имеют следующий вид:

$$v(x,y)=\frac{-25}{19600y+28000x-252000},\quad u(x,y)=-\frac{5}{14}v(x,y)+100.$$

Эти гиперболические поверхности, имеющие асимптотическую плоскость $19600y+28000x-252000=0$, представлены на рис. 1.

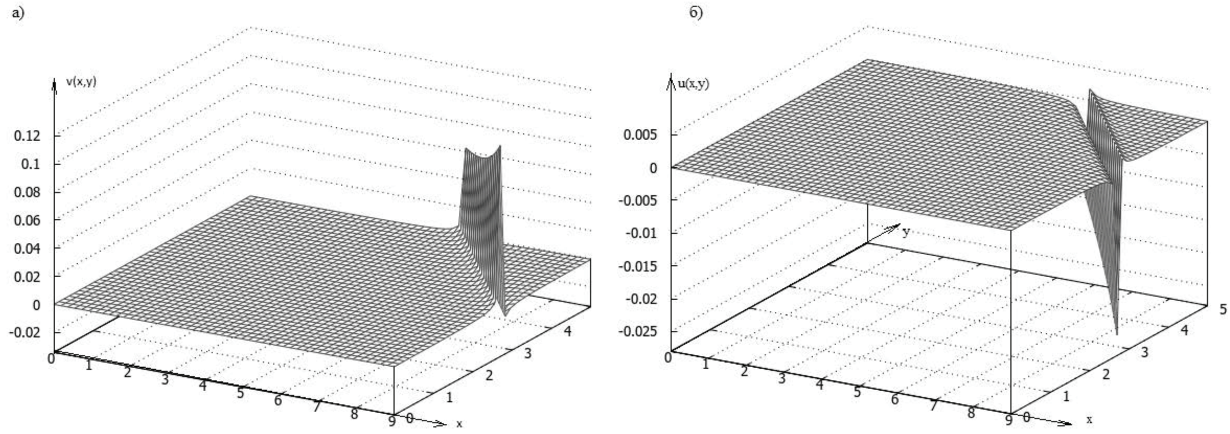

Рис. 1. Графики функций $v = v(x, y)$ (слева) и $u = u(x, y)$ (справа).

3. Физическое приложение. Известно, что движение жидкости в напорном трубопроводе описывают системой следующих уравнений:

(i) уравнение движения, которое вытекает из интегрального закона сохранения импульса:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial (VG)}{\partial l} + \omega \frac{\partial p}{\partial l} = -\eta\chi - \rho g \omega \frac{dz}{dl};$$

(ii) уравнение неразрывности, которое вытекает из интегрального закона сохранения массы (см. [12, 14]):

$$\frac{\partial (\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial l} = 0;$$

(iii) уравнение энергии, которое вытекает из интегрального закона сохранения энергии (см. [2, 7, 12]):

$$\rho\omega \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial (\rho\omega)}{\partial t} + G \frac{\partial h}{\partial l} - \omega V \frac{\partial p}{\partial l} = q_w \chi,$$

(iv) замыкающие соотношения, получающиеся при выборе давления p и температуры T в качестве основных термодинамических переменных (тогда $\rho = \rho(p, T)$, $h = h(\rho, T)$):

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \sigma_p \rho, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\sigma_T \rho.$$

Здесь t — время, l — координата вдоль трубы, ρ — плотность жидкости, ω — площадь поперечного сечения трубы, G — массовый расход, $V = G/(\rho\omega)$ — средняя по сечению скорость потока жидкости, $\tau = \lambda\rho|V|V/8$ — касательное напряжение трения о стенки (см. [5]), λ — коэффициент гидравлического трения (см. [1]), χ — смоченный периметр, g — ускорение силы тяжести, $z = z(l)$ — вертикальная отметка оси трубопровода, $h = e + p/\rho$, $g_w = K(T_{env} - T)$ — приток тепла к жидкости через стенки трубы, приходящийся на единицу площади поверхности трубы, e — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\sigma_p = \sigma_p(p, T)$ — коэффициент изотермической сжимаемости жидкости, $\sigma_T = \sigma_T(p, T)$ — коэффициент объемного расширения жидкости. Выбирая в качестве основных переменных давление $p = p(l,t)$, скорость $v = v(l,t)$ и температуру $T = T(l,t)$ и учитывая оценки физического состояния объекта, получаем систему уравнений (см. [14])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + v\dfrac{\partial p}{\partial l} + \rho a^2 \dfrac{\partial v}{\partial l} = k\dfrac{q_w \chi}{\rho\omega c_p(1-k\varepsilon T)}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial l} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial l} = -\dfrac{\tau\chi}{\rho\omega} - g\dfrac{dz}{dl}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + v\dfrac{\partial T}{\partial l} + \varepsilon T\rho a^2 \dfrac{\partial v}{\partial l} = \dfrac{q_w \chi}{\rho\omega c_p(1-k\varepsilon T)}, \\ a = \sqrt{\omega / \left(\dfrac{\partial(\rho\omega)}{\partial p}\right)_T} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-k\varepsilon T}} \end{cases} \tag{16}$$

Гидравлический удар является быстропротекающим процессом, когда теплообмен с внешней средой не успевает развиться, поэтому полагают $q_w \approx 0$ и, пренебрегая конвективными членами $v \cdot \partial v/\partial l$ и $v \cdot \partial p/\partial l$, первые два уравнения системы (16) можно рассматривать как автономную систему уравнений относительно переменных p и v (см. [9, 12]):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = -\lambda\frac{v|v|}{2d} - g\frac{dz}{dl}, \tag{17}$$

которая и является системой уравнений, описывающей явление гидравлического удара. Здесь λ — коэффициент гидравлического трения (коэффициент сопротивления трению), a — скорость распространения волн давления (скорость звука в воде), d — внутренний диаметр трубопровода, g — ускорение силы тяжести. Переходя к координатам давление p и расход x, систему уравнений (17), описывающих явление гидравлического удара, можно записать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial l} + c\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial l} + a\frac{\partial u}{\partial y} + b|x|x = 0. \tag{18}$$

Очевидно, что система (18) идентична системе (1), поэтому систему (1) можно рассматривать как систему, упрощенно описывающую процесс движения (а именно, явление гидравлического удара) жидкости (воды) в напорном трубопроводе (см. [11]), где x — пространственная переменная, обозначающая длину трубы, $y = t$ — время; функция $v = v(x,t)$ — массовый расход жидкости, функция $u = (x,t)$ — давление жидкости; a, b, c — постоянные коэффициенты, связанные с диаметром трубы; кроме того, коэффициент b связан с плотностью транспортируемой среды, а коэффициент c — со скоростью распространения волн давления (скорость звука в воде), т.е.

$$a = \frac{4}{\pi d^2}, \quad b = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 \rho}, \quad c = \frac{\pi d^2}{4q^2},$$

где λ — коэффициент сопротивления трению, d — давление, ρ — плотность, q — скорость распространения волн. Тогда задача (1), (3), (4) представляет собой задачу определения давления и расхода при условии, что известны расход и давление на определенных участках трубы в определенное время.

Пример 2. Пусть требуется определить закон изменения расхода жидкости $v = v(x,t)$ и изменения давления жидкости $u = u(x,t)$ при ее течении в напорном трубопроводе диаметра $d = 0{,}5$ м согласно следующим данным: $\rho = 1000$ кг/м^3; $q = 900$ м/с; $\lambda = 0{,}11$, если в начале движения на растоянии 0,1 м от начала отсчета длины трубы расход составил 0,1 м^3/с, при давлении жидкости 1 МПа, а на расстоянии 100 м от начала трубы через 1 с расход жидкости составляет 0,001 м^3/с, а давление — 1,15 МПа. Тогда согласно [11] получаем смешанную задачу для системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 5\frac{\partial v}{\partial t} + 0{,}003v|v| = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + 2\cdot 10^{-4}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

с условиями

$$v(0{,}1;0) = 0{,}1, \quad u(0{,}1;0) = 1, \quad v(100;1) = 0{,}001, \quad u(100;1) = 1{,}15,$$

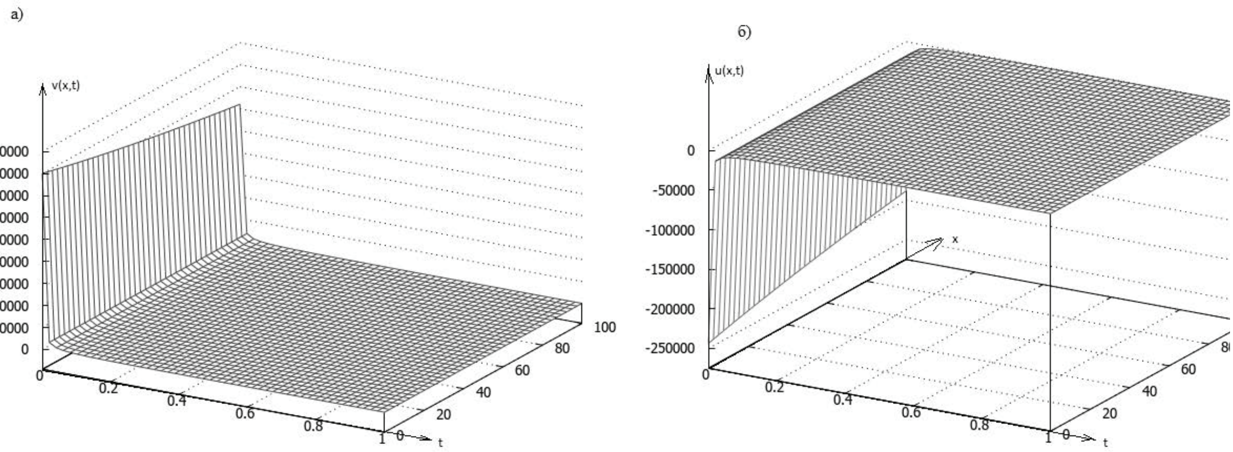

Рис. 2. Графики функций $v = v(x, t)$ (слева) и $u = u(x, t)$ (справа).

решением которой, согласно теореме 3 (поскольку $x_0 = 0{,}1$; $x_* = 100$; $t_0 = 1$; $\varphi = 0{,}1$; $\psi = 1$; $f = 0{,}001$; $g = 1{,}15$) являются функции

$$v(x,t) \approx \frac{16334{,}5}{99t + 0{,}12x + 0{,}10197}; \quad u(x,t) \approx -1{,}52v(x,t) + 1{,}15,$$

графики которых представлены на рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альтшуль А. Д.* Гидравлические сопротивления. — М.: Недра, 1982.
2. *Бондарев Э. А., Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. и др.* Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. — Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Воронова Ю. Г.* О задаче Коши для одной линейной гиперболической системы уравнений// Изв. Уфим. науч. центра РАН. — 2012. — № 6. — С. 5–9.
4. *Гражданцева Е. Ю.* О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2022. — *27*, № 140. — С. 328–338.
5. *Картвелишвили Н. А.* Динамика напорных трубопроводов. — М.: Энергия, 1979.
6. *Корниенко Д. В.* Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений// Дифферр. уравн. — 2006. — *42*, № 1. — С. 91–100.
7. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. — М.: Атомиздат, 1979.
8. *Полянин А. Д.* Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения// Докл. РАН. — 2004. — *398*, № 1. — С. 33–37.
9. *Рождественский Б. И., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
10. *Сафиулова Р. Р.* Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида// Мат. заметки ЯГУ. — 2008. — *15*, № 2. — С. 48–68.
11. *Сидлер И. В., Новицкий Н. Н., Гражданцева Е. Ю.* Альтернативные методы решения гиперболической системы уравнений в упрощенной задаче гидравлического удара// Автомат. информ. ТЭК. — 2023. — № 9 (602). — С. 53–60.
12. *Тарасевич В. В.* Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах/ Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-мат. наук — Новосибирск, 2017.
13. *Федотов Е. М.* Неконформные схемы МКЭ для гиперболических систем линейных уравнений/// Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки., 2010. — *152*. — С. 245–254.
14. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975.
15. *Sartabanov Zh. A., Zhumagaziyev A. Kh., Abdikalikova G. A.* Multiperiodic solution of linear hiperbolic in the narrow sense system with constant coefficients// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2020. — № 2 (98). — P. 125–140.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гражданцева Елена Юрьевна (Grazhdantseva Elena Yur'evna)
Иркутский государственный университет, Иркутск;
Институт систем энергетики имени Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
(Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;
L. A. Melentiev Energy Systems Institute
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia)
E-mail: grelyur@mail.ru