ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 238 (2025). С. 49–58
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-49-58

УДК 517.958:531.332

УСЛОВИЕ СЕКУЛЯРНОСТИ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БРОДУЭЛЛА

© 2025 г. **С. А. ДУХНОВСКИЙ**

Аннотация. В работе исследуется кинетическая система уравнений Бродуэлла четырех групп частиц с периодическими начальными данными в весовом пространстве. Решение ищется в окрестности состояния равновесия. Возмущение разложено в ряд Фурье. Найдены условия локального равновесия для решений задачи Коши.

***Ключевые слова*:** кинетическая система Бродуэлла, ряд Фурье, весовое пространство, задача Коши.

SECULARITY CONDITION FOR THE BROADWELL KINETIC SYSTEM

© 2025 **S. A. DUKHNOVSKY**

Abstract. In this paper, we study the Broadwell kinetic system for four groups of particles with periodic initial data in a weight space. The solution is sought in a neighborhood of the equilibrium state. The perturbation is expanded in a Fourier series. Conditions for local equilibria for solutions of the Cauchy problem are found.

***Keywords and phrases*:** Broadwell kinetic system, Fourier series, weighted space, Cauchy problem.

***AMS Subject Classification*:** 35L45, 35L60, 35Q20

1. Введение. В этой статье мы продолжим исследование стабилизации (асимптотической устойчивости) решений нелинейных гиперболических уравнений в частных производных на примере так называемых дискретных моделей кинетического уравнения Больцмана, а именно, исследованием стабилизации решений задачи Коши для двумерного системы Бродуэлла (см. [4, 7]):

$$\begin{cases} \partial_t n_1 + \partial_x n_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_2 - \partial_x n_2 = \dfrac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_3 + \partial_y n_3 = \dfrac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \\ \partial_t n_4 - \partial_y n_4 = \dfrac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \end{cases} \tag{1}$$

$$n_1 b\big|_{t=0} = n_1^0, \quad n_2\big|_{t=0} = n_2^0, \quad n_3\big|_{t=0} = n_3^0, \quad n_4\big|_{t=0} = n_4^0. \tag{2}$$

Система (1)–(2) является кинетическим уравнением Больцмана модельного двумерного газа частиц движущихся на двумерной плоскости, скорости которых($(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$) будем предполагать направленными вдоль координатных осей. Здесь $u = n_1(x,y,t)$, $v = n_2(x,y,t)$,

$w = n_3(x,y,t)$, $z = n_4(x,y,t)$ — плотность частиц (число частиц на единицу площади) соответствующих четырех групп. Все частицы распределены по четырем группам со скоростями $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$. Первая группа частиц, взаимодействуя со второй, переходит в третью и четвертую соответственно. Аналогично, третья группа, взаимодействуя со четвертой, переходит в первую и вторую. Предполагаем, что периодические начальные данные являются периодическими.

Исследованию кинетических уравнений посвящено множество работ. В недавних работах с помощью разложения Пенлеве были найдены решения кинетических систем (см. [5,7,9,12]), разработаны различные аналитические методы (см. [6,10]). Библиографические ссылки на работы по изучению стабилизации решения приведены в [1,2,8]. В данной работе будут найдены условия секулярности для системы (1) на основе техники, представленной в [11].

2. Малые возмущения. Рассмотрим задачу Коши (1) для малых возмущений состояния равновесия $w_e z_e = u_e v_e$. Положим

$$n_1 = u_e + \varepsilon^2 u_e^{1/2}\widehat{u}, \quad n_2 = v_e + \varepsilon^2 v_e^{1/2}\widehat{v}, \quad n_3 = w_e + \varepsilon^2 w_e^{1/2}\widehat{w}, \quad n_4 = z_e + \varepsilon^2 z_e^{1/2}\widehat{z}.$$

Рассмотрим периодические возмущения равновесного состояния с ограниченной энергией

$$\widehat{u} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} u_{k,l} e^{ikx} e^{ily}, \quad \widehat{v} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} v_{k,l} e^{ikx} e^{ily},$$
$$\widehat{w} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} w_{k,l} e^{ikx} e^{ily}, \quad \widehat{z} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} z_{k,l} e^{ikx} e^{ily}.$$

Введем весовые пространства $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)$, $\mathcal{H}_\sigma$:

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}_\sigma)} = \int_0^\infty e^{2\gamma t}|u_0(t)|^2\,dt + \int_0^\infty e^{2\gamma t}\sum_{k\in\mathbb{Z}_0}|k|^{2\sigma}|u_k(t)|^2\,dt,$$
$$|||\widehat{u}|_{t=0}|||^2_{\mathcal{H}_\sigma} = |u_0^0|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}_0}|k|^{2\sigma}|u_k^0|^2,$$

где $\gamma > 0$, $\sigma = \mathrm{const}$. Система примет следующий вид:

$$\begin{cases}
\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u} - \dfrac{1}{\varepsilon}v_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}\widehat{z} + z_e^{1/2}\widehat{w} - u_e^{1/2}\widehat{v} - v_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = v_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big),\\
\partial_t\widehat{v} - \partial_x\widehat{v} - \dfrac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}\widehat{z} + z_e^{1/2}\widehat{w} - u_e^{1/2}\widehat{v} - v_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = u_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big),\\
\partial_t\widehat{w} + \partial_y\widehat{w} + \dfrac{1}{\varepsilon}z_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}\widehat{z} + z_e^{1/2}\widehat{w} - u_e^{1/2}\widehat{v} - v_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = -z_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big),\\
\partial_t\widehat{z} - \partial_y\widehat{z} + \dfrac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}\widehat{z} + z_e^{1/2}\widehat{w} - u_e^{1/2}\widehat{v} - v_e^{1/2}\widehat{u}\Big) = -w_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big),
\end{cases} \tag{3}$$

$$\widehat{u}\big|_{t=0} = \widehat{u}^0, \quad \widehat{v}\big|_{t=0} = \widehat{v}^0, \quad \widehat{w}\big|_{t=0} = \widehat{w}^0, \quad \widehat{z}\big|_{t=0} = \widehat{z}^0. \tag{4}$$

Отсюда вытекают законы сохранения

$$u_e^{1/2}(\partial_t\widehat{u} + \partial_x\widehat{u}) = v_e^{1/2}(\partial_t\widehat{v} - \partial_x\widehat{v}), \quad w_e^{1/2}(\partial_t\widehat{w} + \partial_y\widehat{w}) = z_e^{1/2}(\partial_t\widehat{z} - \partial_y\widehat{z}).$$

В образах Фурье

$$u_{k,l} = \left(u^0_{k,l} - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v^0_{k,l}\right)e^{-ikt} + \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} - 2ik\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int_0^t e^{ik(s-t)}v_{k,l}ds,$$

$$w_{k,l} = \left(w^0_{k,l} - \frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}z^0_{k,l}\right)e^{-ilt} + \frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}z_{k,l} - 2il\frac{z_e^{1/2}}{w_e^{1/2}}\int_0^t e^{il(s-t)}z_{k,l}ds.$$

Из соотношений

$$\frac{d}{dt}v_{k,l} - ikv_{k,l} - \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}z_{k,l} + z_e^{1/2}w_{k,l} - u_e^{1/2}v_{k,l} - v_e^{1/2}u_{k,l}\Big) = u_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big)_{k,l},$$
$$\frac{d}{dt}z_{k,l} - ilz_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon}w_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2}z_{k,l} + z_e^{1/2}w_{k,l} - u_e^{1/2}v_{k,l} - v_e^{1/2}u_{k,l}\Big) = -w_e^{1/2}\varepsilon\Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big)_{k,l}$$

получим еще один закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}z_{k,l} - ilz_{k,l} = -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\left(\frac{d}{dt}v_{k,l} - ikv_{k,l}\right),$$

или

$$z_{k,l} = z_{k,l}^0 e^{ilt} - e^{ilt}\int\limits_0^t e^{-ils}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\left(\frac{d}{ds}v_{k,l} - ikv_{k,l}\right)ds =$$
$$= \left(z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{ilt} - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + i(k-l)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}v_{k,l}ds.$$

Отсюда

$$w_{k,l} = -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + \left(w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{-ilt} + i(k-l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}v_{k,l}ds +$$
$$+ 2il\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}v_{k,l}ds - 2ili(k-l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}\int\limits_0^s e^{-il(p-s)}v_{k,l}(p)\,dp\,ds =$$
$$= -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + \left(w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{-ilt} + i(k+l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}v_{k,l}ds.$$

3. Сведение к одному уравнению. Имеем следующую замену перехода к одному уравнению:

$$\begin{aligned}
u_{k,l} = {} & \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + \left(u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{-ikt} - 2ik\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}v_{k,l}ds,\\
w_{k,l} = {} & -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + \left(w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{-ilt} + i(k+l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}v_{k,l}ds,\\
z_{k,l} = {} & -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l} + \left(z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}^0\right)e^{ilt} + i(k-l)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}v_{k,l}ds.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для $k = 0$, $l = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
u_{0,0} = {} & \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0} + \left(u_{0,0}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}^0\right),\\
w_{0,0} = {} & -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0} + \left(w_{0,0}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}^0\right),\\
z_{0,0} = {} & -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0} + \left(z_{0,0}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}^0\right).
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$u^0_{0,0} = w^0_{0,0} = z^0_{0,0} = 0.$$

Тогда

$$u_{0,0} = \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}, \quad w_{0,0} = -\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}, \quad z_{0,0} = -\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{0,0}.$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} u_e^{1/2}\Big(w_e^{1/2} z_{k,l} + z_e^{1/2} w_{k,l} - u_e^{1/2} v_{k,l} - v_e^{1/2} u_{k,l}\Big) = \\ = -\left(u_e + v_e + u_e^{1/2} z_e^{1/2} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} + u_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\right) v_{k,l} + u_e^{1/2} w_e^{1/2}\left(z^0_{k,l} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right) e^{ilt} + \\ + u_e^{1/2} z_e^{1/2}\left(w^0_{k,l} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right) e^{-ilt} - v_e^{1/2}\Big(u_e^{1/2} u^0_{k,l} - v_e^{1/2} v^0_{k,l}\Big) e^{-ikt} + \\ + i(k+l) u_e^{1/2} z_e^{1/2} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + \\ + i(k-l) u_e^{1/2} w_e^{1/2} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int\limits_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds. \end{aligned}$$

Положим $L_e = u_e + v_e + w_e + z_e > 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\left(i(k+l) z_e \int\limits_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int\limits_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds\right) = \\ = \frac{1}{\varepsilon}\left(u_e^{1/2} w_e^{1/2}\left(z^0_{k,l} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right)\right) e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon}\left(u_e^{1/2} z_e^{1/2}\left(w^0_{k,l} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right)\right) e^{-ilt} + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left(-v_e^{1/2}\Big(u_e^{1/2} u^0_{k,l} - v_e^{1/2} v^0_{k,l}\Big)\right) e^{-ikt} + u_e^{1/2} \varepsilon \Big(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v}\Big)_{k,l}. \end{aligned} \tag{6}$$

4. Комплексификация. Перепишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\left(i(k+l) z_e \int\limits_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int\limits_0^t e^{ik(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int\limits_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds\right) = \\ = \frac{1}{\varepsilon}\left(u_e^{1/2} w_e^{1/2}\left(z^0_{k,l} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right)\right) e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon}\left(u_e^{1/2} z_e^{1/2}\left(w^0_{k,l} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v^0_{k,l}\right)\right) e^{-ilt} + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\left(-v_e^{1/2}\Big(u_e^{1/2} u^0_{k,l} - v_e^{1/2} v^0_{k,l}\Big)\right) e^{-ikt} + u_e^{1/2} \varepsilon \frac{1}{2}\Big(\widehat{w}\overline{\widehat{z}} + \widehat{z}\overline{\widehat{w}} - \widehat{u}\overline{\widehat{v}} - \widehat{v}\overline{\widehat{u}}\Big)_{k,l}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{k,l} - ikv_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon} L_e v_{k,l} - \\ - \frac{1}{\varepsilon}\left(i(k+l) z_e \int\limits_0^t e^{il(s-t)} v_{k,l} ds + 2ikv_e \int\limits_0^t e^{ikc(s-t)} v_{k,l} ds + i(k-l) w_e \int\limits_0^t e^{-il(s-t)} v_{k,l} ds\right) = \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
= \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_l^{+} e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_l^{-} e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon} u_e^{1/2} D_k^{-} e^{-ikt} + \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} T_{k,l}^{\mathrm{add}}(v) + \\
+ \frac{1}{2} \varepsilon u_e^{1/2} \Big(L_{k,l}(v) + B_{k,l}(v,v) \Big),
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
v_k \big|_{t=0} = v_k^0, \tag{9}
$$

где

$$
D_l^{+} = w_e^{1/2} \left(z_{k,l}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2,l_1,l_2 \neq 0}} \left(z_{k_2,l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2}^0 \right) \left(\overline{w_{k_1,l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1,l_1}^0} \right),
$$

$$
D_l^{-} = z_e^{1/2} \left(w_{k,l}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2,l_1,l_2 \neq 0}} \left(w_{k_1,l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) \left(\overline{z_{k_2,l_2}^0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}^0} \right),
$$

$$
D_k^{-} = -v_e^{1/2} \left(u_{k,l}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k,l}^0 \right),
$$

$$
\begin{aligned}
L_{k,l}(v) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2 \neq 0}} \Bigg[& - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1} \left(\overline{z_{k_2,l_2}^0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}^0} \right) e^{-il_2 t} - \left(w_{k_1,l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) e^{-il_1 t} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}} - \\
& - \left(w_{k_1,l_1}^0 + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) e^{-il_1 t} i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il_2(s-t)} \overline{v_{k_2,l_2}} ds - \\
& + i(k_1 + l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{il_1(s-t)} v_{k_1,l_1} ds \left(\overline{z_{k_2,l_2}^0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}^0} \right) e^{-il_2 t} - \\
& - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2} \left(\overline{w_{k_1,l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1,l_1}^0} \right) e^{il_1 t} - \left(z_{k_2,l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2}^0 \right) e^{il_2 t} \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1,l_1}} - \\
& - \left(z_{k_2,l_2}^0 + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_2,l_2}^0 \right) e^{il_2 t} i(k_1 + l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_1(s-t)} \overline{v_{k_1,l_1}} ds + \\
& + i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2,l_2} ds \left(\overline{w_{k_1,l_1}^0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1,l_1}^0} \right) e^{il_1 t} - \\
& - \left(u_{k_1,l_1}^0 - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1}^0 \right) e^{-ik_1 t} \overline{v_{k_2,l_2}} - v_{k_2,l_2} \left(\overline{u_{k_1,l_1}^0} - \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_1,l_1}^0} \right) e^{ik_1 t} \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{k,l}(v,v) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2 \neq 0}} \Bigg[& \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1} \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}} - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} v_{k_1,l_1} \overline{i(k_2 - l_2) \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_2(s-t)} v_{k_2,l_2} ds} - \\
& - i(k_1 - l_1) \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \int_0^t e^{-il_1(s+t)} v_{k_1,l_1} ds \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} \overline{v_{k_2,l_2}} -
\end{aligned}
$$

$$+\,i(k_1-l_1)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_1(s+t)}v_{k_1,l_1}ds\;\overline{i(k_2-l_2)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_2(s-t)}v_{k_2,l_2}ds}+$$

$$+\,\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_2,l_2}\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k_1,l_1}}-\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_2,l_2}\;\overline{i(k_1-l_1)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_1(s+t)}v_{k_1,l_1}ds}-$$

$$-\,i(k_2-l_2)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_2(s-t)}v_{k_2,l_2}ds\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k_1,l_1}}-$$

$$+\,i(k_2-l_2)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_2(s-t)}v_{k_2,l_2}ds\;\overline{i(k_1-l_1)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il_1(s+t)}v_{k_1,l_1}ds}-$$

$$-\left(\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_1,l_1}-2ik_1\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1,l_1}ds\right)\overline{v_{k_2,l_2}}-$$

$$-v_{k_2,l_2}\left(\overline{\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_1,l_1}-2ik_1\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ik_1(s-t)}v_{k_1,l_1}ds}\right)\Bigg],$$

$$T^{\rm add}_{k,l}(v)=-\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}\left(-\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k,l}}+\left(\overline{z^0_{k,l}}+\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v^0_{k,l}}\right)e^{-ilt}-i(k-l)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}\overline{v_{k,l}}ds\right)+$$

$$+\left(-\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}+\left(w^0_{k,l}+\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v^0_{k,l}\right)e^{-ilt}+i(k+l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{il(s-t)}v_{k,l}ds\right)\left(-\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{0,0}}\right)-$$

$$-\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}\left(-\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k,l}}+\left(\overline{w^0_{k,l}}+\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v^0_{k,l}}\right)e^{ilt}-i(k+l)\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}\overline{v_{k,l}}ds\right)+$$

$$+\left(-\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}+\left(z^0_{k,l}+\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v^0_{k,l}\right)e^{ilt}+i(k-l)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}v_{k,l}ds\right)\left(-\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{0,0}}\right)-$$

$$-\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{0,0}\overline{v_{k,l}}-\left(\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k,l}+\left(u^0_{k,l}-\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v^0_{k,l}\right)e^{-ikct}-2ik\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{ikc(s-t)}v_{k,l}ds\right)\overline{v_{0,0}}-$$

$$-\,v_{0,0}\left(\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k,l}}+\left(\overline{u^0_{k,l}}-\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v^0_{k,l}}\right)e^{ikt}+2ik\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\int\limits_0^t e^{-ik(s-t)}\overline{v_{k,l}}ds\right)-v_{k,l}\frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{0,0}}.$$

5. Сведение к однородным данным задачи Коши. Выполним замену

$$v_{k,l}=v^0_{k,l}\exp\left(t\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e\right)\right)+y_{k,l}(t).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}y_{k,l} - iky_{k,l} + \frac{1}{\varepsilon}L_e y_{k,l} -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\left(i(k+l)z_e\int\limits_0^t e^{il(s-t)}y_{k,l}ds + 2ikv_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_{k,l}ds + i(k-l)w_e\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}y_{k,l}ds\right) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_l^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_l^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_k^- e^{-ikt} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\left(f_{k,l}^L(t) + f_{k,l}^B(t)\right) + f_{k,l}^{\mathrm{int}}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}T_{k,l}^{\mathrm{add}}(y) + \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}_{k,l}(y) + B_{k,l}(y,y)\Big), \quad (10)$$

$$y_{k,l}\big|_{t=0} = 0.$$

Здесь

$$\mathcal{L}_{k,l}(y) = L_{k,l}(y) + B_{k,l}\left(v^0\exp\left(t\left(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e\right)\right), y\right) + B_{k,l}\left(y, v^0\exp\left(t\left(ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e\right)\right)\right),$$
$$f_{k,l}^{\mathrm{int}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(v_{k,l}^0 z_e\frac{i(k+l)}{i(k+l) - \frac{1}{\varepsilon}L_e} + v_{k,l}^0 v_e\frac{2ik}{2ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e} + v_{k,l}^0 w_e\frac{i(k-l)}{i(k-l) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right)e^{ikt},$$

$$\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_l^- = \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}z_e^{1/2}\left(w_{k,l}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k,l}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k+l) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2,l_1,l_2\neq 0}}\overline{\left(z_{k_2,l_2}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_2,l_2}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k_2-l_2) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right)}\left(w_{k_1,l_1}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_1,l_1}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k_1+l_1) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_l^+ = \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}w_e^{1/2}\left(z_{k,l}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k,l}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k-l) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ k_1,k_2,l_1,l_2\neq 0}}\left(z_{k_2,l_2}^0 - \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_2,l_2}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k_2-l_2) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right)\overline{\left(w_{k_1,l_1}^0 - \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_1,l_1}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{i(k_1+l_1) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right)},$$

$$\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_k^- = -\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}v_e^{1/2}\left(u_{k,l}^0 + \frac{v_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k,l}^0\frac{1}{\varepsilon}L_e}{2ik - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\right).$$

Фурье-решением задачи Коши для системы (1) будем называть систему абсолютно непрерывных коэффициентов Фурье $U_k = (u_k, v_k, w_k, z_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих (5), (6) для почти всех $t \in \mathbb{R}_+$.

6. Ликвидация секулярных членов. Перейдем к конечномерной аппроксимации:

$$T_{k,l}(y^{(m)}) = \frac{d}{dt}y_{k,l}^{(m)} - iky_{k,l}^{(m)} + \frac{1}{\varepsilon}L_e y_{k,l}^{(m)} -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\left(i(k+l)z_e\int\limits_0^t e^{il(s-t)}y_{k,l}^{(m)}ds + 2ikv_e\int\limits_0^t e^{ik(s-t)}y_{k,l}^{(m)}ds + i(k-l)w_e\int\limits_0^t e^{-il(s-t)}y_{k,l}^{(m)}ds\right) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{l,m}^+ e^{ilt} + \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{l,m}^- e^{-ilt} + \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^- e^{-ikt} +$$

$$+ e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Big(f^{(m)}_{k,l,L}(t)+f^{(m)}_{k,l,B}(t)\Big)+f^{(m)}_{k,l,\mathrm{int}}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}T^{\mathrm{add}}_{k,l}(y^{(m)})+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Big(\mathcal{L}^{(m)}_{k,l}(y^{(m)})+B^{(m)}_{k,l}(y^{(m)},y^{(m)})\Big), \quad (11)$$

$$y^{(m)}_{k,l}\Big|_{t=0}=0. \quad (12)$$

Положим

$$y_{k,l}(t)=Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})+Q_{k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{ilt})+Q_{-k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ikt})+T^{-1}_{k,l}(z_{k,l}),\quad k,l\in\mathbb{Z}_0.$$

Если подставить это выражение в $\mathcal{L}_{k,l}(y)$, $B_{k,l}(y,y)$ и сделать соответствующие преобразования, выделяющие секулярные члены, то можно найти секулярное уравнение. Выделим в данных интегралах неинтегрируемые в $\mathbb{R}_+$ члены, используя наш оператор:

$$i(k+l)\int_0^t e^{il(s-t)}Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ils})ds=$$

$$=-\frac{\varepsilon}{z_e}Q_{k,-l}e^{-ilt}+\frac{\varepsilon}{z_e}\left(\frac{d}{dt}Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})-ikQ_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})+\frac{1}{\varepsilon}L_eQ_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})\right)-$$

$$-\frac{1}{z_e}\left(2ikv_e\int_0^t e^{ik(s-t)}Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ils})ds+i(k-l)w_e\int_0^t e^{-il(s-t)}Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ils})ds\right).$$

Аналогично получается для остальных интегралов. Суммируя, получим редукцию задачи Коши (11)–(12) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$:

$$z^{(m)}_{k,l}+Q_{k,l}\,e^{ilt}+Q_{k,-l}\,e^{-ilt}+Q_{-k,l}\,e^{-ikt}=$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\left(S_{k,-l}(Q_{k,-l},Q_{k,l})e^{-ilt}+S_{k,l}(Q_{k,-l},Q_{k,l})e^{ilt}\right)+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{l,m}e^{ilt}+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{l,m}e^{-ilt}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}(F^{(m)}_{k,l,L}(t)+F^{(m)}_{k,l,B}(t))+f^{(m)}_{k,l,\mathrm{int}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\left(H^{(m)}_{k,l,L}(t)+H^{(m)}_{k,l,B}(t)+\mathcal{U}^{(m)}_{k,l}\Big(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)})\Big)+B^{(m)}_{k,l}\Big(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}),T^{-1}_{k,l}(z^{(m)})\Big)+\right.$$

$$+B_{k,l}\Big(Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})+Q_{k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{ilt})+Q_{-k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ikt}),\ T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}_{k,l})\Big)+$$

$$\left.+B_{k,l}\Big(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}_{k,l}),\ Q_{k,-l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ilt})+Q_{k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{ilt})+Q_{-k,l}T^{-1}_{k,l}(e^{-ikt})\Big)\right), \quad (13)$$

где

$$F^{(m)}_{k,l,L}(t)+F^{(m)}_{k,l,B}(t)=F^{(m)}_{k,l,L,2}(t)+F^{(m)}_{k,l,B,2}(t)+F^{(m)}_{k,l,L,1}(t)+F^{(m)}_{k,l,B,1}(t),$$

$$\mathcal{U}^{(m)}_{k,l}(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}))=$$

$$=\mathcal{L}^{(m)}_{k,l}(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}))+B^{(m)}_{k,l}\Big(v^0e^{t(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)},\ T^{-1}_{k,l}(z^{(m)})\Big)+B^{(m)}_{k,l}\Big(T^{-1}_{k,l}(z^{(m)}),\ v^0e^{t(ik-\frac{1}{\varepsilon}L_e)}\Big).$$

Чтобы свести задачу Коши (11) к интегральному уравнению в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$, мы должны аннулировать секулярные члены, потребовав, чтобы

$$Q_{k,l}\,e^{ilt}+Q_{k,-l}\,e^{-ilt}+Q_{-k,l}\,e^{-ikt}=\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Big(S_{k,-l}(Q_{k,-l},Q_{k,l})e^{-ilt}+$$

$$+S_{k,l}(Q_{k,-l},Q_{k,l})e^{ilt}\Big)+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^+_{l,m}e^{ilt}+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{l,m}e^{-ilt}+\frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}^-_{k,m}e^{-ikt}. \quad (14)$$

Тогда окончательно получим

$$
\begin{aligned}
z_{k,l}^{(m)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}L_e t}\Bigg(\frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Big(F_{k,l,L}^{(m)}(t) + F_{k,l,B}^{(m)}(t)\Big) + f_{k,l,\mathrm{int}}^{(m)}\Bigg) + \\
+ \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}\Bigg(H_{k,l,L}^{(m)}(t) + H_{k,l,B}^{(m)}(t) + \mathcal{U}_{k,l}^{(m)}\Big(T_{k,l}^{-1}(z^{(m)})\Big) + B_{k,l}^{(m)}\Big(T_{k,l}^{-1}(z^{(m)}), T_{k,l}^{-1}(z^{(m)})\Big) + \\
+ B_{k,l}\Big(Q_{k,-l}T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l}T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l}T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt}),\ T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)})\Big) + \\
+ B_{k,l}\Big(T_{k,l}^{-1}(z_{k,l}^{(m)}),\ Q_{k,-l}T_{k,l}^{-1}(e^{-ilt}) + Q_{k,l}T_{k,l}^{-1}(e^{ilt}) + Q_{-k,l}T_{k,l}^{-1}(e^{-ikt})\Big)\Bigg). \quad (15)
\end{aligned}
$$

Условие на секулярные члены можно переписать как алгебраическую систему для $Q_{k,l}$, $Q_{k,-l}$, $Q_{-k,l}$:

$$
\begin{aligned}
Q_{k,l} &= \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{l,m}^{+} + \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}S_{k,l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}), \\
Q_{k,-l} &= \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{l,m}^{-} + \frac{1}{2}\varepsilon u_e^{1/2}S_{k,-l}(Q_{k,-l}, Q_{k,l}), \\
Q_{-k,l} &= \frac{1}{\varepsilon}u_e^{1/2}\mathcal{D}_{k,m}^{-}, \quad |k| = 1, \dots, m,
\end{aligned} \quad (16)
$$

где

$$
\begin{aligned}
& S_{k,-l}\big(Q_{k,-l}, Q_{k,l}\big)e^{-ilt} + S_{k,l}\big(Q_{k,-l}, Q_{k,l}\big)e^{ilt} = \\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2=k,\\ l_1+l_2=l,\\ |k_1|,|k_2|,|l_1|,|l_2|=1,\dots,m}} \Bigg\{\frac{\varepsilon}{z_e}\frac{\varepsilon}{w_e}\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\Big(Q_{k_1,-l_1}\overline{Q_{k_2,l_2}}e^{-ilt} + Q_{k_2,l_2}\overline{Q_{k_1,-l_1}}e^{ilt}\Big) + \\
&+ \Bigg(\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_1,l_1}^{0} i(k_1+l_1)}{i(k_1+l_1) - \frac{1}{\varepsilon}L_e}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q_{k_2,l_2}} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\overline{v_{k_2,l_2}^{0}} i(k_2-l_2)}{i(k_2-l_2) + \frac{1}{\varepsilon}L_e}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{z_e}Q_{k_1,-l_1}\Bigg)e^{-ilt} + \\
&+ \Bigg(\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\overline{v_{k_1,l_1}^{0}} i(k_1+l_1)}{i(k_1+l_1) + \frac{1}{\varepsilon}L_e}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_2,l_2} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{v_{k_2,l_2}^{0} i(k_2-l_2)}{i(k_2-l_2) + \frac{1}{\varepsilon}L_e}\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q_{k_1,-l_1}}\Bigg)e^{ilt} - \\
&- \Bigg(\bigg(w_{k_1,l_1}^{0} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_1,l_1}^{0}\bigg)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}\overline{Q_{k_2,l_2}} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\bigg(\overline{z_{k_2,l_2}^{0}} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k_2,l_2}^{0}}\bigg)\frac{\varepsilon}{z_e}Q_{k_1,-l_1}\Bigg)e^{-ilt} - \\
&- \Bigg(\bigg(z_{k_2,l_2}^{0} + \frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}v_{k_2,l_2}^{0}\bigg)\frac{\varepsilon}{z_e}\overline{Q_{k_1,-l_1}}\frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}} + \bigg(\overline{w_{k_1,l_1}^{0}} + \frac{z_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\overline{v_{k_1,l_1}^{0}}\bigg)\frac{w_e^{1/2}}{u_e^{1/2}}\frac{\varepsilon}{w_e}Q_{k_2,l_2}\Bigg)e^{ilt}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

7. Заключение. Рассмотрена двумерная дискретная кинетическая система Бродуэлла. Данная система сводится к нелинейному уравнению в весовом пространстве, при условии что выполнены условия секулярности. Данные условия позволяют исследовать нелинейное уравнение и доказать в дальнейшем экспоненциальную устойчивость к состоянию равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева О. А., Духновский С. А., Раджевич Е. В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана// в кн.: Межвуз. сб. Пробл. мат. анал., 2015. — *78*. — С. 165–190.
2. *Васильева О. А., Духновский С. А., Раджевич Е. В.* О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — *60*. — С. 23–81.
3. *Веденяпин В. В., Мингалев И. В., Мингалев О. В.* О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 11. — С. 21–38.
4. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 3. — С. 3–51.
5. *Духновский С. А.* Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *176*. — С. 91–94.

6. *Ильин О. В.* Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — *170*, № 3. — С. 481–488.
7. *Линдблом О., Эйлер Н.* Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати// Теор. мат. физ. — 2002. — *131*, № 2. — С. 179–193.
8. *Радкевич Е. В.* О дискретных кинетических уравнениях// Докл. Росс. Акад. наук. — 2012. — *447*, № 4. — С. 369–373.
9. *Dukhnovsky S. A.* On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Rep. Mold. Mat. — 2020. — *94*, № 3. — P. 3–11.
10. *Dukhnovsky S. A.* The tanh-function method and the (G'/G)-expansion method for the kinetic McKean system// Differ. Equations Control Processes. — 2021. — № 2. — P. 87–100.
11. *Dukhnovsky S. A.* Secular terms for the kinetic McKean model// Differ. Equations Control Processes. — 2023. — № 1. — P. 125–136.
12. *Euler N., Steeb W.-H.* Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — *42*. — C. 1–10.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Духновский Сергей Анатольевич (Dukhnovsky Sergey Anatol'evich)
Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет, Москва
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru