



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 238 (2025). С. 36–48
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-36-48

УДК 517.977

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2025 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

Аннотация. В классе билинейных задач оптимального управления рассматриваются условия оптимальности и улучшения управления в форме специальных задач о неподвижной точке на множестве допустимых управлений. Полученные условия оптимальности и улучшения управления в виде задач о неподвижной точке дают возможность применить и модифицировать известный в вычислительной математике аппарат теории и методов неподвижных точек для поиска экстремальных и улучшающих управлений. Конструируются и анализируются итерационные методы поиска экстремальных и улучшающих управлений. Приводятся результаты сравнительного анализа эффективности предлагаемых методов оптимизации с известными методами на примерах.

Ключевые слова: билинейная управляемая система, условия оптимальности, улучшение управления, задача о неподвижной точке, итерационные методы.

OPTIMIZATION METHODS FOR BILINEAR CONTROL SYSTEMS BASED ON FIXED POINT PROBLEMS

© 2025 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

ABSTRACT. In the class of bilinear optimal control problems, conditions of optimality and control improvement in the form of special fixed-point problems on a set of admissible controls are considered. The obtained conditions of optimality and control improvement in the form of fixed-point problems make it possible to apply and modify the technique of the fixed-point theory and methods known in computational mathematics to search for extremal and improving controls. Iterative methods for the search for extremal and improving controls are constructed and analyzed. The efficiency of the proposed optimization methods are compared with the known methods.

Keywords and phrases: bilinear control system, optimality conditions, control improvement, fixed point problem, iterative methods.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Рассматривается класс билинейных управляемых систем, который описывается линейными по состоянию и управлению обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такими системами моделируются многие управляемые динамические процессы в области биологии, экономики, медицины, энергетики (см. [6, 11]). Теория и методы решения билинейных задач оптимального управления рассматривались во многих исследованиях (см. [8–10]).

В [8] на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений, разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления в билинейных управляемых системах с квадратичными функционалами

качества управления. Улучшение управления достигается решением специальных задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний.

В данной статье рассматриваются новые нелокальные методы оптимизации билинейных управляемых систем на основе представления условий оптимальности и улучшения управления в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Предлагаемый подход неподвижных точек позволяет получить новые свойства конструируемых методов оптимизации по сравнению с известными методами, которые являются важными для повышения эффективности решения задач рассматриваемого класса.

2. Условия оптимальности и улучшения управления. Класс билинейных задач оптимального управления рассматривается в следующей форме:

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle + \int_T \left(\langle a(u(t), t), x(t) \rangle + d(u(t), t) \right) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(u(t), t)x(t) + b(u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в которой функции $a(u, t)$, $d(u, t)$, $A(u, t)$, $b(u, t)$ линейны по переменной u и непрерывны по переменной t , $c \in \mathbb{R}^n$ является заданным вектором. Вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ характеризует состояние системы, в качестве допустимых управлений $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ рассматривается множество V кусочно непрерывных функций на интервале T со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Начальное состояние x^0 и интервал T заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in \mathbb{R}^n$ в задаче (1), (2) является линейной по переменной x и линейной по переменной u ; ее можно представить в следующем виде:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, u, t) + \langle H_1(\psi, u, t), x \rangle, \\ H_0(\psi, u, t) = \langle \psi, b(u, t) \rangle - d(u, t), \quad H_1(\psi, u, t) = A^T(u, t)\psi - a(u, t).$$

Стандартная сопряженная система не зависит от переменной x и принимает вид:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u(t), t)\psi(t) + a(u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -c. \quad (3)$$

Для допустимого управления $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение системы (2) при $u(t) = v(t)$; $\psi(t, v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$. Будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции $g(y_1, \dots, y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2} :

$$\Delta_{z_{s_1}, z_{s_2}} g(y_1, \dots, y_l) = g(y_1, \dots, z_{s_1}, \dots, z_{s_2}, \dots, y_l) - g(y_1, \dots, y_{s_1}, \dots, y_{s_2}, \dots, y_l).$$

Обозначим через P_Y оператор проектирования на множество $Y \subset \mathbb{R}^k$ в евклидовой норме:

$$P_Y(z) = \arg \min_{y \in Y} (\|y - z\|), \quad z \in \mathbb{R}^k.$$

Важным свойством оператора проектирования является выполнение неравенства

$$\langle y - P_Y(z), z - P_Y(z) \rangle \leq 0, \quad y \in Y.$$

Определим функцию переключения в задаче (1), (2) соотношением

$$g(\psi, x, t) = H_u(\psi, x, u, t).$$

С помощью отображения u^* , определяемого соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle g(\psi, x, t), w \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

Известное необходимое условие оптимальности (принцип максимума; см. [4, 8]) для управления $u \in V$ в классе билинейных задач (1), (2) можно представить в форме

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Условие принципа максимума (4) можно также представить в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t), t), \quad t \in T,$$

где пара $(x(t), \psi(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи принципа максимума:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(u^*(\psi(t), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t), x(t), t), t), & x(t_0) &= x^0, \\ \dot{\psi}(t) &= -A^T(u^*(\psi(t), x(t), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t), t), t), & \psi(t_1) &= -c. \end{aligned}$$

Введем отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ с помощью соотношения

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha g(\psi, x, t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α принцип максимума (4) можно записать в проекционной форме:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (5)$$

Отметим, что для выполнения принципа максимума (4) достаточно проверить условие (5) хотя бы для одного $\alpha > 0$. Обратно, из условия (4) следует выполнение условия (5) для всех $\alpha > 0$.

Условия оптимальности (4) и (5) можно рассматривать как задачи о неподвижной точке в поточечной форме. В [2,3] в классе нелинейных задач оптимального управления разработаны новые эквивалентные формы условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке с различными операторами управления. В соответствии с указанными работами в рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) новые формы условий принципа максимума в виде поточечных задач о неподвижной точке принимают следующий вид.

1. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T, \quad (6)$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t, u), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (7)$$

2. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T, \quad (8)$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t, u), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (9)$$

3. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad (10)$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t)x(t) + b(u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (11)$$

4. *Задача о неподвижной точке:*

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T, \quad (12)$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t)\psi(t) + a(u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c. \quad (13)$$

Представленные формы принципа максимума в рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) могут использоваться для разработки и обоснования эффективных итерационных методов поиска экстремальных управлений, в том числе особых экстремальных управлений. Предлагаемые методы приобретают важное для повышения эффективности свойство улучшения управления на каждой итерации. Выполнение указанного свойства улучшения управления можно обосновать с помощью известных нестандартных формул приращения функционала, не содержащих остаточных членов разложений, которые были разработаны в [8] в классе линейных по состоянию

задач оптимального управления. В рассматриваемом классе билинейных задач (1), (2) нестандартные формулы приращения функционала для управлений $v \in V$ и $u \in V$ можно представить в следующем виде:

$$\Delta_v \Phi(u) = \int_T \langle g(\psi(t, u), x(t, v), t), v(t) - u(t) \rangle dt, \quad (14)$$

$$\Delta_v \Phi(u) = \int_T \langle g(\psi(t, v), x(t, u), t), v(t) - u(t) \rangle dt. \quad (15)$$

Рассмотрим задачу улучшения управления $u \in V$: найти управление $v \in V$ с условием $\Phi(v) \leq \Phi(u)$.

Для управления $u \in V$ рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, v), t), \quad t \in T. \quad (16)$$

Для этого управления на основе формулы (14) получаем неравенство $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Рассмотрим допустимое управление, удовлетворяющее условию

$$v(t) = u^*(\psi(t, v), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (17)$$

Для этого управления на основе формулы (15) получаем неравенство $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$.

Далее рассмотрим допустимые управления с параметром $\alpha > 0$, соответственно определяющиеся условиями:

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, v), u(t), t), \quad t \in T, \quad (18)$$

$$v(t) = u^\alpha(\psi(t, v), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T. \quad (19)$$

Тогда соответственно для этих управлений на основе формул (14), (15) и свойства операции проектирования получаем неравенство

$$\Delta_v \Phi(u) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v(t) - u(t)\|^2 dt. \quad (20)$$

Таким образом, на основе нестандартных формул приращения (14) и (15) получаем четыре условия нелокального улучшения управления (16)–(19). Форма полученных условий улучшения управления (16)–(19) позволяет рассматривать эти условия как задачи о неподвижной точке относительно управления $v \in V$.

Покажем, что решение уравнения (16) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной задачи Коши (7) и наоборот.

Действительно, пусть $v \in V$ — решение уравнения (16). Тогда функция $x(t, v)$, $t \in T$, очевидно, является решением специальной задачи Коши (7).

Обратно, пусть $x(t)$, $t \in T$, — решение задачи Коши (7). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T.$$

Предположим, что $v \in V$. Тогда $x(t) = x(t, v)$, $t \in T$. Следовательно, $v \in V$ является решением уравнения (16).

Аналогично показывается, что решение уравнения (17) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной сопряженной задачи Коши (9) и наоборот.

Далее покажем, что решение уравнения (18) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной задачи Коши (11) и наоборот.

Действительно, пусть $v^\alpha \in V$ — решение уравнения (18). Тогда очевидно, что функция $x(t, v^\alpha)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши (11).

Обратно, пусть $x(t)$, $t \in T$, — решение задачи Коши (11). Сформируем выходное управление по правилу:

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T.$$

Имеем, что $v^\alpha \in V$ и $x(t) = x(t, v^\alpha)$, $t \in T$. Таким образом, $v^\alpha \in V$ является решением уравнения (18).

Аналогично показывается, что решение уравнения (19) на множестве допустимых управлений можно свести к решению специальной сопряженной задачи Коши (13) и наоборот.

Отметим, что в силу свойств оператора проектирования (однозначность, условие Липшица) задачи Коши (11) и (13) имеют единственное решение и однозначно определяют соответствующие выходные управления $v^\alpha \in V$.

В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Уравнения (18) и (19) имеют единственное решение.*

Отметим, что метод поиска улучшающего управления для решения уравнения (16) по правилу

$$v(t) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши (7), совпадает с известным x -методом нелокального улучшения управления (см. [8]), рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Метод поиска улучшающего управления для решения уравнения (17) по правилу

$$v(t) = u^*(\psi(t), x(t, u), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение задачи Коши (9), совпадает с другим известным ψ -методом нелокального улучшения управления (см. [8]), рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Аналогично отметим, что метод решения уравнения (18) по правилу

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, — решение специальной задачи Коши (11), совпадает с известным (см. [8]) проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Далее отметим, что метод решения уравнения (19) по правилу

$$v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, — решение задачи Коши (13), совпадает с другим известным (см. [8]) проекционным методом нелокального улучшения управления, рассматриваемым применительно к билинейной задаче (1), (2).

Полученные условия нелокального улучшения управления (16)–(19) в форме задач о неподвижной точке могут служить основой для конструирования новых методов нелокального улучшения управления.

При этом отметим важное отличие конструируемых методов неподвижных точек от указанных выше известных методов нелокального улучшения управления (см. [8]) в классе билинейных задач оптимального управления. Методы работы [8] заключаются в решении соответствующих специальных задач Коши (7), (9), (11) и (13) в пространстве состояний и могут рассматриваться в качестве одного из способов решения соответствующих уравнений (16)–(19). Для решения указанных уравнений могут применяться другие подходы, в частности, итерационные методы неподвижных точек, из которых наиболее известными являются методы простых итераций (см. [5, 7]).

3. Методы оптимизации. Методы простых итераций для решения указанных выше задач о неподвижной точке принципа максимума образуют соответствующие итерационные процессы при $k \geq 0$ с начальным управлением $v^0 \in V$ при $k = 0$.

1. В задаче о неподвижной точке (6),(7) рассматривается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t)x(t) + b(u^*(\psi(t, v^k), x(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Для решения $x(t)$, $t \in T$, имеет место очевидное соотношение

$$x(t) = x(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, итерационный процесс может быть записан в неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), \quad t \in T. \quad (21)$$

2. В задаче о неподвижной точке (8), (9) предлагается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t)\psi(t) + a(u^*(\psi(t), x(t, v^k), t), t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

Для решения $\psi(t)$, $t \in T$, имеет место очевидное соотношение

$$\psi(t) = \psi(t, v^{k+1}), \quad t \in T.$$

Следовательно, итерационный процесс может быть записан в следующей неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^*(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), \quad t \in T. \quad (22)$$

3. В задаче о неподвижной точке (10),(11) рассматривается итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t)x(t) + b(u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Итерационный процесс может быть представлен в неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (23)$$

4. В задаче о неподвижной точке (12),(13) строится итерационный процесс

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t)\psi(t) + a(u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

Итерационный процесс может быть записан в неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (24)$$

В построенных проекционных методах (23) и (24), в отличие от стандартного метода проекции градиента, параметр проектирования $\alpha > 0$ фиксируется в итерационном процессе последовательных приближений управления.

Анализ сходимости построенных итерационных процессов к решениям соответствующих задач о неподвижной точке можно исследовать на основе известного принципа сжимающих отображений. В частности, можно показать (ср. [2]), что при определенных условиях и достаточно малых параметрах проектирования $\alpha > 0$ процессы (23) и (24) могут сходиться в норме пространства непрерывных функций $\|v\|_C = \max_{t \in T} \|v(t)\|$ к решениям соответствующих задач о неподвижной точке (10), (11) и (12), (13).

В соответствии с условиями улучшения управления (16)–(19) неявная форма итерационных процессов (21)–(24) позволяет рассматривать эти уравнения на каждой итерации как условия нелокального улучшения управления $v^k \in V$. Таким образом, процессы (21)–(24) на каждой итерации приобретают свойство нелокального улучшения управления $v^k \in V$.

При этом для процессов (21) и (22) на основе формул приращения (14) и (15) получаем соответствующие оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0,$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq 0.$$

Для процессов (23) и (24) с параметром проектирования $\alpha > 0$ на основе формул приращения (14) и (15) и оценки (20) получаем соответствующие усиленные оценки улучшения целевого функционала:

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt, \quad (25)$$

$$\Delta_{v^{k+1}}\Phi(v^k) = \int_T \langle g(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), t), v^{k+1}(t) - v^k(t) \rangle dt \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt. \quad (26)$$

Используя свойство релаксации по целевому функционалу и оценки (25), (26), сходимость итерационных процессов (23) и (24) можно исследовать по специальной величине невязки принципа максимума на итерационных приближениях управления.

Для каждого $k \geq 0$ рассмотрим величину

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \geq 0.$$

Если $\delta(v^k) = 0$, то в силу оценок (25) и (26) получаем, что $v^k = v^{k+1}$, т.е. управление v^k удовлетворяет условию принципа максимума. Таким образом, величина $\delta(v^k)$ характеризует невязку (меру) выполнения принципа максимума на управлении v^k .

Теорема 2. *Релаксационные процессы (23) и (24) для любого параметра проектирования $\alpha > 0$ сходятся по невязке принципа максимума:*

$$\delta(v^k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. В билинейной задаче семейство фазовых траекторий системы в совокупности ограничено:

$$x(t, u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество. В силу ограниченности семейства фазовых траекторий последовательности $\Phi(v^k)$, $k \geq 1$, ограничены снизу. Следовательно, с учетом релаксации, эти последовательности являются сходящимися, т.е.

$$\delta(v^k) = \Phi(v^k) - \Phi(v^{k+1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \square$$

Практическим критерием окончания расчета итерационных приближений управления является выполнение условия

$$\delta(v^k) = |\Phi(v^{k+1}) - \Phi(v^k)| \leq \varepsilon |\Phi(v^k)|,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная относительная точность расчета целевого функционала.

Для вычисления приближения v^{k+1} на k -й итерации рассматриваемых процессов (21)–(24) достаточно решить соответствующую специальную задачу Коши. При таком способе вычисления приближения v^{k+1} трудоемкость k -й итерации процессов оценивается расчетом двух задач Коши. При этом выделим следующие характерные свойства процессов (21)–(24).

1. Итерационные процессы (21) и (22) получают возможность строго улучшать управление v^k , удовлетворяющее принципу максимума, в силу возможной неединственности решения соответствующей специальной задачи Коши.

2. Итерационные процессы (23) и (24) не могут строго улучшить управление v^k , удовлетворяющее принципу максимума, в силу единственности решения уравнений (23) и (24) в соответствии

с теоремой 1. При этом отметим, что методы (23) и (24) строго улучшают любые управления v^k , не удовлетворяющие принципу максимума, согласно соответствующим оценкам (25) и (26).

Другой способ вычисления приближения v^{k+1} основан на представлении уравнений (21)–(24) в виде задач о неподвижной точке относительно управления v^{k+1} . Для решения этих задач можно применить известные методы простых итераций.

Преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность решения на каждой итерации соответствующих итерационных процессов обычных задач Коши с предварительно вычисленным управлением, в отличие от достаточно трудоемкого решения специальных задач Коши с операторами максимизации функции Понтрягина или операторами проектирования в правой части систем дифференциальных уравнений.

Другим преимуществом такого подхода неподвижных точек является возможность строгого улучшения экстремального управления v^k , достигаемого с помощью выбора начального приближения методов простой итерации.

Для иллюстрации такой возможности рассмотрим следующие модификации проекционных методов (23) и (24).

На k -й итерации процессов (23) или (24) соответственно строятся итерационные процессы метода простой итерации с индексом $s \geq 0$ и начальным приближением $w^0 \in V$ при $s = 0$, которое не является экстремальным управлением, т.е. не удовлетворяющим принципу максимума:

$$w^{s+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, w^s), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (27)$$

$$w^{s+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, w^s), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (28)$$

Итерации по индексу $s \geq 0$ проводятся до первого строгого улучшения управления $v^k \in V$ по целевому функционалу: $\Phi(w^s) < \Phi(v^k)$. Далее осуществляется переход на новую $(k+1)$ -ю итерацию процессов (23) или (24) с полученным управлением $v^{k+1} = w^s$ и итерационные процессы метода простой итерации повторяются.

Если строгое улучшение управления $v^k \in V$ не происходит по индексу $s \geq 0$, т.е. $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^k)$, то, в предположении сходимости процессов (27) и (28), получаем условие

$$\Phi(w^\alpha) = \Phi(v^k),$$

где w^α — решение соответствующей задачи о неподвижной точке:

$$w(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, w), v^k(t), t), \quad t \in T,$$

$$w(t) = u^\alpha(\psi(t, w), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T.$$

При этом в силу оценки (20) получаем, что $v^k = w^\alpha$, т.е. управление v^k удовлетворяет принципу максимума.

В результате возникают релаксационные последовательности управлений v^l , $l \geq 0$ со свойством $\Phi(v^{l+1}) < \Phi(v^l)$, образуемые в результате рассматриваемой модификации расчета последовательных приближений управления для процессов (23) и (24) соответственно.

В случае конечной релаксационной последовательности v^l , $l \geq 0$, когда строгое улучшение конечного управления v^l не происходит по индексу $s \geq 0$, т.е. $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^l)$, для конечного управления v^l имеем выполнение условия принципа максимума.

Для случая бесконечной релаксационной последовательности v^l , $l \geq 0$, когда $\Phi(v^{l+1}) < \Phi(v^l)$, получаем следующее.

В задаче (1), (2) семейство фазовых траекторий системы (2) в совокупности ограничено:

$$x(t, u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное множество. В силу ограниченности семейства фазовых траекторий последовательности $\Phi(v^l)$, $l \geq 1$, ограничены снизу. Следовательно, с учетом релаксации, эти последовательности являются сходящимися, т.е.

$$\Phi(v^{l+1}) - \Phi(v^l) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Отсюда возникают следующие критерии окончания расчета задачи (1), (2) предлагаемыми модификациями методов.

Если выполнилось первое строгое улучшение управления $v^l \in V$ по индексу $s \geq 0$: $\Phi(w^s) < \Phi(v^l)$, то $v^{l+1} = w^s$ и проверяется условие остановки расчета по функционалу:

$$|\Phi(v^{l+1}) - \Phi(v^l)| \leq \varepsilon_1 |\Phi(v^l)|,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — заданная относительная точность расчета целевого функционала.

Если указанный критерий остановки выполнен, то на этом расчет предлагаемыми модификациями методов заканчивается. Иначе осуществляется переход на новую $(l + 1)$ -ю итерацию процессов (23) или (24) с полученным управлением $v^{l+1} = w^s$, и итерационный процесс повторяется.

Если строгое улучшение управления $v^l \in V$ по индексу $s \geq 0$ не происходит, т.е. $\Phi(w^s) \geq \Phi(v^l)$, то итерационный процесс метода простой итерации проводится до выполнения условия

$$\|w^{s+1} - w^s\|_C \leq \varepsilon_2 \|w^s\|_C,$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — заданная относительная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом расчет предлагаемыми модификациями методов заканчивается.

Предлагаемые модификации проекционных методов, в отличие от градиентных методов и известных методов нелокального улучшения управления (см. [8]), не гарантируют релаксацию по целевому функционалу на каждой итерации последовательных приближений управления. Свойство релаксации компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления и отсутствием на каждой итерации достаточно трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления в окрестности текущего приближения управления.

В рассматриваемых модификациях проекционных методов на каждой итерации решается обычная задача Коши с предварительно вычисленным управлением, в отличие от достаточно трудоемкого решения специальных задач Коши с проекционным оператором в правой части систем дифференциальных уравнений для известных проекционных методов нелокального улучшения управления (см. [8]).

Известные проекционные методы нелокального улучшения управления (см. [8]) в силу единственности решения специальных задач Коши не могут строго улучшать экстремальные управления, т.е. удовлетворяющие принципу максимума. Предлагаемые модификации проекционных методов имеют такую возможность за счет конструирования последовательных приближений управления, отличающихся от экстремального управления.

Данные особенности рассматриваемых модификаций проекционных методов на основе задач о неподвижной точке дают возможность повысить эффективность решения билинейных задач оптимального управления по сравнению с известными градиентными и проекционными методами нелокального улучшения управления (см. [8]).

4. Примеры. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие характерные особенности и вычислительную эффективность предлагаемых модификаций проекционных методов оптимизации по сравнению с известными методами.

Численное решение фазовых и сопряженных задач Коши производилось методом Рунге—Кутты—Вернера переменного (5-6) порядка точности с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0 (см. [1]). Значения управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах фиксированной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-3}$ на интервале T . В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле. Критерии остановки расчета определялись значениями $\varepsilon_1 = \varepsilon = 10^{-6}$ и $\varepsilon_2 = 10^{-4}$.

Пример 1 (строгое улучшение экстремального управления). Рассматривается известная билинейная задача (см. [8]):

$$\Phi(u) = -x(2) + 2 \int_0^2 x(t)(2 - 3u(t))dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = 2(u(t) - 1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [0, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi, x, u, t) = 2\psi(u - 1)t - 2x(2 - 3u),$$

$$\dot{\psi}(t) = 2(2 - 3u(t)), \quad \psi(2) = 1.$$

Отображение u^* можно представить в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} 0, & g(\psi, x, t) < 0, \\ 1, & g(\psi, x, t) > 0, \\ w \in U, & g(\psi, x, t) = 0, \end{cases} \quad g(\psi, x, t) = 2\psi t + 6x.$$

Экстремальные управления определяются на основе решения краевой задачи принципа максимума:

$$\dot{x}(t) = 2(u^*(\psi(t), x(t), t) - 1)t, \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = 2(2 - 3u^*(\psi(t), x(t), t)), \quad \psi(2) = 1.$$

Анализ краевой задачи показывает существование трех экстремальных режимов:

I: $x(t) = 1$, $\psi(t) = -2t + 5$, $t \in T$, с соответствующим управлением $u(t) = 1$, $t \in T$, и значением функционала $\Phi(u) = -5$;

II:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -t^2 + 2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} -2t - 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 4t - 7, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

соответствующее значение функционала $\Phi(u) = -4/3$;

III:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ -t^2 + \frac{25}{16}, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} -2t - \frac{5}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ 4t - 7, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2, \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{3}{4}, \\ 0, & \frac{3}{4} \leq t \leq 2; \end{cases}$$

соответствующее значение функционала $\Phi(u) = -65/48$.

Таким образом, оптимальным решением задачи оптимального управления является первое экстремальное управление.

Рассмотрим задачу улучшения второго экстремального управления:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

с помощью модификации проекционного метода оптимизации на основе метода улучшения (23).

Отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ можно записать в форме

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha g(\psi, x, t)), \quad g(\psi, x, t) = 2\psi t + 6x.$$

Поэтому задача о неподвижной точке (23) для улучшения экстремального управления при $k = 0$, $v^0 = u$, $v^1 = v$ принимает следующий вид:

$$v(t) = \begin{cases} P_U(1 + \alpha(2t(-2t - 1) + 6x(t, v))), & 0 \leq t < 1, \\ P_U(\alpha(2t(4t - 7) + 6x(t, v))), & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

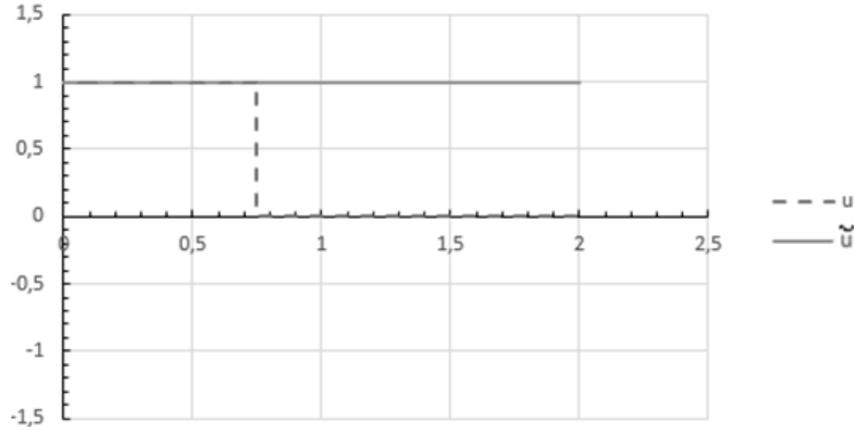


Рис. 1. Расчетные управления u и \tilde{u} при $v^0 = 0$.

Метод простой итерации для $s \geq 0$ соответственно имеет вид

$$w^{s+1}(t) = \begin{cases} P_U(1 + \alpha(2t(-2t - 1) + 6x(t, w^s))), & 0 \leq t < 1, \\ P_U(\alpha(2t(4t - 7) + 6x(t, w^s))), & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

В качестве начальных приближений для метода простой итерации при $s = 0$ рассматривались управления, которые не являются экстремальными управлениями, в частности $w^0(t) = 0$ и $w^0(t) = 0,5$, $t \in T$. При $\alpha = 10^2$ для обоих начальных приближений получалось расчетное управление $\tilde{u}(t) = 1$, $t \in T$, с трудоемкостью, которая оценивается суммарным количеством 26 и 14 задач Коши соответственно. При достаточно больших α итерационный процесс не сходится, при достаточно малых α сходимость существенно замедляется с соответствующим увеличением суммарного количества расчетных задач Коши.

Пример иллюстрирует возможность строгого улучшения экстремального управления рассматриваемой модификацией проекционного метода. Градиентные методы и немодифицированный метод (23) с решением специальной задачи Коши такой возможностью не обладают.

Пример 2 (сравнительная эффективность). Проводится сравнение результатов расчета задачи примера 1 предлагаемой модификацией метода (23) с фиксированным $\alpha = 10^3$ и немодифицированным проекционным методом (23) с решением специальной задачи Коши при $\alpha = 10^3$ для различных стартовых управлений v^0 при $k = 0$. Модификация метода (23) рассматривалась с различными начальными приближениями $w^0 \in V$ для метода простой итерации при $s = 0$, не являющимися экстремальными управлениями.

В таблицах 1 и 2 приводятся результаты расчета по итерациям улучшения с индексом $l \geq 0$ до выполнения критериев останова. Здесь Φ и $\tilde{\Phi}$ — расчетные значения целевого функционала соответственно немодифицированным проекционным методом (23) и предлагаемой модификацией метода (23). Соответствующие суммарные количества расчетных задач Коши N и \tilde{N} приводятся с учетом останова по указанным выше критериям.

При $v^0 = 0$ получаем результаты, приведенные в таблице 1. Немодифицированным методом (23) получено расчетное управление с $N = 5$, совпадающее на сетке T_h с третьим экстремальным управлением. Модификацией метода (23) получено расчетное управление с $\tilde{N} = 29$, совпадающее с оптимальным управлением. При этом начальное приближение для метода простой итерации выбиралось $w^0 = 0$. При начальном приближении для метода простой итерации $w^0 = 0,5$ количество расчетных задач Коши сократилось до $\tilde{N} = 18$ с тем же количеством итераций улучшения и расчетным оптимальным управлением. На рис. 1 демонстрируются конечные расчетные управления u и \tilde{u} , полученные соответствующими методами.

Результаты расчета для $v^0 = 0,5$ приведены в таблице 2.

Таблица 1. Результаты расчета при $v^0 = 0$.

l	Φ	$\tilde{\Phi}$
1	-1,3541666666666666	-1,202510431999998
2	-1,3541666666666666	-1,341536106085704
3		-1,709556895999993
4		-4,387292666666666
5		-5,000000000000000
6		-5,000000000000000

Таблица 2. Результаты расчета при $v^0 = 0,5$.

l	Φ	$\tilde{\Phi}$
1	-5,000000000000000	0,333333333333333
2	-5,000000000000000	-1,202510431999998
3		-1,341536106085704
4		-1,709556895999993
5		-4,387292666666666
6		-5,000000000000000
7		-5,000000000000000

Немодифицированным методом (23) получено расчетное управление с $N = 5$, совпадающее с оптимальным управлением.

Модификацией метода (23) получено расчетное управление с $\tilde{N} = 32$, совпадающее с оптимальным управлением, при начальном приближении $w^0 = 0$ для метода простой итерации. При начальном приближении для метода простой итерации $w^0 = 0,5$ количество расчетных задач Коши уменьшилось до $\tilde{N} = 18$.

Результаты проведенных расчетов показывают, что модификация проекционного метода (23) позволяет получить оптимальное решение $u(t) = 1, t \in T$, с различных стартовых управлений, в том числе с неоптимального экстремального стартового управления. Немодифицированный проекционный метод (23) позволяет получать экстремальные управления, но не может строго улучшить неоптимальное экстремальное управление.

5. Заключение. В рассматриваемом классе билинейных управляемых систем получены следующие новые результаты.

1. Представлены новые формы принципа максимума на основе конструируемых задач о неподвижной точке.
2. Построены новые условия нелокального улучшения управлений в форме задач о неподвижной точке в пространстве управлений.
3. Разработаны новые итерационные методы оптимизации на основе задач о неподвижной точке.

Выделим следующие вычислительные особенности предлагаемых методов оптимизации в классе билинейных задач оптимального управления.

1. Нелокальность улучшения управления и отсутствие трудоемкой операции выпуклого или игольчатого варьирования управления на каждой итерации, характерной для градиентных методов.
2. Возможность строгого улучшения экстремальных управлений в отличие от градиентных и других известных нелокальных методов улучшения управления.
3. Повышение точности расчета итерационных приближений управления, вычисляемых одновременно с расчетом фазовых и сопряженных задач Коши.

Указанные свойства предлагаемых методов являются важными факторами для повышения эффективности решения билинейных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бартенев О. В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. *Булдаев А. С.* Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Мат. информ. — 2020. — 1. — С. 35–53.
3. *Булдаев А. С., Казьмин И. Д.* Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 19–27.
4. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.

5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
6. *Рудик А. П.* Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. — М.: Атомиздат, 1970.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
8. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
9. *Срочко В. А., Аксентюшкина Е. В.* Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2016. — 15. — С. 78–91.
10. *Хайлов Е. Н.* Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном органте// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1998. — 220. — С. 217–235.
11. *Mohler R. R.* Bilinear Control Processes with Applications to Engineering, Ecology and Medicine. — New York–London: Academic Press, 1973.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Булдаев Александр Сергеевич (Buldaev Aleksandr Sergeevich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич (Kaz'min Ivan Dmitrievich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ

(Buryat State University named after Dorzhi Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: kazminvanya@mail.ru