



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 238 (2025). С. 3–23
DOI: 10.36535/2782-4438-2025-238-3-23

УДК 517, 531.01

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
МГУ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ»
ИМ. ПРОФ. В. В. ТРОФИМОВА ПОД РУКОВОДСТВОМ
Д. В. ГЕОРГИЕВСКОГО И М. В. ШАМОЛИНА

© 2025 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. Приведена краткая информация о заседаниях семинара в 2023 г.

Ключевые слова: качественная теория динамических систем, геометрия, классическая механика, механика жидкости и газа, механика деформируемого твердого тела.

SESSIONS OF THE WORKSHOP
OF THE MATHEMATICS AND MECHANICS DEPARTMENT
OF THE LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
“URGENT PROBLEMS OF GEOMETRY AND MECHANICS”
NAMED AFTER V. V. TROFIMOV

© 2025 D. V. GEORGIEVSKY, M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. Brief information on sessions of the workshop in 2023 is presented.

Keywords and phrases: qualitative theory of dynamical systems, geometry, classical mechanics, fluid and gas mechanics, solid mechanics.

AMS Subject Classification: 58Cxx, 70Cxx

ЗАСЕДАНИЕ 490 (10 февраля 2023 г.)

С. Е. Носов.

О сейсмических колебаниях полубесконечного подземного трубопровода.

ЗАСЕДАНИЕ 491 (17 февраля 2023 г.)

Д. В. Георгиевский.

Деформаторы высоких рангов и уравнения совместности их компонент.

Вопросы совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных, различные формы записи уравнений совместности и их эквивалентность играют важную роль в постановках задач механики деформируемого твёрдого тела в напряжениях. В докладе для компонент

деформаторов высоких рангов, связанных с обобщёнными перемещениями аналогами кинематических соотношений Коши в n -мерном пространстве (многомерной сплошной среде) выводят уравнения совместности. Они записываются в виде равенства нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера с двумерным массивом индексов либо двойственного к нему обобщённого тензора Римана—Кристоффеля.

ЗАСЕДАНИЕ 492 (10 марта 2023 г.)

М. В. Шамолин.

О гладкости инвариантов динамических систем.

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно, позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции.

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты — это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее пятимерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются

достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

ЗАСЕДАНИЕ 493 (17 марта 2023 г.)

Р. Р. Айдагулов.

Градуированные вычисления и быстрое умножение матриц.

При решении задач с большим параметром (размерности) n используется два метода уменьшения сложности. В качестве основного метода используется метод рекуррентного разделения задачи с параметром n на несколько подзадач с меньшей размерностью n/l , и формирование общего решения основывается на решении подзадач с уменьшенными размерностями. Автор называет этот метод методом фильтрации. В англоязычных источниках этот метод выделяют как принцип «разделяй и властвуй».

Сортировка. Продемонстрируем этот метод в задаче упорядочивания (сортировки) n чисел. Если решена задача для размерностей $n_1, n_2, n_1 + n_2 = n$, то остается только сливать два упорядоченных множества:

$$x[i[1]] < x[i[2]] < \dots < x[i[n_1]], \quad x[j[1]] < x[j[2]] < \dots < x[j[n_2 - 1]].$$

Для этого достаточно установить два указателя для двух массивов $l_1 = 1, l_2 = 1, l = 1$, и сдвигать указатели массива с меньшим знаменателем:

```
while (l < n){ if (x[i[l1]] < x[j[l2]]){ ii[l++] = i[l1];
if (l1 < n1) l1++;
else {while (l2 <= n2) ii[l++] = j[l2++]} else ...
```

В случае невыполнения сравнения выполняется передвижение по второму счетчику. Обозначая количество операций (в нашем случае сравнений) через $T(n)$, приходим к неравенству следующего типа:

$$T(n) = Cn^\alpha + mT\left(\frac{n}{l}\right).$$

В нашем случае $l = m = 2, \alpha = 1, (n - 1)/2 \leq Cn \leq n - 1$. Решая рекуррентное соотношение, получаем $T(n) = O(n \log n)$. Отметим, что каждый член массива участвует в операции сравнения примерно $O(\log n)$ раз. Для отделения члена $x[i]$ с соседним по порядку необходимо в среднем не меньше $n_i \geq \log n$ битовых сравнений. Следовательно, по каждому элементу в среднем на сравнение требуется не менее $\log^2 n/2$ битовых операций.

При использовании метода фильтрации промежуточные вычисления (сравнения в низших ветках) используются только выше в своей ветке. Поэтому этот метод менее эффективен по сравнению метода градуированного вычисления. В задаче сортировки градуировка по битам переменных отличается от всех элементов, которые относятся к другой градуировке. Таким образом, общее количество битовых операций равно $\sum_{i=1}^{n-1} n_i = O(n \log n)$. Это может быть меньше количества всех битов в записи чисел. За меньшее количество битовых сравнений нельзя упорядочить. Такие алгоритмы, не улучшаемые по эффективности, некоторые авторы называют «алгоритмом от бога».

Умножение по методу фильтрации. Большие числа на компьютере представляются в M -ичной системе исчисления как значения многочлена:

$$X = x_0 + x_1 M + \dots + x_{k-1} M^{k-1};$$

M есть степень двойки, обычно $M = 2^d, d = 32$. Считаем, что $0 \leq x_i < M$. Соответственно $X < M^k = 2^n, n = kd$. Допустим, что имеется другое большое число $Y = y_0 + \dots + y_{l-1} M^{l-1}$

и требуется их умножить. Произведение не превышает M^m , $m = k + l$, и оно представляется в виде:

$$Z = XY = \sum_{i=0}^{m-1} z_i M^i, \quad z_i = \sum_{j \leq i} x_j y_{i-j}.$$

Правда, здесь после вычисления надо осуществить переносы, когда цифры становятся не меньше M . Для этого складываем перенос из нижнего уровня и делим на M , остаток от деления будет настоящей цифрой этого уровня, а целая часть от деления пойдет в следующий уровень как перенос. На переносы потребуется $O(n \log n)$ операций.

Более эффективный метод умножения больших чисел впервые использовал А. А. Карацуба в 1962 г. Он использовал метод фильтрации («разделяй и властвуй»), разделяя умножаемые числа на композицию двух поменьше:

$$X = X_0 + X_1 * N, \quad N = 2^R, \quad Y = Y_0 + Y_1 * N.$$

Здесь X_0, Y_0 — числа, состоящие из младших разрядов, X_1, Y_1 — из старших разрядов. Результат умножения представляется в следующем виде:

$$XY = X_0 Y_0 + N(X_0 Y_1 + X_1 Y_0) + X_1 Y_1 N^2.$$

Среднее число вычисляется одним дополнительным умножением, используя результаты умножений крайних:

$$X_0 Y_1 + X_1 Y_0 = (X_0 + X_1)(Y_0 + Y_1) - X_0 Y_0 - X_1 Y_1.$$

Таким образом, принцип «разделяй и властвуй» для умножения двух n -битных чисел, требующих $T(n)$ операций, приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn.$$

Решая эту рекурсию, получаем:

$$T(n) = C(2^k + 3 * 2^{k-1} + \dots + 3^k) = C(3^{k+1} - 2^{k+1}) = O(n^{\log 3}). \quad (1)$$

В соответствии с приведенной мастер-теоремой принципа «разделяй и властвуй» число операций при умножении методом Карацуба оценивается величиной $O(n^{\log 3})$. Мы условимся, что логарифм без указания основания означает логарифм по основанию 2.

Впоследствии в 1969 г. Штрассеном найден аналог такого умножения и для матриц. Для этого разобьем матрицы X, Y размером $n \times n$ на подматрицы половинной размерности:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}, \quad XY = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}.$$

Вводя семь произведений:

$$\begin{aligned} P_1 &= A(F - H), & P_2 &= (A + B)H, & P_3 &= (C + D)E, & P_4 &= D(G - E), \\ P_5 &= (A + D)(E + H), & P_6 &= (B - D)(G + H), & P_7 &= (A - C)(E + F), \end{aligned}$$

произведение матриц можно представить в виде:

$$XY = \begin{pmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к рекуррентному соотношению относительно необходимого количества операций для умножения матриц размера $n \times n$:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2.$$

Решая рекуррентное соотношение, получаем

$$T(n) = O(n^{\log 7}), \quad \log 7 \approx 2,81.$$

Точнее, без учета операций с адресами элементов при $n = 2^k$ имеем $T(2^k) = 6(7^k - 4^k) + 7^k$. Здесь 7^k — количество умножений в формате чисел, $6(7^k - 4^k)$ — количество сложений и вычитаний в формате чисел.

Через оценку ранга умножения матриц мы добились уменьшения показателя степени, называемого предельной экспонентой умножения, до величины $O(n^\alpha)$, $\alpha \approx 2,3728639$.

Умножение градуировкой. В методе градуировки умножение переносится в умножение в градуированной алгебре. Например, для умножения двух многочленов от k переменных

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{0 \leq i_j < m_j} a[i_1, \dots, i_k] x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}, \quad \phi(x) = \sum_i b[i_1, \dots, i_k] x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

градуируем по степеням многочлена, сопоставляя однородным элементам элементы группы $G = Z_{n_1} \oplus Z_{n_2} \oplus \dots \oplus Z_{n_k}$, $n_i = 2m_i - 1$. Здесь учитывается, что произведение двух многочленов, имеющих степень $m_i - 1$, является многочленом степени $2m_i - 2$ и, следовательно, имеет $2m_i - 1$ коэффициентов для определения.

Пусть $G' = \{\mu = \mu_1 \dots \mu_k\}$ — группа характеров. Каждый характер определяет значение многочлена — элемента групповой алгебры по следующей схеме:

$$f = \sum_{g \in G} a(g)g \rightarrow \mu(f) = \sum_{g \in G} a(g)\mu(g).$$

В силу соотношения $\mu(g_1 g_2) = \mu(g_1)\mu(g_2)$ каждое μ значение произведения равно произведению μ значений сомножителей. Набор μ значений достаточно для определения многочлена (его коэффициентов перед степенями). Действительно,

$$\begin{aligned} \psi = \sum_{g_k} c(g_k)g_k &= \left(\sum_{g_i} a(g_i)g_i \right) \left(\sum_{g_j} b(g_j)g_j \right), \quad c(g_k) = \sum_{g_i g_j = g_k} a(g_i)b(g_j), \\ nc_{g_k} * &= \sum_{\mu} \mu(g_k^{-1})\mu(\psi) = \sum_i \sum_{\mu} c(g_i)\mu(g_k^{-1}g_i) = \sum_i \delta_k^i c(g_i)n. \end{aligned}$$

Ясно, что меньшим количеством умножений нельзя вычислить произведение. Поэтому и здесь метод градуировки можно назвать «алгоритмом от бога». Вычисление произведения требует предварительного вычисления n μ значений каждого сомножителя. На это уходит $O(n \log n)$ операций. Этот процесс называют преобразованием Фурье. После вычисления значений произведения требуется вычислить n коэффициентов по значениям. Этот процесс называют обратным преобразованием Фурье. На его вычисление также тратится $O(n \log n)$ операций.

Отметим, что в каждом произведении μ значений присутствует каждая пара произведений $a(g_i)b(g_j)$ с одинаковым коэффициентом $\mu(g_i g_j)$ для всех $g_i g_j = g_k$. Поэтому, этот метод соответствует принципу «объединяй и направляй». Гёте сказал: «Разделяй и властвуй» — мудрое правило, однако правило «объединяй и направляй» — ещё лучше». Первое соответствует методу фильтрации, второе — методу градуировки.

В случае некоммутативного умножения возникают следующие трудности. Произведения $g_i g_j$ и $g_j g_i$ отличаются, характеров (одномерных представлений) меньше, чем базисных элементов. Здесь групповая алгебра заменяется бигрупповой алгеброй $K(G', G) = \left\{ \sum_{\mu, g} a(\mu, g)\mu g \right\}$, порожденной характерами и элементами группы с соотношениями перестановочности $\mu g = \mu(g)g\mu$. Это соотношение по сути является соотношением неопределенности Гейзенберга об одновременной неизмеримости координат и импульса.

Удобнее работать с группой $G = (Z_2)^k$, $n = 2^k$. Сопоставим элементу группы $g = (i_1, \dots, i_k)$ число $i = i_1 + i_2 * 2 + \dots + i_k * 2^{k-1}$ с двоичными цифрами $(i_1, \dots, i_k)$ и матрицу $n \times n$, переставляющую строки правого множителя:

$$y^j = (y_{il}^j), \quad y_{i,l}^j = \delta_i^{j \oplus l}, \quad (y^j)^2 = 1 = E.$$

Здесь все операции сложения, умножения производятся покомпонентно (без переносов). В качестве характеров служат диагональные матрицы

$$x^i = (x_{lj}^i), \quad x_{lj}^i = \delta_l^j (-1)^{(i,j)}, \quad (i,j) = \sum_{m=1}^k i_m * j_m, \quad (x^i)^2 = 1 = E.$$

Легко проверяется, что $x^i y^j$ образуют базис в алгебре матриц $n \times n$ и соотношение коммутирования (неопределенности) имеет вид $x^i y^j = (-1)^{(i,j)} y^j x^i$.

Соответственно, задача умножения матриц сводится к умножению некоммутирующих многочленов от x^i, y^j . Каждому элементу $x^{t_1} y^{t_2}$ соответствует характер

$$\mu_{t_1, t_2}(x^i y^j) = x^{t_1} y^{t_2} x^i y^j (x^{t_1} y^{t_2})^{-1} (x^i y^j)^{-1} = (-1)^{(t_1, j) - (t_2, i)}.$$

Этих характеров достаточно для выделения нужных коэффициентов многочлена. Однако, для выделения коэффициентов из произведений μ значений

$$a(i_1, j_1) b(i_2, j_2) \mu(x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2}) = a(i_1, j_1) b(i_2, j_2) (-1)^{(j_1, i_2)} \mu(x^{i_1+i_2} y^{j_1+j_2})$$

необходимо разделить члены с разными знаками: $(-1)^{(j_1, i_2)}$. Для этого необходимо привлечь нечетные характеры:

$$\mu_{t_1, t_2}^*(x^i y^j) = (-1)^{(i, j)} \mu_{t_1, t_2}(x^i y^j).$$

Это соответствует значению транспонированной матрицы. У нечетных элементов значения характеров отличаются знаком. Этот набор характеров, совместно с предыдущим набором позволяет отличить порядок произведения в выражении $x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2}$. Произведения двух элементов $x^{i_1} y^{j_1}, x^{i_2} y^{j_2}$ переставляются множителем $(-1)^{(i_1, j_2) - (j_1, i_2)}$. Он равен произведению нечетностей сомножителей и самого произведения:

$$(-1)^{(i_1, j_2) - (j_1, i_2)} = (-1)^{(i_1, j_1) + (i_2, j_2) + (i_1 + i_2, j_1 + j_2)}.$$

Последнее позволяет получить коэффициенты разложения произведения через произведения значений из $2n^2$ наборов. Учитывая наличие одной зависимости в наборе произведений, можно избежать использования одного произведения значений, т.е. достаточно вычислить $2n^2 - 1$ произведений значений. Несложно показать, что ранг умножения матриц не меньше $2n^2 - 1$. В этом смысле опять получаем «алгоритм от бога». Предварительные вычисления $2n^2$ значений сомножителей и n^2 коэффициентов произведения из $2n^2 - 1$ произведений производятся за $O(n^2 \log n)$ операций.

ЗАСЕДАНИЕ 494: ВЫЕЗДНОЕ ЗАСЕДАНИЕ В МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА, ПОСВЯЩЁННОЕ 90-ЛЕТИЮ В. С. ЗАРУБИНА (24 марта 2023 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 495 (31 марта 2023 г.)

И. Б. Петров, Н. И. Хохлов.

Моделирование распространения волновых возмущений в гетерогенных средах сеточно-характеристическим методом. Часть I.

Основной задачей, стоящей перед сейсмической разведкой, является восстановление структуры и свойств подповерхностного пространства на основе регистрации колебаний земной поверхности. Для этого необходимо решить обратную задачу, что в свою очередь требует решения серии прямых задач с последовательно изменяющейся моделью геологического массива. При этом точность их решения является решающей для корректного восстановления структуры среды. В связи с этим за последнее время было разработано множество различных численных методов, позволяющих с высокой точностью рассчитывать волновое поле в заданной среде с распределёнными по пространству параметрами. Одним из ограничений данных методов является невозможность явного учёта неоднородных включений, характерных для нефтеносных пластов. Оно было преодолено, например, в [3, 4] с использованием сеточно-характеристического метода (см. [2]) на структурных и неструктурных расчётных сетках.

В данной работе рассматриваются особенности реализации алгоритма расчета геологических неоднородностей сеточно-характеристическим методом. Рассматриваются алгоритмы явного выделения неоднородностей на структурированных сетках. Предложено три подхода. Первый подход основан на расположении неоднородности в узлах сетки. Данный подход достаточно подробно описан в [5]. К преимуществам данного подхода можно отнести возможность задания практически произвольной конфигурации неоднородностей. Второй подход основан на искривлении сетки вблизи трещиноватой неоднородности. Узлы расчетной сетки располагаются таким образом, чтобы трещина была со направлена линиям сетки. Данный подход описан в [1]. К преимуществам

данного подхода можно отнести отсутствие ошибки, связанной с непопаданием неоднородности в узлы сетки. К недостаткам — дополнительное построение сеток и ограничение в возможностях задания сложных конфигураций трещиноватых неоднородностей. Третий подход основан на применении механизма наложенных или химерных сеток. В данном подходе на основную расчетную сетку накладывается сетка поменьше, которая со направлена с неоднородностью. Между сетками каждый расчетный шаг происходит интерполяция. К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость в переинтерполяции, что вносит дополнительную погрешность в расчет. К преимуществам — возможность точного задания положения неоднородностей и задание сложных конфигураций. Подробнее данный подход описан в [4].

В случае решения разномасштабных задач разработан и реализован алгоритм с использованием иерархических расчетных сеток. Для обеспечения приемлемого времени расчета были разработаны параллельные версии численных методов. Параллельные алгоритмы разработаны для всех основных архитектур современных высокопроизводительных супер ЭВМ (см. [6]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проекта № 21-11-00139).

Библиография

1. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И., Шульц К. И. Численный расчет волновых процессов в трещиноватых средах на гексаэдральных сетках сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 3. — Р. 512–522.
2. Favorskaya A. V., Zhdanov M. S., Khokhlov N. I., Petrov I. B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophys. Prospect. — 2018. — 66, № 8. — Р. 1485–1502.
3. Khokhlov N. I., Favorskaya A., Furgailo V. Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures // Minerals. — 2022. — 12, № 12. — 1597.
4. Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // J. Comput. Phys. — 2021. — 446. — 110637.
5. Khokhlov N., Stognii P. Novel approach to modeling the seismic waves in the areas with complex fractured geological structures // Minerals. — 2020. — 10, № 2. — 122.
6. Khokhlov N., Yavich N., Malovichko M., Petrov I. Solution of large-scale seismic modeling problems // Proc. Comput. Sci. — 2015. — 66. — Р. 191–199.

ЗАСЕДАНИЕ 496 (7 апреля 2023 г.)

А. А. Бобылев.

О вычислении передаточной функции оператора Пуанкаре—Стеклова для функционально-градиентной упругой полосы.

Рассматривается оператор Пуанкаре—Стеклова для изотропной функционально-градиентной упругой полосы, отображающий на части Γ_q границы полосы нормальные напряжения q_n в нормальные перемещения u_n :

$$u_n(x) = \int_{\Gamma_q} g(x - \xi) q_n(\xi) d\xi,$$

где $g(\cdot)$ — функция Грина. С помощью интегрального преобразования Фурье можно получить алгебраическое соотношение, связывающее трансформанты нормальных перемещений $\tilde{u}_n(\alpha)$ и нормальных напряжений $\tilde{q}_n(\alpha)$:

$$\tilde{u}_n(\alpha) = G(\alpha) \tilde{q}_n(\alpha),$$

где α — параметр преобразования Фурье, $G(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)$ — трансформанта функции Грина, называемая далее передаточной функцией (ПФ). В результате действие оператора Пуанкаре—Стеклова сводится к перемножению трансформант и выполнению прямого и обратного преобразований Фурье, для численной реализации которых применяют алгоритмы быстрого преобразования Фурье.

Для построения ПФ используется новый подход (см. [1]). Получена вариационная формулировка краевой задачи для трансформант перемещений. Дано определение и доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи. Построен итерационный метод решения вариационных уравнений и на основе принципа сжатых отображений получены условия его сходимости. Аппроксимация вариационных уравнений производится методом конечных элементов. В результате на каждом шаге итерационного метода требуется решить две независимые трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений, для решения которых применяется метод прогонки. Предложен эвристический алгоритм выбора последовательности параметров итерационного метода, обеспечивающей его сходимость. Проведена верификация разработанного алгоритма и даны рекомендации по использованию адаптивных конечно-элементных сеток.

При решении задач одностороннего дискретного контакта упругой полосы с жестким штампом требуется вычислять значения ПФ для достаточно больших значений параметра α (см. [2]). Для сокращения вычислительных затрат целесообразно прибегнуть к асимптотическому разложению ПФ при $\alpha \rightarrow \infty$. Получена краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант перемещений с малым параметром $\varepsilon = 1/\alpha$ при старших производных. С помощью системы компьютерной алгебры SageMath построены внешнее и внутреннее асимптотические разложения решения этой краевой задачи. В результате получено трехчленное асимптотическое разложение ПФ. Для полученного отрезка асимптотического ряда построены две аппроксимации Паде. Предложен алгоритм вычисления ПФ с использованием асимптотического ряда и аппроксимаций Паде. Численные эксперименты подтвердили существенное сокращение вычислительных затрат.

Библиография

1. Бобылев А. А. Численное построение трансформанты ядра интегрального представления оператора Пуанкаре—Стеклова для упругой полосы // Диффер. уравн. — 2023. — 59, № 1. — Р. 115–129.
2. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругой полосы Бобылев А. А. // Прикл. мат. мех. — 2022. — 86, № 3. — Р. 404–423.

ЗАСЕДАНИЕ 497 (21 апреля 2023 г.)

Петров И. Б., Васюков А. В..

Моделирование распространения волновых возмущений в гетерогенных средах сеточно-характеристическим методом. Часть II. Численное моделирование распространения волновых возмущений в твёрдых гетерогенных средах сложной геометрии сеточно-характеристическим методом.

В работе рассматривается построение сеточно-характеристического численного метода на неструктурированной расчётной сетке для решения динамических задач механики твёрдого тела в приближении малых деформаций. Метод ориентирован на выполнение расчётов распространения упругих волн в биологических и инженерных объектах сложной формы, для которых область интегрирования описывается с использованием неструктурированной расчётной сетки из тетраэдров. В работе представлена реализация метода для гетерогенных анизотропных сред с наличием внутренних контактных границ.

Определяющая система уравнений в частных производных, описывающая динамические процессы в деформируемом твёрдом теле в трёхмерном случае, имеет следующий характерный вид (см. [4]):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A_x \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + A_y \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + A_z \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} = 0.$$

В этой записи $\vec{w}$ — вектор неизвестных, A_x, A_y, A_z — постоянные матрицы. Точный вид $\vec{w}$, A_i зависит от используемых реологических моделей.

Построение сеточно-характеристического численного метода основано на том факте, что для многих практически значимых постановок существует (см. [6]) аналитическое разложение матриц в виде $A_i = \Omega_i^{-1} \cdot \Lambda_i \cdot \Omega_i$. При этом для решения многомерной системы уравнений можно использовать расщепление по направлениям (см. [4]). После введения обозначения $\vec{u} = \Omega \cdot \vec{w}$, исходная система распадается на независимые уравнения относительно инвариантов Римана u_i .

При этом при выполнении расчётов для инженерных или природных объектов сложной формы область интегрирования описывается, как правило, с использованием неструктурированной расчётной сетки, в двухмерном случае — из треугольников, в трёхмерном — из тетраэдров. Таким образом, требуется численно решать уравнения для инвариантов Римана на такой сетке с высоким порядком аппроксимации.

При практической реализации численных схем частым их желательным свойством является обеспечение разумно высокого порядка аппроксимации без необходимости использования сложного сеточного шаблона. Одним из традиционных подходов к этой задаче является использованием компактных продолженных схем (см. [5]). Для сеточно-характеристического метода на структурированных расчётных сетках данный подход также применим (см. [2]). Однако для неструктурированной расчётной сетки такой подход на данный момент не реализован и в целом сталкивается со значительными трудностями.

Другим способом повышения порядка является введение дополнительных точек на рёбрах и гранях элементов сетки (см. [1, 3]). Этот подход хорошо показал себя в решении многих задач, однако он также содержит и некоторые недостатки, связанные с аппроксимацией перемещений для расчётной сетки со сложной топологией ячеек.

В данной работе предлагается подход к построению на неструктурированной расчётной сетке варианта сеточно-характеристического численного метода высокого порядка без усложнения её топологии. Используется построение интерполяционного полинома по ближайшим точкам соседних ячеек расчётной сетки с сохранением простой топологии каждой отдельной ячейки. Данный подход является некоторым аналогом классического расширения шаблона на структурированной сетке.

Полученная таким образом численная схема обеспечивает получение решения для непрерывно дифференцируемых, непрерывных, разрывных решений. При расчёте распространения волновых возмущений в твёрдых гетерогенных средах численное решение воспроизводит распространение продольных и поперечных волн, их взаимодействие с внешними границами образца и с внутренними контактными границами между областями с разными реологическими параметрами материалов.

В работе получены численные решения для задач о распространении короткого импульса нагрузки в слоистом композите и об УЗИ-контроле композита. Также показано применение сеточно-характеристического метода к некоторым биомедицинским задачам: численное моделирование ультразвукового исследования головы человека, импульсное нагружение торса человека.

Библиография

1. Васюков А. В., Петров И. Б. Использование сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках из тетраэдров с большими топологическими неоднородностями // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2018. — 58, № 8. — Р. 62–72.
2. Голубев В. И., Петров И. Б., Хохлов Н. И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трёхмерного линейного уравнения переноса // Мат. модел. — 2016. — 28, № 2. — Р. 123–132.
3. Петров И. Б., Фаворская А. В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информ. технол. — 2011. — № 9. — Р. 30–32.
4. Петров И. Б., Холодов А. С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твёрдого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1984. — 24, № 5. — Р. 722–739.
5. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Мат. модел. — 2011. — 23, № 6. — Р. 98–110.
6. Челноков Ф. Б. Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Мат. модел. — 2006. — 18, № 6. — Р. 96–108.

ЗАСЕДАНИЕ 498 (28 апреля 2023 г.)

А. В. Архангельский.

О топологических группах и их инвариантах.

1. Топологические группы представляют собой один из основных объектов топологической алгебры. Они описываются как комбинация на одном и том же множестве топологии и групповой структуры, подчиненная некоторым естественным требованиям непрерывности возникающих отображений квадрата этого множества на себя. Замечательным фактом является теорема Л. С. Понтрягина (см. [2]) о том, что каждая топологическая группа, являющаяся T_1 -пространством (т.е. в которой все конечные подмножества замкнуты) является тихоновским пространством (т.е. вполне регулярна). Отсюда вытекает, что все топологические группы являются подпространствами компактных хаусдорфовых пространств, т.е. имеют компактные хаусдорфовы расширения. Напомним, что компактное хаусдорфово пространство bX называется *компактным расширением* пространства X , если X можно представить как всюду плотное подпространство пространства bX ; при этом пространство $Y = bX \setminus X$ называется *наростом* пространства X в его расширении bX . Следовательно, с каждой некомпактной топологической группой связано множество ее наростов во всевозможных компактных хаусдорфовых расширениях. Этих наростов (попарно негомеоморфных) обыкновенно много. Неожиданный, как мне кажется, факт, связанный с ними заключается в том, что все наросты произвольной топологической группы G обладают одной «степенью компактности», а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (о дихотомии; см. [5]). *Каждый нарост произвольной топологической группы в любом ее компактном хаусдорфовом расширении либо псевдокомпактен, либо линделёфов. Более того, у любой некомпактной группы либо все наросты линделёфовы, либо все они псевдокомпактны.*

При этом топологическое пространство *линделёфово*, если из каждого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие, и *псевдокомпактно*, если оно вполне регулярно (т.е. является подпространством компактного хаусдорфова пространства) и каждая непрерывная вещественная функция на нем ограничена. Псевдокомпактные линделёфовы пространства — это в точности компактные хаусдорфовы пространства.

Напомним также, что топологическое пространство *паракомпактно*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. *Паракомпактные перистые* (линделёфовы перистые) топологические группы можно охарактеризовать как топологические группы, которые допускают замкнутый гомоморфизм с компактным ядром на метризуемую (сепарабельную метризуемую) топологическую группу.

Теорема 1 имеет ряд следствий. Случай, когда все наросты линделёфовы, характеризуется так.

Теорема 2. *Все наросты не локально компактной топологической группы псевдокомпактны в том и только том случае, если эта топологическая группа является линделёфовым перистым пространством.*

Отсюда следует, например, такой удивительный факт.

Теорема 3. *Для наростов не локально компактной топологической группы паракомпактность, полнота по Дрёдонне и линделёфовость равносильны.*

Таким образом, линделёфовость нароста не локально компактной топологической группы равносильна тому, что эта топологическая группа является линделёфовым перистым пространством.

Сами наросты одной и той же топологической группы, конечно, могут быть негомеоморфными и даже иметь разную мощность (например, отрезок и окружность — компактные расширения прямой с двух- и одноточечными наростами соответственно).

2. В классе топологических групп многие топологические свойства ведут себя гораздо лучше, чем в классе топологических пространств. Возникают, в частности, некоторые теоремы об инвариантности этих свойств, которые не действуют в классе всех топологических пространств. Например, произведение псевдокомпактных топологических групп всегда является псевдокомпактной топологической группой — это теорема Комфорта и Росса (см. [6]), в то время как произведение

двух псевдокомпактных пространств не обязательно псевдокомпактно. Возникают также новые импликации. Например, замечательна теорема М. Г. Ткаченко, обобщенная В. В. Успенским, которая говорит, что если топологическая группа σ -компактна (т.е. является объединением не более чем счетного множества своих компактных подпространств), то число Суслина этой топологической группы счетно, т.е. каждое семейство попарно непересекающихся открытых множеств не более чем счетно (см. [3, 4]). Заметим при этом, что число Суслина компактной топологической группы всегда не более чем счетно по той причине, что на компактной топологической группе всегда есть мера Хаара (т.е. ненулевая мера, определенная на все компактных подмножествах и инвариантная относительно сдвигов), в то время как на σ -компактной топологической группе может не быть ничего похожего на меру Хаара.

3. Одна из больших нерешенных общих проблем теории топологических групп состоит в следующем.

Проблема. Дано топологическое свойство $\mathcal{P}$. Когда каждое тихоновское пространство со свойством $\mathcal{P}$ можно представить как замкнутое подпространство топологической группы со свойством $\mathcal{P}$?

Заметим, что известна фундаментальная теорема выдающегося советского математика А. А. Маркова о том, что каждое тихоновское пространство является замкнутым подпространством некоторой топологической группы, а именно, своей свободной топологической группы (см. [1]). Это дает ответ на поставленный выше вопрос в некоторых ситуациях.

Теория топологических групп и их инвариантов свидетельствует, что топологическая алгебра имеет совершенно своеобразный вид в классе топологических групп и глубоко отличается от теории топологических инвариантов тихоновских топологических пространств вообще и имеет свои привлекательные задачи.

Библиография

1. Марков А. А. О свободных топологических группах // Докл. АН СССР. — 1941. — 31, № 4. — Р. 299–302.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
3. Ткаченко М. Г. О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Мат. заметки. — 1983. — 34, № 4. — Р. 601–607.
4. Успенский В. В. О непрерывных образах линделёфовых топологических групп // Докл. АН СССР. — 1985, № 4. — Р. 824–827.
5. Arhangel'skii A. V. Two types of remainders of topological groups // Comment. Math. Univ. Carol. — 2008. — 49, № 1. — Р. 119–126.
6. Arhangel'skii A., Tkachenko M. Topological Groups and Related Structures. — Amsterdam–Paris: Atlantis Press / World Scientific, 2008.

ЗАСЕДАНИЕ 499 (12 мая 2023 г.)

В. А. Банько, Д. В. Георгиевский.

Разгон сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости с переменным по глубине пределом текучести.

Аналитически исследуется задача о разгоне из состояния покоя сдвигового течения в вязкопластической полуплоскости при задании на границе касательного напряжения. Предполагается, что динамическая вязкость и плотность среды постоянны, а предел текучести может меняться непрерывным либо разрывным образом в зависимости от глубины. Вся полуплоскость в любой момент времени состоит из заранее неизвестных слоёв, где реализуется сдвиговое течение, и жёстких зон. Последние могут перемещаться как жёсткое целое, а могут быть неподвижны, как, например, полуплоскость, до которой возмущения, вызванные действием касательных усилий, ещё не дошли. Для нахождения полей напряжения и скорости развивается метод, основанный на квазиавтомодельных диффузионно-вихревых решениях параболических задач в областях с движущимися границами. Обсуждается вопрос о том, какие выводы о распределении предела текучести по глубине можно сделать по доступным измерениям скорости границы полуплоскости.

ЗАСЕДАНИЕ 500, ЮБИЛЕЙНОЕ (19 мая 2023 г.).

ЗАСЕДАНИЕ 501: К 86-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Б. Е. ПОБЕДРИ (26 мая 2023 г.).

В. И. Горбачев.

Применение фундаментальных функций при решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

ЗАСЕДАНИЕ 502 (23 июня 2023 г.)

А. В. Аксенов.

Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без обрушения.

В безразмерных переменных система уравнений одномерной газовой динамики для политропных движений газа (давление задается соотношением $p = \gamma^{-1} \rho^\gamma$, $\gamma = \text{const}$) может быть записана в виде

$$u_t + uu_x + \rho^{\gamma-2} \rho_x = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0. \quad (1)$$

Законы сохранения массы, импульса и энергии для системы уравнений (1) при $\gamma \neq 1$ запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u \rho dx = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u^2 \rho}{2} + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)} \right) dx = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1) обладает на характеристиках C_+ и C_- инвариантами Римана

$$r = u + \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_+ : dx = (u + \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt;$$

$$l = u - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad C_- : dx = (u - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}) dt,$$

которые представляют собой инварианты характеристик нулевого порядка.

Запишем исходную систему уравнений (1) в терминах инвариантов Римана:

$$r_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x = 0, \quad l_t + \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x = 0. \quad (3)$$

Для определения инвариантов характеристик системы уравнений (1) удобно использовать операторы полных производных

$$D_x = \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots, \quad D_t = \partial_t + r_t \partial_r + l_t \partial_l + \dots$$

Введём в рассмотрение операторы полных производных в силу системы уравнений (1):

$$\overline{D}_x = \partial_x + r_x \partial_r + l_x \partial_l + \dots,$$

$$\overline{D}_t = \partial_t - \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} r_x \partial_r - \frac{(1+\gamma)l + (3-\gamma)r}{4} l_x \partial_l + \dots$$

Характеристика C_+ может быть описана в терминах полных производных вдоль характеристического направления:

$$X_+ = \overline{D}_t + \frac{(1+\gamma)r + (3-\gamma)l}{4} \overline{D}_x.$$

Определение. Назовём функцию f *инвариантом* характеристики C_+ , если она удовлетворяет условию

$$X_+(f) = 0. \quad (4)$$

Здесь f может зависеть от переменных t, x, r, l и производных по x вплоть до некоторого конечного порядка. Аналогично определяются инварианты характеристики C_- .

Замечание 1. Система уравнений (3) инвариантна относительно преобразования $r \rightarrow l, l \rightarrow r$. При этом $C_+ \rightarrow C_-$ и $C_- \rightarrow C_+$. Поэтому достаточно знать инварианты одной из характеристик.

Будем искать инварианты второго порядка характеристики C_+ , т.е. функции вида

$$f = f(t, x, r, l, r_x, l_x, r_{xx}, l_{xx}),$$

удовлетворяющие условию (4). Показано, что существует только пять случаев существования дополнительных инвариантов характеристик не выше второго порядка:

$$\begin{aligned} \text{Случай 1. } \gamma = -1: \quad I_1 &= \frac{2}{(l-r)r_x}; \\ \text{Случай 2. } \gamma = 1/3: \quad I_2 &= \frac{r_{xx}(r-l) - 2r_x l_x}{(r-l)^3 r_x^3}; \\ \text{Случай 3. } \gamma = 5/3: \quad I_1 &= x - rt + \frac{r-l}{2r_x}; \\ \text{Случай 4. } \gamma = 7/5: \quad I_2 &= x - lt + (l-r) \frac{2l_x(4l_x - r_x) - (l-r)l_{xx}}{12l_x^3}; \\ \text{Случай 5. } \gamma = 3: \quad I_0 &= x - rt. \end{aligned}$$

Дополнительные инварианты характеристик позволяют свести решение задачи Коши к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого к системе уравнений (3) добавляется соотношение

$$I_- = h(l) \quad (5)$$

между инвариантом Римана l и её дополнительным инвариантом I_- . Соотношение (5) позволяет определить соответствующую функцию $h(l)$, используя начальные данные. Интегрирование характеристического поля X_+ , рассматриваемого в силу переопределённой системы уравнений (3), (5), сводится к системе ОДУ.

В [3] приводится критерий невозможности наступления градиентной катастрофы в задаче Коши для системы уравнений (3):

$$r'_0(x) \geq 0, \quad l'_0(x) \geq 0.$$

Для случаев 1–5 были рассмотрены две задачи Коши на всей пространственной оси:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad r_0(x) &= \exp x + \exp(-x^2), & l_0(x) &= \exp(x), \\ \text{(b)} \quad r_0(x) &= 2 \operatorname{arctg}(x) + \exp(-x^2), & l_0(x) &= 2 \operatorname{arctg}(x). \end{aligned} \quad (6)$$

В соответствующих решениях невозможно наступление градиентной катастрофы.

Замечание 2. Для задач Коши (6) выполнены законы сохранения (2).

Библиография

1. Аксенов А. В., Дружков К. П. Построение точных решений системы уравнений одномерной газовой динамики без градиентной катастрофы // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 2023. — № 1. — Р. 135–143.
2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. — М.: Физматлит, 2009.
3. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
4. Aksenov A. V., Druzhkov K. P., Kaptsov O. V. Application of invariants of characteristics to construction of solutions without gradient catastrophe // Int. J. Nonlin. Mech. — 2022. — 147. — 104249.
5. Darboux J. G. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre // C. R. hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. — 1870. — 70. — P. 675–678.
6. Darboux J. G. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles // C. R. hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris. — 1870. — 70. — P. 746–749.
7. Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second order a deux variables indépendantes. Tome II. — Paris, 1898.
8. Riemann B. Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite // Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematischphysikalische Klasse. — 1860. — Band 8, № 43. — P. 43–66.

ЗАСЕДАНИЕ 503 (15 сентября 2023 г.)

Д. В. Георгиевский, М. В. Шамолин.

О XIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.).

Для участия в работе XIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике подано около 2000 заявок. Очное участие в работе съезда с докладами либо в качестве слушателей приняло 1492 человека. В работе съезда участвовало 7 ученых из ближнего и дальнего зарубежья.

География участников съезда охватывает более 70 российских городов. В составе участников съезда 18 академиков и 31 членов-корреспондентов РАН, около 600 профессоров и докторов наук и около 300 молодых ученых. По приглашению Оргкомитета в программу съезда были включены 12 пленарных, 40 секционных докладов, программным комитетом отобраны 1428 докладов подсекций и симпозиумов, в том числе 926 устных и 503 стендовых.

В окончательную программу съезда были включены 1480 докладов. В период проведения съезда участниками представлено 12 пленарных, 39 секционных, 886 устных и 503 стендовых докладов в подсекциях и симпозиумах. Общее количество представленных докладов — 1440. Представленные доклады охватили все направления современной механики. Съезд вошёл в список мероприятий, приуроченных к 300-летию Российской академии наук.

Приветствия участникам съезда прислали Помощник Президента РФ А. А. Фурсенко, Министр науки и высшего образования В. Н. Фальков, Президент РАН Г. Я. Красников, губернатор Санкт-Петербурга А. Д. Беглов, ректор МГУ им. М. В. Ломоносова В. А. Садовничий, руководитель Российского научного фонда А. В. Хлунов. С приветствиями к участникам обратились вице-президент РАН С. Л. Чернышев, председатель Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга А. С. Максимов, академик-секретарь Российского отделения машиностроения, механики и процессов управления В. Ю. Хомич.

На церемонии открытия съезда состоялось вручение медали им. Д. Е. Охоцимского. Лауреатом стал главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М. В. Келдыша профессор Ю. Ф. Голубев за полученные им результаты в области управления космическими аппаратами, спускающимися в атмосферу Земли и планет, за решение ряда прикладных задач управления механическими системами.

ЗАСЕДАНИЕ 504 (29 сентября 2023 г.)

В. А. Кадымов.

Тензор Кельвина для однородной и неоднородной упругой анизотропной среды. Приближённые методы.

Представлена разработанная А. А. Ильюшиным эффективная двумерная усредненная по толщине современная теория пластического течения в тонком слое, заключенном между двумя сближающимися поверхностями внешних тел инструмента. На основе общей модели «вязкой» жидкости в области с подвижной границей сформулирована краевая задача, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка.

Следует отметить, что до недавнего времени все исследования в этой области проводились на основе упрощенной постановки краевой задачи в модели «идеальной» жидкости, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, в которых тангенциальными напряжениями пренебрегают. Позже краевая задача пластического течения в тонком слое в упрощенной постановке была разработана на случай пластического течения по упруго деформируемым поверхностям (И. А. Кийко).

Исследована кинематика процесса растекания пластического слоя и выведено нелинейное эволюционное уравнение, определяющее свободную границу области течения. Приводятся другие формы представления эволюционного уравнения. Показано, что это уравнение сводится к частному случаю нелинейного уравнения теплопроводности. Выписаны новые точные частные решения эволюционного уравнения (И. А. Кийко, В. А. Кадымов), полученные с использованием методов разделения переменных и преобразований подобия.

В заключении приведены следующие практические приложения.

1. На основе упрощенной модели выписано точное решение асимметричной задачи свободного растекания пластического слоя, состоящего из двух клиньев с разными свойствами.

2. В упрощенной постановке исследуется задача пластического растяжения полосы силами, приложенными к ее «зажатым» концам. Получено условие, при котором одновременно с пластическим сжатием «зажатых» торцевых частей происходит пластическое растяжение центральной части полосы.

3. В задаче об осадке пластической полосы, занимающей область в форме прямоугольника (растекающейся в одном и неподвижной в другом направлении), получено приближенное аналитическое решение в общей модели «вязкой жидкости». Это решение подтверждается результатами проведенных экспериментов.

Заметим, что полученные закономерности не могут быть описаны с помощью упрощенной модели «идеальной жидкости».

ЗАСЕДАНИЕ 505 (6 октября 2023 г.)

Д. В. Георгиевский.

Моделирование комбинированного ретчеттинга аппаратом изотропных функций двух тензорных аргументов.

Некоторые эффекты напряжённо-деформированного состояния, такие как виброползучесть, ускорение ползучести и ретчеттинг, наблюдаемые и изучаемые в экспериментальной механике деформируемого твёрдого тела, предлагается моделировать на основе определяющих соотношений, реализуемых в тензорно нелинейных вязкоупругих моделях максвелловского типа. Привлекается аппарат изотропных тензор-функций, зависящих от двух симметричных тензорных аргументов. Приводятся примеры сложного напряжённого состояния в трубчатом образце, когда имеет место существенный непропорциональный рост во времени осевой компоненты деформации при совместном действии постоянной осевой и колебательной сдвиговой нагрузок по сравнению со случаем действия только осевой нагрузки. Вводятся понятия обобщённого и комбинированного ретчеттинга в условиях сложного напряжённого состояния.

ЗАСЕДАНИЕ 506 (20 октября 2023 г.)

А. Я. Белов, Д. Д. Воробьев, Д. А. Завадский, Ф. К. Нилов, А. В. Сайгак, Д. И. Сорокина, А. А. Шамсутдинов.

Самозаклинивающиеся структуры.

Известно, что если на плоскости имеется конечный набор выпуклых фигур, внутренности которых не пересекаются, то среди этих фигур имеется хотя бы одна крайняя — такая, которую можно непрерывно передвинуть «на бесконечность» (за пределы большого круга, содержащего остальные фигуры), оставляя все остальные фигуры неподвижными и не пересекая их внутренности в процессе движения.

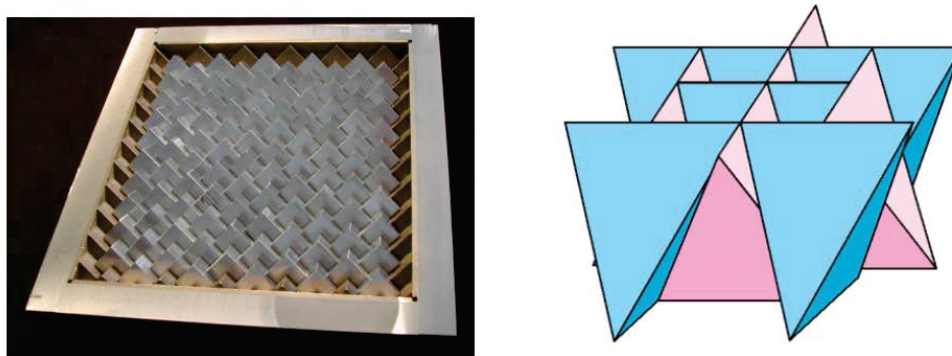


Рис. 1. Самозаклинивающиеся структуры из тетраэдров и кубов

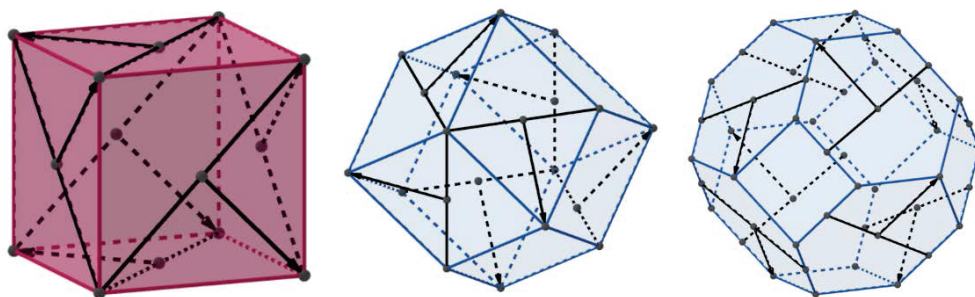


Рис. 2. Перекашивание граней



Рис. 3. Новые многослойные самозаклинивающиеся структуры

Около пятнадцати лет назад было обнаружено, что в пространстве размерности три имеет место феномен самозаклинивающих структур. Самозаклинивающаяся структура — это такой конечный (или бесконечный) набор выпуклых тел с непересекающимися внутренностями, что если зафиксировать все, кроме любого одного, оставшееся нельзя «унести на бесконечность».

Известные структуры базировались на рассмотрении слоя из кубов, тетраэдров и октаэдров. Они обладают высокой прочностью, остаются таковыми даже при разрушении части зерен, трещины останавливаются на границах между зернами, а зерна друг друга держат. По этой причине самозаклинивающиеся структуры могут быть использованы в инженерном деле. Уже создана специальная лаборатория под руководством Ю. Эстрина, выигран ряд грантов.

На научной смене в Сириусе в 2023 г. были разработаны несколько принципиально новых многослойных структур, обладающих дополнительными свойствами. По итогам семинара в Магнитогорске в 2024 г. были зарегистрированы два патента.

Рассмотрим одинаковые выпуклые многогранники, замещающие пространство. Это могут быть, например, кубы, ромбододекаэдр или усеченные октаэдр. Перекосим грань каждого многогранника так, как это показано на рисунке: каждая грань поворачивается относительно направленного отрезка, лежащего в этой грани. Из копий перекошенного таким образом многогранника собирается многослойная самозаклиненная структура.

Назовем слоем заклиненности подмножество блоков, образующих плоскую самозаклинивающуюся структуру. В предложенных нами структурах каждый многогранник содержится сразу в нескольких различных слоях заклиненности. Это позволяет использовать данные сборки в создании массивных материалов, способных противостоять росту трещин, демпфированию вибраций, превосходящие по показателю ковкости материалы, из которых состоят блоки. Для получения и исследования структур была написана компьютерная программа, содержащая в себе функцию оценки «заклиненности» блока и перекося граней.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393) и была поддержана грантом РФФИ № 22-1920073.

Библиография

1. Белов А. Я. Самозаклинивающиеся структуры // Квант. — 2009. — № 1. — Р. 20–23.

ЗАСЕДАНИЕ 507 (27 октября 2023 г.)

И. М. Цветков.

Исследование динамических режимов растяжения трансверсально-изотропного идеально-жесткопластического тонкого круглого слоя..

ЗАСЕДАНИЕ 508 (10 ноября 2023 г.)

П. В. Денисов.

О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени (по материалам кандидатской диссертации).

Диссертация посвящена изучению вопросов о нелокальном поведении (при больших значениях времени t) решения задачи Коши для параболических по Петровскому систем уравнений и поведения при больших t решения обобщенной задачи Коши для итерированного уравнения теплопроводности.

Изучаются два случая указанных выше задач: система параболических по Петровскому уравнений с постоянными коэффициентами и без младших членов и систему параболических по Петровскому уравнений с коэффициентами, зависящими от t и содержащую младшие коэффициенты ненулевого порядка. Кроме того, изучается поведение при $t \rightarrow +\infty$ интеграла Пуассона для итерированного уравнения теплопроводности, с начальными условиями при $t = 0$.

Результаты диссертационной работы автора являются новыми и состоят в следующем:

- (i) Получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по времени от решения соответствующей задачи.
- (ii) Впервые получен критерий существования равномерного во всем пространстве предела средних по t Чезаро порядка $\alpha \geq 0$ от решения соответствующей задачи.
- (iii) Получены критерии существования пределов в терминах существования средних по кубам, а также в терминах существования предела средних по шарам равномерно по x во всем пространстве.
- (iv) Если выполнены некоторые условия роста и $\alpha(t) = t^{m+p-1}$ — порядок средних, установлено утверждение о равностабилизации предела разности решения соответствующей задачи и функций $v(x, t, \alpha(t))$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x на каждом компакте K со скоростью не менее, чем $t^{-m/2}$.
- (v) Установлено, что если $\beta \geq p-1$ и начальные функции $\varphi_l(x)$, $l = 1, \dots, p-1$, в соответствующей задаче имеют пределы шаровых средних Рисса по t при $\beta \geq p-1$, и существует нужный предел, то существует соответствующий предел средних.

Результаты работы могут быть использованы специалистами, работающими в области качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Соискатель выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору М. В. Шамолину за постоянное внимание к работе и ценные советы.

ЗАСЕДАНИЕ 509 (17 ноября 2023 г.)

А. В. Романов.

Построение и анализ численного решения некоторых трёхмерных задач классической и микрополярной теорий упругости.

ЗАСЕДАНИЕ 510 (24 ноября 2023 г.)

Р. Р. Айдагулов.

Диссипация в механике.

Для описания диссипации в гидромеханике вводят поверхностные силы вязкости, выражаемые вторыми производными от скорости. Имеется статистическое обоснование (вывод) этих сил на основе уравнений Больцмана. Сами уравнения Больцмана основаны на предположении, что траектории движения меняются только при соударениях частиц. Именно это предположение приводит к ошибкам при применении их в космологии. В галактиках расстояния между звездами оцениваются величиной несколько световых лет, что в миллионы раз больше размеров звезды. В то же время их движение (определение траектории) управляется дальнедействующими силами гравитации, столкновения практически отсутствуют.

Учет сил взаимодействия на расстоянии при осреднении уравнений движения каждой частицы приводит к нелокальным (псевдодифференциальным) уравнениям с интенсивностью обмена импульсами на расстоянии. Они не повышают порядок уравнений Эйлера, ввиду более низшего порядка дифференцирования дополнительных членов. Диссипация в этом случае происходит за счет обмена импульсом (энергией) с соседними областями и существенно отличается от введенных сил вязкости с повышением порядка дифференциальных уравнений. В особенности это различие проявляется в исследованиях на устойчивость движения, в проявлениях других малых сил типа сил Кориолиса. В докладе разбираются некоторые примеры такого типа.

ЗАСЕДАНИЕ 511 (15 декабря 2023 г.)

И. Е. Васильев.

Комплексное определение деформированного, повреждённого и предельного состояний при механическом воздействии.

ЗАСЕДАНИЕ 512 (22 декабря 2023 г.)

М. В. Шамолин.

Инварианты однородных систем нечетного порядка.

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно, облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью.

Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомых инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками.

Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимых тензорных инвариантов. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия «консервативность», «силовое поле», «диссипация» и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на

касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ «в целом» начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать «силовые поля». Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат (по одной из квазискоростей системы) касательного пространства, получим силовое поле с диссипацией разного знака (в зависимости от знака самого коэффициента).

И хотя словосочетание «диссипация разного знака» несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация «со знаком «плюс» — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация «со знаком «минус» — это своеобразная «подкачка» энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система в той или иной области фазового пространства обладает диссипацией какого-то знака. Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы, а внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем нечетного порядка, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем фазовом многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [illegible]

под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обзоры. — 2023. — 229. — С. 3–11.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Георгиевский Дмитрий Владимирович (Georgievskii Dmitrii Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: cotedurhone@mail.ru, georgiev@mech.math.msu.su

Шамолин Максим Владимирович (Shamolin Maksim Vladimirovich)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва
(M. V. Lomovosov Moscow State University, Moscow, Russia)
E-mail: shamolin@imec.msu.ru, shamolin.maxim@yandex.ru