



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 237 (2024). С. 18–33
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-237-18-33

УДК 517.929

ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ В ОДНОЙ ИЗ ВЕРСИЙ МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЕРАТОР

© 2024 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ, Д. Г. ФРОЛОВ

Аннотация. Рассматривается известная математическая модель макроэкономики «мультипликатор-акселератор» в нелинейной постановке и с учетом пространственных факторов. Изучаются два варианта соответствующей краевой задачи. В первом из них, когда пространственная диссипация существенна уже в линейной постановке, краевая задача имеет предельные циклы, которые возникают результате бифуркаций Андронова–Хопфа. Второй вариант краевой задачи возникает, когда диссипацией в линейной постановке пренебрегают. В таком слабодиссипативном варианте у краевой задачи существует счетный набор циклов и торов конечной размерности. Все такие инвариантные многообразия неустойчивы. Анализ задачи основан на методах теории бесконечномерных динамических систем.

Ключевые слова: мультипликатор-акселератор, нелинейная краевая задача, инвариантное многообразие, бифуркация, устойчивость, нормальная форма.

LOCAL BIFURCATIONS IN ONE VERSION OF THE MULTIPLIER-ACCELERATOR MODEL

© 2024 А. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV, D. G. FROLOV

ABSTRACT. The well-known mathematical model of macroeconomics “multiplier-accelerator” is considered in a nonlinear version with spatial factors. We study two versions of the corresponding boundary-value problem. In the first version, where the spatial dissipation is significant in the linear statement, the boundary-value problem has limit cycles that arise as a result of Andronov–Hopf bifurcations. The second version of the boundary-value problem arises when dissipation in the linear formulation is neglected. In this weakly dissipative version, the boundary-value problem has a countable set of finite-dimensional cycles and tori. All such invariant manifolds are unstable. The analysis of the problem is based on methods of the theory of infinite-dimensional dynamic systems.

Keywords and phrases: multiplier-accelerator, nonlinear boundary value problem, invariant manifold, bifurcation, stability, normal form.

AMS Subject Classification: 35L10, 35L30, 37N40

1. Введение. Можно назвать достаточно много математических моделей, используемых в макроэкономике: спрос-предложение, модель Солоу, модель Кейнса и т. д. Модель «мультипликатор-акселератор» (см., например, [19, 20]) является одной из популярных по причине ее простоты и возможности объяснить в ее рамках цикличность рыночной экономики, опираясь на теорию динамических систем.

Приведем эту математическую модель в одном из возможных вариантов:

$$Y_{\tau} = I - aY, \quad I_{\tau} = bY_{\tau} - cI + F(Y). \quad (1)$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Здесь $Y = Y(\tau)$ — национальный доход или его отклонение от некой средней величины, $I = I(\tau)$ — индуцированные инвестиции, τ — время, а коэффициенты a , b , c — положительные постоянные, характеризующие скорость (интенсивность) процессов экономической динамики. В системе (1) через $F(Y)$ обозначен нелинейный член, который будет выбран позднее. Отметим, что вариант такого выбора не единствен (см. [19, 20]).

Для изучения системы дифференциальных уравнений (1), как правило, характерно ее преобразование к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для функции $Y(\tau)$ (или пропорциональной ей функции). Для этого следует исключить $I(\tau)$. Дифференцируя первое уравнение системы (1) по τ , получим равенство

$$Y_{\tau\tau} = I_{\tau} - aY_{\tau}.$$

На втором шаге, используя второе уравнение системы (1) и исключая I_{τ} , получим

$$Y_{\tau\tau} = bY_{\tau} - cI + F(Y) - aY_{\tau}.$$

Осталось исключить I с помощью первого уравнения системы дифференциальных уравнений (1). В результате получаем следующее дифференциальное уравнение

$$Y_{\tau\tau} + (a + c - b)Y_{\tau} + acY = F(Y). \quad (2)$$

В [19] предложено выбирать в качестве $F(Y)$ нелинейную функцию $-g(Y_{\tau})^3$. В результате преобразований получаем уравнение (2), которое известно под названием «уравнение Релея». Продолжим его преобразования следующим образом: уравнение (2) продифференцируем по τ , введем обозначения $b - c - a = 2\alpha$, $ac = \omega^2$, считая при этом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и, наконец, положим $Y_{\tau} = (\alpha^{1/2}/g^{1/2})v$. В результате получим уравнение

$$v_{\tau\tau} - 2\alpha v_{\tau} + \omega^2 v = -\alpha(v^3)_{\tau}. \quad (3)$$

Если при этом считать, что $\alpha \ll 1$ (α — малый положительный параметр), то, используя методику монографии [10], можно показать, что дифференциальное уравнение (3) и, следовательно, система дифференциальных уравнений (1) имеет притягивающий предельный цикл. При этом для решений уравнения (3), порождающих такой предельный цикл, справедлива асимптотическая формула

$$v(\tau) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\omega\tau + \varphi) + O(\alpha),$$

где φ — произвольная действительная постоянная.

В [19] было отмечено, что экономические модели традиционно не учитывают пространственные факторы. Это допустимо, но учет пространственной распределенности экономических показателей возможен. Зависимость основных показателей экономики от пространственных переменных может привести к более точному учету специфики экономических процессов. В [19] были предложены некоторые варианты, которые возможны при составлении математических моделей. Опираясь на эту идею монографии [19], в данной работе рассмотрим следующий распределенный вариант математической модели мультипликатор-акселератор:

$$Y_{\tau} = I - aY + d_1 Y_{yy}, \quad I_{\tau} = bY_{\tau} - cI - gY_{\tau} \int_0^l Y_{\tau}^2 dy + d_2 Y_{yy}. \quad (4)$$

Здесь $Y = Y(\tau, y)$, $I = I(\tau, y)$, т.е. национальный доход и инвестиции зависят не только от τ (эволюционной переменной), но и от пространственной переменной $y \in [0, l]$, $l > 0$.

В системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (4) d_1 , d_2 — неотрицательные постоянные. Далее будем считать, что $d_2 > 0$, а $d_1 \geq 0$. Вариант с $d_1 = 0$ в [19] рассматривается как основной.

Как и в случае «точечной» модели (1) аналогичными преобразованиями систему дифференциальных уравнений (4) можно и целесообразно свести к одному дифференциальному уравнению для $Y(\tau)$:

$$Y_{\tau\tau} - \alpha Y_{\tau} - d_1 Y_{\tau yy} + \omega^2 Y - d_3 Y_{yy} = -gY_{\tau} \int_0^l Y_{\tau}^2 dy,$$

где $\alpha = (b - a - c)/2$, $\omega^2 = ac$, $d_3 = d_2 + cd_1$. Если теперь положить

$$y = \frac{xl}{\pi}, \quad \tau = \gamma_1 t, \quad Y = \gamma_0 w, \quad \gamma_1 = \frac{l}{\pi} \left(\frac{1}{d_3} \right)^{1/2}, \quad \gamma_0 = l \left(\frac{1}{d_3} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{g} \right)^{1/2},$$

то последнее уравнение в нормированном виде приобретает следующий вид:

$$w_{tt} - 2\beta w_t - 2\delta^2 w_{txx} + \sigma^2 w - w_{xx} = -w_t \int_0^\pi w_t^2 dx,$$

где теперь

$$\beta = \gamma_1 \alpha, \quad \sigma^2 = \omega^2 l \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \frac{1}{d_3}, \quad \delta^2 = \frac{d_1 \pi}{2l\sqrt{d_3}}.$$

Последний шаг в преобразовании последнего уравнения состоит в том, что его продифференцируем по t и положим $w_t = u$. В результате получим следующее уравнение:

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = - \left(u \int_0^\pi u^2 dx \right)_t. \quad (5)$$

Интегро-дифференциальное уравнение с частными производными (5) следует дополнить краевыми условиями. В качестве таких условий рассмотрим однородные краевые условия Неймана (условия «непроницаемости», если следовать терминологии, используемой в физике и химии). Итак, далее будем считать, что

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (6)$$

Возможна и экономическая интерпретация краевых условий (6). Национальный доход Y_t (в нормированном виде $w_t = u$) на границе экономического региона не изменяется, т.е. отток и приток капитала на границе остается без изменений и регламентируется не экономическими процессами, протекающими в экономическом субъекте, а административно. Во всяком случае краевые условия (6) достаточно часто используются при анализе распределенных математических моделей макроэкономики (см. [19, 20], а также цитированные в них работы).

Для приложений к макроэкономике при анализе краевой задачи (5), (6) особый интерес представляют следующие вопросы:

- (i) существование и свойства периодических или почти периодических по эволюционной переменной (т.е. по t) решений изучаемой краевой задачи;
- (ii) анализ устойчивости решений краевой задачи (5), (6) в смысле определений качественной теории дифференциальных уравнений и в том числе уравнений с частными производными (или функционально-дифференциальных уравнений);
- (iii) получение точных или асимптотических формул для интересующих нас решений.

Подчеркнем, что наличие экономических циклов характерно для рыночной экономики на всех этапах ее функционирования. Этот феномен рыночной (капиталистической) экономики отмечали в XIX в. известные экономисты А. Смит, Д. Рикардо, К. Маркс. В XX в. этому явлению было уделено еще большее внимание.

В заключение этого раздела напомним, что модель мультипликатор-акселератор в преобразованном виде похожа на другую модель макроэкономики — модель Гудвина (см., например, [9]).

2. Общие свойства краевой задачи и ее линеаризованного варианта. Сначала рассмотрим линеаризованный вариант краевой задачи (5), (6), т.е. задачу

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (7)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (8)$$

Дополним краевую задачу (7), (8) начальными условиями

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x). \quad (9)$$

При анализе краевых задач (5), (6) и (7), (8) следует различать два варианта при выборе δ :

- 1) $\delta \neq 0$; 2) $\delta = 0$.

Пусть краевая задача (7), (8) и начально-краевая задача (7), (8), (9) рассматривается при $\delta \neq 0$ ($\delta^2 > 0$). Нетрудно показать, что линейная начально-краевая задача может быть проинтегрирована в явном виде на основе использования метода Фурье, а ее решения записано в следующем виде:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n \exp(\lambda_{n,1}t) + d_n \exp(\lambda_{n,2}t) \right) h_n(x), \quad (10)$$

где $h_0 = h_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, $h_k(x) = \sqrt{2/\pi} \cos kx$, $k = 1, 2, \dots$. Подчеркнем, что семейство функций $\{h_n(x)\}$ на $[0, \pi]$ образует полную ортонормированную систему функций. В частности, $(h_n(x), h_m(x)) = \delta_{n,m}$ — символ Кронекера, где

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x) g(x) dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2(0, \pi)$.

Пусть

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) h_n(x) dx, \quad b_n = \int_0^{\pi} g(x) h_n(x) dx.$$

Тогда c_n, d_n могут быть найдены как решения следующей системы из двух уравнений:

$$c_n + d_n = a_n, \quad \lambda_{n,1}c_n + \lambda_{n,2}d_n = b_n. \quad (11)$$

При этом, очевидно, что $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}$ являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2p_n\lambda + q_n = 0, \quad (12)$$

где $p_n = \delta^2 n^2 - \beta$, $q_n = \sigma^2 + n^2$. При этом $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2} = -p_n \mp \sqrt{p_n^2 - q_n}$ и, как нетрудно убедиться, если $n \geq n_0$ (достаточно велико), то эти корни действительны и при этом

$$\begin{aligned} \lambda_{n,1} &= n^2 \mu_{n,1}, \quad \mu_{n,1} = -\delta^2 + \frac{\beta}{n^2} - \sqrt{\left(\delta^2 - \frac{\beta}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)}, \\ \lambda_{n,2} &= \mu_{n,2}, \quad \mu_{n,2} = -\frac{1 + \frac{\sigma^2}{n^2}}{\delta^2 - \frac{\beta}{n^2} + \sqrt{\left(\delta^2 - \frac{\beta}{n^2}\right)^2 - \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{\sigma^2}{n^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Из последних формул вытекает, в частности, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,1} = -2\delta^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,2} = -\frac{1}{2\delta^2},$$

а также

$$\left| \frac{\lambda_{n,1}}{n^2} \right| \leq K_1, \quad |\lambda_{n,2}| \leq K_2,$$

где K_1, K_2 — некоторые положительные постоянные.

Нетрудно найти c_n, d_n как решения системы алгебраических уравнений (11):

$$c_n = \frac{a_n \lambda_{n,2} - b_n}{\lambda_{n,2} - \lambda_{n,1}}, \quad d_n = \frac{b_n - \lambda_{n,1} a_n}{\lambda_{n,2} - \lambda_{n,1}}.$$

Далее, получаем неравенства

$$|c_n| \leq \frac{K_3}{n^2} (|a_n| + |b_n|), \quad |d_n| \leq K_4 \left(|a_n| + \frac{|b_n|}{n^2} \right),$$

где K_3 и K_4 — некоторые положительные постоянные. При выводе последних двух неравенств используется явный вид корней квадратного уравнения (12).

Лемма 1. Пусть $\delta \neq 0$, $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, $g(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$. Тогда при $x \in [0, \pi]$ и $t \in (0, T)$ (T — положительная постоянная) решение краевой задачи (7), (8) обладает следующими свойствами:

- (i) при любом $t_0 \in (0, T)$ решение $u(t_0, x)$ как функция переменного x принадлежит $\mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$;
- (ii) при всех $t = t_0 \in (0, T)$ справедливо включение $u_{txx} \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$;
- (iii) производные по t любого порядка функции $u(t, x)$ при $t \in (0, T)$ непрерывны по совокупности переменных, если $x \in [0, \pi]$, а t принадлежит указанному ранее диапазону.

Доказательство леммы 1 достаточно стандартно и сводится к анализу функционального ряда (10). При этом анализе следует учесть, что из условий леммы вытекает справедливость следующих утверждений: сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

при достаточно больших n справедливо включение $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2} \in \mathbb{R}$ и, наконец, имеют место предельные равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,1} = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,2} = -\frac{1}{2\delta^2}.$$

Аналогичные построения можно найти во многих монографиях (см., например, [11]). $\square$

Свойства линейной краевой задачи (7), (8), а также результаты работ [12, 14] позволяют утверждать, что нелинейная начально-краевая задача (5), (6) локально корректно разрешима, если $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$ и $g(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$.

Замечание 1. Напомним, что $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: $f(x), f'(x), f''(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$. В силу теорем вложения $f(x), f'(x)$ непрерывны, а также $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Далее будет использовано обозначение $\mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$. При этом $g(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$, если $g(x) \in \mathbb{W}_2^1[0, \pi]$ и, кроме того, $g(x)$ получаем как предел достаточно гладких функций, удовлетворяющих равенствам $g'(0) = g'(\pi) = 0$, по норме пространства Соболева $\mathbb{W}_2^1[0, \pi]$.

Рассмотрим второй вариант выбора δ ($\delta = 0$). В этом случае уравнение (7) будет уравнением второго порядка, но гиперболического типа. Более того, оно по свойствам близко уже к уравнению колебания струны и поэтому для уравнения (7), начально-краевой задачи (7), (8), (9) справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^2[0, \pi]$, а $g(x) \in \mathbb{W}_{2,0}^1[0, \pi]$. Тогда начально-краевая задача имеет решение, которое может быть найдено методом Фурье. Отметим, что в нашем случае его можно записать в виде суммы (10), в которой

$$\lambda_{n,1} = \beta - \sqrt{\beta^2 - \sigma_n^2}, \quad \lambda_{n,2} = \beta + \sqrt{\beta^2 - \sigma_n^2}, \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 + n^2.$$

Из результатов работы [14] в случае выбора $f(x), g(x)$ с указанными ранее свойствами вытекает утверждение о корректной разрешимости начально-краевой задачи (7), (8), (9) и при $\delta = 0$.

Приступим к вопросу об устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной краевой задачи (5), (6). Из предшествующих построений, и, в частности, полноты системы $\{h_n(x)\}$ вытекает, что неравенство $\operatorname{Re} \lambda_n \leq -\gamma_0 < 0$, где $\gamma_0 = \operatorname{const} > 0$, является достаточным условием асимптотической устойчивости состояния равновесия изучаемой краевой задачи (5), (6) как при $\delta \neq 0$, так и при $\delta = 0$. Соответствующее неравенство для $\operatorname{Re} \lambda_k$ будет выполнено, если $\beta < 0$. При $\beta > 0$ нулевое решение краевой задачи (5), (6) неустойчиво. Наконец, при $\beta = 0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия.

Так, при $\beta = 0$, $\delta \neq 0$ спектр устойчивости (совокупность корней характеристического уравнения (12)) содержит пару простых собственных значений $\pm i\sigma$, и этим собственным значениям отвечает собственный элемент $h_0 = h_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, в то время как остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Несколько иная ситуация реализуется при $\delta = 0$. Если же и $\beta = 0$, то спектр устойчивости лежит целиком на мнимой оси: $\lambda_{n,1;n,2} = \pm i\sigma_n$, $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n^2}$. В таком случае реализуется

критический случай бесконечной размерности. За это отвечает лишь один параметр β . Если же $\beta > 0$, то все корни характеристического уравнения (12) расположены в правой полуплоскости комплексной плоскости. Подчеркнем еще раз, что варианты, когда $\delta \neq 0$ и $\delta = 0$ различны во многих аспектах. В частности, они приводят к различным бифуркационным задачам.

3. Первая бифуркационная задача. В этом разделе рассмотрим вариант, когда $\delta \neq 0$. Пусть $\beta = \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда

$$\lambda_{1,2}(0, \varepsilon) = \tau(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon), \quad \text{где } \tau(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\sigma^2 - \varepsilon^2},$$

т.е.

$$\tau(0) = 0, \quad \tau'_0 = \left. \frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} > 0, \quad \sigma(0) = \sigma.$$

При этом остальные собственные значения операторного пучка (корни характеристического уравнения (12)) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2}(k, \varepsilon) \leq -\gamma_0 < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, выполнены условия первой части теоремы Андронова—Хопфа (см. [1, 18]). Вторая часть этой теоремы предполагает учет при анализе краевой задачи (5), (6) влияния нелинейных слагаемых.

Из результатов работ [5, 15, 16] вытекает, что у краевой задачи (5), (6) при $\beta = \varepsilon$ существует двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$. При этом оно будет локальным аттрактором для решений краевой задачи (5), (6) из достаточно малой окрестности нулевого решения (окрестность в данном случае — это шар некоторого достаточно малого радиуса с центром в нуле фазового пространства решений исследуемой краевой задачи). Решения краевой задачи (5), (6), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, могут быть найдены после анализа нормальной формы (см. [1, 2]). В комплексной форме записи она имеет следующий вид

$$z' = \varphi(z, \bar{z}, \varepsilon).$$

Здесь $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ — «медленное» время. В общем случае вместо последнего дифференциального уравнения можно рассматривать его «укороченный» вариант:

$$z' = \psi(z, \bar{z}), \quad \psi(z, \bar{z}) = \varphi(z, \bar{z}, 0). \quad (13)$$

В свою очередь, решения краевой задачи (5), (6) при $\beta = \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\delta \neq 0$, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, будем искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon u_2(t, x, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

где

$$u_1(t, x, z, \bar{z}) = u_1(t, z, \bar{z}) = z \exp(i\sigma t) h_0 + \bar{z} \exp(-i\sigma t) h_0,$$

а $u_2 = u_2(t, x, z, \bar{z})$, $u_3 = u_3(t, x, z, \bar{z})$ — функции, принадлежащие классу W , содержащих такие функции $w(t, x, z, \bar{z})$, которые достаточно гладко зависят от t , x , z , $\bar{z}$, имеют по переменной t период $2\pi/\sigma$ и, наконец,

$$M_{\pm}(w) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^\pi w(t, x, z, \bar{z}) \exp(\mp i\sigma t) h_0(x) dx dt = 0.$$

Функции u_2 , u_3 находим после подстановки суммы (14) в краевую задачу (5), (6) ($\beta = \varepsilon \ll 1$) и выделения слагаемых при степенях ε , $\varepsilon^{3/2}$ (и, в принципе, далее при ε^2 , $\varepsilon^{5/2}$, ...). В результате получаем две следующие краевые задачи:

$$u_{2tt} - 2\delta^2 u_{2txx} + \sigma^2 u_2 - u_{2xx} = 0, \quad (15)$$

$$u_{2x}|_{x=0} = u_{2x}|_{x=\pi} = 0, \quad (16)$$

а также

$$u_{3tt} - 2\delta^2 u_{3txx} + \sigma^2 u_3 - u_{3xx} = \Phi_3, \quad (17)$$

$$u_{3x}|_{x=0} = u_{3x}|_{x=\pi} = 0, \quad (18)$$

где

$$\Phi_3 = -2i\sigma(z' \exp(i\sigma t) - z' \exp(-i\sigma t))h_0(x) + 2i\sigma(z \exp(i\sigma t) - \bar{z} \exp(i\sigma t))h_0(x) - \left[u_1(t, x, z, \bar{z}) \int_0^\pi u_1^2(t, x, z, \bar{z}) dx \right]_t.$$

Если при анализе краевой задачи (15), (16) учесть, что мы ищем функцию $u_2 \in W$, то, очевидно, $u_2 = 0$.

Из условий разрешимости в классе $(2\pi/\sigma)$ -периодических по t функций линейной неоднородной краевой задачи (17), (18) вытекает, что в нашем случае нормальная форма (13) приобретает следующий вид:

$$z' = z - \frac{3}{2}z^2\bar{z}. \quad (19)$$

Наконец, соответствующее решение линейной краевой задачи (17), (18) имеет следующий вид:

$$u_3(t, x, z, \bar{z}) = u_3(t, z, \bar{z}) = \left(\eta_3 z^3 \exp(3i\sigma t) + \bar{\eta}_3 \bar{z}^3 \exp(-3i\sigma t) \right) h_0(x),$$

где $\eta_3 = 3\sqrt{\pi}i/(8\sigma)$.

Замечание 2. Напомним известное условие, с помощью которого получена нормальная форма, называемое «условием разрешимости». У неоднородной краевой задачи

$$w_{tt} - \delta^2 w_{txx} + \sigma^2 w - w_{xxx} = G(t, x), \\ w_x(t, 0) = w_x(t, \pi) = 0,$$

в которой функция $G(t, x)$ по переменной t имеет период $2\pi/\sigma$, существует решение в классе $(2\pi/\sigma)$ -периодических по t функций, если

$$\frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \int_0^\pi G(t, x) \exp(\pm i\sigma t) h_0(x) dx dt = 0.$$

Несложно проверить, что нормальная форма (19) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия

$$S(\varphi) : z(s) = \rho_* \exp(i\varphi), \quad \rho_* = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Из результатов работ [5, 18] вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\beta = \varepsilon$ нелинейная краевая задача (5), (6) имеет притягивающий предельный цикл $C_0(\varepsilon)$, порожденный семейством периодических решений*

$$u(t, x, \varepsilon, \varphi) = \varepsilon^{1/2} \rho_* \left(\exp(i\sigma t + i\varphi) + \exp(-i\sigma t - i\varphi) \right) h_0(x) + \\ + \varepsilon^{3/2} \frac{3i\sqrt{\pi}}{8\sigma} \rho_*^3 \left(\exp(3i\sigma t + 3i\varphi) + \exp(-3i\sigma t - 3i\varphi) \right) h_0(x) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Замечание 3. Подчеркнем, что цикл, полученный в рамках теоремы 1, не зависит от x , т.е. получили пространственно однородное решение. Действительно, рассмотрим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} - 2\varepsilon \dot{y} + \sigma^2 y = -\pi(y^3)_t,$$

которое можно рассматривать как одну из версий уравнения Ван дер Поля (см. также уравнение (3)). Последнее уравнение имеет единственный предельный цикл в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Стандартные построения показывают, что этот цикл порожден решениями вида

$$y(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\exp(i\sigma t + i\varphi_0) + \exp(-i\sigma t - i\varphi_0) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Естественно, что такие решения вспомогательного уравнения удовлетворяют и краевой задаче (5), (6) при согласованном выборе параметров. Вместе с тем для краевой задачи (5), (6) бифурцирующий цикл единствен.

Рассмотрим также вспомогательную краевую задачу

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = - \left(u \int_0^\pi u^2 dx \right)_t, \quad (20)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u dx = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что любое ее решение удовлетворяет краевой задаче (5), (6). Тем не менее краевая задача (20), (21) представляет самостоятельный интерес для анализа локальных бифуркаций.

Ясно, что у краевой задачи (20), (21) имеется состояние равновесия $u = 0$. Для анализа его устойчивости в линейном приближении необходимо рассмотреть линеаризованный вариант краевой задачи (20), (21):

$$u_{tt} - 2\beta u_t - 2\delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (22)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \quad M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u dx = 0. \quad (23)$$

Анализ устойчивости решений краевой задачи (22), (23) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2p_n \lambda + q_n = 0,$$

где теперь $n = 1, 2, 3$. Поэтому в отличие от краевой задачи (5), (6) у задачи (20), (21) случай, близкий к критическому, возникает при $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$. При таком выборе β последнее характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon), \quad \bar{\lambda}_1(\varepsilon) = \tau(\varepsilon) - i\sigma(\varepsilon),$$

отвечающие собственному элементу $h_1(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$. Здесь

$$\tau(\varepsilon) = \delta^2 \varepsilon \quad (\tau(0) = 0), \quad \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\sigma^2 + 1 - (\varepsilon \delta^2)^2}, \quad \sigma_1 = \sigma(0) = \sqrt{\sigma^2 + 1} \neq 0.$$

При рассмотрении вспомогательной краевой задачи (20), (21) также возникает задача о локальных бифуркациях в окрестности нулевого состояния равновесия. Повторив построения аналогичные тем, которые были использованы при анализе краевой задачи (5), (6) (см. теорему 1) получаем аналогичное утверждение.

Теорема 2. *Существует такая положительная постоянная ε_1 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$ краевая задача (20), (21) имеет предельный цикл $C_1(\varepsilon)$, сформированный однопараметрическим семейством t периодических решений*

$$u(t, x, \varepsilon, \varphi_1) = \varepsilon^{1/2} \delta \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\exp(i\sigma_1 t + i\varphi_1) + \exp(-i\sigma_1 t - i\varphi_1) \right] h_1(x) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varphi_1 \in \mathbb{R}.$$

Цикл $C_1(\varepsilon)$ является локальным аттрактором вспомогательной краевой задачи (20), (21) и $h_1(x) = \sqrt{2/\pi} \cos x$.

Вместе с тем этот цикл будет предельным циклом и краевой задачи (5), (6), так как решения $u(t, x, \varepsilon, \varphi_1)$, очевидно, удовлетворяют не только краевой задаче (20), (21), но и задаче (5), (6). Но как цикл краевой задачи (5), (6) он неустойчив (седловой).

Действительно, при $\beta = \delta^2(1 + \varepsilon)$ характеристическое уравнение (12) имеет корни в правой полуплоскости комплексной плоскости, так как при $n = 0$ справедливо неравенство

$$p_0(\varepsilon) = -2\delta^2(1 + \varepsilon) < 0.$$

Тем самым спектр устойчивости у краевой задачи (5), (6) для нулевого решения содержит корни в правой полуплоскости. При этом у цикла $C_1(\varepsilon)$ как цикла краевой задачи (5), (6) по крайней

мере один мультипликатор будет по модулю больше 1. Последнее проверяется методом теории возмущений, если учесть, что $\varepsilon \rightarrow 0$, а цикл зависит от ε . Аналогичное утверждение имеет место, если

$$\beta = \delta^2 m^2 (1 + \varepsilon), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

При таком выборе β справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует такая положительная постоянная ε_m , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$ и соответствующем выборе β краевая задача (5), (6) имеет предельный цикл $C_m(\varepsilon)$, порожденный параметрическим семейством решений*

$$u(t, x, \varphi_m) = \varepsilon^{1/2} \delta m \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\exp(i\sigma_m t + i\varphi_m) + \exp(-i\sigma_m t - i\varphi_m) \right) h_m(x) + o(\varepsilon^{1/2}), \quad \varphi_m \in \mathbb{R}.$$

где $\sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + m^2}$. Этот цикл краевой задачи (5), (6) неустойчив.

Доказательство теоремы 3 основано на анализе вспомогательной краевой задачи следующего вида:

$$u_{tt} - 2\delta^2 m^2 (1 + \varepsilon) u_t - \delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = -m \left(u \int_0^{\pi/m} u^2 dx \right)_t, \quad (24)$$

$$u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad \int_0^{\pi/m} u(t, x) dx = 0. \quad (25)$$

Для краевой задачи (24), (25) можно с небольшими изменениями повторить построения, обосновывающие теоремы 1 и 2. При этом решения краевой задачи (24), (25) удовлетворяют и задаче (5), (6) в случае, если в ней $\beta = \delta^2 m^2 (1 + \varepsilon)$. Отметим особо, что линейная краевая задача

$$u_{tt} - 2m^2 \delta^2 (1 + \varepsilon) u_t - \delta^2 u_{txx} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad (26)$$

$$u_x(t, 0) = u_x\left(t, \frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad \int_0^{\pi/m} u(t, x) dx = 0 \quad (27)$$

аналогична краевой задаче (22), (23). При $\varepsilon = 0$ краевая задача (26), (27) имеет периодическое решение

$$u_m(t, x) = \exp(i\sigma_m t) h_m(x),$$

где $h_m(x) = \sqrt{2/\pi} \cos mx$, $\sigma_m = \sqrt{m^2 + \sigma^2}$. Как и в теореме 1 бифуркационный анализ краевой задачи (24), (25) может быть сведен к изучению нормальной формы. В данном случае сумма (14) имеет следующий вид:

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_m(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

4. Вторая бифуркационная задача. В данном разделе рассмотрим краевую задачу (5), (6) при $\delta = 0$, $\beta = \varepsilon$, считая как и ранее, что $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Итак, анализу подлежит следующая краевая задача:

$$u_{tt} - 2\varepsilon u_t + \sigma^2 u - u_{xx} = \left(-u \int_0^{\pi} u^2 dx \right)_t, \quad (28)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (29)$$

Линеаризованный вариант краевой задачи (28), (29) при $\varepsilon = 0$

$$u_{tt} + \sigma^2 u - u_{xx} = 0, \quad u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \quad (30)$$

имеет счетный набор t -периодических решений $\exp(i\sigma_n t) h_n(x)$, где $n = 0, 1, 2$. Напомним, что $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n^2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $h_m(x) = \sqrt{2/\pi} \cos mx$, $m = 1, 2, \dots$, $h_0(x) = h_0 = 1/\sqrt{\pi}$.

Решения нелинейной краевой задачи (28), (29) можно и удобно искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x, y, \bar{y}) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x, y, \bar{y}) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (31)$$

где $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$, $y_j = y_j(s)$, $s = \varepsilon t$, $j = 0, 1, 2, \dots$. При этом будем считать, что $y = y(s)$ при каждом s , когда эта бесконечномерная вектор-функция определена, и принадлежит пространству l_2^2 , т.е. сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 |y_k|^2$. Через $|y_k|$ обозначен модуль комплекснозначной функции $y_k(s)$.

Первый член суммы (31) имеет вид

$$u_1(t, x, y, \bar{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k(x), \quad (32)$$

где $q_k = q_k(t) = \exp(i\sigma_k t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

В силу предположения $y \in l_2^2$ функция $u_1(t, x, y, \bar{y})$ при всех допустимых $y(s)$ и s как функция t , x принадлежит пространству функций, имеющих вторые производные, принадлежащие $\mathbb{L}_2(D_T)$, где $(D_T) = ((t, x) : t \in [0, T], x \in [0, \pi])$. Подчеркнем, что при всех рассматриваемых s и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, функция $u_1(t, x, y, \bar{y})$ удовлетворяет однородной краевой задаче (30) «приблизительно» (с точностью до $O(\varepsilon)$).

Будем считать априори, что функцию $u_3(t, x, y, \bar{y})$ следует искать в виде ряда, т.е.

$$u_3(t, x, y, \bar{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t, y, \bar{y}) h_k(x), \quad (33)$$

где $v_k(t, y, \bar{y})$ — почти периодические функции по t со счетным базисом частот $\sigma_0, \sigma_1, \dots$.

Подстановка суммы (31) в нелинейную краевую задачу (28), (29) с последующим выделением слагаемых пропорциональных $\varepsilon^{3/2}$ приводит к неоднородной краевой задаче для функции $u_3(t, x, y, \bar{y})$:

$$u_{3tt} + \sigma^2 u_3 - u_{3xx} = F_3(t, x, y, \bar{y}), \quad (34)$$

$$u_{3x}(t, 0, y, \bar{y}) = u_{3x}(t, \pi, y, \bar{y}) = 0. \quad (35)$$

В уравнении (34)

$$F_3(t, x, y, \bar{y}) = F_{3,1}(t, x, y, \bar{y}) + F_{3,2}(t, x, y, \bar{y}) + F_{3,3}(t, x, y, \bar{y}),$$

$$F_{3,1}(t, x, y, \bar{y}) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (y'_k q_k - \bar{y}'_k \bar{q}_k) i \sigma_k h_k(x),$$

$$F_{3,2}(t, x, y, \bar{y}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k - \bar{y}_k \bar{q}_k) i \sigma_k h_k(x),$$

$$F_{3,3}(t, x, y, \bar{y}) = - \left(\sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k \Phi \right)_t = - \left(\Phi \sum_{k=0}^{\infty} (y_k q_k + \bar{y}_k \bar{q}_k) h_k(x) \right)_t,$$

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (y_n q_n + \bar{y}_n \bar{q}_n)^2$$

(см. равенство Парсеваля).

Из равенства (33) вытекает возможность записать краевую задачу (34), (35) в виде бесконечной (счетной) системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$v_{mtt} + \sigma_m^2 v_m = \Phi_m(t, y, \bar{y}), \quad (36)$$

где $m = 0, 1, \dots$, $\Phi_m(t, y, \bar{y}) = \Phi_{m,1} + \Phi_{m,2} + \Phi_{m,3}$,

$$\Phi_{m,1} = -2(y'_m q_m - \bar{y}'_m \bar{q}_m) i \sigma_m,$$

$$\Phi_{m,2} = 2(y_m q_m - \bar{y}_m \bar{q}_m) i \sigma_m,$$

$$\Phi_{m,3} = - \left[(y_m q_m + \bar{y}_m \bar{q}_m)^2 \Phi \right]_t,$$

а Φ была определена ранее. Наконец, $y'_j = y'_j(s)$.

Из условий разрешимости каждого из дифференциальных уравнений счетной системы (36) в классе почти периодических функций со счетным базисом частот $\sigma_0, \sigma_1, \dots$ ($\sigma_k = \sqrt{\sigma^2 + k^2}$) вытекает, что функции $y_m(s)$ — решения еще одной, новой системы обыкновенных уравнений для комплекснозначных функций $y_m(s)$:

$$y'_m = y_m \left(1 - \frac{1}{2} y_m \bar{y}_m - \sum_{k=0}^{\infty} y_k \bar{y}_k \right), \quad (37)$$

где штрихом обозначена производная по переменной s . В системе (37) положим

$$y_m(s) = \sqrt{2} \rho_m^{1/2}(s) \exp(i\varphi_m(s)), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где замена (38) осуществляет переход от алгебраической формы записи для комплекснозначных функций $y_m(s)$ к обобщенной тригонометрической, где $\rho_m(s) \geq 0$, $\varphi_m(s) \in \mathbb{R}$ при всех допустимых s . В результате замены (38) система комплексных уравнений (37) окажется переписанной в следующем виде:

$$\rho'_m = 2\rho_m(1 - \rho_m - 2W(\rho)), \quad (39)$$

$$\varphi'_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\rho_m = \rho_m(s)$, $W(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k$. Очевидно (см. (40)), что при всех рассматриваемых m справедливо тождество $\varphi_m(s) = \varphi_{m,0}$, где $\varphi_{m,0}$ — произвольная действительная постоянная. Поэтому для дальнейших этапов изучения нормальной формы (37) определяющую роль играет система дифференциальных уравнений для $\rho_m(s)$, т.е. система (39).

Напомним, что пространство l_1^m состоит из таких последовательностей комплексных чисел $\{c_k\}$, что сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} k^m |c_k|$. В частности, пространство l_1 состоит из последовательностей $\{c_k\}$ с конечной нормой $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$.

В нашем случае $\{\rho_k\} \in K_+(q)$, где $K_+(q)$ — конус, состоящий из таких последовательностей ρ_k , что при всех допустимых s

$$(1) \{\rho_k\} \in l_1^4, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \rho_k < \infty; \quad (2) \rho_k(s) \geq 0.$$

Дополнительно отметим, что справедливо неравенство

$$W_2(\rho) \leq W^2(\rho), \quad W_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2(s), \quad W(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(s).$$

5. Анализ нормальной формы. В данном разделе будем рассматривать вспомогательную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (39). Для решений этой системы справедливости утверждения.

Лемма 3. Множество $\rho_k = 0$, где k — некоторое выбранное целое неотрицательное число, инвариантно для ее решений.

Действительно, из условия $\rho_k(0) = 0$ вытекает $\rho_k(s) \equiv 0$ при всех тех s , когда решение y системы (39) существует.

Лемма 4. Система дифференциальных уравнений (39) диссипативна в норме банахова пространства l_1 .

Доказательство. Достаточно показать, что с течением времени s все решения системы (39) попадут в шар $Q(r_0)$ с центром в нуле пространства l_1 . В нашем случае $r_0 = 1/2 + \nu_0$, где ν_0 — положительная постоянная. Сложим все уравнения системы дифференциальных уравнений (39). В результате получим, что

$$W' = 2(W - 2W^2 - W_2),$$

где $W_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2$. Очевидно, что $W - 2W^2 - W_2 \leq W - 2W^2$. Поэтому справедливо неравенство

$$W' \leq 2W(1 - 2W). \quad (41)$$

Пусть $W(s)$ — какое-либо решение дифференциального неравенства (41) и при некоторых s справедливо неравенство $W(s) \geq 1/2 + \nu_0$. При таких s справедливо неравенство $W'(s) \leq 0$ и функция $W(s)$ убывает до тех пор, пока $W(s)$ не станет меньше $1/2 + \nu_0$. Более строгое доказательство основано на использовании неравенства Гронуолла и свойствах дифференциальных неравенств (см., например, главу 3 из монографии Ф. Хартмана [13]). $\square$

Перейдем теперь к анализу вопроса о нахождении и анализе устойчивости ненулевых состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Состояния равновесия следует искать как неотрицательные решения бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\rho_m(1 - \rho_m - 2W(\rho)) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Решения системы алгебраических уравнений (42) будем обозначать $\eta = \{\eta_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Подчеркнем, что бесконечная последовательность $\eta \in l_1^4$ или, по крайней мере, должна принадлежать l_1 для того, чтобы была определена сумма $W(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j$.

Ясно, что система уравнений (42) имеет нулевое решение $S_0 : \eta = \{0\}$ (все компоненты равны нулю). Иными словами, S_0 — это нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Можно показать, что состояние равновесия S_0 неустойчиво. Действительно, пусть $\rho(0) = \xi$, где $\xi = \{\xi_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Пусть при этом $\xi_j = 0$, если $j \geq n$, т.е. все координаты начального условия у системы дифференциальных уравнений (39) равны нулю, начиная с некоторого номера n . Тогда для такого решения $\rho(s) = \{\rho_j(s)\}$ выполнены равенства $\rho_j(s) \equiv 0$, если $j = n, n+1, \dots$.

Оставшиеся n компонент бесконечномерного вектора $\rho(s) = \{\rho_j(s)\}$, т.е. $\rho_0(s), \rho_1(s), \dots, \rho_{n-1}(s)$ удовлетворяют конечномерной системе дифференциальных уравнений

$$\rho'_k = 2\rho_k(1 - \rho_k - 2W_n(\rho)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $W_n(\rho) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j$. В свою очередь, нулевое решение последней конечномерной системы дифференциальных уравнений неустойчиво. Это вытекает из теоремы об устойчивости по первому (линейному) приближению. Подчеркнем, что соответствующая линеаризованная в нуле система дифференциальных уравнений имеет вид $\rho'_k = 2\rho_k$.

Перейдем теперь к вопросу о существовании и устойчивости ненулевых состояний равновесия изучаемой системы дифференциальных уравнений (39). Обозначим через $S_p(k_1, \dots, k_p)$ решение системы (39), у которого p компонент с номерами $k_1, \dots, k_p$ положительны, а оставшиеся компоненты равны нулю. Наконец, через S_{∞} обозначим такое решение алгебраической системы (39), у которого число положительных компонент счетно или даже все компоненты положительны. Например, $S_1(j_1)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39) (решение системы алгебраических уравнений (39)) с одной положительной компонентой, т.е. $\eta_{j_1} > 0$, $\eta_k = 0$, $k \neq j_1$. При этом справедливо равенство

$$1 - \eta_{j_1} - 2\eta_{j_1} = 0,$$

т.е. $\eta_{j_1} = 1/3$.

Пусть теперь $S_2(j_1, j_2)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39), у которого $\eta_{j_1} > 0$, $\eta_{j_2} > 0$, а остальные компоненты равны нулю. Из системы алгебраических уравнений (39) вытекает, что компоненты η_{j_1}, η_{j_2} следует находить как решение системы

$$1 - \eta_{j_1} - 2(\eta_{j_1} + \eta_{j_2}) = 0, \quad 1 - \eta_{j_2} - 2(\eta_{j_1} + \eta_{j_2}) = 0,$$

но тогда $\eta_{j_1} = \eta_{j_2} = 1/5$.

Лемма 5. Пусть некоторое состояние равновесия системы (39) имеет две положительные компоненты η_{j_1}, η_{j_2} . Тогда $\eta_{j_1} = \eta_{j_2}$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим два равенства с номерами j_1, j_2 , т.е.

$$1 - \eta_{j_1} - 2W(\eta) = 0, \quad 1 - \eta_{j_2} - 2W(\eta) = 0.$$

Отсюда легко вытекает равенство $\eta_{j_1} = \eta_{j_2}$. $\square$

Из леммы 5 вытекает справедливость следующих утверждений:

1. Пусть $S_p(k_1, \dots, k_p)$ — одно из состояний равновесия, у которого компоненты с номерами $k_1, \dots, k_p$ положительны, а остальные равны нулю. Тогда $\eta_{k_j} = \xi_p = 1/(2p+1)$, $j = 1, \dots, p$.
2. Состояний равновесия с бесконечным числом положительных компонент у системы дифференциальных уравнений не может быть. Такое состояние равновесия не может быть элементом пространства последовательностей l_1 и, тем более, l_1^4 .

Лемма 6. Пусть $S_p = S_p(k_1, \dots, k_p)$ — состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (39). Тогда это состояние равновесия неустойчиво как решение системы (39).

Доказательство. Вместе с системой дифференциальных уравнений (39) рассмотрим ее конечномерную подсистему

$$\rho'_{k_j} = 2\rho_{k_j}(1 - \rho_{k_j} - 2W_{p+1}(\rho)), \quad (43)$$

где $j = 1, \dots, p, p+1$, $W_{p+1}(\rho) = \sum_{j=1}^{p+1} \rho_{k_j}$. Первые p компонент системы (43) имеют такие же номера, как и компоненты системы дифференциальных уравнений (39), у которых ненулевые постоянные $1/(2p+1)$ определяют состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ системы (39), т.е.

$$\rho_{k_j} = \eta_{k_j} = \frac{1}{2p+1}, \quad \rho_n = 0, \text{ если } n \neq k_j.$$

Состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ порождает ненулевое состояние равновесия и системы дифференциальных уравнений (43) $\tilde{S}_p : \rho_{k_j} = 1/(2p+1)$, если $j = 1, \dots, p$, и $\rho_{k_{p+1}} = 0$. Если теперь показать, что состояние равновесия $\tilde{S}_p$ будет неустойчиво как решение системы (43), то, очевидно, состояние равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ будет также неустойчиво, так как любое решение системы (43) порождает решение и основной системы дифференциальных уравнений (39), если положить $\rho_n = 0$ при $n \neq k_1, \dots, k_p, k_{p+1}$.

Итак, осталось показать что состояние равновесия $\tilde{S}_p$ как состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (43) неустойчиво.

Пусть A — матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (43), вычисленная в точке с координатами $\tilde{S}_p$: $\rho_{k_1} = \dots = \rho_{k_p} = 1/(2p+1)$, $\rho_{k_{p+1}} = 0$. Стандартные вычисления приводят к равенствам

$$\begin{aligned} a_{j,n} &= -\frac{4}{2p+1}, & \text{если } j \neq n, j = 1, \dots, p, n = 1, \dots, p+1, \\ a_{j,j} &= -\frac{6}{2p+1}, & \text{если } j = 1, \dots, p, \\ a_{p+1,k} &= 0, & \text{если } k = 1, \dots, p, \\ a_{p+1,p+1} &= \frac{2}{2p+1} > 0. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно заметить, что собственное число λ_{p+1} матрицы A положительно ($\lambda_{p+1} = 2/(2p+1)$), а остальные собственные значения A лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, p$. Тем не менее, из теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости по линейному приближению вытекает, что $\tilde{S}_p$ неустойчиво в рамках вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (43). $\square$

Предшествующие построения, а также результаты и методика работ [3, 4, 6, 7] позволяют сделать следующий вывод.

Теорема 4. *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_p = \varepsilon(p, k_1, \dots, k_p)$, что при всех $\varepsilon = (0, \varepsilon_p)$ каждому состоянию равновесия $S_p(k_1, \dots, k_p)$ системы дифференциальных уравнений (39) соответствует седловой (неустойчивый) инвариантный тор $T_p(\varepsilon)$ краевой задачи (28), (29), причем $\dim T_p(\varepsilon) = p$. Для формирующих его решений справедлива асимптотическая формула*

$$u(t, x, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon^{1/2}}{2p+1} \sum_{j=1}^p \cos(\sigma_{k_j} t + \alpha_{k_j}) h_{k_j}(x) + O(\varepsilon^{3/2}). \quad (44)$$

Здесь, как уже отмечалось, $\sigma_{k_j} = \sqrt{\sigma^2 + k_j^2}$,

$$h_{k_j}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k_j x, & \text{если } k_j \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos k_j x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & \text{если } k_j = 0. \end{cases}$$

Наконец, α_{k_j} — произвольные действительные числа.

6. Некоторые комментарии к теореме 4. Рассмотрим краевую задачу (28), (29). У нее может существовать асимптотически большое число инвариантных торов. Выберем какое-либо натуральное число n_* и будем считать, что $k_1, \dots, k_p$, $p \leq n_*$. Тогда согласно теореме 4 при $\varepsilon < \varepsilon_{n_*}$ может существовать тор $T_p(\varepsilon) = T_p(\varepsilon, k_1, \dots, k_p)$, размерность которого равна p . При этом набор $k_1, \dots, k_p$ из различных неотрицательных индексов $k_1, \dots, k_p$ произволен, если, конечно, $k_j \leq n_*$. Поэтому может существовать $2^{n_*+1} - 1$ торов, размерность которых — любое натуральное число, не превосходящее $n_* + 1$ и не равное нулю (если все компоненты состояния равновесия системы (39) равны нулю, то вместо тора получаем нулевое состояние равновесия краевой задачи (28), (29). При вычислении числа инвариантных торов циклы интерпретируются как торы, размерность которых равна 1. Подчеркнем, что все найденные инвариантные торы неустойчивы; более того, неустойчиво нулевое состояние равновесия. Отметим также, что набор чисел $\{\sigma_m\}$, где $\sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + m^2}$ в ситуации общего положения, — это набор несоизмеримых рациональных чисел. Поэтому при $p \geq 2$ торы $T_p(\varepsilon)$ эргодичны.

7. Заключение. В работе рассмотрена краевая задача (5), (6), описывающая макроэкономическую динамику на основе использования известной модели мультипликатор-акселератор, но с существенным дополнением. Краевая задача (5), (6), по крайней мере, на феноменологическом уровне, учитывает «пространственные факторы», т.е. «распределенность» в пространстве экономических показателей. Были рассмотрены два варианта такой постановки.

Первый из них предполагает, что d_1, d_2 в исходной модели (4) положительны ($\delta \neq 0$ в краевой задаче (5), (6)). В таком случае краевая задача может иметь экономические циклы. Один из них может быть однородным, т.е. не зависящим от пространственной переменной. Возможны и пространственно неоднородные циклы; в таком случае ($d_1, d_2 > 0$) устойчивым может быть только пространственно однородный цикл. Таким образом, задача не очень сильно отличается от варианта, когда пространственными эффектами пренебрегают. Вместе с тем, даже в этом случае могут существовать пространственно неоднородные циклы. Эти циклы неустойчивы и тем самым каждый из них, как правило, не может быть реализован в ходе экономической практики. С другой стороны, их наличие означает усложнение экономической динамики. В частности, можно заметить, что учет пространственных факторов позволяет выявить то обстоятельство, что пространственная распределенность влияет на экономические процессы.

Второй вариант возникает, если в исходной системе (4) $d_1 = 0$. Подчеркнем еще раз, что именно этот вариант уравнения (5) в монографии [19] рассмотрен как основной. Такой вариант приводит к существенному изменению характера поведения решений изучаемой краевой задачи, если они принадлежат некоторой окрестности состояния равновесия. В окрестности нулевого состояния равновесия вместо одного цикла возникает достаточно большое число инвариантных торов различной размерности. Все эти торы неустойчивы; более того, неустойчиво и состояние равновесия. Наконец, данная краевая задача диссипативна в «слабой» топологии. Совокупность этих факторов означает, что поведение решений краевой задачи (5), (6) при $\delta = 0$ в окрестности состояния равновесия следует интерпретировать как «хаотическое», так как решения не могут

приближаться ни к одному «гладкому» инвариантному многообразию: циклу или тору. Если и существует какой-либо аттрактор, то такое инвариантное множество скорее всего будет иметь более сложную структуру по сравнению с уже указанными.

В [8] рассматривалась краевая задача, аналогичная задаче (5), (6). В ней нелинейное слагаемое из правой части уравнения (5) было заменено на следующее:

$$-u \left(\int_0^{\pi} u^2 dx \right)_t,$$

а также предполагалось, что β и δ^2 пропорциональны малому параметру ε , т.е. $\beta = \beta_0 \varepsilon$, $\delta^2 = \delta_0^2 \varepsilon$. В этой статье было показано, что в изучаемой краевой задаче возможна реализация известного сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности. Такой переход реализуется, если $\delta_0^2 \rightarrow 0$. В целом можно отметить, что учет пространственных факторов достаточно радикально меняет ситуацию, если, конечно, выбрать за основу макроэкономическую модель мультипликатор-акселератор.

Добавим, что в [17] было показано, что учет пространственных факторов существенен и в иной модели макроэкономики — модели Кейнса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.
3. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 584–601.
4. Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 6. — С. 738–753.
5. Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
6. Куликов А. Н. Инвариантные торы слабо диссипативного варианта уравнения Гинзбурга—Ландау// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 66–75.
7. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга—Ландау// Автомат. телемех. — 2021. — 2. — С. 94–110.
8. Куликов А. Н., Куликов Д. А. О возможности реализации сценария Ландау—Хопфа перехода к турбулентности в обобщенной модели «мультипликатор-акселератор»// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 203. — С. 39–49.
9. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Математическое моделирование стационарных экономических процессов. — М., 2011.
10. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1968.
11. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.
12. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1967. — 10. — С. 297–350.
13. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
14. Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения// Тр. Моск. мат. о-ва. — 1970. — 23. — С. 37–60.
15. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds// J. Differ. Equations. — 1967. — 3. — P. 546–570.
16. Kulikov A. N. Inertial invariant manifolds of a nonlinear semigroup of operators in a Hilbert space// J. Math. Sci. — 2024. — 283, № 3. — P. 402–411.
17. Kulikov A. N., Kulikov D. A., Radin M. A. Analysis of Keynes' mathematical model—effect of spatial factors// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 6. — P. 1345–1357.
18. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.

19. *Puu T.* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. — New York: Springer-Verlag, 2000.
20. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра Ярославского государственного университета при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич (Kulikov Anatolii Nikolaevich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич (Kulikov Dmitrii Anatolievich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Фролов Дмитрий Геннадьевич (Frolov Dmitrii Gennadievich)
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
(Yaroslavl State University named after P. G. Demidov, Yaroslavl, Russia)
E-mail: supfro@yandex.ru