ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 214 (2022). С. 82–106
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-214-82-106

УДК 517.9; 531.01

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО КОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ. I. УРАВНЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО n-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2022 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. Во многих задачах динамики возникают системы, пространствами положений которых являются n-мерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения. Рассматриваемые динамические системы обладают переменной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. В работе показана интегрируемость более общих классов однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям.

***Ключевые слова*:** динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

INTEGRABLE HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION ON THE TANGENT BUNDLES OF SMOOTH FINITE-DIMENSIONAL MANIFOLDS. I. EQUATIONS OF GEODESICS ON THE TANGENT BUNDLE OF A SMOOTH n-DIMENSIONAL MANIFOLD

© 2022 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In many problems of dynamics, systems arise whose position spaces are four-dimensional manifolds. Naturally, the phase spaces of such systems are the tangent bundles of the corresponding manifolds. Dynamical systems considered have variable dissipation, and the complete list of first integrals consists of transcendental functions expressed in terms of finite combinations of elementary functions. In this paper, we prove the integrability of more general classes of homogeneous dynamical systems with variable dissipation on tangent bundles of four-dimensional manifolds.

***Keywords and phrases*:** dynamical system, nonconservative field, integrability, transcendental first integral.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

1. Уравнения геодезических на касательном расслоении к гладкому n-мерному многообразию

Напомним ряд результатов, без которых рассмотрение систем с диссипацией невозможно (см. [3, 11, 12, 15, 28]).

1.1. Обозначения. Рассмотрим гладкое n-мерное риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij}, которая в заданных локальных координатах $x = (x^1, \ldots, x^n)$ на многообразии порождает гладкую аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(x)$. Рассмотрим также касательное расслоение $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; x^1, \ldots, x^n\}$ к гладкому многообразию M^n, где $z = (z_n, \ldots, z_1)$ — координаты в касательном пространстве.

Если $z_i = \dot{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$ (точкой обозначена производная по натуральному параметру), то уравнения геодезических линий примут вид

$$\begin{gathered}\ddot{x}^i + \Gamma^i_{11}(x)(\dot{x}^1)^2 + 2\Gamma^i_{12}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^2) + \ldots + 2\Gamma^i_{1n}(x)(\dot{x}^1)(\dot{x}^n) + +\Gamma^i_{22}(x)(\dot{x}^2)^2 + \\ + 2\Gamma^i_{23}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^3) + \ldots + 2\Gamma^i_{2n}(x)(\dot{x}^2)(\dot{x}^n) + \ldots + \Gamma^i_{n-1,n-1}(x)(\dot{x}^{n-1})^2 + \\ + 2\Gamma^i_{n-1,n}(x)(\dot{x}^{n-1})(\dot{x}^n) + \Gamma^i_{nn}(x)(\dot{x}^n)^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (1.1)\end{gathered}$$

Обозначим для наглядности в случае n-мерного многообразия координаты $(x^1 \ldots, x^n)$ через (α, β), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$. Тогда уравнения (1.1) на касательном расслоении $T_*M^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ примут следующий вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^\alpha_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^\alpha_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^\alpha_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^\alpha_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^\alpha_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^\alpha_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (1.2a)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_1 + \Gamma^1_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^1_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^1_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^1_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^1_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^1_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^1_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^1_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (1.2b)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_2 + \Gamma^2_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^2_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^2_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^2_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^2_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^2_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^2_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^2_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^2_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^2_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (1.2c)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\beta}_{n-1} + \Gamma^{n-1}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^{n-1}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + 2\Gamma^{n-1}_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \\ + \Gamma^{n-1}_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + 2\Gamma^{n-1}_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \ldots + 2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}^2 + 2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} + \Gamma^{n-1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0. \quad (1.2d)\end{gathered}$$

Пример 1.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства, уравнения (1.2) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2\sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot{\beta}_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad (1.3a)$$

$$\ddot\beta_1 + 2\dot\alpha\dot\beta_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\ - \left[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \quad (1.3b)$$

$$\ddot\beta_2 + 2\dot\alpha\dot\beta_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \quad (1.3c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ddot\beta_{n-2} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} - \\ - \dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2} = 0, \quad (1.3d)$$

$$\ddot\beta_{n-1} + 2\dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \ldots + 2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} = 0, \quad (1.3e)$$

т.е. $n(n-1)$ ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha, \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1,$$
$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$
$$\Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1, \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = -\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1, \quad \ldots,$$
$$\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_1\cos\beta_1\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}, \quad \Gamma^2_{\alpha2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$
$$\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2, \quad \ldots, \quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_2\cos\beta_2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots,$$
$$\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}, \quad \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = -\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2},$$
$$\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \quad \ldots, \quad \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}.$$

Пример 1.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, но когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. [2, 4, 35, 37]), уравнения (1.2) примут следующий вид:

$$\ddot\alpha - \left[\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2\sin^2\beta_1 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad (1.4a)$$

$$\ddot\beta_1 + \dot\alpha\dot\beta_1\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} - \\ - \left[\dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2\sin^2\beta_2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_2\sin^2\beta_3 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_1\cos\beta_1 = 0, \quad (1.4b)$$

$$\ddot\beta_2 + \dot\alpha\dot\beta_2\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 2\dot\beta_1\dot\beta_2\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left[\dot\beta_3^2 + \dot\beta_4^2\sin^2\beta_3 + \dot\beta_5^2\sin^2\beta_3\sin^2\beta_4 + \ldots + \dot\beta_{n-1}^2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2}\right]\sin\beta_2\cos\beta_2 = 0, \quad (1.4c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ddot\beta_{n-2}+\dot\alpha\dot\beta_{n-2}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+2\dot\beta_1\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\ldots+2\dot\beta_{n-3}\dot\beta_{n-2}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}}-\\ -\dot\beta_{n-1}^2\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2}=0, \quad (1.4d)$$

$$\ddot\beta_{n-1}+\dot\alpha\dot\beta_{n-1}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+2\dot\beta_1\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+\ldots+2\dot\beta_{n-2}\dot\beta_{n-1}\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}=0, \quad (1.4e)$$

т.е. $n(n-1)$ ненулевых коэффициентов связности равны

$$\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1,$$

$$\Gamma^\alpha_{33}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2,\quad \ldots,\quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin^2\beta_1\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)=\frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},\quad \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_1\cos\beta_1,$$

$$\Gamma^1_{33}(\alpha,\beta)=-\sin^2\beta_2\sin\beta_1\cos\beta_1,\quad \ldots,\quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_1\cos\beta_1\sin^2\beta_2\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)=\frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},\quad \Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

$$\Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_2\cos\beta_2,\quad \ldots,\quad \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_2\cos\beta_2\sin^2\beta_3\ldots\sin^2\beta_{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)=\frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},\quad \Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\quad \ldots,\quad \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}},$$

$$\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=-\sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-2},$$

$$\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha},\quad \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\quad \ldots,\quad \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)=\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}.$$

1.2. Замены координат касательного пространства. Исследуем структуру уравнений (1.1) при изменении координат на касательном расслоении T_*M^n. Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки x многообразия, которую можно обратить:

$$\dot x^i=\sum_{j=1}^n R^{ij}(x)z_j,\quad z_j=\sum_{i=1}^n T_{ji}(x)\dot x^i; \quad (1.5)$$

при этом R^{ij}, T_{ji}, $i,j=1,\ldots,n$, — функции от $x^1,\ldots,x^n$, а также $RT=E$, где $R=(R^{ij})$, $T=(T_{ji})$. Назовем уравнения (1.5) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении T_*M^n (ср. [5,6,9,26,27]).

Справедливы следующие тождества:

$$\dot z_j=\sum_{i=1}^n\dot T_{ji}\dot x^i+\sum_{i=1}^n T_{ji}\ddot x^i,\quad \dot T_{ji}=\sum_{k=1}^n T_{ji,k}\dot x^k, \quad (1.6)$$

где $T_{ji,k}=\partial T_{ji}/\partial x^k$, $j,i,k=1,\ldots,n$. Подставляя в (1.6) уравнения (1.1), получим

$$\dot z_i=\sum_{j,k=1}^n T_{ij,k}\dot x^j\dot x^k-\sum_{j,p,q=1}^n T_{ij}\Gamma^j_{pq}\dot x^p\dot x^q; \quad (1.7)$$

при этом в последней системе вместо $\dot x^i$, $i=1,\ldots,n$, надо подставить формулы (1.5), и правые части соотношений (1.7) будут квадратичными формами по $z_1,\ldots,z_n$ (см. также [10,14,17,20,23]).

Другими словами, равенство (1.7) можно переписать в виде

$$\dot z_i+\sum_{j,k=1}^n Q_{ijk}\dot x^j\dot x^k\Big|_{(1.5)}=0, \quad (1.8)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^{n} T_{is}(x)\Gamma^s_{jk}(x) - T_{ij,k}(x). \tag{1.9}$$

Непосредственно из формул (1.7) следует следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Система* (1.1) *в той области, где* $\det R(x) \neq 0$, *эквивалентна составной системе* (1.5), (1.7).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1.1) к эквивалентной системе уравнений (1.5), (1.7) зависит как от замены переменных (1.5) (т.е. вводимых кинематических соотношений), так и от аффинной связности $\Gamma^i_{jk}(x)$.

В частности, для примеров 1.1, 1.2 получаем следующие утверждения.

Следствие 1.1. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, *когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства* (*см. пример* 1.1), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2} \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.3), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{1.10a}$$

$$\dot z_n = -\frac{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}, \tag{1.10b}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{z_{n-1}z_n}{\cos\alpha\sin\alpha} + \frac{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.10c}$$

$$\dot z_{n-2} = \frac{z_{n-2}z_n}{\cos\alpha\sin\alpha} - \frac{z_{n-2}z_{n-1}}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.10d}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot z_1 = \frac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s+1} z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\dots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.10e}$$

$$\dot\beta_1 = \frac{z_{n-1}}{\cos\alpha\sin\alpha}, \tag{1.10f}$$

$$\dot\beta_2 = -\frac{z_{n-2}}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.10g}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot\beta_{n-1} = (-1)^n\frac{z_1}{\cos\alpha\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}}, \tag{1.10h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.10) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.2. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, *когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [19, 25, 31, 42], *а также пример* 1.2), *система, эквивалентная при* $\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2} \neq 0$ *уравнениям геодезических* (1.4), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha = -z_n, \tag{1.11a}$$

$$\dot z_n = -(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.11b}$$

$$\dot z_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.11c}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.11d}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{z}_1 = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\}, \tag{1.11e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.11f}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.11g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2}}, \tag{1.11h}$$

если первое и группу последних $n-1$ *уравнений системы* (1.11) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Очевидно, что системы (1.10) и (1.11) имеют аналитический первый интеграл

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 = \text{const}, \tag{1.12}$$

т.е., в других координатах для системы (1.11)

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dot{\beta}_2^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \sin^2\beta_1 \sin^2\beta_2 + \ldots + \\ + \dot{\beta}_{n-1}^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \sin^2\beta_1 \ldots \sin^2\beta_{n-2} = \text{const},$$

а для системы (1.10) — аналитический первый интеграл

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}_1^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \dot{\beta}_2^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta_1\sin^2\beta_2 + \ldots + \\ + \dot{\beta}_{n-1}^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \sin^2\beta_1 \ldots \sin^2\beta_{n-2} = \text{const}\,.$$

1.3. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай I. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай I):

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = -z_n, \\ &\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \\ &\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\ &\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения.

Такие координаты z_1, …, z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических с $n(n-1)$ ненулевыми коэффициентами связности (см. [22, 27, 36, 47]):

$$\ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14a}$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14b}$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14c}$$

$$\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ + \Gamma_{44}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,n-1}^{3}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.14d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ + \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2_{n-1} = 0, \tag{1.14e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0; \tag{1.14f}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.13) уравнения (1.7) примут вид

$$\dot{z}_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2, \tag{1.15a}$$

$$\dot{z}_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \\ - f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 - \\ - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15b}$$

. . . .

$$\dot{z}_{n-1} = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \frac{f^2_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_1(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z^2_{n-2} - \ldots - \\ - \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15c}$$

$$\dot{z}_n = f^2_1(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z^2_{n-1} + f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z^2_{n-2} + \ldots + \\ + f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.15d}$$

здесь, как и далее,

$$DQ(q) = \frac{d\ln|Q(q)|}{dq},$$

и уравнения геодезических (1.14) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.13) почти всюду эквивалентны составной системе (1.13), (1.15) на многообразии $T_*M^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (1.13), (1.15) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.3. *Если $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.14)*, может быть приведена к следующему виду*:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{1.16a}$$

$$\dot{z}_n = f^2_1(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) z^2_{n-1} + f^2_2(\alpha)g^2_1(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) z^2_2 + \ldots + \\ + f^2_{n-1}(\alpha)g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i^2_1(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z^2_1, \tag{1.16b}$$

$$\dot z_{n-1} = \left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{1.16c}$$

. . . .

$$\dot z_2 = \left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2z_n -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2z_{n-1} - \ldots -$$
$$- f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2z_3 -$$
$$- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \tag{1.16d}$$
$$\dot z_1 = \left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1z_n -$$
$$- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1z_{n-1} -$$
$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1z_{n-2} - \ldots -$$
$$- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1z_2, \tag{1.16e}$$
$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.16f}$$
$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.16g}$$
$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.16h}$$

. . . .

$$\dot\beta_{n-2} = z_2f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.16i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.17}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i,j,k не зависит от угла β_{n-1}, то происходит отделение независимой подсистемы (1.16) *порядка* $2n-1$.

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1,\ldots,z_n$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.12):

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leqslant j}}^{n} a_{ij}(\alpha,\beta)z_iz_j = \mathrm{const}, \tag{1.18}$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [1, 13, 21, 29]).

Предложение 1.2. *Если всюду на своей области определения справедлива система $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств*

$$2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha) + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19a}$$

. . . .

$$2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha) +$$
$$+ f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19b}$$
$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.19c}$$

. . . .

$$f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\right]+ \\ +f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.19d}$$

. . . .

$$f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+ \\ +f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.19e}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет аналитический первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\dots,z_1)=z_1^2+\dots+z_n^2=C_1^2=\mathrm{const}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.20) в силу системы (1.16), (1.17) дает

$$2\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)+Df_1(\alpha)+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\Big]z_{n-1}^2z_n+\dots+ \\ +2\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)+Df_{n-1}(\alpha)+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Big]z_1^2z_n- \\ -2\left[f_1^2(\alpha)\left[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)\right]+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_{n-2}^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}- \\ -2\Bigg[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]+ \\ +f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_{n-1}}{f_1(\alpha)}- \\ -2\Bigg[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\dots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+ \\ +f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\dots r_1(\beta_{n-3})}\equiv 0,$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (1.19). □

Согласно предложению 1.2 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.3) и (1.4) из примеров 1.1 и 1.2, соответственно, и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.20).

Следствие 1.4. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$, *когда метрика на n-мерной сфере индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$-мерного пространства* (*см. также пример* 1.1), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.3) *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$\dot\alpha=-z_n, \tag{1.21a}$$

$$\dot z_n=-(z_1^2+\dots+z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{1.21b}$$

$$\dot z_{n-1}=z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}+(z_1^2+\dots+z_{n-2}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.21c}$$

$$\dot z_{n-2}=z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}-z_{n-2}z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}- \\ -(z_1^2+\dots+z_{n-3}^2)\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.21d}$$

. . . .

$$\dot{z}_1 = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \\ + z_1 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1} z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.21e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{1.21f}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.21g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{1.21h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.21) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Следствие 1.5. *В случае обобщенных сферических координат* $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, *но когда метрика на n-мерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий* (*см.* [38, 43, 48, 50, 51], *а также пример* 1.2), *однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических* (1.4) *и имеющая первый интеграл вида* (1.20), *примет следующий вид*:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \tag{1.22a}$$

$$\dot{z}_n = -(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \tag{1.22b}$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-1}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.22c}$$

$$\dot{z}_{n-2} = z_{n-2}z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} - z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.22d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{z}_1 = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha} + \\ + z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^{s+1} z_{n+1-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.22e}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \tag{1.22f}$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1}, \tag{1.22g}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}\frac{1}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}, \quad \nu_1\in\mathbb{R}, \tag{1.22h}$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.22) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Системы (1.10) и (1.11) получаются из систем (1.21) и (1.22) при $\nu_1 = -1$ и $\nu_1 = 0$ соответственно.

Важно заметить, что, на первый взгляд, при интегрировании системы равенств (1.19) должны получиться $n(n-1)/2$ произвольных постоянных, определяющие $n(n-1)/2$-параметрические семейства искомых систем вида (1.21) и (1.22). Но, оказывается, система равенств (1.19) определяет не более чем $n(n-1)/2$-параметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь однопараметрические искомые семейства.

Система равенств (1.19) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.20) (или см. ниже (**??**)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [16, 44, 52, 74, 76]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k=1,\ldots,n-1$, $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ системы равенств (1.19) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.20) системы (1.16), (1.17) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Но для систем с диссипацией условия (1.19) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.16), (1.17) выполнение условий

$$f_1(\alpha)\equiv\ldots\equiv f_{n-1}(\alpha)=f(\alpha); \tag{1.23}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять $(n-1)(n-2)/2$ преобразованным уравнениям из системы равенств (1.19):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)+Dg_1(\beta_1)+g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\equiv 0, \tag{1.24a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}&2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)+Dg_{n-2}(\beta_1)+\\&\qquad+g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0,\end{aligned} \tag{1.24b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}&g^2_{n-3}(\beta_1)h^2_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\right]+\\&\qquad+g^2_{n-2}(\beta_1)h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\equiv 0.\end{aligned} \tag{1.24c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l=1,\ldots,n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m=1,\ldots,n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.3. *Если выполнены свойства* (1.23), (1.24) *и при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\equiv\ldots\equiv\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_1(\alpha), \tag{1.25}$$

то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\;\Phi_0(\alpha)=C_2=\mathrm{const}, \tag{1.26}$$

где

$$\Phi_0(\alpha)=f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.26) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.23)–(1.25) дает

$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению
$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$
что и доказывает предложение. □

Предложение 1.4. *Если выполнены условия предложения* 1.3, *а также условия*
$$g_1(\beta_1)\equiv\ldots\equiv g_{n-2}(\beta_1)=g(\beta_1) \tag{1.27}$$
и при этом справедливы равенства
$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\equiv\ldots\equiv\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_2(\beta_1), \tag{1.28}$$
то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)=C_3=\mathrm{const}, \tag{1.29}$$
где
$$\Psi_1(\beta_1)=g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.29) в силу системы (1.16), (1.17) при условиях (1.27), (1.28), а также в условиях предложения 1.3 дает
$$\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha).$$
Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям
$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$
что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида
$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2)=\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\;\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2)=C_4=\mathrm{const},$$
получив предложение с номером 1.4+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу: 1.5. Поэтому далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 1.5. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, …, *при этом справедливо равенство*
$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{1.30}$$
то система (1.16), (1.17) *имеет гладкий первый интеграл следующего вида*:
$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})=z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=C_n=\mathrm{const}, \tag{1.31}$$
где
$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})=i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2})=i_1(\beta_{n-2}).$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.31) в силу системы (1.16), (1.17) при рассматриваемых условиях дает

$$
\begin{gathered}
z_1 z_n \Psi_1(\beta_1)\dots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+\\
+z_1 z_{n-1} f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\dots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\dots+\\
+z_1 z_2 f(\alpha)g(\beta_1)\dots r(\beta_{n-3})\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\dots\Psi_{n-3}(\beta_{n-3})\times\\
\times\left[(-1)^n\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})+(-1)^{n+1}\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}\right].
\end{gathered}
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\\
\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}=\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}}=\left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2})+\frac{d\ln|i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}}\right]\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),
\end{gathered}
$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.1. Если выполнена группа $n(n-1)/2$ дифференциальных равенств (1.19), а также $n-1$ групп условий (1.25), (1.28), …, (1.30), то выполнены равенства

$$
\begin{gathered}
\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha),\quad \Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \dots,\\
\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\\
\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta)=\Gamma^{1}_{22}(\alpha,\beta_1),\quad \Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta)=\Gamma^{1}_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2),\quad \dots,\\
\Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{1}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\quad \dots\\
\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),
\end{gathered}
$$

а значит в системе (1.16), (1.17) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$
\dot\alpha=-z_n, \tag{1.32a}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot z_n=f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha)z_{n-1}^2+f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta_1)z_2^2+\dots+\\
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{1.32b}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot z_{n-1}=\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df_1(\alpha)\right]z_{n-1}z_n-\frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1)z_{n-2}^2-\dots-\\
-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{1.32c}
$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
\begin{aligned}
\dot z_2=\left[2\Gamma_1(\alpha)+Df_{n-2}(\alpha)\right]z_2z_n-f_1(\alpha)\left[2\Gamma_2(\beta_1)+Dg_{n-3}(\beta_1)\right]z_2z_{n-1}-\dots-\\
-f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\dots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3})+Dr_1(\beta_{n-3})\right]z_2z_3-\\
-\frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\dots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})z_1^2,
\end{aligned} \tag{1.32d}
$$

$$\dot z_1 = \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] z_1 z_n - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] z_1 z_{n-1} -$$

$$- f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big] z_1 z_{n-2} - \ldots -$$

$$- f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] z_1 z_2, \tag{1.32e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{1.32f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{1.32g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{1.32h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.32i}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.33}$$

Предложение 1.6. *Если выполнены условия предложений* 1.3, 1.4, …, 1.5, *то система* (1.32), (1.33) *имеет первый интеграл*

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{1.34}$$

где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.3, 1.4, …, 1.5, то система (1.32), (1.33) обладает $n-1$ первыми интегралами (1.26), (1.29), …, (1.31). Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла.

Далее, рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{1.35}$$

Будем искать угол β_{n-1} из следующего уравнения, полученного из системы (1.32), (1.33):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Воспользовавшись в этом уравнении равенством (1.35), получаем требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, …, 1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия предложений* 1.2, …, 1.5, *то система* (1.32), (1.33) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (1.20), (1.26), (1.29), …, (1.31), (1.34), *количество которых равно* $n+1$.

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

1.4. Первые интегралы для уравнений геодезических. Случай II. Рассмотрим случай задания кинематических соотношений в следующем виде (случай II):

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.36a}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{1.36b}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{1.36c}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{1.36d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}), \tag{1.36e}$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, …, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения.

Такие координаты z_1, …, z_n в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются следующие уравнения геодезических (см. также [53, 55, 57, 58]) с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности:

$$\ddot{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1^2 + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37a}$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2^2 + \ldots + \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37b}$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{\alpha 2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma^2_{33}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_3^2 + \ldots + \Gamma^2_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \tag{1.37c}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_3 &+ 2\Gamma^3_{\alpha 3}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{13}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma^3_{23}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \\ &+ \Gamma^3_{44}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_4^2 + \ldots + \Gamma^3_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{aligned} \tag{1.37d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{n-2} &+ 2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \ldots + \\ &+ \Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0,\end{aligned} \tag{1.37e}$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \ldots + \Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0; \tag{1.37f}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае (1.36) уравнения (1.7) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\right] z_1 z_n - \\ &- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\right] z_1 z_{n-1} - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1)\left[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\right] z_1 z_{n-2} - \ldots - \\ &- f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\left[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\right] z_1 z_2,\end{aligned} \tag{1.38a}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\right] z_2 z_n - \\ &- f_1(\alpha)\left[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\right] z_2 z_{n-1} - \ldots - \\ &- f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\left[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\right] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g^2_{n-2}(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h^2_{n-3}(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r^2_2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,\end{aligned} \tag{1.38b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{n-1} = &- f_n(\alpha)\left[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\right] z_{n-1} z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ &- \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2,\end{aligned} \tag{1.38c}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_n = &- f_n(\alpha)\left[\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\right] z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^{\alpha}_{11}(\alpha,\beta) z_{n-1}^2 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma^{\alpha}_{22}(\alpha,\beta) z_{n-2}^2 - \ldots - \\ &- \frac{f^2_{n-1}(\alpha)}{f_n(\alpha)} g^2_{n-2}(\beta_1) h^2_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{\alpha}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) z_1^2;\end{aligned} \tag{1.38d}$$

здесь, как и далее, $DQ(q) = d\ln|Q(q)|/dq$, и уравнения геодезических (1.37) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.36) почти всюду эквивалентны составной систем (1.36), (1.38) на многообразии $T_*M^n\{z_n, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$.

Для полного интегрирования системы (1.36), (1.38) порядка $2n$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых первых интегралов.

Следующее утверждение фиксирует исследуемую систему в задаче интегрирования уравнений геодезических.

Следствие 1.6. *Если $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, $\ldots$, $i_1(\beta_{n-2})$ — не равные тождественно нулю достаточно гладкие функции на своей области определения, то система, эквивалентная уравнениям геодезических* (1.37), *может быть приведена к следующему виду*:

$$\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.39a}$$

$$\begin{aligned} \dot z_n = -f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + Df_n(\alpha)\Big]z_n^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)z_{n-1}^2 - {}\\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - {}\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{aligned} \tag{1.39b}$$

$$\begin{aligned} \dot z_{n-1} = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big]z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)z_{n-2}^2 - \ldots - {}\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{aligned} \tag{1.39c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} \dot z_2 = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{\alpha,n-2}(\alpha,\beta) + Df_{n-2}(\alpha)\Big]z_2 z_n - {}\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-2}_{1,n-2}(\alpha,\beta) + Dg_{n-3}(\beta_1)\Big]z_2 z_{n-1} - \ldots - {}\\ - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2)\ldots s_1(\beta_{n-4})\Big[2\Gamma^{n-2}_{n-3,n-2}(\alpha,\beta) + Dr_1(\beta_{n-3})\Big]z_2 z_3 - {}\\ - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)}\frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)}\frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)}\ldots\frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})}i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)z_1^2, \end{aligned} \tag{1.39d}$$

$$\begin{aligned} \dot z_1 = -f_n(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big]z_1 z_n - {}\\ - f_1(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big]z_1 z_{n-1} - {}\\ - f_2(\alpha)g_1(\beta_1)\Big[2\Gamma^{n-1}_{2,n-1}(\alpha,\beta) + Dh_{n-3}(\beta_2)\Big]z_1 z_{n-2} - \ldots - {}\\ - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big]z_1 z_2, \end{aligned} \tag{1.39e}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \tag{1.39f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \tag{1.39g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \tag{1.39h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{1.39i}$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.39j}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2)\ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.40}$$

Если при этом аффинная связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ при всех i, j, k не зависит от угла β_{n-1}, то происходит отделение независимой подсистемы (1.39) *порядка* $2n-1$.

Можно выписать достаточные условия существования квадратичного по скоростям $z_1, \ldots, z_n$ первого интеграла более общего вида, нежели (1.12):

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leqslant j}}^{n} a_{ij}(\alpha,\beta) z_i z_j = \text{const}, \tag{1.41}$$

не требуя даже положительной определенности матрицы $(a_{ij}(\alpha,\beta))$, но мы пока ограничимся следующим случаем (см. также [63, 64, 66, 67]).

Предложение 1.7. *Если всюду на своей области определения справедлива следующая система* $n(n-1)/2+1$ *дифференциальных равенств*:

$$f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.42a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.42b}$$

$$f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\Big] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.42c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.42d}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.42e}$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{1.42f}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет аналитический первый интеграл*

$$\Phi_1(z_n,\ldots,z_1) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}. \tag{1.43}$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.43) в силу системы (1.39), (1.40) дает

$$-2f_n(\alpha)\Big[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_n(\alpha)|}{d\alpha}\Big]z_n^3 - 2\Bigg[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) + Df_1(\alpha)\Big] + f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_{n-1}^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \ldots -$$

$$-2\Bigg[f_n^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) + Df_{n-1}(\alpha)\Big] + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2 z_n}{f_n(\alpha)} -$$

$$-2\Bigg[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1)\Big] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_{n-2}^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots -$$

$$-2\Bigg[f_1^2(\alpha)\Big[2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)\Big] + \\ + f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\frac{z_1^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \ldots -$$

$$
-2\Bigg[f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta)+Di_1(\beta_{n-2})\Big]+
$$

$$
+f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)\Bigg]\times
$$

$$
\times\frac{z_1^2 z_2}{f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2)\ldots r_1(\beta_{n-3})}\equiv 0,
$$

поскольку выполнена система $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (1.42). □

Пример 1.3. Уравнения (1.2) геодезических в n-мерном пространстве Лобачевского (с координатами $x_1=\beta_1,\ldots,x_{n-1}=\beta_{n-1},y=\alpha$) примут вид

$$
\ddot\alpha-\frac{1}{\alpha}\Big(\dot\alpha^2-\dot\beta_1^2-\ldots-\dot\beta_{n-1}^2\Big)=0,\quad \ddot\beta_1-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_1=0,\quad\ldots,\quad \ddot\beta_{n-1}-\frac{2}{\alpha}\dot\alpha\dot\beta_{n-1}=0, \tag{1.44}
$$

т.е. ненулевые коэффициенты связности равны

$$
\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha},\quad \Gamma^1_{\alpha1}(\alpha,\beta)=\ldots=\Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\alpha}.
$$

Согласно предложению 1.7 найдем наиболее общий вид правых частей систем, эквивалентных уравнениям геодезических (1.44) из примера 1.3 и имеющих аналитический первый интеграл вида (1.43).

Следствие 1.7. *В случае геодезических в n-мерном пространстве Лобачевского с координатами $x_1=\beta_1,\ldots,x_{n-1}=\beta_{n-1},y=\alpha$ (см. также пример* 1.3) *n-параметрическая система, эквивалентная при $\nu_1\neq0$, $\alpha\neq0$ уравнениям геодезических* (1.44) *и имеющая первый интеграл вида* (1.43) *примет следующий вид*:

$$
\dot\alpha=z_n\nu_1\alpha, \tag{1.45a}
$$

$$
\dot z_n=-z_{n-1}^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}-\ldots-z_1^2\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{1.45b}
$$

$$
\dot z_{n-1}=z_{n-1}z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, \tag{1.45c}
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
$$

$$
\dot z_1=z_1z_n\frac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_n}, \tag{1.45d}
$$

$$
\dot\beta_1=z_{n-1}\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \tag{1.45e}
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
$$

$$
\dot\beta_{n-1}=z_1\frac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_n}},\quad \nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{R}, \tag{1.45f}
$$

если первое и группу последних $n-1$ уравнений системы (1.45) *рассматривать как новые кинематические соотношения.*

Важно заметить, что при интегрировании системы равенств (1.42) должны получиться на первый взгляд $n(n-1)/2+1$ произвольных постоянных, определяющие $(n(n-1)/2+1)$-параметрические семейства искомых систем вида (1.45). Оказывается, однако, что система равенств (1.42) определяет не более чем $(n(n-1)/2+1)$-параметрическое семейство искомых систем. Утверждается, что в данном случае возможно найти лишь n-параметрические искомые семейства.

Система равенств (1.42) по-прежнему может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.43) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (ср. [59, 61, 68, 69]). Но, как известно, поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

По-прежнему актуально следующее замечание. Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_k(\alpha)$, $k = 1, \ldots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ системы дифференциальных равенств (1.42) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (1.43) для системы (1.39), (1.40) уравнений геодезических. Но, как будет показано ниже, данные рассуждения справедливы или для системы уравнений геодезических (системы при отсутствии силового поля), или для систем при наличии потенциального силового поля. Для систем с диссипацией условия (1.42) приобретут несколько иной смысл.

Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в системе (1.39), (1.40) выполнение условия

$$f_1(\alpha) \equiv \ldots \equiv f_{n-1}(\alpha) = f(\alpha); \tag{1.46}$$

при этом функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ должны удовлетворять $(n-1)(n-2)/2$, вообще говоря, преобразованным уравнениям из системы равенств (1.42):

$$2\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) + Dg_1(\beta_1) + g_1^2(\beta_1)\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) \equiv 0, \tag{1.47a}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} &2\Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) + \\ &\qquad + g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0, \end{aligned} \tag{1.47b}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} &g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2)\ldots r_1^2(\beta_{n-3})\Big[2\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) + Di_1(\beta_{n-2})\Big] + \\ &\qquad + g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2)\ldots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.47c}$$

Таким образом, функции $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \ldots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \ldots, n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ зависят от коэффициентов связности; ограничения на функции $f(\alpha)$, $f_n(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 1.8. *Если выполнены свойства* (1.46), (1.47)*, при этом справедливы равенства*

$$\Gamma^1_{\alpha 1}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{\alpha,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_1(\alpha), \tag{1.48}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл вида*

$$\Phi_2(z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{1.49}$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.49) в силу системы (1.39), (1.40) при условиях (1.46)–(1.48) дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает предложение. □

Предложение 1.9. *Если выполнены условия предложения* 1.8*, а также условия*

$$g_1(\beta_1) \equiv \ldots \equiv g_{n-2}(\beta_1) = g(\beta_1) \tag{1.50}$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma^2_{12}(\alpha,\beta) \equiv \ldots \equiv \Gamma^{n-1}_{1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_2(\beta_1), \tag{1.51}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_3(z_{n-2},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\ \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}, \tag{1.52}$$

где

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1)\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{1,0}}^{\beta_1}\Gamma_2(b)db\right\}.$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.52) в силу системы (1.39), (1.40) при условиях (1.50), (1.51) и условиях предложения 1.8 дает

$$-f_n(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_n\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Psi_1(\beta_1)-$$
$$-\left\{\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)-\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right\}z_{n-1}f(\alpha)\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\Phi_0(\alpha).$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),\quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает предложение. □

В дальнейшем было бы логично доказать аналогичное предложение и по условиям существования гладкого первого интеграла вида

$$\Phi_4(z_{n-3},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\ \Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\Psi_2(\beta_2) = C_4 = \mathrm{const},$$

получив предложение с номером 1.9+1 и т. д. Но мы по предположению индукции опустим некоторое конечное число таких шагов, изменив номер следующего предложения на лишь единицу, получив предложение 1.10. Итак, далее применяем по индукции вышеизложенные рассуждения и приходим к следующему утверждению.

Предложение 1.10. *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9, … *и при этом справедливо равенство*

$$\Gamma^{n-1}_{n-2,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}), \tag{1.53}$$

то система (1.39), (1.40) *имеет гладкий первый интеграл*

$$\Phi_n(z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\Phi_0(\alpha)\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}, \tag{1.54}$$

где

$$\Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2})\exp\left\{2\int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}}\Gamma_{n-1}(b)db\right\},\quad i(\beta_{n-2}) = i_1(\beta_{n-2}).$$

Доказательство. Действительно, дифференцирование функции (1.54) в силу системы (1.39), (1.40) при рассматриваемых условиях дает

$$-f_n(\alpha)z_1z_n\Psi_1(\beta_1)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha)-\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right]+$$
$$+z_1z_{n-1}f(\alpha)\Phi_0(\alpha)\Psi_2(\beta_2)\ldots\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})\left[-\left[2\Gamma_2(\beta_1)+\frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1}\right]\Psi_1(\beta_1)+\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1}\right]+\ldots+$$

$$
+ z_1 z_2 f(\alpha) g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3}) \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) \times
$$
$$
\times \left[(-1)^n \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1} \frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} \right].
$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$, …, $\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$
\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),
$$
$$
\frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1),
$$
$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
$$
$$
\frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} = \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}),
$$

что и доказывает предложение. □

Очевидно следующее утверждение о выделении независимой подсистемы.

Замечание 1.2. Если выполнена группа $n(n-1)/2+1$ дифференциальных равенств (1.42), а также $n-1$ групп условий (1.25), (1.28), …, (1.30), то выполнены равенства

$$
\Gamma^\alpha_{11}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{11}(\alpha), \quad \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \dots, \quad \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),
$$
$$
\Gamma^1_{22}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1), \quad \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{33}(\alpha,\beta_1,\beta_2), \ \dots, \ \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),
$$
$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
$$
$$
\Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta) = \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),
$$

а значит в системе (1.39), (1.40) появляется независимая подсистема порядка $2n-1$, состоящая из первых $2n-1$ уравнений (уравнение для $\dot\beta_{n-1}$ отделяется):

$$
\dot\alpha = z_n f_n(\alpha), \tag{1.55a}
$$

$$
\dot z_n = -\frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma^\alpha_{11}(\alpha) z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^\alpha_{22}(\alpha,\beta_1) z_2^2 - \dots -
$$
$$
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^\alpha_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) z_1^2, \tag{1.55b}
$$

$$
\dot z_{n-1} = -f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_1(\alpha) \Big] z_{n-1} z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma^1_{22}(\alpha,\beta_1) z_{n-2}^2 - \dots -
$$
$$
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^1_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) z_1^2, \tag{1.55c}
$$

$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
$$

$$
\dot z_2 = -f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-2}(\alpha) \Big] z_2 z_n - f_1(\alpha) \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-3}(\beta_1) \Big] z_2 z_{n-1} - \dots -
$$
$$
- f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) \Big[2\Gamma_{n-2}(\beta_{n-3}) + Dr_1(\beta_{n-3}) \Big] z_2 z_3 -
$$
$$
- \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma^{n-2}_{n-1,n-1}(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) z_1^2, \tag{1.55d}
$$

$$
\dot z_1 = -f_n(\alpha) \Big[2\Gamma_1(\alpha) + Df_{n-1}(\alpha) \Big] z_1 z_n - f_1(\alpha) \Big[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg_{n-2}(\beta_1) \Big] z_1 z_{n-1} -
$$
$$
- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \Big[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh_{n-3}(\beta_2) \Big] z_1 z_{n-2} - \dots -
$$
$$
- f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \Big[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di_1(\beta_{n-2}) \Big] z_1 z_2, \tag{1.55e}
$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \tag{1.55f}$$

$$\dot\beta_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \tag{1.55g}$$

$$\dot\beta_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \tag{1.55h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{1.55i}$$

$$\dot\beta_{n-2} = z_2 f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \ldots r_1(\beta_{n-3}), \tag{1.55j}$$

$$\dot\beta_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \ldots i_1(\beta_{n-2}). \tag{1.56}$$

Предложение 1.11. *Если выполнены условия предложений* 1.8, 1.9, …, 1.10, *то система* (1.55), (1.56) *имеет первый интеграл*

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int\limits_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}}\, db = C_{n+1} = \mathrm{const}, \tag{1.57}$$

где после взятия интеграла вместо постоянных C_{n-1}, C_n можно формально подставить левые части соответствующих первых интегралов.

Схема доказательства. Если выполнены условия предложений 1.8, 1.9, …, 1.10, то, значит, система (1.55), (1.56) обладает первыми интегралами (1.49), (1.52), …, (1.54), количество которых равно $n-1$. Нам понадобятся лишь два последних первых интеграла.

Рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n соответствующих первых интегралов. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \tag{1.58}$$

Угол β_{n-1} будем искать из следующего уравнения, полученного из системы (1.55), (1.56):

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя в этом уравнении равенство (1.58), получим требуемое утверждение. □

Прямым следствием из предложений 1.2, …, 1.6 является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия предложений* 1.7, …, 1.10, *то система* (1.55), (1.56) *обладает полным набором независимых первых интегралов вида* (1.43), (1.49), (1.52), …, (1.54), (1.57), *состоящим из $n+1$ первых интегралов.*

Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ первых интегралов, будет показан ниже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Динамика твердого тела с n эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью// Докл. АН СССР. — 1983. — *272*, № 6. — С. 1364–1367.
2. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера// Докл. АН СССР. — 1986. — *287*, № 5. — С. 1105–1108.
3. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970.
5. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
6. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 6. — С. 1298–1300.
7. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.

8. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
9. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
10. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Символы Леви-Чивиты, обобщенные векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела// Совр. мат. прилож. — 2012. — *76*. — С. 22–39.
11. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953.
12. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
13. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
14. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
15. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
16. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
17. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
18. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
19. *Локшин Б. Я., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Маятниковые системы с динамической симметрией// Совр. мат. прилож. — 2016. — *100*. — С. 76–133.
20. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела// Функц. анал. прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 93–94.
21. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
22. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
23. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
24. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
25. *Тихонов А. А.* Метод управления для угловой стабилизации электродинамической тросовой системы// Автомат. телемех. — 2020. — № 2. — С. 91–114.
26. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
27. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
28. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
29. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости// в кн.: Полн. собр. соч.. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
30. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
31. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1992. — *1*. — С. 52–58.
32. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента// Прикл. мат. мех. — 1993. — *57*, № 4. — С. 40–49.
33. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1996. — *4*. — С. 57–69.
34. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.

35. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
36. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
37. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
38. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
39. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
40. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
41. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения// Фундам. прикл. мат. — 2008. — *14*, № 3. — С. 3–237.
42. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
43. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
44. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
45. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.
46. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
47. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
48. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
49. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
50. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
51. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
52. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// Докл. РАН. — 2015. — *460*, № 2. — С. 165–169.
53. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
54. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
55. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
56. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2016. — *470*, № 3. — С. 288–292.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
60. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.

61. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
62. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
63. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
64. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
65. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
66. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 2: Закрепленные маятники разной размерности. — М.: ЛЕНАНД, 2021.
68. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
69. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
70. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
71. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
72. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.
73. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
74. *Aleksandrov A. Y., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A.* On the monoaxial stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque// AIP Conf. Proc. — 2018. — *1959*. — 080001.
75. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.
76. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: `shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru`