ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 23–34
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-23-34

УДК 539.3, 532.542

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ

© 2022 г. **П. А. ВЕЛЬМИСОВ, А. В. АНКИЛОВ**

Аннотация. Разработаны математические модели одного класса аэрогидроупругих систем — вибрационных устройств, предназначенных для интенсификации технологических процессов. Исследуется динамическая устойчивость составных частей этих устройств — упругих элементов, представляющих собой деформируемые пластины. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Модели описываются связанными нелинейными системами дифференциальных уравнений в частных производных. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для описания динамики упругих элементов используется нелинейная теория твердого деформируемого тела, учитывающая их поперечные и продольные деформации. Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов типа Ляпунова, соответствующих этим системам. Получены достаточные условия устойчивости решений предложенных систем уравнений.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток жидкости, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

MATHEMATICAL MODELING OF SOME AEROELASTIC SYSTEMS

© 2022 **P. A. VELMISOV, A. V. ANKILOV**

Abstract. In this paper, we develop mathematical models of a class of aerohydroelastic systems, namely, vibrating devices intended for intensification of technological processes. The dynamic stability of elastic components of these devices is examined. The notion of stability of a deformable body accepted in this paper coincides with the concept of the Lyapunov stability of dynamical systems. The models considered are governed by coupled nonlinear partial differential systems. The impact of a gas or fluid (in the model of an ideal medium) is determined from the asymptotic equations of aerohydromechanics. For describing the dynamics of elastic elements, we use the nonlinear theory of solid deformable bodies, which takes into account transverse and longitudinal deformations. The study of stability is based on the construction of positive-definite Lyapunov-type functionals. Sufficient conditions for the stability of solutions of the systems proposed are obtained.

Keywords and phrases: aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic fluid flow, partial differential equations, functional.

AMS Subject Classification: 74F10

1. Введение. При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-730015).

Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д.

В настоящее время аэрогидроупругость представляет собой хорошо развитый раздел механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [3, 6, 13, 14], так и зарубежные [7, 9–12, 15] исследования). В отличие от перечисленных работ в данной статье для исследования устойчивости используется аналитический метод, основанный на построении функционала для предложенной нелинейной математической модели.

В работе исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для связанных систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику деформируемых элементов различных конструкций, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой (обтекаемых потоком жидкости или газа). Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов (прямой метод Ляпунова) для этих систем.

В работе представлены математические модели одного класса аэрогидроупругих систем — вибрационных устройств, предназначенных для интенсификации некоторых технологических процессов, в частности, вибросмесителей, которые предназначены для размешивания неоднородной суспензии с целью подготовки однородной среды. Исследуется динамическая устойчивость составных частей этих устройств — упругих элементов, представляющих собой деформируемые пластины. Работа является продолжением исследований, представленных в [4], в частности, произведено обобщение на случай произвольного числа упругих элементов.

Вибросмеситель представляет собой проточный канал с деформируемыми элементами, которые располагаются внутри него. Внутри канала протекает дозвуковой поток идеальной сжимаемой среды. Аэрогидродинамическая нагрузка на элементы определяется на основе линейной теории движения жидкости и газа. Для исследования динамики упругих элементов используются нелинейные уравнения, описывающие продольно-поперечные колебания этих пластин-элементов. Сформулирована нелинейная начально-краевая задача для систем уравнений в частных производных. На основе построенного функционала типа Ляпунова для указанной системы, соответствующего начально-краевой задаче, получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механической конструкции. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Проблема может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость — тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие или растягивающие усилия, силы трения), малым деформациям тел в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. малым начальным отклонениям от положения равновесия) будут соответствовать малые деформации и в любой момент времени $t > 0$. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [1, 2, 4, 8, 16–18].

2. Математическая модель. Рассматривается плоское течение в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ y_0 < y < y_{n+1}\}$ с горизонтальными недеформируемыми стенками. Внутри канала имеются n деформируемых упругих элементов (рис. 1).

Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox. Рассматривается дозвуковой режим протекания $a > V$, где a — скорость звука в невозмущенном потоке жидкости. Деформируемыми являются пластины, занимающие в недеформированном состоянии положение $y = y_i$, $i = \overline{1, n}$, $x \in [b, c]$ (рис. 1). Введем обозначение

$$J_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_i \in (y_0, y_{n+1}),\ x \in [b, c]\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i.$$

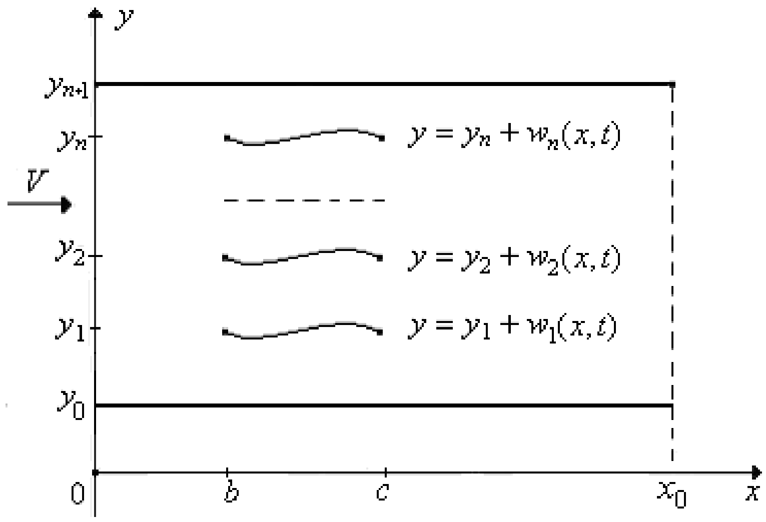

Рис. 1. Модель вибрационного устройства.

Введем обозначения: $u_i(x,t)$, $w_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ — функции, определяющие деформации элементов в направлении осей Ox и Oy соответственно (продольные и поперечные составляющие деформации элементов); $\varphi(x,y,t)$ — функция, определяющая потенциал скорости возмущенного потока газа; $P_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ — аэрогидродинамические воздействия на элементы.

Рассмотрим модель сжимаемой среды, тогда потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x,y) \in G \setminus J, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y(x,y_i,t) = \dot{w}_i(x,t) + Vw_i'(x,t), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (b,c), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\varphi_y(x,y_0,t) = 0, \quad x \in (0,x_0), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\varphi_y(x,y_{n+1},t) = 0, \quad x \in (0,x_0), \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

и условию отсутствия возмущений на входе и выходе из канала

$$\varphi(0,y,t) = 0, \quad \varphi(x_0,y,t) = 0, \quad y \in (0,y_0), \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Аэродинамические воздействия на элементы выражаются через потенциал скорости $\varphi(x,y,t)$ по формулам

$$\begin{gathered} P_i(x,t) = \rho(\varphi_t^+(x,y_i,t) - \varphi_t^-(x,y_i,t)) + \rho V(\varphi_x^+(x,y_i,t) - \varphi_x^-(x,y_i,t)), \\ x \in (b,c), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\varphi_t^{\pm}(x,y_i,t) = \lim_{y \to y_i \pm 0} \varphi_t(x,y,t), \quad \varphi_x^{\pm}(x,y_i,t) = \lim_{y \to y_i \pm 0} \varphi_x(x,y,t).$$

Рассмотрим нелинейную модель упругого тела. Тогда уравнения малых колебаний упругих элементов, моделируемых упругими пластинами, с учетом силового воздействия потока $P_i(x,t)$ на них имеют вид

$$\begin{cases} -E_iF_i\left(u_i'(x,t) + \dfrac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)' + M_i\ddot{u}_i(x,t) - \beta_{2i}F_i\dot{u}_i''(x,t) = 0, \\ -E_iF_i\left[w_i'(x,t)\left(u_i'(x,t) + \dfrac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)\right]' + D_iw_i''''(x,t) + M_i\ddot{w}_i(x,t) + \\ +N_i(t)w_i''(x,t) + \beta_{2i}I_i\dot{w}_i''''(x,t) + \beta_{1i}\dot{w}_i(x,t) + \beta_{0i}w_i(x,t) = P_i(x,t), \\ x \in (b,c), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t; штрих обозначает производную по x, а точка — производную по t; ρ — плотность жидкости; $I_i = h_i^3/(12(1-\nu_i^2))$; $F_i = h_i/(1-\nu_i)$; $D_i = E_i I_i$ — изгибные жесткости элементов; h_i — толщина элементов; $M_i = h_i\rho_i$ — погонные массы элементов; E_i, ρ_i — модули упругости и линейные плотности элементов; $N_i(t)$ — сжимающие (растягивающие) силы; β_{2i}, β_{1i} — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_{0i} — коэффициенты жесткости обжимных слоев; ν_i — коэффициенты Пуассона.

Предположим, что концы упругих элементов закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий:

$$w_i(x,t) = w_i'(x,t) = u_i(x,t) = 0, \quad w_i(x,t) = w_i''(x,t) = u_i(x,t) = 0, \quad x \in (b,c), \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

3. Исследование устойчивости. Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x,y,t) \equiv 0$, $u_i(x,t) \equiv 0$, $w_i(x,t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$ задачи (1)—(8) по отношению к возмущениям начальных данных. Рассмотрим функционал

$$\Phi(t) = \iint\limits_{G\setminus J} (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2)dxdy + 2a^2V\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c (\varphi^+(x,y_i,t) - \varphi^-(x,y_i,t))w_i'(x,t)dx +$$
$$+ \frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c \Bigg(E_iF_i\Big(u_i'(x,t) + \frac{1}{2}w_i'^2(x,t)\Big)^2 + M_i(\dot u_i^2(x,t) + \dot w_i^2(x,t)) +$$
$$+ D_i w_i''^2(x,t) + \beta_{0i}w_i^2(x,t) - N_i(t)w_i'^2(x,t)\Bigg). \tag{9}$$

Найдем производную от Φ по t:

$$\dot\Phi(t) = 2\iint\limits_{G\setminus J} (\varphi_t\varphi_{tt} + (a^2 - V^2)\varphi_x\varphi_{xt} + a^2\varphi_y\varphi_{yt})dxdy + 2a^2V\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c ((\varphi_t^+(x,y_i,t) - \varphi_t^-(x,y_i,t))\times$$
$$\times w_i'(x,t) + (\varphi^+(x,y_i,t) - \varphi^-(x,y_i,t))\dot w_i'(x,t))dx + \frac{2a^2}{\rho}\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c \Bigg(E_iF_i\Big(u_i' + \frac{1}{2}w_i'^2\Big)\times$$
$$\times (\dot u_i' + w_i'\dot w_i') + M_i\dot u_i\ddot u_i + M_i\dot w_i\ddot w_i + D_iw_i''\dot w_i'' - \frac{\dot N_i(t)}{2}w_i'^2 - N_i(t)w_i'\dot w_i' + \beta_{0i}w_i\dot w_i\Bigg)dx. \tag{10}$$

Для функций $\varphi(x,y,t)$ и $u_i(x,t)$, $w_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющих уравнениям (1) и (6), (7), равенство (10) примет вид

$$\dot\Phi(t) = 2\iint\limits_{G\setminus J} (\varphi_t(-2V\varphi_{xt} - V^2\varphi_{xx} + a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy})) + (a^2 - V^2)\varphi_x\varphi_{xt} + a^2\varphi_y\varphi_{yt})dxdy +$$
$$+ 2a^2V\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c ((\varphi_t^+(x,y_i,t) - \varphi_t^-(x,y_i,t))w_i'(x,t) + (\varphi^+(x,y_i,t) - \varphi^-(x,y_i,t))\dot w_i'(x,t))dx +$$
$$+ \frac{2a^2}{\rho}\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c \Bigg(E_iF_i\Big(u_i' + \frac{1}{2}w_i'^2\Big)(\dot u_i' + w_i'\dot w_i') + \dot u_i\Bigg\{E_iF_i\Big(u_i'(x,t) + \frac{1}{2}w_i'^2(x,t)\Big)' +$$
$$+ \beta_{2i}F_i\dot u_i''(x,t)\Bigg\} + \dot w_i\Bigg\{\rho(\varphi_t^+(x,y_i,t) - \varphi_t^-(x,y_i,t)) + \rho V(\varphi_x^+(x,y_i,t) - \varphi_x^-(x,y_i,t)) +$$

$$+ E_iF_i\left[w_i'(x,t)\left(u_i'(x,t)+\frac{1}{2}w_i'^2(x,t)\right)\right]' - D_iw_i'''' - \beta_{2i}I_i\dot{w}_i'''' - N_i(t)w_i'' - \beta_{1i}\dot{w}_i - \beta_{0i}w_i\Bigg\}+$$

$$+ D_iw_i''\dot{w}_i'' - \frac{\dot{N}_i(t)}{2}w_i'^2 - N_i(t)w_i'\dot{w}_i' + \beta_{0i}w_i\dot{w}_i\Bigg)dx. \quad (11)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)—(5). Применяя формулу Грина, получим

$$\iint\limits_{G\setminus J}\varphi_t\varphi_{xt}dxdy = 0, \quad \iint\limits_{G\setminus J}\varphi_t\varphi_{xx}dxdy = -\iint\limits_{G\setminus J}\varphi_{xt}\varphi_x dxdy,$$

$$\iint\limits_{G\setminus J}\varphi_t\varphi_{yy}dxdy = -\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\varphi_t^+(x,y_i,t)-\varphi_t^-(x,y_i,t))(\dot{w}_i(x,t)+Vw_i'(x,t))dx - \iint\limits_{G\setminus J}\varphi_{yt}\varphi_y dxdy.$$

Следовательно, с учетом уравнения (1) получим

$$\iint\limits_{G\setminus J}(\varphi_t(-2V\varphi_{xt}-V^2\varphi_{xx}+a^2(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}))+(a^2-V^2)\varphi_x\varphi_{xt}+a^2\varphi_y\varphi_{yt})dxdy =$$

$$= -a^2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\varphi_t^+(x,y_i,t)-\varphi_t^-(x,y_i,t))(\dot{w}_i(x,t)+Vw_i'(x,t))dx. \quad (12)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (8):

$$\int\limits_b^c\dot{w}_iw_i''''dx = \int\limits_b^c\dot{w}_i''w_i''dx, \quad \int\limits_b^c\dot{w}_i\dot{w}_i''''dx = \int\limits_b^c\dot{w}_i''^2dx, \quad \int\limits_b^c\dot{w}_iw_i''dx = -\int\limits_b^c\dot{w}_i'w_i'dx,$$

$$\int\limits_b^c(\varphi^+(x,y_i,t)-\varphi^-(x,y_i,t))\dot{w}_i'(x,t)dx = -\int\limits_b^c(\varphi_x^+(x,y_i,t)-\varphi_x^-(x,y_i,t))\dot{w}_i(x,t)dx,$$

$$\int\limits_b^c\dot{u}_i\dot{u}_i''dx = -\int\limits_b^c\dot{u}_i'^2dx, \quad \int\limits_b^c\dot{u}_i\left(u_i'+\frac{1}{2}w_i'^2\right)'dx = -\int\limits_b^c\dot{u}_i'\left(u_i'+\frac{1}{2}w_i'^2\right)dx, \quad (13)$$

$$\int\limits_b^c\dot{w}_i\left[w_i'\left(u_i'+\frac{1}{2}w_i'^2\right)\right]'dx = -\int\limits_b^c\dot{w}_i'w_i'\left(u_i'+\frac{1}{2}w_i'^2\right)dx, \quad i=\overline{1,n}.$$

Подставляя (12), (13) в (11), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c\left(\frac{\dot{N}_i(t)}{2}w_i'^2+\beta_{2i}F_i\dot{u}_i'^2+\beta_{2i}I_i\dot{w}_i''^2+\beta_{1i}\dot{w}_i^2\right)dx.$$

Пусть выполняются условия

$$\dot{N}_i(t)\geqslant 0, \quad \beta_{2i}\geqslant 0, \quad \beta_{1i}\geqslant 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad (14)$$

тогда справедливо неравенство

$$\dot{\Phi}(t)\leqslant 0 \Rightarrow \Phi(t)\leqslant\Phi(0). \quad (15)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (8). Воспользуемся неравенствами Рэлея [5] и Коши—Буняковского:

$$\int\limits_b^c w_i''^2(x,t)dx \geqslant \lambda_{1i}\int\limits_b^c w_i'^2(x,t)dx, \quad i=\overline{1,n}, \quad (16)$$

$$\int\limits_b^c w_i''^2(x,t)dx \geqslant \mu_{1i} \int\limits_b^c w_i^2(x,t)dx, \quad i=\overline{1,n}, \tag{17}$$

$$w_i^2(x,t) \leqslant (c-b) \int\limits_b^c w_i'^2(x,t)dx, \quad i=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где λ_{1i}, μ_{1i} — наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $x \in (b,c)$, $i=\overline{1,n}$ с краевыми условиями (8).

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (16), (17) и очевидное неравенство $-2ab \leqslant a^2+b^2$:

$$\Phi(0) \leqslant \Omega_0 = \iint\limits_{G\setminus J} (\varphi_{t0}^2 + (a^2-V^2)\varphi_{x0}^2 + a^2\varphi_{y0}^2)dxdy + a^2\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c (\varphi^+(x,y_i,0) - \varphi^-(x,y_i,0))^2dx +$$
$$+ \frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c \Bigg(E_iF_i\Big(u_{i0}'(x,t) + \frac{1}{2}{w_{i0}'}^2(x,t)\Big)^2 +$$
$$+ M_i(\dot u_{i0}^2(x,t) + \dot w_{i0}^2(x,t)) + \Big(D_i + \frac{|N_i(0)| + \rho V^2}{\lambda_{1i}} + \frac{\beta_{0i}}{\mu_{1i}}\Big){w_{i0}''}^2\Bigg)dx. \tag{19}$$

Здесь введены обозначения $\varphi_{t0} = \varphi_t(x,y,0)$, $\varphi_{x0} = \varphi_x(x,y,0)$, $\varphi_{y0} = \varphi_y(x,y,0)$, $\dot u_{i0} = \dot u_i(x,0)$, $u_{i0}' = u_i'(x,0)$, $\dot w_{i0} = \dot w_i(x,0)$, $w_{i0} = w_i(x,0)$, $w_{i0}' = w_i'(x,0)$, $w_{i0}'' = w_i''(x,0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу:

$$\Phi(t) \geqslant \iint\limits_{G\setminus J} (\varphi_t^2 + (a^2-V^2)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2)dxdy + 2a^2V\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c (\varphi^+(x,y_i,t) -$$
$$- \varphi^-(x,y_i,t))w_i'(x,t)dx + \frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^n \int\limits_b^c (\lambda_{1i}D_i - N_i(t)){w_i'}^2dx. \tag{20}$$

Для оценки двойного интеграла разобьем область $G\setminus J$ на $n+1$ область $G_i = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0,\ y_{i-1} < y < y_i\}$, $i=\overline{1,n+1}$. Согласно неравенству Коши—Буняковского

$$\iint\limits_{G_i} \varphi_x^2 dxdy \geqslant \frac{\pi^2}{x_0^2}\iint\limits_{G_i} \varphi^2 dxdy, \quad i=\overline{1,n+1}. \tag{21}$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского также имеем

$$\left(\int\limits_{y_i}^y \varphi_y dy\right)^2 \leqslant \int\limits_{y_i}^y 1^2dy \int\limits_{y_i}^y \varphi_y^2 dy,$$

где $y_i < y < y_{i+1}$, $i=\overline{1,n}$. Следовательно,

$$(\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_i,t))^2 \leqslant (y-y_i)\int\limits_{y_i}^y \varphi_y^2dy \leqslant (y-y_i)\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_y^2dy.$$

Интегрируя от y_i до y_{i+1} по переменной y, получим

$$\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} (\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_i,t))^2dy \leqslant \frac{(y_{i+1}-y_i)^2}{2}\int\limits_{y_i}^{y_{i+1}} \varphi_y^2dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x, окончательно находим

$$\iint\limits_{G_i} \varphi_y^2 dxdy \geqslant \frac{2}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint\limits_{G_i} (\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_{i-1},t)^2 dxdy. \tag{22}$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского имеем

$$\left(\int\limits_y^{y_i} \varphi_y dy\right)^2 \leqslant \int\limits_y^{y_i} 1^2 dy \int\limits_y^{y_i} \varphi_y^2 dy,$$

где $y_{i-1} < y < y_i$, $i = \overline{1,n}$. Следовательно,

$$(\varphi^-(x,y_i,t) - \varphi(x,y,t))^2 \leqslant (y_i - y)\int\limits_y^{y_i} \varphi_y^2 dy \leqslant (y_i - y)\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от y_{i-1} до y_i по переменной y, получим

$$\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} (\varphi^-(x,y_i,t) - \varphi(x,y,t))^2 dy \leqslant \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2}\int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} \varphi_y^2 dy.$$

Интегрируя от 0 до x_0 по переменной x, окончательно находим

$$\iint\limits_{G_i} \varphi_y^2 dxdy \geqslant \frac{2}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint\limits_{G_i} (\varphi^-(x,y_i,t) - \varphi(x,y,t))^2 dxdy. \tag{23}$$

Согласно (22), (23) получим

$$\iint\limits_{G_1} \varphi_y^2 dxdy \geqslant \frac{2}{(y_1 - y_0)^2} \iint\limits_{G_1} (\varphi^-(x,y_1,t) - \varphi(x,y,t))^2 dxdy, \tag{24}$$

$$\iint\limits_{G_i} \varphi_y^2 dxdy \geqslant \frac{2\chi_{i-1}(t)}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint\limits_{G_i} (\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_{i-1},t)^2) dxdy + \\ + \frac{2(1-\chi_{i-1}(t))}{(y_i - y_{i-1})^2} \iint\limits_{G_i} (\varphi^-(x,y_i,t) - \varphi(x,y,t))^2 dxdy, \quad i = \overline{2,n}, \tag{25}$$

$$\iint\limits_{G_{n+1}} \varphi_y^2 dxdy \geqslant \frac{2}{(y_{n+1} - y_n)^2} \iint\limits_{G_{n+1}} (\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_n,t))^2 dxdy, \tag{26}$$

где $\chi_i(t) \in (0,1)$, $i = \overline{1,n-1}$ некоторые положительные функции.

Применяя (21), (24), (25), (26) для (20), получим неравенство

$$\Phi(t) \geqslant \iint\limits_{G_1} \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_1 - y_0)^2}(\varphi^-(x,y_1,t) - \varphi(x,y,t))^2\right) dxdy + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \iint\limits_{G_{i+1}} \chi_i(t)\left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_{i+1} - y_i)^2}(\varphi(x,y,t) - \varphi^+(x,y_i,t))^2\right) dxdy + \\ + \sum_{i=2}^{n} \iint\limits_{G_i} (1 - \chi_{i-1}(t))\left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2 + \frac{2a^2}{(y_i - y_{i-1})^2}(\varphi^-(x,y_i,t) - \varphi(x,y,t))^2\right) dxdy +$$

$$+\iint\limits_{G_{n+1}}\left(\varphi_t^2+(a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2+\frac{2a^2}{(y_{n+1}-y_n)^2}(\varphi(x,y,t)-\varphi^+(x,y_n,t))^2\right)dxdy+$$

$$+2a^2V\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\varphi^+(x,y_i,t)-\varphi^-(x,y_i,t))w_i'(x,t)dx+\frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\lambda_{1i}D_i-N_i(t)){w_i'}^2dx. \quad (27)$$

Введем обозначения

$$K_i(t)=\lambda_{1i}D_i-N_i(t),\quad f_i(x,t)=\begin{cases}0, & x\in(0,b]\cup[c,x_0),\\ w_i'(x,t), & x\in(b,c),\end{cases}$$

тогда

$$2a^2V\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\varphi^+(x,y_i,t)-\varphi^-(x,y_i,t))w_i'(x,t)dx+\frac{a^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_b^c(\lambda_{1i}D_i-N_i(t)){w_i'}^2dx=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\frac{2a^2V}{y_i-y_{i-1}}\iint\limits_{G_i}\varphi^-(x,y_i,t))f_i(x,t)dxdy+\sum_{i=1}^{n}\frac{2a^2V}{y_{i+1}-y_i}\iint\limits_{G_{i+1}}\varphi^+(x,y_i,t))f_i(x,t)dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i(t)a^2}{\rho(y_i-y_{i-1})}\iint\limits_{G_i}K_i(t)f_i^2(x,t)dxdy+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\gamma_i(t))a^2}{\rho(y_{i+1}-y_i)}\iint\limits_{G_{i+1}}K_i(t)f_i^2(x,t)dxdy, \quad (28)$$

где $\gamma_i(t)\in(0,1)$, $i=\overline{1,n}$, — некоторые положительные функции. Согласно (28) из (27) получим неравенство

$$\Phi(t)\geqslant\iint\limits_{G_1}\left(\varphi_t^2(x,y,t)+(a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2(x,y,t)+\frac{2a^2}{(y_1-y_0)^2}(\varphi^-(x,y_1,t)-\varphi(x,y,t))^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2a^2V}{y_1-y_0}\varphi^-(x,y_1,t)f_1(x,t)+\frac{\gamma_1(t)a^2}{\rho(y_1-y_0)}K_1(t)f_1^2(x,t)\right)dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\iint\limits_{G_{i+1}}\chi_i(t)\left(\varphi_t^2(x,y,t)+(a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2(x,y,t)+\frac{2a^2}{(y_{i+1}-y_i)^2}(\varphi(x,y,t)-\varphi^+(x,y_i,t))^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2a^2V}{(y_{i+1}-y_i)\chi_i(t)}\varphi^+(x,y_i,t))f_i(x,t)+\frac{(1-\gamma_i(t))a^2}{\rho(y_{i+1}-y_i)\chi_i(t)}K_i(t)f_i^2(x,t)\right)dxdy+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\iint\limits_{G_i}(1-\chi_{i-1}(t))\left(\varphi_t^2(x,y,t)+(a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2(x,y,t)+\frac{2a^2}{(y_i-y_{i-1})^2}(\varphi^-(x,y_i,t)-\varphi(x,y,t))^2-\right.$$

$$\left.-\frac{2a^2V}{(y_i-y_{i-1})(1-\chi_{i-1}(t))}\varphi^-(x,y_i,t))f_i(x,t)+\frac{\gamma_i(t)a^2}{\rho(y_i-y_{i-1})(1-\chi_{i-1}(t))}K_i(t)f_i^2(x,t)\right)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{G_{n+1}}\left(\varphi_t^2(x,y,t)+(a^2-V^2)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2(x,y,t)+\frac{2a^2}{(y_{n+1}-y_n)^2}(\varphi(x,y,t)-\varphi^+(x,y_n,t))^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2a^2V}{y_{n+1}-y_n}\varphi^+(x,y_n,t)f_n(x,t)+\frac{(1-\gamma_n(t))a^2}{\rho(y_{n+1}-y_n)}K_n(t)f_n^2(x,t)\right)dxdy. \quad (29)$$

Введем обозначения

$$d_{11}^{(1)}=\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2}+\frac{2a^2}{(y_1-y_0)^2},\quad d_{22}^{(1)}=d_{12}^{(1)}=\frac{2a^2}{(y_1-y_0)^2},\quad d_{23}^{(1)}=\frac{a^2V}{y_1-y_0},$$

$$d_{33}^{(1)}(t)=\frac{a^2K_1(t)\gamma_1(t)}{\rho(y_1-y_0)},\quad \Delta_2^{(1)}=d_{11}^{(1)}d_{22}^{(1)}-{d_{12}^{(1)}}^2,\quad \Delta_3^{(1)}(t)=d_{33}^{(1)}(t)\Delta_2^{(1)}-{d_{23}^{(1)}}^2d_{11}^{(1)},$$

$$d_{11}^{(2i)} = \frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{i+1}-y_i)^2}, \quad d_{22}^{(2i)} = d_{12}^{(2i)} = \frac{2a^2}{(y_{i+1}-y_i)^2}, \quad d_{23}^{(2i)} = \frac{a^2 V}{\chi_i(t)(y_{i+1}-y_i)},$$

$$d_{33}^{(2i)}(t) = \frac{a^2 K_i(t)(1-\gamma_i(t))}{\rho(y_{i+1}-y_i)\chi_i(t)}, \quad \Delta_2^{(2i)} = d_{11}^{(2i)} d_{22}^{(2i)} - d_{12}^{(2i)2}, \quad \Delta_3^{(2i)}(t) = d_{33}^{(2i)}(t)\Delta_2^{(2i)} - d_{23}^{(2i)2} d_{11}^{(2i)},$$
$$i = \overline{1, n-1},$$

$$d_{11}^{(3i)} = \frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_i-y_{i-1})^2}, \quad d_{22}^{(3i)} = d_{12}^{(3i)} = \frac{2a^2}{(y_i-y_{i-1})^2}, \quad d_{23}^{(3i)} = \frac{a^2 V}{(1-\chi_{i-1}(t))(y_i-y_{i-1})},$$

$$\Delta_2^{(3i)} = d_{11}^{(3i)} d_{22}^{(3i)} - d_{12}^{(3i)2}, \quad d_{33}^{(3i)}(t) = \frac{a^2 K_i(t)\gamma_i(t)}{\rho(y_i-y_{i-1})(1-\chi_{i-1}(t))}, \quad \Delta_3^{(3i)}(t) = d_{33}^{(3i)}(t)\Delta_2^{(3i)} - d_{23}^{(3i)2} d_{11}^{(3i)},$$
$$i = \overline{2, n},$$

$$d_{11}^{(4)} = \frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{n+1}-y_n)^2}, \quad d_{22}^{(4)} = d_{12}^{(4)} = \frac{2a^2}{(y_{n+1}-y_n)^2}, \quad d_{23}^{(4)} = \frac{a^2 V}{y_{n+1}-y_n},$$

$$d_{33}^{(4)}(t) = \frac{a^2 K_n(t)(1-\gamma_n(t))}{\rho(y_{n+1}-y_n)}, \quad \Delta_2^{(4)} = d_{11}^{(4)} d_{22}^{(4)} - d_{12}^{(4)2}, \quad \Delta_3^{(4)}(t) = d_{33}^{(4)}(t)\Delta_2^{(4)} - d_{23}^{(4)2} d_{11}^{(4)}.$$

Рассмотрим квадратичные формы относительно $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^-(x,y_1,t)$, $f_1(x,t)$; $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^+(x,y_i,t)$, $f_i(x,t)$; $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^-(x,y_i,t)$, $f_i(x,t)$; $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^+(x,y_n,t)$, $f_n(x,t)$ в (29). Соответствующие матрицы форм имеют вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11}^{(1)} & -d_{12}^{(1)} & 0 \\ -d_{12}^{(1)} & d_{22}^{(1)} & -d_{23}^{(1)} \\ 0 & -d_{23}^{(1)} & d_{33}^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_{11}^{(ki)} & -d_{12}^{(ki)} & 0 \\ -d_{12}^{(ki)} & d_{22}^{(ki)} & d_{23}^{(ki)} \\ 0 & d_{23}^{(ki)} & d_{33}^{(ki)}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, \quad \begin{pmatrix} d_{11}^{(4)} & -d_{12}^{(4)} & 0 \\ -d_{12}^{(4)} & d_{22}^{(4)} & d_{23}^{(4)} \\ 0 & d_{23}^{(4)} & d_{33}^{(4)}(t) \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра для положительной определенности квадратичных форм необходимо, чтобы угловые миноры были положительны. Первые два угловых минора матриц положительны при любых значениях параметров. Запишем условия положительности третьих угловых миноров:

$$\Delta_3^{(1)}(t) > 0, \quad \Delta_3^{(2i)}(t) > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \Delta_3^{(3i)}(t) > 0, \quad i = \overline{2, n}, \quad \Delta_3^{(4)}(t) > 0. \tag{30}$$

Неравенства (30) примут вид:

$$K_1(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho(y_1-y_0)}{2(a^2-V^2)\pi^2\gamma_1(t)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_1-y_0)^2} \right), \tag{31}$$

$$K_i(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho(y_{i+1}-y_i)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\gamma_i(t))\chi_i(t)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{i+1}-y_i)^2} \right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{32}$$

$$K_i(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho(y_i-y_{i-1})}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\chi_{i-1}(t))\gamma_i(t)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_i-y_{i-1})^2} \right), \quad i = \overline{2, n}, \tag{33}$$

$$K_n(t) > \frac{V^2 x_0^2 \rho(y_{n+1}-y_n)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\gamma_n(t))} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_{n+1}-y_n)^2} \right). \tag{34}$$

Приравнивая правые части неравенств (31) и (32) при $i = 1$:

$$\frac{V^2 x_0^2 \rho(y_1-y_0)}{2(a^2-V^2)\pi^2\gamma_1(t)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_1-y_0)^2} \right) =$$
$$= \frac{V^2 x_0^2 \rho(y_2-y_1)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\gamma_1(t))\chi_1(t)} \left(\frac{(a^2-V^2)\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{(y_2-y_1)^2} \right),$$

найдем функцию $\gamma_1(t)$, обеспечивающую наиболее широкую область значений параметров, подставляя которую в (31), получим:

$$K_1(t) > \frac{V^2 \rho((a^2-V^2)\pi^2(y_2-y_1)^2 + 2a^2x_0^2)}{2\chi_1(t)(a^2-V^2)\pi^2(y_2-y_1)} + \frac{V^2 \rho((a^2-V^2)\pi^2(y_1-y_0)^2 + 2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(y_1-y_0)}. \tag{35}$$

Аналогично, приравнивая правые части неравенств (32), (33) при $i=\overline{2,n-1}$ и (33) при $i=n$, (34), получим

$$K_i(t) > \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_{i+1}-y_i)^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2\chi_i(t)(y_{i+1}-y_i)} + \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_i-y_{i-1})^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\chi_{i-1}(t))(y_i-y_{i-1})}, \quad i=\overline{2,n-1}, \tag{36}$$

$$K_n(t) > \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_0-y_n)^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(y_0-y_n)} + \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_n-y_{n-1})^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(1-\chi_{n-1}(t))(y_n-y_{n-1})}. \tag{37}$$

Так как при условиях (35)—(37) все квадратичные формы в (29) положительно определены, то из (29) окончательно получим оценку $\Phi(t)\geqslant 0$.

Используя метод Лагранжа, с учетом неравенства (35) оценим квадратичную форму относительно $\varphi(x,y,t)$, $\varphi^-(x,y_1,t)$, $f_1(x,t)$ в (29)

$$F(\varphi(x,y,t),\varphi^-(x,y_1,t),f_1(x,t)) \geqslant \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_2^{(1)}} f_1^2(x,t).$$

Из (29) с учетом (18) получим

$$\Phi(t) \geqslant \iint\limits_{G_1} \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_2^{(1)}} f_1^2(x,t)dxdy = \int\limits_b^c \frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}} {w_1'}^2(x,t)dx \geqslant \frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}(c-b)} w_1^2(x,t). \tag{38}$$

Учитывая (15), (19), (38), окончательно приходим к неравенству

$$\frac{\Delta_3^{(1)} y_1}{\Delta_2^{(1)}(c-b)} w_1^2(x,t) \leqslant \Omega_0. \tag{39}$$

Аналогично, оценивая остальные квадратичные формы в (29), получим

$$\frac{\Delta_3^{(2i)}(y_{i+1}-y_i)}{\Delta_2^{(2i)}(c-b)} w_i^2(x,t) \leqslant \Omega_0, \quad \frac{\Delta_3^{(4)}(y_0-y_n)}{\Delta_2^{(4)}(c-b)} w_n^2(x,t) \leqslant \Omega_0. \tag{40}$$

Таким образом, если выполняются условия (14), (35)—(37), то $\Phi(t)\geqslant 0$, $\dot\Phi(t)\leqslant 0$. На основании неравенства (29) можно сделать вывод: функции $\varphi(x,y,t)$, $\varphi_t(x,y,t)$, $w_i'(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных. Из неравенства $\Phi(t)\leqslant\Phi(0)$, согласно (9), следует, что функции $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $\dot u_i(x,t)$, $\dot w_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных. Из оценок (39), (40) следует, что решение $w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных. Следовательно, на основании проведенного исследования функционала доказана теорема.

Теорема 1. *Предположим, что найдутся такие функции $\chi_i(t)\in(0,1)$, $i=\overline{1,n-1}$, что выполняются условия* (14), (35)—(37). *Тогда решение $w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$ задачи* (1)—(8) *и производные $\varphi_t(x,y,t)$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $\dot u_i(x,t)$, $w_i'(x,t)$, $\dot w_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi^+(x,y_i,0)$, $\varphi^-(x,y_i,0)$, $\dot u_{i0}$, u_{i0}', $\dot w_{i0}$, w_{i0}', w_{i0}''.*

Для применения теоремы 1 подставляем все параметры механической системы в условия (14), (35)—(37). Если условия (14) выполняются, то из системы неравенств (35)—(37) находим $\chi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$. Если все $\chi_i(t)\in(0,1)$, то делаем вывод об устойчивости перечисленных в теореме функций.

Рассмотрим частный случай вибрационного устройства при равномерном расположении упругих элементов

$$y_1-y_0=y_{n+1}-y_n=h/2, \quad y_i-y_{i-1}=h, \quad i=\overline{2,n}, \tag{41}$$

тогда неравенства (35)—(37) примут более простой для решения вид:

$$2\chi_1(t)(a^2-V^2)\pi^2hK_1(t) > V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2h^2+2a^2x_0^2)(1+\chi_1(t)), \tag{42}$$

$$2(a^2-V^2)\pi^2 h\chi_i(t)(1-\chi_{i-1}(t))K_i(t) > V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2h^2+2a^2x_0^2)(1-\chi_{i-1}(t)+\chi_i(t)),\quad i=\overline{2,n-1}, \tag{43}$$

$$2(a^2-V^2)\pi^2 h(1-\chi_{n-1}(t))K_n(t) > V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2h^2+2a^2x_0^2)(2-\chi_{n-1}(t)). \tag{44}$$

Теорема 2. *Предположим, что найдутся такие функции* $\chi_i(t)\in(0,1)$, $i=\overline{1,n-1}$, *что выполняются условия* (14), (41)—(44). *Тогда решение* $w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$ *задачи* (1)—(8) *и производные* $\varphi_t(x,y,t)$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $\dot{u}_i(x,t)$, $w_i'(x,t)$, $\dot{w}_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, *устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных* φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi^+(x,y_i,0)$, $\varphi^-(x,y_i,0)$, $\dot{u}_{i0}$, u_{i0}', $\dot{w}_{i0}$, w_{i0}', w_{i0}''.

Для определения критических значений скорости течения положим $\chi_i(t)=1/2$, $i=\overline{1,n-1}$. Тогда из (35)—(37) получим условия

$$K_1(t) > \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_2-y_1)^2+2a^2x_0^2)}{(a^2-V^2)\pi^2(y_2-y_1)} + \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_1-y_0)^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(y_1-y_0)}, \tag{45}$$

$$K_i(t) > \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_{i+1}-y_i)^2+2a^2x_0^2)}{(a^2-V^2)\pi^2(y_{i+1}-y_i)} + \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_i-y_{i-1})^2+2a^2x_0^2)}{(a^2-V^2)\pi^2(y_i-y_{i-1})}, \quad i=\overline{2,n-1}, \tag{46}$$

$$K_n(t) > \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_{n+1}-y_n)^2+2a^2x_0^2)}{2(a^2-V^2)\pi^2(y_{n+1}-y_n)} + \frac{V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2(y_n-y_{n-1})^2+2a^2x_0^2)}{(a^2-V^2)\pi^2(y_n-y_{n-1})}. \tag{47}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (14), (45)—(47). *Тогда решение* $w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$ *задачи* (1)—(8) *и производные* $\varphi_t(x,y,t)$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $\dot{u}_i(x,t)$, $w_i'(x,t)$, $\dot{w}_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, *устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных* φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi^+(x,y_i,0)$, $\varphi^-(x,y_i,0)$, $\dot{u}_{i0}$, u_{i0}', $\dot{w}_{i0}$, w_{i0}', w_{i0}''.

Для применения теоремы 3 подставляем все параметры механической системы, кроме скорости, в условия (14), (45)—(47). Если условия (14) выполняются, то из системы неравенств (45)—(47) находим ограничения на скорость V и делаем вывод об устойчивости перечисленных в теореме функций.

При равномерном расположении упругих элементов (41) неравенства (45)—(47) примут вид:

$$K_i(t) > \frac{2V^2\rho((a^2-V^2)\pi^2h^2+2a^2x_0^2)}{(a^2-V^2)\pi^2h}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{48}$$

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (14), (41), (48). *Тогда решение* $w_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $\varphi(x,y,t)$ *задачи* (1)—(8) *и производные* $\varphi_t(x,y,t)$, $\varphi_x(x,y,t)$, $\varphi_y(x,y,t)$, $\dot{u}_i(x,t)$, $w_i'(x,t)$, $\dot{w}_i(x,t)$, $w_i''(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, *устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных* φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi^+(x,y_i,0)$, $\varphi^-(x,y_i,0)$, $\dot{u}_{i0}$, u_{i0}', $\dot{w}_{i0}$, w_{i0}', w_{i0}''.

4. Заключение. На основе предложенных математических моделей продольно-поперечных колебаний упругих элементов конструкций в виде пластины-полосы при обтекании их дозвуковым потоком идеального газа проведены исследования динамической устойчивости деформируемых элементов вибрационных устройств. Модели описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений с частными производными. С помощью построенных функционалов получены достаточные условия устойчивости решений этих систем уравнений. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонные массы и изгибные жесткости элементов, сжимающие (растягивающие) элементы усилия, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициенты жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механических систем, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А.* Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. — Ульяновск: УлГТУ, 2019.
2. *Анкилов А. В., Вельмисов П. А.* Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций. — Ульяновск: УлГТУ, 2015.
3. *Быкова Т. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А., Черненко А. В.* Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости// Тр. МАИ. — 2020. — *110.* — 6.
4. *Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В.* Об устойчивости решений некоторых классов начально-краевых задач в аэрогидроупругости// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *165.* — С. 34–46.
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968.
6. *Могилевич Л. И., Блинков Ю. А., Иванов С. В.* Волны деформации в двух соосных кубически нелинейных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2020. — *28*, № 4. — С. 435–454.
7. *Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K.* A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow// Int. J. Nonlin. Mech. — 2020. — *118.* — 103290.
8. *Ankilov A. V., Vel'misov P. A.* Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem// J. Math. Sci. — 2016. — *219*, № 1. — P. 14–26.
9. *Askari E., Jeong K.-H., Ahn K.-H., Amabili M.* A mathematical approach to study fluid-coupled vibration of eccentric annular plates// J. Fluids Struct. — 2020. — *98.* — 103129.
10. *Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P.* Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density// J. Sound Vibration. — 2020. — *473.* — 115202.
11. *Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P.* Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions// J. Press. Vessel Techn. — 2017. — *139*, № 3. — P. 1–8.
12. *Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J.* Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow// J. Fluids Struct. — 2016. — *63.* — P. 120–139.
13. *Mogilevich L., Ivanov S.* Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them// Symmetry. — 2020. — *12*, № 3. — P. 335.
14. *Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V.* Hydroelastic response of a circular sandwich plate interacting with a liquid layer// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — *1546*, № 1. — 012137.
15. *Rinaldi S., Paidoussis M. P.* An improved theoretical model for the dynamics of a free-clamped cylinder in axial flow// J. Fluids Struct. — 2020. — *94.* — 102903..
16. *Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid// Cybern. Phys. — 2017. — *6*, № 4. — P. 262–270.
17. *Velmisov P. A., Ankilov A. V.* Stability of solutions of initial boundary-value problems of aerohydroelasticity// J. Math. Sci. — 2018. — *233*, № 6. — P. 958–974.
18. *Velmisov P. A., Ankilov A. V.* About dynamic stability of deformable elements of vibration systems// Cybern. Phys. — 2019. — *8*, № 3. — P. 175–184.

Вельмисов Петр Александрович
Ульяновский государственный технический университет
E-mail: velmisov@ulstu.ru

Анкилов Андрей Владимирович
Ульяновский государственный технический университет
E-mail: ankil@ulstu.ru