ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 206 (2022). С. 3–14
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-206-3-14

УДК 517.9

О СГЛАЖИВАНИИ ОПЕРАТОРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. **А. Г. БАСКАКОВ, И. А. КРИШТАЛ, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. В работе рассмотрен дифференциальный оператор первого порядка, действующий в лебеговых пространствах. Использование метода подобных операторов позволяет привести рассматриваемый оператор к оператору с более удобным потенциалом.

Ключевые слова: метод подобных операторов, дифференциальный оператор первого порядка, коэффициенты Фурье, лебегово пространство.

ON SMOOTHING THE OPERATOR COEFFICIENT OF A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR IN A BANACH SPACE

© 2022 **A. G. BASKAKOV, I. A. KRISHTAL, N. B. USKOVA**

Abstract. In this paper, we consider a first-order differential operator acting in Lebesgue spaces. The method of similar operators allows one to reduce the operator considered to an operator with a more convenient potential.

Keywords and phrases: method of similar operators, first-order differential operator, Fourier coefficients, Lebesgue space.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работе рассматривается преобразование подобия, позволяющее переводить возмущенный оператор $A-B$, где A — оператор с известными спектральными свойствами в более просто устроенный оператор $A-B_0$, спектральные свойства которого легче изучать, потому что они близки к спектральным свойствам оператора A.

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство. Символом $\operatorname{End}\mathcal{X}$ обозначена банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующий в $\mathcal{X}$, с нормой $\|X\|_\infty = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Xx\|$, $X\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $x\in\mathcal{X}$. Гильбертово пространство будет обозначаться через $\mathcal{H}$, а символом $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})\subset\operatorname{End}\mathcal{H}$ — двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта из алгебры $\operatorname{End}\mathcal{H}$.

Введем в рассмотрение пространства $L_p=L_p(\mathbb{R},\mathcal{X})$, $p\in[1,\infty)$, измеримых по Бохнеру и суммируемых на $\mathbb{R}$ со степенью p, $p\in[1,\infty)$, классов эквивалентности функций со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Ограничимся в рассмотрении только $p\in[1,\infty)$ $(p\neq\infty)$; поэтому в дальнейшем условие $p\in[1,\infty)$ может иногда быть опущено. Нормы в пространствах

Работа первого и третьего авторов выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

L_p задаются формулами

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p_{\mathcal{X}} dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Если $\mathcal{X} = \mathcal{H}$ — гильбертово пространство, то пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ является также гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle x(t), y(t) \rangle_{\mathcal{H}} dt.$$

Через $W^1_p = W^1_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty)$, обозначим пространство Соболева абсолютно непрерывных функций из L_p с производными из L_p со значениями в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$. А символом $C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ обозначено пространство (сильно) непрерывных ограниченных функций периодических периода ω со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ и нормой

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Также будут использоваться банаховы пространства $L_{p,\omega}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, локально интегрируемых (по Бохнеру) со степенью p классов эквивалентности ω-периодических функций и пространства $l_p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, суммируемых со степенью p последовательностей со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{X}$.

Работа состоит из двух частей. Первая часть — обзорная, в ней представлено современное состояние метода подобных операторов, с помощью которого проводится исследование во второй части. Разобрана абстрактная схема метода и приведены наиболее значимые примеры его применения. При этом, в основном, метод применяется в гильбертовом пространстве для диагонализации (или блочной диагонализации) исследуемого оператора и все построения удобно вести на языке операторных (или числовых) матриц рассматриваемых операторов.

Во второй части рассматривается применение метода подобных операторов к приведению дифференциального оператора первого порядка на оси с потенциалом из C_ω к более простому оператору. Тут принципиально другая схема применения схемы метода подобных операторов, которая и излагается в этой части. Иллюстрируются общие теоремы метода подобных операторов (теоремы 1—4).

2. Метод подобных операторов. Абстрактная схема и история. Начнем этот раздел с определения подобных операторов.

Определение 1. Два линейных оператора $A_i \colon D(A_i) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End} \mathcal{X}$, что имеют место равенства $UD(A_2) = D(A_1)$, $A_1 U x = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования A_1 в A_2 или сплетающим оператором.

Преобразование подобия широко используется в различных исследованиях, начиная с приведения матриц к диагональному виду (см. [30]). Хороший обзор по истории и нынешнему состоянию общей теории преобразования подобия можно найти в работах С. М. Ситника с соавторами (см. [35, 48, 67, 68, 71]). Отметим также, что альтернативное название для теории операторов преобразования — transmutation operator method, и оно восходит к Ж. Дельсарту (см. [64, 65]). Широкое использование преобразования подобия обусловлено тем, что, зная спектральные свойства одного из операторов, легко можно получить спектральные свойства ему подобного. В частности, спектры подобных операторов совпадают.

Ключевым понятием метода подобных операторов является понятие допустимой для невозмущенного замкнутого линейного оператора $A \colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройки. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ будем обозначать спектр и резольвентное множество оператора A соответственно.

Определение 2 (см. [8])**.** Пусть $\mathcal{M}$ — линейное пространство операторов из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$ и

$$J \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad \Gamma \colon \mathcal{M} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$$

— линейные операторы (трансформаторы). Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для (невозмущенного) оператора A, а $\mathcal{M}$ — допустимым пространством возмущений, если выполнены следующие условия:

(i) $\mathcal{M}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{X})$, т.е. $\|X\|_{\mathcal{M}} \leqslant \mathrm{const}\|X\|_A$, $X \in \mathcal{M}$;

(ii) J и Γ — непрерывные операторы;

(iii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$, $X \in \mathcal{M}$;

(iv) $X\Gamma Y$, $(\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$ для любых X, $Y \in \mathcal{M}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что
$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\{\|X\Gamma Y\|_{\mathcal{M}}, \|(\Gamma X)Y\|_{\mathcal{M}}\} \leqslant \gamma\|X\|_{\mathcal{M}}\|Y\|_{\mathcal{M}}, \quad X, Y \in \mathcal{M};$$

(v) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что $\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Замечание 1. Вместо свойства (v) в определении 2 можно требовать выполнение любого условия, влекущего равенство $(\Gamma X)D(A) = D(A)$. Например, можно потребовать $\mathrm{Ran}\,\Gamma X \subset D(A)$ и $A\Gamma X \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$ для любого $X \in \mathcal{M}$.

Отметим, что обычно в методе подобных операторов предполагается, что J — проектор, и тогда добавляется еще условие
$$J((\Gamma X)JY) = 0 \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathcal{M}. \tag{1}$$

Теорема 1 (см. [3])**.** *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора $A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ тройка и выполняется условие*
$$6j\gamma\|B\|_{\mathcal{M}} < 1,$$
где $j = \max\{1, \|J\|\}$ и константа γ взята из условия (iv) *определения* 2*. Тогда отображение $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ вида*
$$\Phi(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)(JX) + B, \quad X \in \mathcal{M},$$
является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку X_* в шаре
$$\mathscr{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X - B\|_{\mathcal{M}} \leqslant \sqrt{2}\|B\|_{\mathcal{M}}\},$$
т.е. $X_* = \Phi(X_*)$. Оператор X_* может быть найден методом простых итераций как предел последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$, где $X_1 = B$ и $X_n = \Phi(X_{n-1})$, $n \geqslant 2$. При этом оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, причем оператором преобразования служит оператор $U = I + \Gamma X_* \in \mathrm{End}\,\mathcal{X}$, т.е.
$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*).$$

Метод подобных операторов, изложенный кратко выше, опирается на метод К. О. Фридрихса подобных операторов (см. [53, 66]), метод Р. Тернера подобных операторов (см. [32]), а также на работы Пуанкаре, Крылова, Боголюбова и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова (см., например, [3, 8]). Впервые метод подобных операторов (А. Г. Баскакова) был предложен в [2], затем был развит в [3–9, 13, 15]. Связь метода подобных операторов с заменой Крылова—Боголюбова (методом усреднения) описана в [2, 3, 5, 6, 10], а с методом Тернера подобных операторов в [49]. В настоящее время метод подобных операторов активно разрабатывается профессором А. Г. Баскаковым и его учениками. Наиболее интересными за последнее десятилетие, помимо [13,15], являются работы [17–19,24–29,33,34,36,38–47,50–52,54–60,63,69]. Возникают разные модификации метода подобных операторов, позволяющие лучше учитывать спектральные свойства невозмущенного оператора или (и) характеристики оператора-возмущения. Например, принадлежность его специальным весовым операторным пространствам (см. [52, 54]). Отметим, что во всех цитированных выше работах оператор J является проектором и, соответственно, используется вместо теоремы 1 другая теорема, учитывающая именно этот факт и вытекающая из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора $A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, J — проектор ($J^2 = J$), выполнено условие* (1) *и $B \in \mathcal{M}$. Пусть также*
$$4\gamma\|J\|\|B\|_{\mathcal{M}} < 1. \tag{2}$$

Тогда отображение $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, *определенное формулой*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B =: \Phi(X), \quad X \in \mathcal{M}.$$

является сжимающим и имеет единственную неподвижную точку X_* *в шаре*

$$\mathscr{B} = \{X \in \mathcal{M} : \|X_* - B\|_{\mathcal{M}} \leqslant 3\|B\|_{\mathcal{M}}\},$$

которая может быть найдена методом простых итераций как предел последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$, *где* $X_1 = B$ *и* $X_n = \Phi(X_{n-1})$, $n \geqslant 2$. *Оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - JX_*$ *и оператором преобразования является оператор* $I + \Gamma X_*$, $\Gamma X_* \in \mathcal{M}$.

Условие (2) теоремы 2 можно улучшить в случае специального вида оператора $B \in \mathcal{M}$, а именно, если $JB = 0$. Такой результат получен в [60, Remark 3.1]; приведем его для полноты изложения.

Теорема 3. *Пусть* $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ *— допустимая тройка для оператора* $A\colon D(A) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{M}$ *и* $JB = 0$. *Тогда при выполнении условия*

$$3\gamma\|J\|\|B\|_{\mathcal{M}} < 1$$

оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - JX_*$, *где* $X_* \in \mathcal{M}$ *— решение нелинейного операторного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B.$$

При этом имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*).$$

Наконец, в случае $J = 0$, условие (2) теоремы 2 можно ослабить до приведенного в следующей теореме результата.

Теорема 4. *Пусть* $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ *— допустимая для оператора* A *тройка с* $J = 0$. *При выполнении условия*

$$\gamma\|B\| < 1$$

оператор $A - B$ *подобен невозмущенному оператору* A *и* $(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)A$, *где* X_* *— решение операторного уравнения* $X = B\Gamma X + B$.

Еще раз отметим, что теорема 1 является более общей, чем теоремы 2 и 3, и именно при ее использовании получены результаты данной работы, в отличие от работ с использованием техники метода подобных операторов последнего десятилетия. Заметим также, что во всех цитируемых работах, кроме [47], операторы действуют в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Сделаем далее краткий обзор источников [13,15,17–19,24–29,33,34,36,38–47,50–52,54–60,63,69]. Вначале отметим, что в 2009 году вышла работа [13], в которой доказательства теорем о подобии велись с использованием операторных матриц, и этот же принцип использовался далее в остальных работах. Также в работе [13], являющейся очень важной с точки зрения развития метода подобных операторов, было досконально разработано и проведено предварительное преобразование подобия, впервые предложенное в [8]. Суть его заключается в следующем. Пусть есть некоторое возмущение $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и есть некоторое удобное для дальнейшего использования пространство допустимых возмущений $\mathcal{M}$ для невозмущенного оператора $A\colon D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, но $B \notin \mathcal{M}$. Тогда, если это возможно, то, прежде чем применить метод подобных операторов к оператору $A - B$, строится предварительное преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - B_0$, где оператор B_0 уже принадлежит $\mathcal{M}$. И далее применяется стандартная схема метода подобных операторов в «удобном» пространстве допустимых возмущений. Обычно в качестве $\mathcal{M}$ берется двусторонний идеал операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. При этом необходимые свойства этого идеала, используемые в методе подобных операторов, можно найти, например, в [31]. Отметим также, что предварительное преобразование подобия без дальнейшего применения метода подобных операторов использовалась в статьях [20, 62] для доказательства существования такой непрерывной действительной положительной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, что $\sigma(A - B)$ лежит в полосе от $-f$ до f, где A — самосопряженный оператор и $B \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, причем оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где $B_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Для осуществления предварительного преобразования подобия необходимо выполнение ряда условий. Приведем их.

Предположение 1 (см. [13]). Операторы ΓB, JB, B удовлетворяют следующим условиям:
(a) $\Gamma B \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ и $\|\Gamma B\| < 1$;
(b) $(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$;
(c) $B\Gamma B$, $(\Gamma B)JB \in \mathcal{M}$;
(d) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$;
(e) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что выполнено неравенство

$$\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\|_\infty < \varepsilon.$$

Теорема 5 (см. [13]). *При выполнении предположения* 1 *оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - JB - B_0$*, где* $B_0 = (I + \Gamma B)^{-1}(B\Gamma B - (\Gamma B)JB)$*, причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma B) = (I + \Gamma B)(A - JB - B_0).$$

Заметим также, что оператор Дирака из [13] характерен тем, что собственные значения невозмущенного оператора «не разбегаются», но отделены друг от друга. Это вносит определенную трудность в применение метода подобных операторов, поэтому в этом случае также приходится учитывать специфику оператора-возмущения B. Работа [13] породила целый ряд статей [16, 17, 36, 46, 47, 56, 58, 59], в которых метод подобных операторов адаптировался под исследование возмущенных дифференциальных операторов первого порядка, при условии, что невозмущенный оператор является нормальным (самосопряженным) оператором с дискретным спектром и отделенными собственными значениями, при этом использовались операторные матрицы. Наконец, в 2020 году вышли работы [18, 19], в которых закрепилась модификация метода под такой класс операторов и собраны конкретные примеры под модификацию.

Отметим, что в последнее время возрос интерес к дифференциальным операторам первого порядка с инволюцией (см. работы А. П. Хромова и М. Ш. Бурлуцкой [14, 21–23]). Операторы, исследуемые в этих работах, также вкладываются в схему из [19]. С помощью метода подобных операторов эти операторы с инволюцией подобно исследовались в [16, 36, 58, 59, 61].

Следующей рубежной работой, в которой разрабатывается другая модификация метода подобных операторов, является работа [15]. В ней, с использованием предварительного преобразования подобия (см. предположение 1 и теорему 5), обосновывается схема исследования возмущенного самосопряженного дифференциального оператора с дискретным спектром, собственные значения которого «разбегаются» с возмущением-потенциалом из $L_2[0, \omega]$. Эта модификация широко развивалась Поляковым Д. М. для получения результатов в работах [24–26, 41, 42, 44], а также другими авторами, например, [52].

Более общая модификация метода подобных операторов, объединившая себе и [13] и [15], представлена в [60].

Отметим также серию работ [27–29, 57] (а также ссылки в них), в которых метод подобных операторов применяется для исследования разностных операторов. При этом у невозмущенного оператора предполагается дискретный спектр с разбегающимися собственными значениями (что соответствует растущему потенциалу), а возмущением является оператор с суммируемыми диагоналями. Поэтому, как правило, в качестве пространства допустимых возмущений используется пространство $\operatorname{End} \mathcal{H}$ или пространство $\operatorname{End}_1 \mathcal{H}$ операторов с суммируемыми диагоналями и предварительное преобразования не требуется. Все разностные операторы обычно рассматриваются в пространстве $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z})$.

Важно подчеркнуть, что в следующем разделе будем опираться на приведенные выше теоремы 1—4.

3. Преобразование подобия дифференциального оператора первого порядка. При изучении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка иногда бывает полезно исходный оператор преобразованием подобия перевести в оператор с более удобным для дальнейшего исследования операторным коэффициентом. В некоторых классах задач при выполнении определенных условий удается неавтономную задачу свести к автономной.

Пусть $(Ax)(t) = dx/dt\colon D(A) = W_p^1 \to L_p$, $p \in [1, \infty)$. Оператор A будет далее играть роль невозмущенного оператора. Пусть $(Bx)(t) = \mathcal{B}(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $B \in \operatorname{End} L_p$, $\mathcal{B} \in C_\omega(\mathbb{R}, \operatorname{End} L_p)$. Таким образом, оператор B есть оператор умножения на периодическую функцию, он будет играть роль оператора-возмущения.

С помощью метода подобных операторов далее приведем оператор $A - B$ в оператор $A - B_0$, где B_0 — оператор умножения на тригонометрический полином. В случае малости нормы оператора-возмущения оператор B_0 может быть оператором умножения на постоянную функцию. При этом в специальном случае, когда ряд Фурье функции $\mathcal{B}$ содержит только положительные (только отрицательные) коэффициенты, оператор $A - B$ может быть подобен невозмущенному оператору A. В этом случае получаем метод Фридрихса подобных операторов [53, 66].

Перейдем к построению допустимой тройки для невозмущенного оператора A. Так как функция $\mathcal{B}$ является периодической, то ее можно разложить в ряд Фурье

$$\mathcal{B}(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{B}(n) e^{i2\pi nt/\omega}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты $\widehat{B}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, считаются по формулам

$$\widehat{B}(n) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \mathcal{B}(t) e^{-i2\pi nt/\omega} dt.$$

Так как $\mathcal{B} \in C_\omega \subset L_{2,\omega}(\mathbb{R}, \operatorname{End} L_p)$, то последовательность коэффициентов $\{\widehat{B}(n),\, n \in \mathbb{Z}\}$, принадлежит $l_2(\mathbb{Z}, \operatorname{End} L_p)$.

Пусть $\mathcal{M}$ — пространство операторов умножения на функцию из C_ω. Таким образом, $X \in \mathcal{M}$, если $(Xx)(t) = \mathfrak{X}(t)x(t)$, $x \in L_p$, $\mathfrak{X} \in C_\omega$ и $\mathcal{M} \subset \operatorname{End} L_p$.

Введем в рассмотрение трансформаторы J_n, $\Gamma_n \in \operatorname{End} \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, следующим образом. Для оператора $X \in \operatorname{End} L_p$, $(Xx)(t) = \mathfrak{X}(t)x(t)$, $\mathfrak{X} \in C_\omega$, $x \in L_p$,

$$\mathfrak{X}(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(n) e^{i2\pi nt/\omega} dt,$$

оператор $J_n X$ является оператором умножения на тригонометрический полином, т.е. $(J_n X x)(t) = \mathfrak{X}_n(t)x(t)$, $\mathfrak{X}_n \in C_\omega$, $x \in L_p$,

$$\mathfrak{X}_n(t) = \sum_{|k| \leqslant n} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отметим, что трансформатор $J_n \in \operatorname{End} \mathcal{M}$ определен корректно. Подчеркнем еще раз, что функция $\mathfrak{X}_n \in C_\omega$ — периодическая того же периода ω и она является тригонометрическим операторозначным полиномом.

Рассмотрим трансформатор $\operatorname{ad}_A\colon D(\operatorname{ad}_A) \subset \operatorname{End} \mathcal{M} \to \operatorname{End} \mathcal{M}$, который обычно используется в методе подобных операторов и определяется стандартным для этого метода образом:

$$\operatorname{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\operatorname{ad}_A).$$

Область определения $D(\operatorname{ad}_A)$, состоящая из таких операторов $X \in \operatorname{End} \mathcal{M}$, обладает следующими свойствами:

(i) $XD(A) \subset D(A)$;

(ii) оператор $AX - XA\colon D(A) \subset L_p$ допускает расширение Y на L_p и полагается $\operatorname{ad}_A X = Y$.

В рассматриваемом случае, если X — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X} \in C_\omega$, производная которой $\mathfrak{X}'$ принадлежит C_ω, и $x \in D(A)$, имеем

$$\operatorname{ad}_A Xx = Xx + Xx' - Xx' = \dot{X}x,$$

где $\dot{X}$ — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X}' \in C_\omega$.

Из пункта (iii) определения 2 имеем, что если

$$\mathfrak{X}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad \mathfrak{X}'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{X}}(k) \frac{i2\pi k}{\omega} e^{i2\pi kt/\omega},$$

$X - J_n X$ — оператор умножения на функцию

$$\widetilde{\mathfrak{X}}(t) = \sum_{|k|>n} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega},$$

то $\Gamma_n X$ — оператор умножения на функцию

$$\mathfrak{Y}_n(t) = \sum_{|k|>n} \frac{\omega}{i2\pi k} \widehat{\mathfrak{X}}(k) e^{i2\pi kt/\omega}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad \mathfrak{Y}_n \in C_\omega.$$

Для функции $\mathfrak{Y}_n$ имеет место неравенство Бора—Фавара $\|\mathfrak{Y}_n\| \leqslant \pi\|\mathfrak{X}_n\|/(2(n+1))$, $n\in\mathbb{N}$, т.е. $\|\Gamma_n\| \leqslant \pi/(2(n+1))$ (см., например, [12]).

Для оценки нормы оператора J_n рассмотрим трапецевидную функцию $\tau_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $n > 0$, заданную формулой

$$\tau_n(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leqslant n, \\ 0, & |\lambda| > n+1, \\ n+1-\lambda, & n < \lambda \leqslant n+1, \\ n+1+\lambda, & -n-1 \leqslant \lambda < -n. \end{cases} \tag{3}$$

При этом $\tau_n = \widehat{\varphi}_n$ и известна оценка нормы функции φ_n из L_1 (см. [37, Лемма 1.10.1]):

$$\|\varphi_n\|_1 \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln(2n+1). \tag{4}$$

Можно показать, что

$$(J_n X x)(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\mathcal{B}(s-t)x(s)dt = (\varphi_n * \mathcal{B})(s)x(s).$$

Поэтому $\|J_n\| \leqslant \|\varphi_n\|_1 \leqslant 4/\pi + 2\ln(2n+1)/\pi$.

Отметим один специальный случай функции $\tau_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Пусть $n = 1$. Тогда функция τ_1, заданная формулой (3), является преобразованием Фурье функции

$$\varphi(t) = \frac{2\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\pi t^2}, \quad t\in\mathbb{R},$$

и кроме оценки $\|\varphi\|_1 \leqslant 4/\pi + (2\ln 3)/\pi$, вытекающей из (4) (см. [37]), известны и другие оценки нормы функции φ, например, $\|\varphi\|_1 \leqslant 2^{3/2}3^{-1/4}$ (см. [62] или [70])

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \sqrt{3}. \tag{5}$$

В приводимой ниже теореме 8 будем использовать оценку (5) из [70], так как она является наиболее точной из приведенных.

Теорема 6. *Тройка $(\mathcal{M}, J_n, \Gamma_n)$ является допустимой тройкой для невозмущенного оператора A при любом $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить выполнение условий определения 2.

Условие (i) выполняется ввиду ограниченности возмущения. Условие (ii) следует из построения трансформаторов J_n и Γ_n, $n\in\mathbb{N}$. Условие (iii) опять же следует из построения трансформатора Γ_n, $n\in\mathbb{N}$. Условие (iv) выполняется с константой $\gamma = \pi/(2(n+1))$, $n\in\mathbb{N}$. И, наконец, выполнение условия (v) следует из ограниченности возмущения $X\in\mathcal{M}$, если в качестве λ_ε брать довольно большое натуральное число. Теорема доказана. □

Отметим, что в рассматриваемом случае трансформаторы J_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, являются проекторами. Но при этом условие (1), необходимое для теоремы 2, выполняется только в случае $n = 0$. Поэтому, несмотря на то, что J_n, $n \in \mathbb{N}$, — проектор, можно применить только самую общую теорему 1. При этом условие (2) теоремы 1 переписывается в виде

$$\frac{3}{n+1}(4 + 2\ln(2n+1))\|\mathcal{B}\| < 1$$

и выполняется при достаточно большом n. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Оператор $d/dt - B$, где B — оператор умножения на функцию $\mathcal{B} \in C_\omega$, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, с $\mathcal{B} \in C_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на тригонометрический полином $\mathcal{B}_0 \in C_\omega$.*

Из теорем 1, 6 и оценки (5) немедленно вытекает

Теорема 8. *Пусть для функции $\mathcal{B} \in C_\omega$ выполнено условие*

$$\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\|\mathcal{B}\| < 1.$$

Тогда оператор $d/dt - B$, где B — оператор умножения на функцию $\mathcal{B}$, подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на функцию $\mathfrak{X}_* \in C_\omega$ вида

$$\mathfrak{X}_*(t) = e^{-i2\pi t/\omega}C_1 + C_2 + e^{i2\pi t/\omega}C_3,$$

где $C_k \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Рассмотрим теперь случай $n = 0$. Тогда $J = J_0$ и JX — оператор умножения на постоянную функцию (имеющую только коэффициент Фурье $\widehat{\mathfrak{X}}(0)$). Тогда операторы J_0X, $X - J_0X$ и $\Gamma_0 X$ — это операторы умножения на функции из C_ω, имеющие ряды Фурье соответственно:

$$\mathfrak{X}_0(t) = \widehat{\mathfrak{X}}(0), \quad \mathfrak{X}^0(t) = \mathfrak{X}(t) - \mathfrak{X}_0(t) = \sum_{k \neq 0} \widehat{\mathfrak{X}}(k)e^{i2\pi kt/\omega},$$

$$\mathfrak{Y}_0(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{\omega}{i2\pi k}\widehat{\mathfrak{X}}(k)e^{i2\pi kt/\omega}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Причем $\|\mathfrak{Y}_0\| \leqslant \pi\|\mathfrak{X}\|/2$, т.е. $\gamma \leqslant \pi/2$.

Для оценки нормы $\|J_0\|$ в рассматриваемом случае удобно использовать треугольную функцию

$$\widetilde{\tau}(\lambda) = \begin{cases} 0, & |\lambda| \geqslant 1, \\ 1 - |\lambda|, & |\lambda| \leqslant 1. \end{cases}$$

При этом $\widetilde{\tau} = \widehat{\varphi}$ и известно, что $\|\varphi\|_1 = \widetilde{\tau}(0) = 1$ (см. [1, 37]).

Осталось применить теорему 2. Так как в этом случае оператор J является проектором и выполнено условие (2), имеет место

Теорема 9. *Пусть выполнено условие*

$$2\pi\|\mathcal{B}\| < 1. \tag{6}$$

Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на постоянную функцию.

Условие (6), позволяющее приводить дифференциальный оператор с переменным операторным коэффициентом к дифференциальному оператору с постоянным коэффициентом, можно ослабить в случае, если среднее

$$\int_0^\omega \mathcal{B}(t)dt$$

функции $\mathcal{B}$ есть нуль. При этом используется теорема 3.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{3\pi}{2}\|\mathcal{B}\| < 1$$

и функция $\mathcal{B}$ имеет нулевое среднее. Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в $L_p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leqslant p < \infty$, подобен оператору $d/dt - B_0$, где B_0 — оператор умножения на постоянную функцию.

Рассмотрим еще один специальный случай потенциала $\mathcal{B}$. Пусть функция $\mathcal{B}$ имеет ряд Фурье вида

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{n>0} \widehat{\mathcal{B}}(n) e^{i2\pi nt/\omega} \quad \left(\mathcal{B}(t) \sim \sum_{n<0} \widehat{\mathcal{B}}(n) e^{i2\pi nt/\omega}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае оператор умножения на функцию $\mathcal{B}$ будет строго каузальным (строго антикаузальным), и такие операторы образуют в C_ω замкнутое подпространство [11]. Тогда в качестве пространства допустимых возмущений $\mathcal{M}$ берется пространство операторов умножения на функции, имеющие в разложении ряд Фурье только положительные (только отрицательные) коэффициенты. При этом очевидно, что трансформатор $J = J_0$ в рассматриваемом случае будет нулевым, $\|J\| = 0$. Более того, из работы [12] следует, что в этом случае $\gamma = 1$. Все остальные рассуждения остаются в силе, и из теоремы 4 следует

Теорема 11. *Пусть функция $\mathcal{B} \in C_\omega$ имеет только положительные* (*отрицательные*) *ненулевые коэффициенты Фурье и выполнено условие*

$$\|\mathcal{B}\| < 1.$$

Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, подобен оператору d/dt.

Отметим также, что используя более детальный подход, теорему 11 можно значительно усилить, отбросив условие на $\|\mathcal{B}\|$. Следующий результат является частным случаем теоремы 1.7 из [3].

Теорема 12. *Пусть функция $\mathcal{B} \in C_\omega$ имеет только положительные* (*отрицательные*) *ненулевые коэффициенты Фурье. Тогда оператор $d/dt - B$, действующий в пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, подобен оператору d/dt.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965..
2. *Баскаков А. Г.* Замена Крылова—Боголюбова в теории нелинейных возмущений линейных операторов. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1980.
3. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 1. — С. 21–39.
4. *Баскаков А. Г.* Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами// Укр. мат. ж. — 1983. — *35*, № 4. — С. 416–421.
5. *Баскаков А. Г.* Замена Крылова—Боголюбова в теории возмущений линейных операторов// Укр. мат. ж. — 1984. — *36*, № 5. — С. 606–611.
6. *Баскаков А. Г.* Метод усреднения в теории возмущений линейных дифференциальных операторов// Диффер. уравн. — 1985. — *21*, № 4. — С. 555–562.
7. *Баскаков А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — *50*, № 3. — С. 435–457.
8. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
9. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — *58*, № 4. — С. 3–32.
10. *Баскаков А. Г.* Об абстрактном аналоге преобразования Крылова—Боголюбова в теории возмущенных линейных операторов// Функц. анал. прилож. — 1999. — *33*, № 2. — С. 76–80.
11. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — *69*, № 3. — С. 3–54.

12. *Баскаков А. Г., Синтяева К. А.* О неравенствах Бора—Фавара для операторов// Изв. вузов. Мат. — 2009 № 12. — С. 14–21.
13. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 3. — С. 3–28.
14. *Бурлуцкая М. Ш.* О смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией и с периодическими краевыми условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 1. — С. 3–12.
15. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 1. — С. 3–47.
16. *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Метод Фурье для дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов// Уфим. мат. ж. — 2018. — *10*, № 3. — С. 11–34.
17. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств возмущенных дифференциальных операторов первого порядка// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — *171*. — С. 3–18..
18. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры. I// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 3. — С. 185–194.
19. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 2. — С. 71–85.
20. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах оператора Дирака на прямой// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 2. — С. 153–161.
21. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией// Докл. РАН. — 2010. — *435*, № 2. — С. 151–154.
22. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка* Докл. РАН. — 2011. — *441*, № 2. — С. 156–159.
23. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией* Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2011. — *51*, № 12. — С. 2233–2246.
24. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 4. — С. 458–474.
25. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора третьего порядка// Алгебра и анализ. — 2019. — *31*, № 4. — С. 16–47.
26. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М. Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц* Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 10–29.
27. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — № 3(28). — С. 40–48.
28. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 3. — С. 101–111.
29. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — *14*. — С. 673–689.
30. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
31. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
32. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3. — М.: Мир, 1974.
33. *Карпикова А. В.* Асимптотика собственных значений оператора Штурма—Лиувилля с периодическими краевыми условиями// Уфим. мат. ж. — 2014. — *6*, № 3. — С. 28–34.
34. *Карпикова А. В.* Асимптотика собственных значений интегро-дифференциального оператора с периодическими краевыми условиями// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 1. — С. 153–156.
35. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
36. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1091–1132.
37. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.

38. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями// Алгебра и анализ. — 2015. — *27*, № 5. — С. 117–152.
39. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ несамосопряженного оператора четвертого порядка с негладкими коэффициентами// Сиб. мат. ж. — 2015. — *56*, № 1. — С. 165–184.
40. *Поляков Д. М.* Спектральные свойства одномерного оператора Шрёдингера// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 2. — С. 146–152.
41. *Поляков Д. М.* Одномерный оператор Шрёдингера с квадратично суммируемым потенциалом// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 3. — С. 596–615.
42. *Поляков Д. М.* О спектральных характеристиках несамосопряженного оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Мат. заметки. — 2019. — *105*, № 4. — С. 637–642.
43. *Поляков Д. М.* Оценки длин спектральных лакун операторов Шрёдингера и Дирака// Диффер. уравн. — 2020. — *56*, № 5. — С. 595–604.
44. *Поляков Д. М.* Спектральные оценки для оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2020. — *60*, № 7. — С. 1201–1223.
45. *Поляков Д. М.* О нелокальном возмущении периодической задачи для дифференциального оператора второго порядка// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 1. — С. 14–21.
46. *Романова Е. Ю.* Спектральный анализ дифференциального оператора с инволюцией// Вестн. НГУ. Сер. мат. мех. информ. — 2014. — *14*, № 4. — С. 64–78.
47. *Романова Е. Ю.* Спектральный анализ оператора Дирака в лебеговых пространствах// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 2. — С. 142–149.
48. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
49. *Ускова Н. Б.* К одному результату Р. Тернера// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 905–917.
50. *Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах оператора Штурма—Лиувилля с матричным потенциалом// Уфим. мат. ж. — 2015. — *7*, № 3. — С. 88–99.
51. *Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одного дифференциального оператора второго порядка с матричным потенциалом// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 5. — С. 579–588.
52. *Ускова Н. Б.* Матричный анализ спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 369–405.
53. *Фридрихс К. О.* Возмущение спектра в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.
54. *Шелковой А. Н.* Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями// Мат. физ. компьют. модел. — 2018. — *21*, № 4. — С. 18–33.
55. *Щербаков А. О.* Спектральный анализ несамосопряженного оператора Штурма—Лиувилля с сингулярным потенциалом// Науч. вед. Белгород. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *12 (155)*, № 31. — С. 102–108.
56. *Щербаков А. О.* Регуляризованный след оператора Дирака// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 1. — С. 134–146.
57. *Baskakov A. G., Garkavenko G. V., Glazkova M. Yu., Uskova N. B.* On spectral properties of one class difference operators// J. Phys. Conf. Ser. — 2002. — *1479*. — 01.
58. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu.* Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evolution Equations. — 2017. — *17*. — P. 669–684.
59. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// Oper. Matrices. — 2018. — *12*, № 3. — P. 723–756.
60. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *477*, № 2. — P. 930–960.
61. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 2. — P. 30–39.
62. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Closed operator functional calculus in Banach modules and applications// J. Math. Anal. Appl. — 2020. — *492*, № 2. — 124473.
63. *Garkavenko G. V., Zgolich A. R., Uskova N. B. Spectral analysis of one class of the integro-differential operators* J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203*. — 012102.
64. *Delsarte J.* Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation// Colloque C.N.R.S. Nancy. — 1956. — P. 29–45.

65. *Delsarte J., Lions J. L. Transmutations d'operateurs differentiels dans le domaine complexe* Commun. Math. Helv. — 1957. — *32*. — P. 113–128.
66. *Friedrichs K. O.* Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
67. *Kravchenko V. V.* Forward and inverse Sturm–Liouville problems: A Method of Solution. — Basel: Springer-Verlag, 2020.
68. *Kravchenko V. V., Sitnik S. M.* Transmutation Operators and Applications. — Basel: Birkhäuser, 2020.
69. *Polyakov D. M.* Formula for regularized trace of a second-order differential operator with involution// J. Math. Sci. — 2020. — *251*, № 5. — P. 748–759.
70. *Reiter H., Stegeman J. D.* Classical harmonic analysis and locally compact groups. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2000.
71. *Shishkina E., Sitnik S.* Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. — Academic Press, 2020.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет;
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Кринтал Илья Аркадьевич
Университет Северного Иллинойса, Декалб, Иллинойс, США
E-mail: ikrishtal@niu.edu

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru