ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 223 (2023). С. 107–111
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-223-107-111

УДК 517.7

ДЕФОРМАЦИЯ НОРМ МИНКОВСКОГО В ЕВКЛИДОВЫ НОРМЫ

© 2023 г. **В. Ю. РОВЕНСКИЙ**

Аннотация. Изучаются деформации норм Минковского с кусочно гладкими индикатрисами, определяемыми линейно независимыми 1-формами и кусочно гладкой положительной функцией. Такая деформация евклидовой нормы обобщает классические (α, β)-нормы М. Мацумото. Показано, что любую норму Минковского можно деформировать в евклидову норму композицией таких деформаций.

Ключевые слова: выпуклое тело, норма Минковского.

DEFORMING MINKOWSKI NORMS TO EUCLIDEAN NORMS

© 2023 **V. Yu. ROVENSKI**

Abstract. We study deformations of Minkowski norms with piecewise smooth indicatrices determined by linearly independent 1-forms and a piecewise smooth positive function. Such a deformation of the Euclidean norm generalizes the classical (α, β)-norms by M. Matsumoto. We show that any Minkowski norm can be deformed into a Euclidean norm by a composition of such deformations.

Keywords and phrases: convex body, Minkowski norm.

AMS Subject Classification: 52A20, 53B40

1. Введение. Некоторый интерес геометров вызывает деформация финслеровых структур на многообразиях (см., например, [1,5,7]); эти структуры состоят из норм Минковского на касательных пространствах. С другой стороны, аппроксимация выпуклых тел часто рассматривалась в теории выпуклости, дискретной геометрии, теории нормированных пространств, в геометрических алгоритмах и теории оптимизации. В данной работе мы рассматриваем норму Минковского F в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ как «несимметричную» норму (т.е. допустима ситуация, когда $F(-y) \neq F(y)$), индикатриса которой $\{y \in \mathbb{R}^n : F(y) = 1\}$ является кусочно гладкой выпуклой гиперповерхностью. Рассмотрим деформации норм Минковского F, введенные в [5], и соответствующие им точечные выпуклые тела, F-единичные шары и их центры в $\mathbb{R}^n$, деформация которых определяется набором $p < n$ линейно независимых 1-форм и кусочно гладкой положительной функцией p переменных. Применение такой деформации к евклидовой норме α обобщает классические (α, β)-нормы (см. [2,6]) и дает нормы Минковского, определенные в [4] для $p < n$ (см. также [3] для случая $p = 2$); их индикатрисы связывали выпуклые тела с $(n-p)$-мерными осями вращения, проходящими через начало координат.

Следующий вопрос об отображении между двумя парами (B_i, q_i), $i = 1, 2$, где B_i — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, а q_i — точка внутренности B_i, было сформулировано в [5]: *когда* (B_1, q_1) *можно деформировать в* (B_2, q_2) *композицией конечного числа этих деформаций?*

В [5] показано, что эллипсоид в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ можно деформировать в α-единичный шар за конечное число таких деформаций с $p = 1$. В этой работе мы докажем (теорема 4), что любое выпуклое тело (B, q) в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ можно деформировать в α-единичный шар посредством композиции $4n - 4$ таких деформаций с $p = 1$ и одной деформации с $p = n-1$. Отметим, что деформацию с $p = n-1$ можно заменить несколькими деформациями с $p = 1$. При $n = 2$ можно использовать только пять деформаций с $p = 1$ (следствие 1).

2. Предварительные результаты.

Напомним необходимые результаты и примеры из [5].

Определение 1. Пусть F — норма Минковского на $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ — последовательность $p < n$ линейно независимых 1-форм на $\mathbb{R}^n$ с нормами $F(\beta_i) < \delta_i$ и $\phi : \prod_{i=1}^{p} [-\delta_i, \delta_i] \to (0, \infty)$ — кусочно гладкая функция. Тогда *$T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформация* $\bar{F}$ нормы F (или выпуклого тела, определяемого неравенством $\{F \leqslant 1\}$) задается выражением

$$\bar{F}(y) = F(y)\, \phi(s_1, \dots, s_p), \quad \text{где } s_i = \beta_i(y)/F(y) \text{ и } y \neq 0. \tag{1}$$

Это порождает отображение $T_{\boldsymbol{b},\phi} : F \mapsto \bar{F}$ из подходящего множества $D_{\boldsymbol{b},\phi}$ норм Минковского во все пространство таких норм: $F \in D_{\boldsymbol{b},\phi}$, если $\bar{F}$ — норма Минковского.

Образом $T_{\boldsymbol{b},\phi}(\alpha)$ евклидовой нормы α называется так называемая *$(\alpha, \boldsymbol{b})$-норма* с $p < n$ (см. [4]); его индикатриса представляет собой гиперповерхность вращения с p-мерной осью, натянутой на $\{\beta_1^\sharp, \dots, \beta_p^\sharp\}$; здесь и далее $\sharp : T^*M \to TM$ — «музыкальный» изоморфизм по отношению к скалярному произведению, определенному α. При $p = n$ понятие *$T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформации* лишено смысла, поскольку такая деформация позволила бы деформировать F до любой другой нормы $\bar{F}$. При $p = 1$ формула (1) определяет $T_{\beta,\phi}$-деформацию, которая была названа β-заменой в [7] и (F, β)-нормой в [1]. Композиция $k < n$ деформаций с $p = 1$ имеет вид одной деформации с $p = k$, но обратное неверно. Образ $T_{\beta,\phi}(\alpha)$ нормы α — это просто *(α, β)-норма*, играющая важную роль в финслеровой геометрии, (см. [2, 6]).

Теорема 1. *Пусть $\phi(s_1, \dots, s_p) \geqslant c > 0$ для $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{R}^p$, $p < n$ (см. определение 1, α — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Тогда деформация*

$$T_{\boldsymbol{b},\phi} : (D_{\boldsymbol{b},\phi}, d_H) \to (\mathrm{Mink}_n, d_H)$$

является липшиц-непрерывной с константой $1/c$, где d_H — расстояние Хаусдорфа, определяемое нормой α.

Теорема 2. *Следующие три условия для $F \in \mathrm{Mink}_n$ эквивалентны*:
- (i) *F является $(\alpha, \boldsymbol{b})$-нормой с $p < n$;*
- (ii) *$\{F = 1\}$ имеет p-мерную ось вращения в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$;*
- (iii) *F можно $T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформировать до евклидовой нормы α.*

В частности, норма Минковского F в $\mathbb{R}^n$ может быть деформирована в евклидову норму одной $T_{\beta,\phi}$-деформацией тогда и только тогда, когда $\{F = 1\}$ имеет ось вращения.

Пример 1. О частных случаях (α, β)-норм известно довольно много. Они связаны со специальными $T_{\beta,\phi}$-деформациями норм Минковского.

1. При $\phi = 1 + s$, $|s| < 1$, получаем *норму Рандерса* $F = \alpha + \beta$, введенную физиком Г. Рандерсом для изучения единой теории поля. *Деформация Рандерса* возникает при $\bar{F} = F + \beta$ с $F(\beta) < 1$.

2. *Квадратичная норма* $F = (\alpha + \beta)^2/\alpha$, т. е. $\phi = (1 + s)^2$ с $|s| < 1$, появляется во многих геометрических задачах. *Квадратичная деформация* задается формулой $\bar{F} = (F + \beta)^2/F$, где $F(\beta) < 1$.

3. Перенос произвольной нормы Минковского F в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ на вектор w в норму Минковского $\bar{F}$ неявно задается уравнением $F(v/\bar{F}(v) - w) = 1$, $v \neq 0$, аналогично тому, как описываются решения навигационной задачи Цермело (см., например, [6]). Если индикатриса нормы Минковского $\bar{F}$ в $(\mathbb{R}^n, \alpha)$ обладает вращательной симметрией, то согласно теореме 2 норма $\bar{F}$ имеет тип (α, β). Получим выражение для функции ϕ, например, для случая, когда $\{F = 1\}$ — единичная α-сфера,

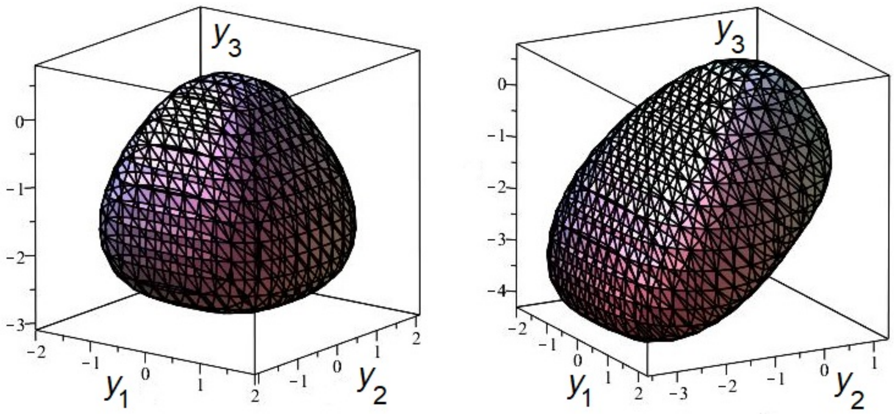

Рис. 1. Индикатриса 3-корневой нормы в $\mathbb{R}^3$ после квадратичной деформации и квадратичной деформации со сдвигом.

сдвинутая на вектор ce_1, где $|c| < 1$. Полагая $\bar F = \alpha\,\phi(\beta/\alpha)$ для функции $\phi > 0$ и 1-формы $\beta(y) = c\,y_1$, получим два представления для $\{\bar F = 1\}$:

$$\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2}\phi\left(c\,y_1/\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big)^{1/2}\right) = 1, \quad (y_1 - c)^2 + \sum_{i=2}^n y_i^2 = 1.$$

Положив

$$s = c\,y_1/\Big(\sum_i y_i^2\Big)^{1/2},$$

получим $y_1 = (s/c)(s + (s^2 + 1 - c^2)^{1/2})$. Таким образом,

$$\phi = \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + 1 - c^2}}.$$

4. Частным случаем $T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформации при $p = 2$ является *сдвинутая T_{ϕ,β_1}-деформация*

$$\bar F = F\tilde\phi(\beta_1/F) + \beta_2,$$

т. е. $\phi(s_1, s_2) = \tilde\phi(s_1) + s_2$, что для $F = \alpha$ связано с навигацией Цермело. На рис. 1 изображена индикатриса 3-корневой нормы $|y^1|^3 + |y^2|^3 + |y^3|^3 = 1$ в $\mathbb{R}^3$ для (a) квадратичной деформации с $p = 1$ и $\beta = 0{,}4\,dy^3$, (b) *смещенной квадратичной деформации* с $p = 2$ и $\beta_1 = 0{,}4\,dy^3$, $\beta_2 = 0,3\,dy^2$.

Используя композиции $T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформаций, можем определить отношение эквивалентности на множестве Mink_n.

Можем записать $\bar F \overset{p}{\sim} F$ для $F, \bar F \in \mathrm{Mink}_n$ и $p < n$, если существуют деформации $T_{\boldsymbol{b}^i,\phi_i}$, $i \leqslant m$, такой длины p, что

$$F_1 = F\phi_1(\boldsymbol{b}^1/F), \quad \ldots \quad \bar F = F_{m-1}\phi_m(\boldsymbol{b}^m/F_{m-1}).$$

Это отношение эквивалентности на Mink_n (см. теорему 3, приведенную ниже); например, любые две евклидовы нормы в $\mathbb{R}^n$ $\overset{1}{\sim}$ эквивалентны (см. [5]).

Другими словами, пусть (B_i, q_i), $i = 1, 2,$ — два точечных (телесных) эллипсоида в $\mathbb{R}^n$; тогда (B_1, q_1) можно деформировать в (B_2, q_2) последовательностью $T_{\beta,\phi}$-деформаций. Множества норм Минковского в $\mathbb{R}^n$ и точечных выпуклых тел остаются во взаимно однозначном соответствии друг другу. устанавливаемом с помощью индикатрис норм. Таким образом, можно написать $(B_1, q_1) \overset{p}{\sim} (B_2, q_2)$ для точечных выпуклых тел, если соответствующие нормы $\overset{p}{\sim}$-эквивалентны.

Теорема 3. *Для любой $Tv\beta, \phi$-деформации норм Минковского F в $\bar F$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, удовлетворяющей условию*

$$\phi - \sum_i s_i\dot\phi_i > 0, \tag{2}$$

существует обратная $T_{\boldsymbol{b},\psi}$-деформация $\bar F$ в F (с тем же $\boldsymbol{b}$), удовлетворяющая неравенству

$$\psi - \sum_i t_i\,\dot\psi_i > 0.$$

В частности, любая $(\alpha,\boldsymbol{b})$-норма может быть $T_{\boldsymbol{b},\phi}$-деформирована в евклидову норму α.

3. Основные результаты. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть α — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Любая норма Минковского F в $(\mathbb{R}^n,\alpha)$ может быть деформирована в α при помощи композиции $4n-3$ деформаций (1) с $p=1$ и одной деформации с $p=n-1$. Другими словами, любое выпуклое тело (B,q) в $\mathbb{R}^n$ может быть преобразовано в единичный α-шар при помощи композиции $4n-4$ деформаций с $p=1$ и одной деформаций с $p=n-1$.*

Доказательство. Впишем n-мерную бипирамиду Π в $\{F=1\}$, затем найдем $4n-4$ преобразований T_{β_i,ϕ_i}, композиция которых деформирует $\{F=1\}$ в Π. Наконец, преобразуем Π в единичную сферу $\{\alpha=1\}$, используя преобразование $T_{\boldsymbol{b},\tilde\phi}$ с $p=n-1$. Даже для гладкой функции F на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ промежуточные нормы (в построенной нами последовательности) в некоторых точках недифференцируемы, поэтому, сглаживая функции ϕ_i в окрестностях их особенностей, приблизительно получаем сферу $\{\alpha=1\}$.

1. Пусть L — $(n-2)$-мерное подпространство (проходящее через начало координат O), а $L^\perp$ — плоскость, проходящая через O ортогонально к L. Пусть $l(0)\subset L^\perp$ — прямая, проходящая через O ортогонально к L. Тогда $l(0)$ пересекает $\{F=1\}$ в двух точках $q(0)$ и $\tilde q(0)$. Предположим, что

$$|Oq(0)| > |O\tilde q(0)|.$$

Повернув $l(0)$ вокруг L на угол θ (который можно рассматривать как полярный угол в $L^\perp$), получим прямую $l(\theta)\subset L^\perp$, пересекающую $\{F=1\}$ в двух точках $q(\theta)$ и $\tilde q(\theta)$, которые непрерывно зависят от $\theta\in[0,\pi]$. Отметим, что для $\theta=\pi$

$$|Oq(\pi)| = |O\tilde q(0)| < |Oq(0)| = |O\tilde q(\pi)|.$$

По соображениям непрерывности существует такое $\theta\in[0,\pi]$, что $|Oq(\theta)|=|O\tilde q(\theta)|$. Теперь изменим обозначения, положив $q_1=q(\theta)$, $\tilde q_1=\tilde q(\theta)$ и $l_1=l(\theta)$.

2. Повороты в $\mathbb{R}^n$ с фиксированной осью l_1 находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми поворотами в подпространстве V^{n-1}, ортогональном l_1. Пусть F_1 — ограничение F на V^{n-1}; тогда $\{F_1=1\}=\{F=1\}\cap V^{n-1}$. Повторяем процедуру, аналогичную шагу 1, в V^{n-1} и найдем прямую l_2, ортогональную l_1 и пересекающую $\{F_1=1\}$ в таких двух точках q_2 и $\tilde q_2$, что $|Oq_2|=|O\tilde q_2|$. Повторяя эту процедуру $n-1$ раз, найдем попарно ортогональные прямые $l_1,\dots,l_{n-1}$, проходящие через O и такие, что

$$|Oq_i| = |O\tilde q_i|, \quad \{q_i,\tilde q_i\} = l_i\cap\{F=1\}, \quad i<n.$$

Прямая l_n, ортогональная всем $l_1,\dots,l_{n-1}$, пересекает $\{F=1\}$ в точках q_n и $\tilde q_n$.

Выпуклая бипирамида Π с вершинами $\{q_i,\tilde q_i\}$, ß $\leqslant n$, представляет собой объединение двух пирамид Π^+ и Π^- над $(n-1)$-мерным параллелепипедом $\tilde\Pi$ (общее основание) с вершинами $\{q_i,\tilde q_i\}$, $i<n$: Π^+ с вершиной q_n и его зеркальное отражение Π^- относительно основания с вершиной $\tilde q_n$.

3. Деформируем $\{F=1\}$ в бипирамиду $\Pi=\Pi^+\cup\Pi^-$ с помощью $4n-4$ преобразований с $p=1$. Занумеруем $2n-2$ граней $\tilde\Pi$ и возьмем такую 1-форму β_1, что $\alpha(\beta_1)=1$ и вектор $\beta_1^\sharp$ ортогонален грани, натянутой на q_n, и первой грани Q_1 $\tilde\Pi$. Обратим внимание, что функция $\phi_1=\max\{1,\, s/\beta_1(q_n)\}$ такова, что T_{β_1,ϕ_1} сохраняет часть $\{F=1\}$ в полупространстве $\{\beta_1\leqslant 1\}$ и отображает остальную часть $\{F=1\}$ в опорную гиперплоскость $\{\beta_1=1\}$ грани Q_1. Итак, T_{β_1,ϕ_1} отображает $\{F=1\}$ в выпуклую гиперповерхность $\{F_1=1\}=\{F=1\}\cap\{\beta_1\ le 1\}$ (с особенностями на пересечении $\{F=1\}$ с гиперплоскостью $\{\beta_1=1\}$). Аналогично находятся все $4n-4$ преобразований T_{β_i,ϕ_i} (для $2n-2$ боковых граней Π^+ и $2n-2$ боковых граней Π^-), композиция которых $\tilde T=T_{\beta_1,\phi_1}\circ\ldots\circ T_{\beta_{4n-4},\phi_{4n-4}}$ отображает $\{F=1\}$ в Π.

4. Поскольку Π имеет гиперплоскости симметрии, например, подпространство, ортогональное Oq_1, по теореме 2 (случай $p=n-1$) Π является индикатрисой $(\alpha,\boldsymbol{b})$-нормы с $p=n-1$. По

теореме 2 (о том, что $(\alpha, \boldsymbol{b})$-норма может быть $T_{\boldsymbol{b},\tilde{\phi}}$-деформирована в α), можно взять 1-формы $\tilde{\beta}_i$, двойственные векторам $\overrightarrow{Oq_i}/\alpha(\overrightarrow{Oq_i})$ при $i = 2, \dots, n$, а затем применить равенство

$$\alpha(y) = \tilde{\phi}(\tilde{\beta}_2(y), \dots, \tilde{\beta}_n(y)), \quad y \in \Pi, \quad p = n - 1$$

(см. (1)). Находим такую функцию $\tilde{\phi}$ от переменных $(s_1, \dots, s_{n-1})$, что $T_{\boldsymbol{b},\tilde{\phi}}$ с $\boldsymbol{b} = (\tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n)$ деформирует Π в единичную сферу $\{\alpha = 1\}$. Таким образом, композиция $T_{\boldsymbol{b},\tilde{\phi}} \circ \tilde{T}$ деформирует F в евклидову норму α. □

Следствие 1. *Любое выпуклое тело* (B, q) *на евклидовой плоскости можно преобразовать в единичный круг комбинацией пяти деформаций* (1) *с* $p = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Javaloyes M. A., Sánchez M.* On the definition and examples of Finsler metrics// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 2014. — *13*, № 3. — P. 813–858.
2. *Matsumoto M.* Theory of Finsler spaces with (α, β)-metric// Repts. Math. Phys. — 1992. — *31*, № 1. — P. 43–83.
3. *Rajabi T., Sadeghzadeh N.* A new class of Finsler metrics// Mat. Vesnik. — 2021. — *73*, № 1. — P. 1–13.
4. *Rovenski V.* The new Minkowski norm and integral formulae for a manifold with a set of one-forms// Balkan J. Geom. Appl. — 2018. — *23*, № 1. — P. 75–99.
5. *Rovenski V., Walczak P.* Deforming convex bodies in Minkowski geometry// Int. J. Math.. — *33*, № 1. — 2250003.
6. *Shen Y.-B., Shen Z.* Introduction to Modern Finsler Geometry. — World Scientific, 2016.
7. *Shibata C.* On invariant tensors of β-changes of Finsler metrics// J. Math. Kyoto Univ. — 1984. — *24*. — P. 163–188.

Ровенский Владимир Юзефович
Хайфский университет, Хайфа, Израиль
E-mail: `vrovenski@univ.haifa.ac.il`