ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 210 (2022). С. 35–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-210-35-48

УДК 517.956.3

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. **А. Т. АСАНОВА**

Аннотация. Рассматривается периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений второго порядка со смешанными производными. Исследуются вопросы существования единственного классического решения рассматриваемой задачи и способы его построения.

Ключевые слова: система гиперболических уравнений, двоякопериодическое решение, разрешимость, алгоритм, метод введения функциональных параметров.

ON THE THEORY OF PERIODIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF HYPERBOLIC EQUATIONS IN THE PLANE

© 2022 **A. T. ASSANOVA**

Abstract. A periodic problem on the plane for a system of second-order hyperbolic equations with mixed derivatives is considered. The existence of a unique classical solution of the problem is examined and methods of constructing it are discussed.

Keywords and phrases: system of hyperbolic equations, doubly periodic solution, solvability, algorithm, method of functional parameters.

AMS Subject Classification: 35L51, 35L53, 34B10, 34C25, 34K13

1. Введение и постановка задачи. Периодические задачи для уравнений в частных производных гиперболического типа широко используются в качестве математической модели реальных физических процессов (см. [1,9–16,19,21–28]) и представляют собой важную часть качественной теории уравнений математической физики. Исследованию периодических решений уравнений и систем гиперболического типа посвящены работы многих авторов. Для решения периодической краевой задачи применялись методы качественной теории дифференциальных уравнений, метод Фурье, методы функционального анализа, асимптотические методы, вариационный метод и др. (обзор и библиографию см. в [11, 13, 19, 25, 28]).

Вопросы нахождения эффективных признаков существования единственного периодического на плоскости решений систем гиперболических уравнений со смешанными производными и методы нахождения приближенных решений рассматриваемых задач остаются открытыми и представляют огромный интерес в приложениях (см. [10–12, 26, 27]). Эти вопросы требуют разработки специальных методов решения.

В [4] была исследована периодическая задача на плоскости решения для системы линейных гиперболических уравнений (1), при отсутствии производной по временной переменной, т.е. при $B(t, x) = 0$. Путем сведения к семейству периодических краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и функциональным соотношениям были установлены достаточные условия существования единственного периодического решения на плоскости системы гиперболических уравнений в терминах исходных данных.

В настоящей работе вопросы существования, единственности и нахождения периодических по обеим переменным решений системы гиперболических уравнений второго порядка изучаются на основе введения дополнительных функциональных параметров (см. [2, 5–7, 20]). В настоящем разделе приведена постановка периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений второго порядка со смешанными производными. При периодичности коэффициентов и правой части системы исследуемая задача может рассматриваться как периодическая задача для системы гиперболических уравнений в прямоугольной области. В разделе 2 периодическая задача для системы гиперболических уравнений в прямоугольнике сводится к эквивалентной задаче, состоящей из полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений с функциональным параметром и периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены алгоритмы нахождения приближенных решений полученной эквивалентной задачи. В разделах 3 и 4 рассмотрены каждая из вспомогательных задач и приведены достаточные условия их однозначной разрешимости в терминах данных задачи. В разделе 5 установлены условия существования единственного решения эквивалентной задачи и доказана сходимость построенного алгоритма в терминах исходных данных. Получены условия существования единственного решения периодической задачи для системы гиперболических уравнений в прямоугольнике. Установлены достаточные условия существования единственного двоякопериодического решения системы гиперболических уравнений на плоскости в терминах коэффициентов и правой части системы, периодов по временной и пространственной переменным. Применение данного подхода позволяет расширить класс систем гиперболических уравнений, для которых существует единственное двоякопериодическое решение.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

с периодическими условиями

$$u(x+\omega, t) = u(x,t), \tag{2}$$

$$u(x, t+T) = u(x,t), \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$ и (ω,T)-периодичны, т.е. для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ имеют место равенства

$$A(x+\omega,t) = A(x,t) = A(x,t+T), \quad B(x+\omega,t) = B(x,t) = B(x,t+T),$$
$$C(x+\omega,t) = C(x,t) = C(x,t+T), \quad f(x+\omega,t) = f(x,t) = f(x,t+T).$$

Непрерывная на $\mathbb{R}^2$ функция $u(x,t)$, имеющая непрерывные частные производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}$$

называется классическим (ω,T)-периодическим решением системы (1), если она удовлетворяет системе уравнений (1) при всех $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ и условиям периодичности (2), (3).

Пусть

$$\|u(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(x,t)|, \quad \|A(x,t)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|, \quad \Omega = [0,\omega]\times[0,T].$$

Через $C(\Omega,\mathbb{R}^n)$ (соответственно $C([0,\omega],\mathbb{R}^n)$, $C([0,T],\mathbb{R}^n)$) обозначим пространство непрерывных на Ω функций $u\colon \Omega\to\mathbb{R}^n$ ($\varphi\colon [0,\omega]\to\mathbb{R}^n$, $\psi\colon [0,T]\to\mathbb{R}^n$) с нормой

$$\|u\|_0 = \max_{(x,t)\in\Omega} \|u(x,t)\| \quad \Big(\|\varphi\|_1 = \max_{x\in[0,\omega]} \|\varphi(x)\|, \quad \|\psi\|_2 = \max_{t\in[0,T]} \|\psi(t)\|\Big).$$

Для рассматриваемой задачи аналогом условия периодичности Пуанкаре по (x,t) являются соотношения

$$u(0,t) = u(\omega,t), \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad x\in[0,\omega]. \tag{5}$$

Функция $u(x,t) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

называется классическим решением задачи (1), (4), (5), если она удовлетворяет системе (1) при всех $(x,t) \in \Omega$ (при этом функция на границе Ω имеет односторонние производные) и выполнены краевые условия (4), (5).

Пусть $u(x,t)$ — классическое решение задачи (1), (4), (5). Тогда в силу свойств характеристик ($x = m\omega$, $t = kT$, $m, k \in \mathbb{Z}$) и равенств (4), (5) функция $u^*(x,t)$, являющаяся периодическим продолжением $u(x,t)$ на $\mathbb{R}^2$ по x, t соответственно с периодами ω, T, будет классическим (ω, T)-периодическим решением системы (1), т.е. выполнены условия периодичности по обеим переменным $u^*(x+\omega, t) = u^*(x,t)$, $u^*(x, t+T) = u^*(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

К задаче (1)–(3) применяется метод введения функциональных параметров (см. [2, 5–7, 20]): функциональный параметр вводится как значение искомой функции на характеристике $x = 0$.

2. Сведение к эквивалентной задаче. Алгоритм построения решения. Рассмотрим задачу (1), (4), (5). Пусть $\mu(t) = u(0,t)$. Произведем в задаче (1), (4), (5) замену функции $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \mu(t)$ и перейдем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(x,t)\widetilde{u} + B(x,t)\dot{\mu}(t) + C(x,t)\mu(t) + f(x,t), \tag{6}$$

$$\widetilde{u}(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(x,0) = \widetilde{u}(x,T), \quad x \in [0,\omega], \tag{8}$$

$$\widetilde{u}(\omega,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$\mu(0) = \mu(T). \tag{10}$$

Здесь последнее равенство следует из соотношений (5), (7). В силу (9) вытекающее из (5) равенство $\widetilde{u}(x,0) + \mu(0) = \widetilde{u}(x,T) + \mu(T)$ записано в виде (8).

Решением задачи (6)–(10) является пара функций $(\widetilde{u}(x,t), \mu(t))$, где функция $\widetilde{u}(x,t) \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{u}(x,t)}{\partial t \partial x},$$

функция $\mu(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, удовлетворяющая системе уравнений (6) и условиям (7)–(10). Если $u(x,t)$ является решением задачи (1), (4), (5), то пара

$$\big(\widetilde{u}(x,t) = u(x,t) - u(0,t),\ \mu(t) = u(0,t)\big)$$

будет решением задачи (6)–(10). Наоборот, если пара $(\widetilde{u}(x,t), \mu(t))$ — решение задачи (6)–(10), то функция $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \mu(t)$ — решение задачи (1), (4), (5).

Дополнительное условие (9) вместе с равенством (10) позволяет определить функциональный параметр $\mu(t)$. При найденном $\mu(t)$ функция $\widetilde{u}(x,t)$ является решением полупериодической краевой задачи (6)–(8) (см. [7]).

Пусть

$$\widetilde{v}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t}.$$

Так как из условий (7), (9) вытекают равенства

$$\frac{\partial \widetilde{u}(0,t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{u}(\omega,t)}{\partial t} = 0$$

для всех $t \in [0,T]$, то, интегрируя обе части (6) по $x \in [0,\omega]$, получим следующую систему уравнений:

$$\int\limits_0^\omega B(\xi,t)d\xi \cdot \dot{\mu}(t) = -\int\limits_0^\omega C(\xi,t)d\xi \cdot \mu(t) - \int\limits_0^\omega A(\xi,t)\widetilde{v}(\xi,t)d\xi - \int\limits_0^\omega B(\xi,t)\widetilde{w}(\xi,t)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^\omega C(\xi,t)\widetilde{u}(\xi,t)d\xi - \int\limits_0^\omega f(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T]. \quad (11)$$

Система (11) вместе с условием (10) является периодической краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $\mu(t)$. Соотношения (11) и (9) эквивалентны.

Таким образом, для определения неизвестных функций $\widetilde{u}(x,t)$ (вместе с производными $\widetilde{v}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)$) и $\mu(t)$ (вместе с производной $\dot{\mu}(t)$) имеем замкнутую систему уравнений (6)–(8) и (11), (10). Так как неизвестными являются как $\widetilde{u}(x,t)$, так и $\mu(t)$, применяется метод последовательных приближений, и решение задачи находится по следующему алгоритму:

Шаг 0. Считая, что $\widetilde{v}=0$, $\widetilde{w}=0$, $\widetilde{u}=0$ и матрица

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^\omega B(\xi,t)d\xi$$

обратима при всех $t \in [0,T]$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(0)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и функции $f(x,t)$ следует непрерывность $\mu^{(0)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(0)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(0)}(t)$, находим непрерывные на Ω функцию $\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(0)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(0)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(0)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(0)}(x,t)}{\partial t}.$$

Шаг 1. Считая, что $\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)=\widetilde{v}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)=\widetilde{w}^{(0)}(x,t)$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(1)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, функций $\widetilde{u}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{v}^{(0)}(x,t)$, $\widetilde{w}^{(0)}(x,t)$ вытекает непрерывность функций $\mu^{(1)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(1)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(1)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(1)}(t)$, находятся непрерывные на Ω функцию $\widetilde{u}^{(1)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(1)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(1)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(1)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(1)}(x,t)}{\partial t}$$

и так далее.

Шаг k. Считая, что $\widetilde{u}(x,t)=\widetilde{u}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{v}(x,t)=\widetilde{v}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{w}(x,t)=\widetilde{w}^{(k-1)}(x,t)$, из периодической краевой задачи (11), (10) находим $\mu^{(k)}(t)$. Из непрерывности на Ω матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, функций $\widetilde{u}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{v}^{(k-1)}(x,t)$, $\widetilde{w}^{(k-1)}(x,t)$ вытекает непрерывность функций $\mu^{(k)}(t)$ и $\dot{\mu}^{(k)}(t)$ на $[0,T]$. Решая полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений (6)–(8) при $\dot{\mu}(t)=\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\mu(t)=\mu^{(k)}(t)$, находятся непрерывные на Ω функция $\widetilde{u}^{(k)}(x,t)$ и ее производные

$$\widetilde{v}^{(k)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{u}^{(k)}(x,t)}{\partial x}, \quad \widetilde{w}^{(k)}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}^{(k)}(x,t)}{\partial t}, \quad k=1,2,\ldots$$

Введение функционального параметра $\mu(t)$ позволило разбить на два этапа процесс нахождения решения исходной задачи:

этап 1: определение функции $\mu(t)$ из периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (10);

этап 2: определение функции $\widetilde{u}(x,t)$ из полупериодической краевой задачи для системы гиперболических уравнений.

3. Полупериодическая краевая задача для системы гиперболических уравнений. В данном разделе рассмотрим полупериодическую краевую задачу для системы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + C(x,t)\widetilde{u} + F(x,t) \tag{12}$$

с условиями (7), (8).

Исходя из матрицы $A(x,t)$ и числа $h > 0$, удовлетворяющего условию $Nh = T$, строим $(nN \times nN)$-матрицу

$$Q_\nu(h,x) = \begin{vmatrix} Ih & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I + D_{\nu,N}(h,x)]h \\ I + D_{\nu,1}(h,x) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I + D_{\nu,2}(h,x) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I + D_{\nu,N-1}(h,x) & -I \end{vmatrix},$$

где I — единичная матрица размерности n,

$$D_{\nu,r}(h,x) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1)d\tau_1 +$$

$$+ \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} A(x,\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(x,\tau_1) \dots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1.$$

Пусть

$$\alpha(x) = \max_{t\in[0,T]} \|A(x,t)\|, \quad \alpha = \max_{x\in[0,\omega]} \alpha(x), \quad \beta = \max_{(t,x)\in\Omega} \|B(x,t)\|, \quad \sigma = \max_{(t,x)\in\Omega} \|C(x,t)\|.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (12), (7), (8) и оценку решения дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ матрица $Q_\nu(h,x)$ обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства*

$$\big\|[Q_\nu(h,x)]^{-1}\big\| \leqslant \gamma_\nu(h,x), \tag{13}$$

$$q_\nu(h,x) = \gamma_\nu(h,x) \cdot \max(1,h)\left[e^{\alpha(x)h} - \sum_{j=0}^{\nu} \frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right] \leqslant \chi < 1, \tag{14}$$

где $\gamma_\nu(h,x)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ функция при фиксированных ν, h, $\chi = \mathrm{const}$. Тогда задача (12), (7), (8) имеет единственное классическое решение $\widetilde{u}^*(x,t)$ и справедлива оценка

$$\max\Big(\|\widetilde{u}^*\|_0, \|\widetilde{v}^*\|_0, \|\widetilde{w}^*\|_0\Big) \leqslant \max\Big(e^{K_0(\beta+\sigma)}[1+K_0], K\big([\beta+\sigma](1+K_0)+1\big)\Big)\|F\|_0, \tag{15}$$

где

$$K = \max_{x\in[0,\omega]} \big[k_1(x,h,\nu) + k_2(x,h,\nu)\big], \quad K_0 = \omega\max(K, \alpha K + 1),$$

$$k_0(x,h,\nu) = [e^{\alpha(x)h} - 1]\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\}h + he^{\alpha(x)h},$$

$$k_1(x,h,\nu) =$$

$$= \frac{\gamma_\nu(h,x)\max(1,h)}{1 - q_\nu(h,x)} \cdot \frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!} \cdot k_0(x,h,\nu) + h\gamma_\nu(h,x)\max\left\{1 + h\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_2(x,h,\nu)=\left\{[e^{\alpha(x)h}-1]\frac{\gamma_\nu(h,x)}{1-q_\nu(h,x)}\cdot\max(1,h)\frac{[\alpha(x)h]^\nu}{\nu!}+1\right\}k_0(x,h,\nu).$$

Доказательство. Существование, единственность и оценка (15) следуют из теорем 1 и 2 из [7]. Непрерывность решения $\widetilde{u}^*(x,t)$ и его производных

$$\widetilde{v}^*(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}^*(x,t)}{\partial x},\quad \widetilde{w}^*(x,t)=\frac{\partial\widetilde{u}^*(x,t)}{\partial t}$$

на Ω вытекает из (15) в силу непрерывности функций $k_i(x,h,\nu)$, $i=0,1,2$, $F(x,t)$ соответственно на $[0,\omega]$, Ω. Теорема 1 доказана. $\square$

Отметим, что в работе [24] были приведены следующие результаты для полупериодической краевой задачи (12), (7), (8):

(i) [2, лемма 2]: при отсутствии разбиения области Ω, т.е. при $h=T$, $N=1$. В этом случае матрица $Q_\nu(h,x)$ имеет размерность n и имеет вид

$$Q_\nu(T,x)=\int\limits_0^T A(x,\tau_1)d\tau_1+\int\limits_0^T A(x,\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}A(x,\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\ldots+$$
$$+\int\limits_0^T A(x,\tau_1)\ldots\int\limits_0^{\tau_{\nu-1}}A(x,\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_1;$$

(ii) [2, лемма 3]: аналог теоремы 1 при $\nu=1$, где требуется обратимость $(n\times n)$-матрицы

$$I-\prod_{s=N}^{1}\left[I+\int\limits_{(s-1)h}^{sh}A(\tau,x)d\tau\right],$$

составленной из блоков матрицы $Q_\nu(h,x)$.

4. Периодическая краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теперь рассмотрим периодическую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mu}(t)=A_1(t)\mu(t)+g_1(t),\quad t\in[0,T],\tag{16}$$
$$\mu(0)=\mu(T),\tag{17}$$

где $(n\times n)$-матрица $A_1(t)$ и n-вектор-функция $g_1(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

Функция $\mu(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, имеющая производную $\dot{\mu}(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$, называется решением задачи (16), (17), если она удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (16) и периодическому условию (17).

Периодические и двухточечные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исследовались в работах многих авторов; подробный анализ и обзор работ можно найти в [8,17,18,28]. Для решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в [8] был разработан метод параметризации. На основе этого метода были получены необходимые и достаточные условия однозначной корректной разрешимости рассматриваемой задачи в терминах исходных данных и предложены алгоритмы поиска решения исследуемой задачи, доказана их сходимость.

В данном разделе приведены результаты работы [8] применительно к периодической краевой задаче (16), (17).

Используя матрицу $A_1(t)$ и число $h>0$, удовлетворяющее условию $Nh=T$, построим $(nN\times nN)$-матрицу

$$Q_{1,\upsilon}(h)=\begin{vmatrix} Ih & 0 & 0 & \dots & 0 & -[I+D_{1,\upsilon,N}(h)]h \\ I+D_{1,\upsilon,1}(h) & -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I+D_{1,\upsilon,2}(h) & -I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I+D_{1,\upsilon,N-1}(h) & -I \end{vmatrix},$$

где

$$D_{1,\upsilon,r}(h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A_1(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A_1(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1}A_1(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+$$
$$+\dots+\int\limits_{(r-1)h}^{rh}A_1(\tau_1)\dots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\upsilon-2}}A_1(\tau_{\upsilon-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\upsilon-1}}A_1(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\dots d\tau_1.$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (12), (7), (8) и оценку решения дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть при некоторых $h>0$ $(Nh=T)$ и υ $(\upsilon=1,2,\dots)$ матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима и выполняются неравенства*

$$\|[Q_{1,\upsilon}(h)]^{-1}\|\leqslant\gamma_{1,\upsilon}(h), \tag{18}$$

$$q_{1,\upsilon}(h)=\gamma_{1,\upsilon}(h)\cdot\max(1,h)\left[e^{\alpha_1h}-\sum_{j=0}^{\upsilon}\frac{[\alpha_1h]^j}{j!}\right]<1, \tag{19}$$

где $\gamma_{1,\upsilon}(h)$ — положительная величина, зависящая от υ, h и

$$\alpha_1=\max_{t\in[0,T]}\|A_1(t)\|.$$

Тогда периодическая краевая задача (16), (17) *имеет единственное решение $\mu^*(t)$, удовлетворяющее оценке*

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^*(t)\big\|\leqslant\Big[k_{11}(h,\upsilon)+k_{12}(h,\upsilon)\Big]\max_{t\in[0,T]}\|g_1(t)\|, \tag{20}$$

где

$$k_{11}(h,\upsilon)=\frac{\gamma_{1,\upsilon}(h)\max(1,h)}{1-q_{1,\upsilon}(h)}\cdot\frac{[\alpha_1h]^\upsilon}{\nu!}\cdot k_{10}(h,\upsilon)+h\gamma_\upsilon(h,x)\max\left\{1+h\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha(x)h]^j}{j!}\right\},$$

$$k_{10}(h,\upsilon)=[e^{\alpha_1h}-1]\gamma_\upsilon(h,x)\max\left\{1+h\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha_1h]^j}{j!},\sum_{j=0}^{\upsilon-1}\frac{[\alpha_1h]^j}{j!}\right\}h+he^{\alpha_1h},$$

$$k_{12}(h,\upsilon)=\left\{[e^{\alpha_1h}-1]\frac{\gamma_{1,\upsilon}(h)}{1-q_{1,\upsilon}(h)}\cdot\max(1,h)\frac{[\alpha_1h]^\upsilon}{\upsilon!}+1\right\}k_{10}(h,\upsilon).$$

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1 из [8, с. 54] при $B=I$, $C=-I$, $d=0$, $A_1(t)$ вместо $A(t)$ и $f(t)$ вместо $g_1(t)$.

В случае, когда $h=T$ $(N=1)$, $(n\times n)$-матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ имеет вид

$$Q_{1,\upsilon}(T)=\int\limits_0^TA_1(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_0^TA_1(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1}A_1(\tau_2)d\tau_2d\tau_1+\dots+\int\limits_0^TA_1(\tau_1)\dots\int\limits_0^{\tau_{\upsilon-1}}A_1(\tau_\upsilon)d\tau_\upsilon d\tau_{\upsilon-1}\dots d\tau_1,$$

а ее обратимость будет зависеть от матрицы $A_1(t)$. Если

$$\det \int\limits_0^T A_1(\tau_1) d\tau_1 \neq 0,$$

то можно выбрать такое число $\upsilon \in \mathbb{N}$, при котором будут выполнены условия (18)–(19) теоремы 2, а задача (16), (17) будет однозначно разрешима.

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрицы $Q_{1,\upsilon}(h)$ при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon \in \mathbb{N})$. Так как $(nN \times nN)$-матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ при $N \geqslant 2$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *$(nN \times nN)$-Матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима тогда и только тогда, когда обратима $(n \times n)$-матрица*

$$M_{1,\upsilon} = I - \prod_{s=N}^{1} \big[I + D_{1,\upsilon,s}(h)\big].$$

Лемма 2. *Если матрица $M_{1,\upsilon}$ обратима, то $[Q_{1,\upsilon}(h)]^{-1} = \{d_{r,j}\}$, $r, j = \overline{1, N}$, где*

$$\begin{aligned}
&d_{1,1} = h^{-1} M_{1,\upsilon}^{-1};\\
&d_{1,k} = -M_{1,\upsilon}^{-1} \cdot \prod_{s=N}^{k} \big[I + D_{1,\upsilon,s}(h)\big], && 1 < k \leqslant N,\\
&d_{r,r} = [I + D_{1,\upsilon,r-1}(h)] d_{r-1,r} - I, && r = 2, 3, \ldots, N,\\
&d_{r,j} = [I + D_{1,\upsilon,r-1}(h)] d_{r-1,j}, && j \neq r.
\end{aligned}$$

Лемма 1 остается справедливой и в случае $N = 1$: обратимость $(n \times n)$-матрицы $Q_{1,\upsilon}(T)$ эквивалентна обратимости $(n\times n)$-матрицы $M_{1,\upsilon} = I - [I + D_{1,\upsilon,1}(T)]$, т.е. в этом случае они совпадают.

Величина $K_1(h,\upsilon) = k_{11}(h,\upsilon) + k_{12}(h,\upsilon)$ в неравенстве (20) ограничена при фиксированных N, $N \in \mathbb{N}$, $\upsilon \in \mathbb{N}$, и не зависит от функции $g_1(t)$. Поэтому при условиях теоремы 2 периодическая краевая задача (16), (17) корректно разрешима.

5. Условия разрешимости периодической краевой задачи (1), (4), (5). Рассмотрим задачу (6)–(10), эквивалентную задаче (1), (4), (5). Введем обозначения

$$A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1} \cdot \int\limits_0^\omega C(\xi, t) d\xi,$$

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(i) *при всех $t \in [0, T]$ обратима $(n \times n)$-матрица*

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^\omega B(\xi, t) d\xi;$$

(ii) *при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ матрица $Q_\nu(h, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняются неравенства* (13)–(14) *теоремы* 1;

(iii) *при некоторых $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon = 1, 2, \ldots)$ матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ обратима и выполняются неравенства* (18)–(19) *теоремы* 2;

(iv) *справедливо неравенство*

$$q = \max(K_1(h,\upsilon), \alpha K_1(h,\upsilon) + 1) \max_{t\in[0,T]} \big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\| \omega \big[\alpha + \beta + \sigma\big] \cdot \widetilde{K}(\beta + \sigma) < 1.$$

Тогда задача (6)–(10) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Из обратимости матрицы $B_\omega(t)$ при всех $t \in [0,T]$ и условия (iii) следует существование единственного решения периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (10) — функции $\mu(t)$. Аналогично оценке (20) получим

$$\big\|\mu(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\| \cdot \left\{\int_0^\omega \|A(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{v}(\xi,t)\| d\xi + \int_0^\omega \|B(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{w}(\xi,t)\| d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^\omega \|C(\xi,t)\| \cdot \|\widetilde{u}(\xi,t)\| d\xi + \int_0^\omega \|f(\xi,t)\| d\xi \right\}. \quad (21)$$

Пусть выполнено условие (i) теоремы 3. Используем шаг 0 алгоритма. Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$\dot{\mu}(t) = A_1(t)\mu(t) - [B_\omega(t)]^{-1}\int_0^\omega f(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T], \qquad \mu(0) = \mu(T). \quad (22)$$

Из выполнения условия (iii), которое включает условия теоремы 2, вытекает однозначная разрешимость задачи (22). Нулевое приближение $\mu^{(0)}(t)$ находим из периодической краевой задачи (22). Тогда, аналогично оценке (20), для функции $\mu^{(0)}(t)$ и ее производной $\dot{\mu}^{(0)}(t)$ будут справедливы оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(0)}(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}g_1^{(0)}(t)\big\|, \quad (23)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\big\| \leqslant \big[\alpha_1 K_1(h,\upsilon)+1\big]\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}g_1(t)\big\|, \quad (24)$$

где

$$g_1(t) = [B_\omega(t)]^{-1}\int_0^\omega f(\xi,t)d\xi.$$

Решая полупериодическую краевую задачу (6)–(8) при найденных значениях параметров, находим $\widetilde{v}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(0)}(t,x)$ для всех $(t,x) \in \Omega$.

Аналогично оценке (15) получаем неравенство

$$\max\Big(\|\widetilde{u}^{(0)}\|_0, \|\widetilde{v}^{(0)}\|_0, \|\widetilde{w}^{(0)}\|_0\Big) \leqslant \widetilde{K}\Big(\beta\cdot\max_{t\in[0,T]}\|\dot{\mu}^{(0)}(t)\| + \sigma\cdot\max_{t\in[0,T]}\|\mu^{(0)}(t)\| + \|f\|_0\Big), \quad (25)$$

где $\widetilde{K} = \max\big(e^{K_0(\beta+\sigma)}[1+K_0],\ K[(\beta+\sigma)[1+K_0]+1]\big)$.

Последовательно, из k-го шага алгоритма определяем функции $\mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$, $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, а из $(k+1)$-го шага — $\mu^{(k+1)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k+1)}(t)$, $\widetilde{v}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k+1)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k+1)}(t,x)$, $k = 1,2,\ldots$ Оценивая соответствующие разности последовательных приближений, получим

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\big\| \leqslant K_1(h,\upsilon)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\times$$

$$\times\max\Big(\big\|\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)}\big\|_0\Big), \quad (26)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)\big\| \leqslant \big[\alpha K_1(h,\upsilon)+1\big]\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\times$$

$$\times\max\Big(\big\|\widetilde{v}^{(k)}-\widetilde{v}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k)}-\widetilde{w}^{(k-1)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{u}^{(k)}-\widetilde{u}^{(k-1)}\big\|_0\Big), \quad (27)$$

$$\max\Big(\big\|\widetilde{u}^{(k+1)}-\widetilde{u}^{(k)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{v}^{(k+1)}-\widetilde{v}^{(k)}\big\|_0,\ \big\|\widetilde{w}^{(k+1)}-\widetilde{w}^{(k)}\big\|_0\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{K}\Big(\beta\cdot\max_{t\in[0,T]}\big\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t)-\dot{\mu}^{(k)}(t)\big\| + \sigma\cdot\max_{t\in[0,T]}\big\|\mu^{(k+1)}(t)-\mu^{(k)}(t)\big\|\Big). \quad (28)$$

Пусть
$$\Delta_{k+1} = \max\Big(\max_{t\in[0,T]} \big\|\mu^{(k+1)}(t) - \mu^{(k)}(t)\big\|,\ \max_{t\in[0,T]} \big\|\dot{\mu}^{(k+1)}(t) - \dot{\mu}^{(k)}(t)\big\|\Big).$$
Тогда из соотношений (26), (27), (28) получим основное неравенство
$$\Delta_{k+1} \leqslant q\Delta_k. \tag{29}$$
Из условия (iv) теоремы вытекает сходимость последовательности Δ_k при $k \to \infty$ к Δ_*. Это дает равномерную сходимость последовательностей $\mu^{(k)}(t)$, $\dot{\mu}^{(k)}(t)$ при $k \to \infty$ соответственно к $\mu^*(t)$, $\dot{\mu}^*(t)$. Функция $\mu^*(t)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[0,T]$. На основе оценки (28) установим равномерную сходимость последовательностей $\widetilde{v}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\widetilde{u}^{(k)}(t,x)$, относительно $(t,x) \in \Omega$ к функциям $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$, $\widetilde{u}^*(t,x)$, соответственно. Очевидно, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\widetilde{v}^*(t,x)$, $\widetilde{w}^*(t,x)$ являются непрерывными на Ω. Записав задачи, которые решаем на $(k+1)$-м шаге алгоритма, и переходя к пределу $k \to \infty$, получаем, что функции $\widetilde{u}^*(t,x)$, $\mu^*(t)$ вместе с производными удовлетворяют полупериодической краевой задаче (6)–(8) и периодической краевой задаче (11), (10). Тогда пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t))$ является решением задачи (6)–(10).

Докажем единственность решения задачи (6)–(10). Пусть существует два решения: пара функций $(\widetilde{u}^*(t,x), \mu^*(t))$ и $(\widetilde{u}^{**}(t,x), \mu^{**}(t))$. Положим
$$\widetilde{\Delta} = \max\Big(\max_{t\in[0,T]} \big\|\mu^*(t) - \mu^{**}(t)\big\|,\ \max_{t\in[0,T]} \big\|\dot{\mu}^*(t) - \dot{\mu}^{**}(t)\big\|\Big).$$
Проведя вычисления аналогично (26)–(28), получим
$$\widetilde{\Delta} \leqslant q\widetilde{\Delta}. \tag{30}$$
По условию (iv) теоремы $q < 1$. Тогда неравенство (30) имеет место только при $\widetilde{\Delta} \equiv 0$, откуда получаем $\mu^*(t) = \mu^{**}(t)$ и $\widetilde{u}^*(t,x) = \widetilde{u}^{**}(t,x)$. Таким образом, решение задачи (6)–(10) единственно. Теорема 3 доказана. □

Условия теоремы 3 одновременно с существованием единственного решения задачи (6)–(10) обеспечивают сходимость последовательности $\{\mu^{(k)}(t), \widetilde{u}^{(k)}(x,t)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, определяемой по предложенному алгоритму.

Составим сумму $u^*(t,x) = \widetilde{u}^*(t,x) + \mu^*(t)$. Из эквивалентности задач (1), (4), (5) и (6)–(10) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv) *теоремы* 3. *Тогда периодическая краевая задача* (1), (4), (5) *имеет единственное классическое решение* $u^*(t,x)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) *$n \times n$-матрицы $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и n-вектор-функция $f(x,t)$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$ и (ω, T)-периодичны, т.е. для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ имеют место равенства*
$$A(x+\omega,t) = A(x,t) = A(x,t+T), \quad B(x+\omega,t) = B(x,t) = B(x,t+T),$$
$$C(x+\omega,t) = C(x,t) = C(x,t+T), \quad f(x+\omega,t) = f(x,t) = f(x,t+T);$$

(ii) *выполнены условия* (i)–(iv) *теоремы* 3.

Тогда периодическая задача на плоскости для системы гиперболических уравнений (1), (2), (3) *имеет единственное классическое (ω, T)-периодическое решение* $u^*(t,x)$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы 5 существует единственное двоякопериодическое решение системы (1). Нарушение одного из условий теоремы говорит о том, что задача (1), (2), (3) может не иметь решения или может иметь бесконечно много решений. Коэффициенты системы уравнений $A(t,x)$, $B(t,x)$ и $C(t,x)$ играют важную роль для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (3). Это подтверждают и приведенные ниже примеры, иллюстрирующие результаты настоящей работы.

Следующие два примера показывают существенность требований обратимости матриц $Q_\nu(h,x)$, $B_\omega(t)$, $Q_{1,\upsilon}(h)$ для единственности решения периодической задачи на плоскости для системы гиперболических уравнений.

Пример 1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система двух гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Разыскивается $(2\pi, 2\pi)$-периодическое решение системы (31). В этом примере матрица $Q_\nu(h,x)$ не имеет обратной при всех $x \in [0,\omega]$, матрица $B_\omega(t) \equiv 0$ необратима, а система (31) имеет семейство $(2\pi, 2\pi)$-периодических решений

$$u(x,t) = C_0 \begin{pmatrix} \sin x \cdot \cos t \\ \cos x \cdot \sin t \end{pmatrix},$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Пример 2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается система двух гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Снова разыскивается $(2\pi, 2\pi)$-периодическое решение системы (32). В этом примере матрица $B_\omega(t) \equiv 0$ необратима, матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ также не имеет обратной. Легко проверить, что

$$u(x,t) = C_0 \begin{pmatrix} \sin(x+t) \\ \cos(x+t) \end{pmatrix}$$

является семейством $(2\pi, 2\pi)$-периодических решений системы (32), где C_0 — произвольная постоянная.

Следующие примеры показывают существенность условий теоремы 5 для существования единственного периодического решения задачи (1), (2), (3).

Пример 3. Пусть $n = 1$ (случай одного уравнения), $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $f = 0$ (постоянные функции периодичны с любым периодом). Уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{33}$$

Вспомогательная полупериодическая краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t \partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + F(x,t), \tag{34}$$

с условиями (7), (8).

Проверим условия теоремы 5. Условие (i) выполняется. Условие (ii) требует выполнения условий (i)–(iv) теоремы 3. Так как

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^\omega B(\xi,t) d\xi = \omega \neq 0,$$

то условие (i) теоремы 3 выполняется.

Для задачи (34), (7), (8) существуют такие $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ будет обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства (13), (14) теоремы 1. Это означает, что существует единственное решение полупериодической краевой задачи (34), (7), (8). Отметим, что, поскольку $A(t,x) = 1$ и

$$\int\limits_0^T A(\tau,x) d\tau = T \neq 0,$$

всегда можно выбрать такое $\nu \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (13), (14) теоремы 1. Условие (ii) теоремы 3 выполнено.

Вспомогательная периодическая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \widetilde{v}(\xi,t)d\xi - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \widetilde{w}(\xi,t)d\xi, \quad t \in [0,T], \tag{35}$$

с условием (17). Здесь $A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1}\cdot 0 = 0$, $D_{1,\upsilon,r}(h) = 0$ для всех $\upsilon \in \mathbb{N}$, $r = \overline{1,N}$, так как $A_1(t) = 0$. По лемме 1 обратимость матрицы $Q_{1,\upsilon}(h)$ эквивалентна обратимости $M_{1,\upsilon}(h)$, которая имеет вид

$$M_{1,\upsilon}(h) = 1 - \prod_{s=N}^{1}\bigl[1 + D_{1,\upsilon,s}(h)\bigr] = 1 - 1 = 0,$$

т.е. необратима. Тогда необратима и матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$. Таким образом, условие (iii) теоремы 3 не выполнено. Любая ненулевая константа будет решением уравнения (33).

Данный пример показывает нарушение условия (ii) теоремы 5, а именно, нарушение условия (iii) теоремы 3, что привело к бесконечному числу решений задачи (33), (2), (3).

Пример 4. Пусть $n = 1$ (случай одного уравнения), $A = -1$, $B = 1$, $C = -1$, $f = 0$. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - u. \tag{36}$$

Проверим условия теоремы 5. Условие (i) выполняется. Условие (ii) требует выполнения условий (i)–(iv) теоремы 3. Здесь

$$B_\omega(t) = \int\limits_0^{\omega} B(\xi,t)d\xi = \omega \neq 0,$$

условие (i) теоремы 3 выполняется. Имеем

$$A_1(t) = -[B_\omega(t)]^{-1}\cdot \int\limits_0^{\omega} C(\xi,t)d\xi = 1,$$

$$\alpha = \alpha(x) = 1, \quad \beta = 1, \quad \sigma = 1, \quad \alpha_1 = 1.$$

Можно выбрать $h > 0$ $(Nh = T)$ и ν $(\nu = 1,2,\ldots)$, при которых матрица $Q_\nu(h,x)$ будет обратима для всех $x \in [0,\omega]$ и выполняются неравенства (13), (14) теоремы 1. Отметим, что, поскольку $A(t,x) = -1$ и

$$\int\limits_0^{T} A(\tau,x)d\tau = -T \neq 0,$$

всегда можно выбрать такое $\nu \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (13), (14) теоремы 1. Условие (ii) теоремы 3 выполнено.

Можно выбрать $h > 0$ $(Nh = T)$ и υ $(\upsilon = 1,2,\ldots)$, при которых матрица $Q_{1,\upsilon}(h)$ будет обратима и выполняются неравенства (18), (19) теоремы 2. Здесь аналогично, поскольку $A_1(t,x) = 1$ и

$$\int\limits_0^{T} A(\tau,x)d\tau = T \neq 0,$$

всегда можно выбрать $\upsilon \in \mathbb{N}$, при котором будут выполняться неравенства (18), (19) теоремы 2. Условие (iii) теоремы 3 выполнены.

Проверим условие (iv) теоремы 3. Имеем

$$q = \max\Big(K_1(h,\upsilon),\ \alpha K_1(h,\upsilon)+1\Big)\max_{t\in[0,T]}\big\|[B_\omega(t)]^{-1}\big\|\omega\big[\alpha+\beta+\sigma\big]\cdot\widetilde{K}(\beta+\sigma)=$$
$$=\big(K_1(h,\upsilon)+1\big)\frac{1}{\omega}\omega\big[1+1+1\big]\cdot\widetilde{K}(1+1)>6\widetilde{K}=$$
$$=6\max\Big(e^{2K_0}[1+K_0],\ K\big[2[1+K_0]+1\big]\Big)\geqslant 6e^{2K_0}\geqslant 6,$$

т.е. $q>1$. Условие (iv) теоремы 3 не выполняется. Задача (36), (2), (3) имеет бесконечно много решений вида $u(t,x)=C_0\sin(x+t)$, где $C_0=\text{const}$.

Замечание. Случай, когда $A(t,x)=B(t,x)=0$, исследован в [3] при предположении непрерывной дифференцируемости матрицы $C(t,x)$ и функции $f(t,x)$ по t, x. Установлены условия существования решения, периодического по обеим переменным. Случаи, когда $A(t,x)=0$ или $B(t,x)=0$, требуют специального изучения. Для этих случаев также потребуется дополнительная гладкость коэффициентов и правой части системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемьев Н. А.* Периодические решения одного класса уравнений в частных производных// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1937. — № 1. — С. 15–50.
2. *Асанова А. Т.* Признаки однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными// Изв. вузов. Мат. — 2016. — № 5. — С. 3–21.
3. *Асанова А. Т.* Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 1. — С. 20–30.
4. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Периодические и ограниченные на плоскости решения систем гиперболических уравнений// Укр. мат. ж. — 2004. — *56*, № 4. — С. 562–572.
5. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2002. — *42*, № 11. — С. 1673–1685.
6. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений ooo// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 10. — С. 1343–1354.
7. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений// Диффер. уравн. — 2005. — *41*, № 3. — С. 337–346.
8. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1989. — *29*, № 1. — С. 50–66.
9. *Жестков С. В.* О двоякопериодических решениях нелинейных гиперболических систем в частных производных// Укр. мат. ж. — 1987. — *39*, № 4. — С. 521–523.
10. *Кигурадзе Т. И.* О двоякопериодических решениях одного класса нелинейных гиперболических уравнений// Диффер. уравн. — 1998. — *34*, № 2. — С. 238–245.
11. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1998. — *222*. — С. 1–191.
12. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука, 2006.
13. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев:: Наукова думка, 1991.
14. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — Киев: Наукова думка, 1984.
15. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 3. — С. 427–438.
16. *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле// Изв. вузов. Мат. — 2007. — № 2. — С. 46–55.
17. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища школа, 1976.

18. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наукова думка, 1985.
19. *Самойленко А. М., Ткач Б. П.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. — Киев: Наукова думка, 1992.
20. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary-value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *402*, № 1. — P. 167–178.
21. *Aziz A. K.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1966. — *17*, № 3. — P. 557–566.
22. *Aziz A. K., Horak M. G.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large// SIAM J. Math. Anal. — 1972. — *3*, № 1. — P. 176–182.
23. *Cesari L.* Periodic solutions of partial differential equations// в кн.: Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев: Изд-во АН УССР, 1963. — С. 440–457.
24. *Cesari L.* Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations// Arch. Rat. Mech. Anal. — 1965. — *20*, № 2. — P. 170–190.
25. *Kiguradze T.* Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type// Mem. Differ. Equations Math. Phys. — 1994. — *1*. — P. 1–144.
26. *Kiguradze T.* On periodic in the plane solutions of second-order hyperbolic systems// Arch. Math. — 1997. — *33*, № 4. — P. 253–272.
27. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On doubly periodic solutions of fourth-order linear hyperbolic equations// Nonlin. Anal. — 2002. — *49*, № 1. — P. 87–112.
28. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V., et al.* Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions. — Hague–Boston–London: Martinus Nijhoff, 1982.

Асанова Анар Турмаганбеткызы
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: anartasan@gmail.com