ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 51–62
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-51-62

УДК 517.925.42

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА У НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

© 2022 г. **Е. Ю. ЛИСКИНА**

Аннотация. Исследуется автономная нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть может быть представлена в виде суммы форм порядка, не ниже второго относительно компонент фазового вектора. Получены достаточные условия существования центра или фокуса в окрестности нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, критический случай, сложный фокус, центр, проблема различения центра и фокуса.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A CENTER IN A SECOND-ORDER NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM IN A CRITICAL CASE

© 2022 **E. Yu. LISKINA**

Abstract. We study an autonomous nonlinear system of second-order differential equations whose linear approximation matrix has a pair of purely imaginary eigenvalues and whose nonlinear part can be represented as the sum of forms of order $\geqslant 2$ with respect to the components of the phase vector. We obtain sufficient conditions for the existence of a center or focus in a neighborhood of the zero solution.

Keywords and phrases: differential equation, critical case, complex focus, center, distinguishing between center and focus.

AMS Subject Classification: 34C05, 34C25

1. Введение. Решению классической проблемы различения центра и фокуса посвящено достаточно большое количество исследований [1–4, 6, 10–12]. Аналитическая разрешимость проблемы доказана в [10]. Однако с точки зрения приложений и компьютерных вычислений особый интерес представляют коэффициентные условия различения центра и фокуса, которые на данный момент получены для систем, имеющих в нелинейной части одночлены или суммы одночленов нечетной степени по совокупности фазовых переменных [11, 12].

Данная работа продолжает и развивает исследования [8] по получению условий существования изохронных ненулевых периодических решений. Для получения условий существования ненулевых периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия используется метод вспомогательного параметра. В отличие от результатов, полученных в [9], когда вспомогательный параметр вводился и по координатам и по времени, в данном исследовании вспомогательный параметр вводится только по координатам, как и в [8].

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ — двумерное вещественное векторное пространство,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$$

— матрица, имеющая пару собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega = \sqrt{bc - a^2}$, $a^2 < bc$, $bc > 0$; см. [8]); $f(x)$ — вектор-функция, компонентами которой являются суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x,

$$\|x\| = \max_{i=\overline{1;2}}\{|x_i|\}.$$

Система (1) на множестве $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leqslant \varepsilon_0\}$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия существования такой окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение системы (1).

3. Преобразование системы (1)**.** Выполним замену переменных $x = (E + M)\bar{x}$, где $M = (m_{ij}(\mu))_{i,j=1}^2$ — матрица, элементами которой являются многочлены $m_{ij}(\mu)$ относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $M(0) = 0_{22}$, E — единичная 2×2-матрица. Пусть норма матрицы

$$\|M\| = \max_{i=\overline{1;m}}\{|m_{i1}| + |m_{i2}|\},$$

тогда матричный ряд

$$(E + M)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i$$

равномерно сходится на множестве $\mathrm{W}(\varepsilon_1) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \|\mu\| \leqslant \varepsilon_1 \Rightarrow \|M\| < 1\}$. С учетом сказанного при сохранении прежних обозначений для переменной x систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\dot{x} = (A + (AM - MA))x + \left(\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i(M^iA - M^{i-1}AM)\right)x + \sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i f((E + M)x). \tag{2}$$

Определим множество $\mathrm{U}(\delta) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : \|\alpha\| \leqslant \delta\}$, $\|\alpha\| \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Состояние равновесия $x \equiv 0$ является решением системы (2). Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 \in (0; \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\})$, что для любого вектора $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ и любого вектора $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$ решение $x(t, \alpha, \mu)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$, определено и непрерывно зависит от начальных условий и μ на промежутке $[0; T]$ ($T = 2\pi/\omega$), и при любых $t \in [0; T]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t, \alpha, \mu)\| < \varepsilon$. Система (2) на множестве $[0; T] \times \mathrm{U}(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$ удовлетворяет условию существования и единственности решения.

Определение 1. Решение $x(t, \alpha, \mu)$ системы (2), $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$, будем называть малым T-периодическим решением, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют числа $\bar{\alpha} \in \mathrm{U}(\delta_0)$ и $\bar{\mu} \in \mathrm{W}(\delta_0)$ такие, что $x(T, \bar{\alpha}, \bar{\mu}) - \bar{\alpha} = 0_2$ и при всех $t \in [0; T]$ выполнено неравенство $\|x(t, \bar{\alpha}, \bar{\mu})\| < \varepsilon$.

Из непрерывности правых частей системы (2) следует, что ее решение $x(t, \alpha, \mu)$ ($x(0, \alpha, \mu) = \alpha$) стремится к нулю при $\alpha \to 0$ равномерно по $(t, \mu) \in [0; T] \times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Так как $f(x)$ содержит суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, то справедливо представление $f(x) = F(x)x$, в котором $F(x)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $x \in \Omega(\delta_0)$. Аналогично, так как $f((E + M)x)$ содержит суммы форм не ниже второго порядка относительно компонент вектора x, то справедливо представление $f((E + M)x) = F((E + M)x)x$, в котором $F((E + M)x)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $(x, \mu) \in \Omega(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} B(\mu) = (AM - MA) + \left(\sum_{i=2}^{+\infty} (-1)^i (M^i A - M^{i-1} AM) \right), \\ g(x,\mu) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i M^i f((E+M)x), \end{gathered} \tag{3}$$

причем справедливо представление $g(x,\mu) = G(x,\mu)x$, $G(x,\mu)$ — 2×2-матрица, непрерывная по $(x,\mu) \in \Omega(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$.

Вместе с системой (2) рассмотрим системы

$$\dot{y} = Ay + B(\mu)y + g(x(t,\alpha,\mu),\mu). \tag{4}$$

$$\dot{z} = Az + B(\mu)z + G(x(t,\alpha,\mu),\mu)z, \tag{5}$$

Из условия единственности решения системы (4) следует, что если решения систем (2) и (4) для любого фиксированного $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$ удовлетворяют условию $x(0,\alpha,\mu) = y(0,\alpha,\mu) = \alpha$, то эти решения совпадают всюду на промежутке $[0;T]$. Аналогичное утверждение справедливо для решений систем (2) и (5).

Пусть $Z(t,\alpha,\mu)$ и $X(t)$ — фундаментальные матрицы решений систем (5) и $\dot{x} = Ax$ соответственно, $Z(0,\alpha,\mu) = X(0) = E$. Тогда решение $z(t,\alpha,\mu)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $z(0,\alpha,\mu) = \alpha$, можно записать так

$$z(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu)\alpha. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для матрицы $Z(t,\alpha,\mu)$ справедливо представление*

$$Z(t,\alpha,\mu) = X(t) + \Phi(t,\alpha,\mu), \tag{7}$$

в котором матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ определяется выражением

$$\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu) \int_0^t Z^{-1}(\tau,\alpha,\mu)(B(\mu) + G(x(\tau,\alpha,\mu),\mu))X(\tau)d\tau \tag{8}$$

и обладает следующими свойствами:

(i) $\Phi(0,\alpha,\mu) = 0_{22}$;

(ii) *матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ непрерывна по $(t,x,\mu) \in [0;T] \times \mathrm{U}(\delta_0) \times \mathrm{W}(\delta_0)$;*

(iii) *при $\|\alpha\| \to 0$, $\|\mu\| \to 0$ справедливо, что $\Phi(t,\alpha,\mu) \to 0$ равномерно по $t \in [0;T]$.*

Доказательство. Положим $\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu) - X(t)$. Тогда имеет место представление (7). Подставим его представление в систему (5), получим

$$\dot{X}(t) + \dot{\Phi}(t,\alpha,\mu) = AX(t) + (A + B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))\Phi(t,\alpha,\mu) + (B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))X(t).$$

Учитывая $\dot{X}(t) \equiv AX(t)$, получим матричное линейное неоднородное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$

$$\dot{\Phi}(t,\alpha,\mu) = (A + B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))\Phi(t,\alpha,\mu) + (B(\mu) + G(x(t,\alpha,\mu),\mu))X(t). \tag{9}$$

Так как $Z(t,\alpha,\mu)$ — фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей системе (5), то $Z(t,\alpha,\mu)$ является фундаментальной матрицей однородной системы, соответствующей системе (9). Отсюда методом вариаций произвольных постоянных получаем общее решение системы (9):

$$\Phi(t,\alpha,\mu) = Z(t,\alpha,\mu)C + Z(t,\alpha,\mu) \int_0^t Z^{-1}(\tau,\alpha,\mu)(B(\mu) + G(x(\tau,\alpha,\mu),\mu))X(\tau)d\tau.$$

Здесь C — произвольная постоянная матрица. $Z(0,\alpha,\mu) = X(0) = E$, то из (7) следует, что $\Phi(0,\alpha,\mu) = 0_{nn}$. Таким образом, доказано первое свойство матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$. Тогда $C = 0$, и для определения матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$ получаем выражение (8), из которого непосредственно следует, что матрица $\Phi(t,\alpha,\mu)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $[0;T]\times \mathrm{U}(\delta_0)\times \mathrm{W}(\delta_0)$ по переменным t, α, μ. Свойство (ii) доказано. Далее, так как

$$\lim_{\|\mu\|\to 0} B(\mu)=0, \quad \lim_{\|\alpha\|\to 0}\|\alpha\|^{-1}g(t,\alpha,\mu)=0$$

равномерно по $t\in[0;T]$ и $\mu\in \mathrm{W}(\delta_0)$, а также справедливо равенство $g(x,\mu)=G(x,\mu)x$, то из вида выражения (8) следует свойство (iii). Лемма 1 доказана. $\square$

Пусть $y(t,\alpha,\mu)$ — решение системы (4), удовлетворяющее начальному условию $y(0,\alpha,\mu)=\alpha$; $X(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot y = Ay$, удовлетворяющая условию $X(0)=E$. Тогда общее решение системы (4) можно записать в виде

$$y(t,\alpha,\mu)=X(t)\alpha+X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau,\alpha,\mu)\Big(B(\mu)y(\tau,\alpha,\mu)+g(x(\tau,\alpha,\mu),\mu)\Big)d\tau. \tag{10}$$

Так как для любого фиксированного $\mu\in \mathrm{W}(\delta_0)$ при $x(0,\alpha,\mu)=z(0,\alpha,\mu)=y(0,\alpha,\mu)=\alpha$ решение системы (5) совпадает с решением системы (2) и решение системы (4) совпадает с решением системы (2) всюду на промежутке $t\in[0;T]$, то всюду на этом промежутке

$$x(t,\alpha,\mu)=z(t,\alpha,\mu)=y(t,\alpha,\mu).$$

Так как

$$z(t,\alpha,\mu)=Z(t,\alpha,\mu)\alpha=(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\alpha,$$
$$g(x(t,\alpha,\mu),\mu)=G(x(t,\alpha,\mu),\mu)z(t,\alpha,\mu),$$

то выражение (10) можно представить в виде

$$y(t,\alpha,\mu)=X(t)\alpha+ \\ +X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau,\alpha,\mu)\Big(B(\mu)\big(X(\tau)+\Phi(\tau,\alpha,\mu)\big)+G\big(x(\tau,\alpha,\mu),\mu\big)\big(X(\tau)+\Phi(\tau,\alpha,\mu)\big)\alpha\Big)d\tau. \tag{11}$$

С учетом представлений (7) и $f((E+M)x)=F((E+M)x)x$ непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$f\Big((E+M)(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\alpha\Big)=\bar F(X(t)\alpha)\alpha+\bar{\bar F}\Big(\Phi(t,\alpha,\mu)+M(X(t)+\Phi(t,\alpha,\mu))\Big)\alpha,$$

где $\bar F(X(t)\alpha)$ — 2×2-матрица, элементами которой являются суммы форм порядка не ниже $(k-1)$ относительно компонент вектора $X(t)\alpha$.

С учетом (11) условие существования малого T-периодического решения $y(T,\alpha,\mu)-\alpha=0$ системы (2) будет иметь вид

$$(X(T)-E)\alpha+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)AX(t)\alpha dt+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)(AM-MA)X(t)\alpha dt+ \\ +X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i(M^iA-M^{i-1}AM)X(t)\alpha dt+X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\bar F(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt+ \\ +X(T)\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^iM^i\bar F(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt+\psi(\alpha,\mu)=0_2, \tag{12}$$

где $\psi(\alpha,\mu)$ — выражение, в которое входят слагаемые, содержащие интегралы с участием матрицы $\Phi(t,\alpha,\mu)$. Заметим, что

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{-1}\psi(\alpha,\mu)=0,$$

где $\rho=\max\{\|\alpha\|,\|\mu\|\}$.

Непосредственными вычислениями установлены следующие утверждения.

1. Для рассматриваемой матрицы A фундаментальная матрица линейной системы $\dot{x} = Ax$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$, имеет вид
$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t + \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t & \dfrac{b}{\omega}\sin\omega t \\ -\dfrac{c}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t - \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix}.$$
Отсюда следует, что $X(T) = E$.
2. Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M справедливо
$$\int_0^T X^{-1}(t)(AM - MA)X(t)\alpha dt = 0_2.$$
3. Если $T = 2\pi/\omega$, то
$$\int_0^T \sin^s \omega t \cos^q \omega t \equiv 0$$
при s или q нечетном и
$$\int_0^T \sin^s \omega t \cos^q \omega t \neq 0$$
при s и q четных.
4. Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M
$$\int_0^T X^{-1}(t)(M^2 A - MAM)X(t)\alpha dt = -\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)A\alpha,$$
где $h(\mu) = 4a^2 m_{12}m_{21} - bc(m_{11} - m_{22})^2 - 2a(m_{11} - m_{22})(cm_{12} - bm_{21}) - (cm_{12} + bm_{21})^2$.

Лемма 2. *Для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M если порядок всех форм, входящих в $f(x)$, четный, то*
$$\int_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt = 0_2.$$

Доказательство. Для рассматриваемой матрицы A в силу вида матрицы $X(t)$ в компоненты вектора $X(t)\alpha$ входят функции $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Тогда непосредственным вычислением устанавливаем, что для любой матрицы M в формуле (12) компоненты матрицы $X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)$ содержат слагаемые вида $\sin^s \omega t \cos^q \omega t$, где $s + q = k + 1$. Тогда при k четном число $k + 1 = s + q$ является нечетным, следовательно, одно из чисел s или q нечетное, и
$$\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv \int_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt = 0_2.$$
Лемма доказана. □

Замечание 1. Если хотя бы одна из форм, входящих в $f(x)$, имеет нечетный порядок k, то число $k + 1 = s + q$ является четным, следовательно, числа s и q четные или нечетные одновременно. Тогда вектор-функция
$$\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv \int_0^T X^{-1}(t)\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt$$

может быть как нулевой, так и ненулевой.

Обозначим

$$\bar{\psi}(\alpha,\mu)=\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=3}^{+\infty}(-1)^i(M^iA-M^{i-1}AM)X(t)\alpha dt+$$

$$+\int\limits_0^T X^{-1}(t)\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^iM^i\bar{F}(X(t)\alpha)X(t)\alpha dt+\psi(\alpha,\mu).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{-1}\bar{\psi}(\alpha,\mu)=0.$$

С учетом утверждений 1–4, леммы 2 и замечания 1 систему уравнений (12) можно рассматривать для двух случаев: $\bar{G}(\alpha)\alpha\neq 0_2$ и $\bar{G}(\alpha)\alpha=0_2$. Рассмотрим оба случая.

4. Случай 1. Пусть $\bar{G}(\alpha)\alpha\neq 0_2$. Обозначим l — наименьший порядок форм, входящих в вектор-функцию $\bar{G}(\alpha)\alpha$, относительно компонент вектора α. Тогда условие существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$-\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)A\alpha+\bar{G}(\alpha)\alpha+\bar{\psi}(\alpha,\mu)=0_2. \tag{13}$$

Умножим систему (13) слева на матрицу A^{-1}. Обозначим $A^{-1}\bar{G}(\alpha)=(g_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^2$. Построим элементы $m_{ij}(\mu)$ $(i,j=\overline{1;2})$ матрицы M в виде форм порядка $l-1$ относительно компонент вектора $\mu\in\mathbb{R}^m$, $l\in\mathbb{N}$, $\mu\in \mathrm{W}(\delta_0)$. Тогда имеет место представление

$$-\frac{\pi}{\omega^3}h(\mu)E\alpha+A^{-1}\bar{G}(\alpha)\alpha=s_l(\alpha,\mu)+\bar{s}_l(\alpha,\mu), \tag{14}$$

где вектор-функция $s_l(\alpha,\mu)$ содержит формы порядка l относительно вектора (α,μ), а вектор-функция $\bar{s}_l(\alpha,\mu)$ — формы порядка выше l относительно вектора (α,μ). С учетом (14) условие (13) существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$s_l(\alpha,\mu)+o(\rho^l)=0_2. \tag{15}$$

Введем обозначения: $\alpha=\rho\beta$, $\mu=\rho\lambda$, $\zeta=(\beta,\lambda)$, $O(\rho)=\rho^{-l}o(\rho^l)$,

$$\lim_{\rho\to 0}O(\rho)=0.$$

Тогда $\|\zeta\|=1$, $s_l(\alpha,\mu)=\rho^l\tilde{s}_l(\zeta)$, $\bar{s}_l(\alpha,\mu)+\bar{\psi}(\alpha,\mu)=o(\rho)$, а систему (15) можно записать так:

$$\tilde{s}_l(\zeta)+O(\rho)=0_2. \tag{16}$$

Следующая теорема представляет условие отсутствия ненулевых T-периодических решений системы (2) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

Теорема 1. *Если при любом ζ $(\|\zeta\|=1)$ выполнено неравенство $\tilde{s}_l(\zeta)\neq 0$, то существует такое число $\delta'\in(0;\delta_0)$, что для любых векторов $\alpha\in \mathrm{U}(\delta')\setminus\{0\}$, $\mu\in \mathrm{W}(\delta')$, система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что при всех $\zeta\in\mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\|=1)$ выполняется неравенство $\tilde{s}_l(\zeta)\neq 0_2$, то найдется число

$$L=\inf_{\|\zeta\|=1}\|\tilde{s}_l(\zeta)\|>0$$

такое, что $\|\tilde{s}_l(\zeta)\|>L$. Выберем число $\delta'\in(0;\delta_0)$ так, чтобы при любом $\zeta\in\mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\|=1)$, некотором фиксированном $\rho\in(0;\delta')$ выполнялось неравенство $\|O(\rho)\|<L/2$. Тогда при любом $\zeta\in\mathbb{R}^{2+m}$ $(\|\zeta\|=1)$ имеет место неравенство $\tilde{s}_l(\zeta)+O(\rho)\neq 0_2$. Следовательно, система (15) в ε-окрестности начала координат не имеет других решений, кроме нулевого. Это означает, что при всех $\alpha\in \mathrm{U}(\delta')\setminus\{0\}$, $\mu\in \mathrm{W}(\delta')$ система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений. Теорема 1 доказана. $\square$

Из теремы 1 следует, что необходимым условием существования ненулевых T-периодических решений системы (2) является существование вектора $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$), для которого выполняется неравенство $\tilde{s}_l(\zeta_0) \neq 0$.

Обозначим множество $\mathrm{Z}_0 = \{\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\zeta_0\| = 1 \wedge \tilde{s}_l(\zeta_0) = 0\}$. Для каждого вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ найдется такое число $\rho \in (0;\delta_0)$, что существует вектор $(\alpha_0,\mu_0) \in \mathrm{U}(\delta_0)\backslash\{0\}\times\mathrm{W}(\delta_0)$, $(\alpha_0,\mu_0) = \rho\zeta_0$ и $\bar{s}_l(\alpha_0,\mu_0) = 0$.

Лемма 3. *Для существования вектора* $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$)*, удовлетворяющего уравнению* $\tilde{s}_l(\zeta) = 0$*, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор* $\alpha_0 \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$*, что*

$$\Big(cg_{11}(\alpha_0) + ag_{21}(\alpha_0)\Big)\alpha_{01}^2 + \Big(cg_{12}(\alpha_0) + a(g_{11}(\alpha_0) + g_{22}(\alpha_0)) + bg_{21}(\alpha_0)\Big)\alpha_{01}\alpha_{02} + \\ + \Big(ag_{12}(\alpha_0) + bg_{22}(\alpha_0)\Big)\alpha_{02}^2 = 0 \quad (17)$$

при всех $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$*,* $\alpha_0 = (\alpha_{01},\alpha_{02})$*.*

Доказательство. Пусть существует вектор $\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m}$ ($\|\zeta_0\| = 1$), $\tilde{s}_l(\zeta_0) = 0_2$, что равносильно существованию вектора $(\alpha_0,\mu_0) \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\} \times \mathrm{W}(\delta_0)$, $(\alpha_0,\mu_0) = \rho\zeta_0$, $\rho \in (0;\delta_0]$ и $\bar{s}_l(\alpha_0,\mu_0) = 0_2$. Последнее равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{\omega^3}h(\mu_0)(a\alpha_{01} + b\alpha_{02}) + g_{11}\alpha_{01} + g_{12}\alpha_{02} = 0, \\ \dfrac{\pi}{\omega^3}h(\mu_0)(c\alpha_{01} + a\alpha_{02}) + g_{11}\alpha_{01} + g_{12}\alpha_{02} = 0. \end{cases}$$

Исключая из обоих уравнений $\pi h(\mu_0)/\omega^3$ и выполняя тождественные преобразования, получим формулу (17) при всех $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$. Лемма 1 доказана. ☐

Пусть $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — $(2\times(2+m))$-матрица Якоби функции $\tilde{s}_l(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$. Следующая теорема устанавливает достаточные условия существования ненулевого T-периодического решения системы (2).

Теорема 2. *Если для вектора* $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ *справедливо равенство* $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 2$*, то существует такое число* $\delta_1 \in (0;\delta_0)$*, что на множестве* $\mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) = \{\zeta \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\zeta - \zeta_0\| < \delta_1\}$ *система* (2) *имеет ненулевое* T*-периодическое решение* $\bar{x}(t,\alpha,\mu)$*, удовлетворяющее начальным условиям* $\bar{x}(0,\alpha,\mu) = \alpha$*. Начальные значения* $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ *решений семейства определяются соотношениями* $(\alpha,\mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta^*)$*,* $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta)$*.*

Доказательство. В силу условий теоремы для любого фиксированного вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ по формуле Тейлора имеем

$$\tilde{s}_l(\zeta) = \tilde{s}_l(\zeta_0) + D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta) = D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta), \quad (18)$$

где $\zeta_0 = (\beta_0,\lambda_0)$, $\alpha = \rho\beta$, $\mu = \rho\lambda$, $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — $2\times(2+m)$-матрица Якоби функции $\tilde{s}_l(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$; $p_i(\zeta_0;\Delta\zeta)$ — непрерывная вектор-форма порядка i относительно $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$; $\Delta\zeta = (\Delta\beta,\Delta\lambda)$. Из условия $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 2$ следует представление

$$D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta = S(\zeta_0)v + \tilde{S}(\zeta_0)w, \quad (19)$$

в котором $S(\zeta_0)$ и $\tilde{S}(\zeta_0)$ — матрицы размерностей 2×2 и $2\times m$ соответственно; v — двумерный, w — m-мерный векторы из компонент вектора $\Delta\zeta$, выбранные так, чтобы $\det S(\zeta_0) \neq 0$. тогда из равенства (18) следует, что

$$\sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0;\Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0;v) + \tilde{q}(\zeta_0;v;w), \quad (20)$$

где в вектор-форму $q_i(\zeta_0;v)$ компоненты вектора v входят в степени i, $i \in \overline{2;k}$; $q_i(\zeta_0;0) = 0$ для всех $i \in \overline{2;k}$. Для любого v

$$\lim_{\|w\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0;v;w) = 0$$

равномерно по v на множестве $\|v\| \leqslant \delta_1$, где $\delta_1 \in (0;\delta_0)$; $\tilde{q}(\zeta_0; v; 0) = 0$. С учетом равенств (18)–(20) система (16) примет вид

$$S(\zeta_0)v + \tilde{S}(\zeta_0)w + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0; v) + \tilde{q}(\zeta_0; v; w) + O(\rho) = 0. \tag{21}$$

Так как $\det S(\zeta_0) \neq 0$, то при всех v и w, любом $\rho \in (0;\delta_0]$ равенство (21) определяет некоторый нелинейный непрерывный по v оператор

$$\mathbf{H}v = S^{-1}(\zeta_0)\left(\tilde{S}(\zeta_0)w + \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta) = \sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0; v) + \tilde{q}(\zeta_0; v; w) + O(\rho)\right). \tag{22}$$

Из того, что для всех $i \in \overline{2;k}$ $q_i(\zeta_0; 0) = 0$,

$$\lim_{\|w\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0; v; w) = 0$$

равномерно по $\|v\| \leqslant \delta_1$, где $\delta_1 \in (0;\delta_0)$; $\tilde{q}(\zeta_0; v; 0) = 0$, и определения $O(\rho)$ следует, что существуют числа δ' и δ'', $\delta' \in (0;\delta_1]$, $\delta'' \in (0;\delta_0]$, такие, что при всех $\|v\| \leqslant \delta'$, $\|w\| < \delta'$, $\rho \in (0;\delta'')$ справедливы оценки

$$\|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|\tilde{S}(\zeta_0)\| \cdot \|w\| < \frac{\delta_1}{4}, \quad \|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \left\|\sum_{i=2}^{l} q_i(\zeta_0; v)\right\| < \frac{\delta_1}{4},$$
$$\|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|\tilde{q}(\zeta_0; v; w)\| < \frac{\delta_1}{4}, \quad \|S^{-1}(\zeta_0)\| \cdot \|O(\rho)\| < \frac{\delta_1}{4},$$

из которых следует, что для любых фиксированных $\|w\| < \delta'$, $\rho \in (0;\delta'')$ оператор $\mathbf{H}$ непрерывен по v и отображает множество $\mathrm{V}(\delta') = \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\| \leqslant \delta'\}$ в себя. По теореме Брауэра существует такой вектор $v^* \in \mathrm{V}(\delta')$, что $\mathbf{H}v^* = v^*$. Зафиксируем произвольные w^*, ρ^* так, что $\|w^*\| < \delta'$, $\rho^* \in (0;\delta'')$. Из компонент векторов v^* и w^* построим векторы $\Delta\zeta^* = (\Delta\beta^*, \Delta\lambda^*)$ и $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1)$. По вектору $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta^*)$ найдем $\alpha = \rho^*(\beta_0 + \Delta\beta^*)$, $\mu = \rho^*(\lambda_0 + \Delta\lambda^*)$. Тогда решение $\bar{x}(t, \alpha, \mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0, \alpha, \mu) = \alpha$, является искомым ненулевым T-периодическим решением. Теорема 2 доказана. □

Замечание 2. Подставляя найденное решение системы (2) в выражение $x = (E + M)\bar{x}$, получим семейство ненулевых T-периодических решений системы (1) $x(t, \alpha) = (E + M)\bar{x}(t, \alpha, \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha) = \alpha$.

Замечание 3. Количество периодических решений системы (2) с начальными условиями $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$ определяется количеством решений системы $\tilde{s}_l(\zeta) = 0_2$. Если эта система имеет конечное множество решений, в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ точка $x \equiv 0$ является центро-фокусом. В силу леммы 3 возможен случай, когда существует бесконечное множество решений системы $\tilde{s}_l(\zeta) = 0_2$, что соответствует случаю центра в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ (см [8]).

Если для вектора $\zeta_0 \in \mathrm{Z}_0$ справедливо неравенство $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 1$, то с использованием (18) систему (16) запишем в виде

$$D\tilde{s}_l(\zeta_0)\Delta\zeta + p_2(\zeta_0; \Delta\zeta) + o(\|\Delta\zeta\|^2) + O(\rho) = 0, \tag{23}$$

в котором $p_2(\zeta_0; \Delta\zeta)$ — вектор-форма второго порядка относительно компонент вектора $\Delta\zeta$,

$$o(\|\Delta\zeta\|^2) = \sum_{i=2}^{l} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta), \quad \lim_{\|\Delta\zeta\|\to 0} \frac{o(\|\Delta\zeta\|^2)}{\|\Delta\zeta\|^2} = 0.$$

Далее систему (23) умножим слева на неособенную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} & 1 \end{pmatrix},$$

тогда, вводя обозначения

$$KD\tilde{s}_l(\zeta_0) = \begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $D_1\tilde{s}_l(\zeta_0)$ — первая строка матрицы $D\tilde{s}_l(\zeta_0)$;

$$Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) = p_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) - \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta);$$

$\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) = Ko(\|\Delta\zeta\|^2)$, $\tilde{O}(\rho) = KO(\rho)$, приведем ее к следующему виду

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta\zeta + \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \end{pmatrix} + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение множество $\Lambda_{\zeta_0}(\delta_1) = \{\Delta\zeta \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\Delta\zeta\| \leqslant \delta_1 \wedge (\zeta_0 + \Delta\zeta) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1)\}$.

Теорема 3. *Если при всех $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$ выполнено неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \neq 0$, то существует такое число $\delta'' \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$, что при всех $(\alpha,\mu) \in \mathrm{U}(\delta'') \setminus \{0\} \times \mathrm{W}(\delta'')$ система* (2) *не имеет ненулевых малых T-периодических решений.*

Доказательство. Так как при всех $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$ выполняется неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) \neq 0$, то в силу непрерывности формы $\tilde{p}_{2(2)}$ найдется число

$$L = \inf_{\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)} |\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta)| > 0$$

такое, что $|\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta)| > L$. Выберем число $\delta'' \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$ так, чтобы при любом $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta'')$, некотором фиксированном $\rho \in (0;\delta'')$ выполнялись неравенства $|\tilde{o}_{(2)}(\|\Delta\zeta\|^2)| < L/3$, $|\tilde{O}_{(2)}(\rho)| < L/3$. Тогда при любом $\Delta\zeta \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta'')$ имеет место неравенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta) + \tilde{o}_{(2)}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}_{(2)}(\rho) \neq 0$. Следовательно, система (24) в δ''-окрестности начала координат не имеет других решений, кроме нулевого. Это означает, что при всех $(\alpha,\mu) \in \mathrm{U}(\delta'') \setminus \{0\} \times \mathrm{W}(\delta'')$ система (2) не имеет ненулевых T-периодических решений. Теорема 3 доказана. ☐

Пусть существует вектор $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, при котором выполняется равенство $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$. Обозначим $D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)$ — матрицу Якоби вектор-функции $Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta)$, вычисленную при $\Delta\zeta_0$, $(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0))$ — матрицу, составленную приписыванием к матрице $KD\tilde{s}_l(\zeta_0)$ столбцов матрицы $D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)$. Определим множество $\mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_1) = \{\Delta\xi \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\xi\| \equiv \|\Delta\zeta - \Delta\zeta_0\| \leqslant \delta_1 \wedge \Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)\}$.

Теорема 4. *Если для вектора $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющего условию $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$, справедливо равенство*

$$\operatorname{rank}(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)) = 2,$$

то существует такое число $\delta_2 \in (0;\min\{\delta_0,\delta_1\})$, что на множестве $\mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2)$ система (2) *имеет ненулевое T-периодическое решение $\bar{x}(t,\alpha,\mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0,\alpha,\mu) = \alpha$. Начальные значения $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0)$ решений семейства определяются соотношениями*

$$(\alpha,\mu) = \rho(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi), \quad \zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) \oplus \mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2).$$

Доказательство. Предположим, что существует вектор $\Delta\zeta_0 \in \Lambda_{\zeta_0}(\delta_1)$, удовлетворяющий условию $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0;\Delta\zeta_0) = 0$. Разложим вектор-функцию $Kp_2(\zeta_0;\Delta\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности $\Delta\zeta_0$. Тогда система (24) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta\zeta + D\tilde{p}_2(\zeta_0;\Delta\zeta_0)\Delta\xi + \sum_{i=2}^{j} q_i(\zeta_0,\Delta\zeta_0,\Delta\xi) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2, \tag{25}$$

в котором $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$ — вектор-форма порядка i относительно $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$. Так как $\operatorname{rank}(KD\tilde{s}_l(\zeta_0)|D\tilde{p}_2(\zeta_0; \Delta\zeta_0)) = 2$, то справедливо представление

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_l(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta\zeta + D\tilde{p}_2(\zeta_0; \Delta\zeta_0)\Delta\xi = P_1\bar{w} + P_2\bar{\bar{w}}, \tag{26}$$

где P_1, P_2 — матрицы размерностей 2×2 и $2\times m$ соответственно, векторы $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ имеют размерности 2 и m соответственно и выбраны так, чтобы $\|\bar{w}\| \neq 0$ и $\det P_1 \neq 0$. Тогда в силу вида вектор-форм $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$ имеет место представление

$$\sum_{i=2}^{j} q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi) = \sum_{i=2}^{j} (\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) + \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}), \tag{27}$$

в котором $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w})$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})$ — формы порядка i относительно компонент векторов $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ соответственно, $i = \overline{2; j}$, $\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})$ — сумма форм не ниже второго порядка по совокупности компонент векторов $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$. Для всех $i = \overline{2; j}$ справедливы равенства $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$,

$$\lim_{\|\bar{\bar{w}}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{w} \text{ на множестве } \|\bar{w}\| \leqslant \delta_2,$$

$$\lim_{\|\bar{w}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{\bar{w}} \text{ на множестве } \|\bar{\bar{w}}\| \leqslant \delta_2,$$

где $\delta_2 \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$. С учетом (26) и (27) система (25) примет вид

$$P_1\bar{w} + P_2\bar{\bar{w}} + \sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) + \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \tag{28}$$

Так как $\det P_1 \neq 0$, то при всех $\bar{w}$ и $\bar{\bar{w}}$ и любом $\rho \in (0; \delta_2)$ уравнение (28) определяет некоторый нелинейный непрерывный по $\bar{w}$ оператор

$$\mathbf{B}\bar{w} = -P_1^{-1}P_2\bar{\bar{w}} - P_1^{-1}\sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) - -P_1^{-1}(\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho)). \tag{29}$$

Так как для всех $i = \overline{2; j}$ справедливы равенства $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$, $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$,

$$\lim_{\|\bar{\bar{w}}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{w} \text{ на множестве } \|\bar{w}\| \leqslant \delta_2,$$

$$\lim_{\|\bar{w}\|\to 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0 \quad \text{равномерно по } \bar{\bar{w}} \text{ на множестве } \|\bar{\bar{w}}\| \leqslant \delta_2,$$

а также из определения $\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2)$ и $\tilde{O}(\rho)$ следует, что существуют такие числа δ, δ' и δ'', $\delta \in (0; \delta_2]$, $\delta' \in (0; \delta_2]$, $\delta'' \in (0; \delta_2]$, что при всех $\|\bar{w}\| \leqslant \delta$, $\|\bar{\bar{w}}\| < \delta$, $\|\Delta\zeta\| < \delta'$, $\rho \in (0; \delta'')$ справедливы оценки

$$\|P_1^{-1}\|\|P_2\|\|\bar{\bar{w}}\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\| \left\| \sum_{i=2}^{j}(\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w})) \right\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\| \left\| \sum_{i=2}^{j}(\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) \right\| < \frac{\delta}{6},$$

$$\|P_1^{-1}\|\|\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})\| < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\|\|\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) < \frac{\delta}{6}, \quad \|P_1^{-1}\|\|\tilde{O}(\rho)\| < \frac{\delta}{6},$$

из которых следует, что для любых фиксированных $\|\bar{\bar{w}}\| < \delta$, $\|\Delta\zeta\| < \delta'$ $\rho \in (0; \delta'')$ оператор $\mathbf{B}$ непрерывен по $\bar{w}$ и отображает множество $\bar{\mathrm{V}}(\delta) = \{\bar{w} \in \mathbb{R}^2 : \|\bar{w}\| \leqslant \delta\}$ в себя. По теореме Брауэра существует такой вектор $\bar{w}^* \in \bar{\mathrm{V}}(\delta)$, что $\mathbf{B}\bar{w}^* = \bar{w}^*$. Зафиксируем произвольные $\bar{\bar{w}}^*$, $\Delta\zeta^*$, ρ^* так, что $\|\bar{\bar{w}}^*\| < \delta$, $\|\Delta\zeta^*\| < \delta'$, $\rho^* \in (0; \delta'')$. Из компонент векторов $\bar{w}^*$ и $\bar{\bar{w}}^*$ построим векторы $(\alpha, \mu) = \rho^*(\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi^*)$, $\zeta = (\zeta_0 + \Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi^*) \in \mathrm{S}_{\zeta_0}(\delta_1) \oplus \mathrm{S}_{\Delta\zeta_0}(\delta_2)$. Тогда решение $\bar{x}(t, \alpha, \mu)$, удовлетворяющее начальным условиям $\bar{x}(0, \alpha, \mu) = \alpha$, является искомым ненулевым T-периодическим решением. Теорема 3 доказана. □

Замечание 4. Подставляя найденное решение системы (2) в выражение $x = (E + M)\bar{x}$, получим семейство ненулевых T-периодических решений системы (1) $x(t, \alpha) = (E + M)\bar{x}(t, \alpha, \mu)$ с начальными условиями $x(0, \alpha) = \alpha$.

Замечание 5. Количество периодических решений системы (2) с начальными условиями $\alpha \in \mathrm{U}(\delta_0) \setminus \{0\}$ определяется количеством решений уравнения $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta) = 0$. Если это уравнение имеет конечное множество решений, то в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$ точка $x \equiv 0$ является центро-фокусом. В силу леммы 3 возможен случай, когда существует бесконечное множество решений системы $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta) = 0_2$, что соответствует случаю центра в окрестности $\mathrm{U}(\delta_0)$.

Если же $\operatorname{rank} D\tilde{s}_l(\zeta_0) = 0$, то для системы (32) следует повторить рассуждения случая 1 для форм $p_i(\zeta_0, \Delta\zeta)$ порядка $i \geqslant 2$, получающихся при разложении вектор-формы $\tilde{s}_l(\zeta_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ζ_0 (теоремы 1 и 2).

5. Случай 2. Пусть $\bar{G}(\alpha)\alpha \equiv 0_2$. Тогда условие существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$-\frac{\pi}{\omega^3} h(\mu) A\alpha + \bar{\psi}(\alpha, \mu) = 0_2. \tag{30}$$

Умножим систему (30) слева на матрицу A^{-1} и на число $-\omega^3/\pi$. Обозначим $(-\omega^3/\pi)A^{-1}\bar{\psi}(\alpha, \mu) = \tilde{\psi}(\alpha, \mu)$. Построим элементы $m_{ij}(\mu)$ $(i, j = \overline{1;2})$ матрицы M в виде форм порядка l относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathrm{W}(\delta_0)$. Тогда имеет место представление

$$h(\mu) E\alpha = s_{l+1}(\alpha, \mu), \tag{31}$$

где вектор-функция $s_{l+1}(\alpha, \mu)$ содержит формы порядка $l+1$ относительно вектора (α, μ). С учетом представления (31) условие (30) существования ненулевого T-периодического решения системы (2) примет вид

$$s_{l+1}(\alpha, \mu) + o(\rho^{l+1}) = 0_2. \tag{32}$$

В силу вида вектор-вормы $s_{l+1}(\alpha, \mu)$ всегда существует размерность $m_0 \in \mathbb{N}$ и вектор $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$, что $s_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 0_2$. Для указанной размерности $m_0 \in \mathbb{N}$ и любого вектора $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m_0}$ справедливо равенство $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) \leqslant 1$, где $Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0)$ — матрица Якоби вектор-формы $s_{l+1}(\alpha, \mu)$, вычисленная для любого вектора $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m_0}$. Если $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 1$, то вопрос о существовании ненулевых T-периодических решений системы (2) рассматривается аналогично случаю 1 (теоремы 3 и 4). Если же $\operatorname{rank} Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 0$, то для системы (32) следует повторить рассуждения случая 1 для форм порядка не ниже 2, получающихся при разложении вектор-формы $s_{l+1}(\alpha, \mu_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (α, μ_0) (теоремы 1 и 2).

Таким образом, получен алгоритм нахождения условий существования ненулевого решения системы (32), длительность которого зависит от выбора значения l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин В. В., Лукашевич Л. А., Садовский А. П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. — Минск: Изд-во БГУ, 1982.
2. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1979.
3. *Андреев А. Ф., Андреева И. А.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре. — Lambert Academic, 2017.
4. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1991.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Т. 1. — М.: МЦНМО, 2013.
7. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В., Кузнецова О. А.* Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта// Тр. СПИИРАН. — 2011. — № 16. — С. 5–36.
8. *Лискина Е. Ю.* О достаточных условиях существования центра нелинейной динамической системы второго порядка// Изв. РАЕН. Диффер. уравн. — 2007. — № 12. — С. 32–38.
9. *Лискина Е. Ю.* Проблема существования множества ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка// Вестн. РАЕН. — 2015. — *254*, № 3. — С. 70–77.
10. *Медведева Н. Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2006. — *254.* — С. 11–100.

11. *Садовский А. П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний// Диффер. уравн. — 1997. — *33*, № 2. — С. 236–244.
12. *Терехин М. Т.* Малые периодические решения системы дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. мат. модел. — 2020. — № 1. — С. 64–92.

Лискина Екатерина Юрьевна
Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина
E-mail: e.liskina@365.rsu.edu.ru, katelis@yandex.ru