ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 41–50
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-41-50

УДК 517.929

ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

© 2022 г. **Д. А. КУЛИКОВ**

Аннотация. В работе изучается математическая модель макроэкономики, известная под названием «спрос-предложение» или «модель рынка». Классический вариант этой модели не имеет циклов. Показано, что введение запаздывания приводит к возможности появления в соответствующем нелинейном дифференциальном уравнении периодических решений, в том числе устойчивых. Найдена минимальная величина запаздывания, превышение которой может привести к возникновению циклов. При анализе соответствующего дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом использованы методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. Получены асимптотические формулы для найденных периодических решений.

Ключевые слова: модель «спрос-предложение», запаздывание, устойчивость, бифуркация, асимптотика.

DELAY EFFECT AND BUSINESS CYCLES

© 2022 **D. A. KULIKOV**

Abstract. In this paper, we study a mathematical model of macroeconomics known as “demand-supply” or “market model.” The classical version of this model has no cycles. We show that the introduction of a delay may lead to the appearance of periodic solutions, including stable solutions, and find the minimum value of such a delay. Our analysis is based on methods of the theory of dynamical systems with infinite-dimensional spaces of initial conditions. For periodic solutions detected, we obtain asymptotic formulas.

Keywords and phrases: model “supply-demand”, delay, stability, bifurcation, asymptotics.

AMS Subject Classification: 34K18, 37G05, 37N40

1. Введение. Одной из наиболее известных моделей макроэкономики следует считать модель, известную под названием «модель рынка» (рынка «одного товара») [9, 18, 19]. Иначе эту модель принято называть «спрос-предложение». В основе модели рынка лежит закон Сэя, согласно которому предложение товара создает спрос. Приведем эту математическую модель в форме, которую приводят в литературе, посвященной математическому моделированию в макроэкономике [9, 18, 19]. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = D(p) - S(p). \tag{1}$$

Здесь $p = p(t)$ — цена, $D(p)$ — функция, характеризующая спрос, $S(p)$ — предложение товара на рынке. При этом считают, что эти функции обладают следующими свойствами (см. [9, 18, 19]):

(i) обе эти функции определены при $p \in (0, \infty)$ и достаточно гладко зависят от p;
(ii) при всех $p \in (0, \infty)$ справедливы неравенства $D(p) > 0$, $S(p) > 0$, $D'(p) < 0$, $S'(p) > 0$;
(iii) $\lim\limits_{p\to 0+} D(p) = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$;
(iv) $\lim\limits_{p\to 0+} S(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = S_\infty$ ($S_\infty \in \mathbb{R}$ или $S_\infty = \infty$).

Замечание 1. Приемлем вариант, когда одна из этих функций или обе определены при $p \in [0, \infty)$. Тогда обычно считают, что $D(0) = D_0$, где D_0 — достаточно большая положительная постоянная, а $S(0) = 0$.

Подчеркнем, что с экономической точки зрения все эти предположения достаточно естественны и характерны для модели «спрос-предложение». Вполне нормально, что спрос на товар падает при росте на него цены и, напротив, предложение растет при увеличении стоимости товара. При очень большой цене спрос на товар будет предельно мал и достаточно велик, если цена очень мала. Понятно, что $S(0) = 0$ ($\lim_{p\to 0} S(p) = 0$), так как при «нулевой» цене предложение товара с экономической точки зрения нецелесообразно.

Рассмотрим функцию $F(p) = D(p) - S(p)$. Из свойств (i)–(iv) функций $D(p)$ и $S(p)$ вытекает, что для нее выполнены следующие свойства:

(i) предел $\lim\limits_{p\to 0} F(p)$ равен ∞ или достаточно большой положительной константе;

(ii) предел $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)$ равен $-\infty$ или достаточно большой по абсолютной величине отрицательной постоянной;

(iii) $F'(p) < 0$ при всех $p \in (0, \infty)$.

Следовательно, уравнение $F(p) = 0$ имеет один положительный корень $p = p_0$. В частности, $a_1 = F'(p_0) < 0$. При $p \in (p_0, \infty)$ справедливо неравенство $F(p) < 0$. Кроме того, $F(p) > 0$, если $p \in (0, p_0)$. Поэтому все решения, у которых начальное условие $p(0) \in (0, p_0)$ монотонно возрастают ($p' = F(p)$) и, напротив, решения $p(t)$ монотонно убывают, если $p(0) \in (p_0, \infty)$.

Из этих замечаний вытекает, что состояние равновесия p_0 ($F'(p_0) < 0$) асимптотически устойчиво и область притяжения представляет собой все $p(0) > 0$. Следовательно, следуя терминологии монографии [2, с. 248], можно утверждать, что состояние равновесия уравнения (1) асимптотически устойчиво в целом (глобально асимптотически устойчиво и $p = p_0$ единственный аттрактор для решений дифференциального уравнения (1) с положительными начальными условиями). Эти замечания позволяют, в частности, сделать вывод о том, что уравнение (1) не может иметь предельных циклов, для которых $p(t) > 0$ ($p(t) \geqslant 0$) при всех t.

Вместе с тем, для макроэкономических процессов в условиях рыночной экономики характерна цикличность, когда подъемы экономической активности сменяют спады. Таким образом традиционный вариант модели «спрос-предложение» (модель рынка в других терминах) не полностью адекватен экономической динамике и такая модель должна быть скорректирована или заменена на иные более содержательные. В частности, иные модели можно найти в уже упомянутых монографиях [9, 18, 19]. В первую очередь, это математические модели, в которых предлагается увеличить число уравнений до двух: модель бизнес-цикла Кейнса, мультипликатор-аксельратор. Вместе с тем в середине прошлого века М. Калецки выдвинул идею (см., например, обсуждения в монографии [9, 18, 19]) о том, что одним из основных факторов цикличности следует считать запаздывание. Суть его в экономике состоит в том, что на динамику цены в силу специфики экономических процессов влияние имеют экономические показатели предшествующего периода, предшествующего «торгового» дня (см., например, [6]).

В работах [7, 15] был предложен один вариант учета запаздывания, который предполагал вместо уравнения (1) рассмотреть уравнение вида

$$\dot{p} = D(p) - S(p_h),$$

где $p_h = p_h(t) = p(t - h)$, $h > 0$. Вместе с тем запаздывание может влиять не только на функцию предложения, но и на функцию спроса. В данной работе предполагается учесть и такую возможность и рассмотреть уравнение

$$\dot{p} = D(p_h) - S(p_h) \tag{2}$$

вместо двух предшествующих. Ниже будет показано, что учет фактора запаздывания уже в обеих функциях (функциях спроса и предложения) также приводит к появлению предельных циклов. Аналогичная идея, т. е. переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с отклоняющимся аргументом, была реализована уже в другой экономической модели, известной под названием «модель Солоу» (Солоу—Свана) [8, 11, 12, 14, 16].

Преобразуем уравнение (2) и положим $p(t) = p_0 + x(t)$, $p(t-h) = p_0 + x(t-h)$. Для новой функции $x(t)$ получим также дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = D(p_0 + y(t)) - S(p_0 + y(t)), \tag{3}$$

где $y(t) = x(t-h)$. Естественно, дифференциальное уравнение (3) имеет нулевое состояние равновесия и в его окрестности уравнение (3) можно переписать в следующем виде

$$\dot{x} = -ay + a_2 y^2 + a_3 y^3 + o(y^3). \tag{4}$$

При этом, разумеется, использовалась формула Тейлора и, следовательно,

$$a = -F'(p)|_{p=p_0}, \quad a_2 = \frac{F''(p)}{2}\bigg|_{p=p_0}, \quad a_3 = \frac{F'''(p)}{6}\bigg|_{p=p_0}, \quad F(p) = D(p) - S(p).$$

Далее вместо анализа состояния равновесия $p = p_0$ уравнения (2) изучению подлежит нулевое состояние равновесия вспомогательного дифференциального уравнения (4).

Дополним уравнение (4) начальным условием

$$x(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{5}$$

где $f(t) \in \mathbb{C}^k[-h, 0]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. пространству k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[-h, 0]$. Из результатов, изложенных в монографии [13], вытекает, что решения задачи Коши (4), (5) порождают гладкий локальный полупоток. Это делает возможным (см., например, [13, 17]) использовать теорему Андронова—Хопфа для изучения бифуркаций периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия дифференциального уравнения (4). Наличие предельного цикла у дифференциального уравнения (4) означает, что модель «спрос-предложение» с учетом эффекта запаздывания позволяет, в отличие от традиционной модели (1), объяснить цикличность в рыночной экономике.

2. Об устойчивости состояния равновесия. Использование бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа предполагает анализ устойчивости нулевого состояния равновесия (см., например, гл. 11 из монографии [13], с. 179 монографии [1]). В свою очередь, для этого следует рассмотреть линеаризованный вариант дифференциального уравнения (4), т. е. дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -ay, \tag{6}$$

где $a = -F'(p)|_{p=p_0} > 0$. Хорошо известно [10, 13], что анализ устойчивости решений дифференциального уравнения (6) может быть сведен к анализу характеристического уравнения

$$\lambda = -a \exp(-\lambda h) \quad (h > 0), \tag{7}$$

у которого при малых h все корни находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости.

При увеличении h у характеристического уравнения (7) могут появиться корни в правой полуплоскости. Для этого сначала найдем наименьшее положительное h, при котором у характеристического уравнения (7) могут появиться корни $\pm i\sigma$ на мнимой оси. Сразу подчеркнем, что уравнение (7) не может иметь нулевого корня. Поэтому искомая величина $h = H$ и соответствующее σ находится после анализа уравнения

$$i\sigma = -a \exp(-i\sigma h).$$

Следовательно, $\sigma > 0$ и $h > 0$ $(H > 0)$ следует искать как решения системы

$$a \cos \sigma h = 0, \quad a \sin \sigma h = \sigma.$$

Пусть $\sigma h = \omega$. Тогда получаем счетный набор решений

$$\omega_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad h_n = \frac{\pi/2 + 2\pi n}{a \sin(\pi/2 + 2\pi n)}, \quad \sigma_n = \frac{\omega_n}{h_n}.$$

Подходящее решение получаем при $n = 0$, т. е. $\omega = \omega_0 = \pi/2$, $H = \pi/2a$, $\sigma = \sigma_0 = a$.

Пусть теперь $h = H(1 + \mu)$, где μ — малый параметр. Тогда уравнение (7) следует переписать в следующем виде

$$\lambda(\mu) = -a \exp(-\lambda(\mu) H(1 + \mu)),$$

корни которого зависят от μ. Пусть

$$\lambda_0' = \tau_0' + i\sigma_0' = \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu}\bigg|_{\mu=0}, \quad \lambda_0 = \lambda(0) = i\sigma_0.$$

Из последнего уравнения для $\lambda(\mu)$ находим, что

$$\lambda_0' = \frac{\frac{\pi}{2}a}{1+i\frac{\pi}{2}}, \quad \tau_0' = \frac{2\pi a}{\pi^2+4} > 0, \quad \sigma_0' = -\frac{\pi^2 a}{\pi^2+4}.$$

Следовательно, при увеличении h (при $\mu > 0$) корни характеристического уравнения (7), равные $\pm i\sigma(\sigma = a)$, переходят в правую полуплоскость комплексной плоскости и нулевое состояние равновесия нелинейного дифференциального уравнения теряет устойчивость. Подчеркнем также, что остальные корни характеристического уравнения остаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha_0 < 0$ (см., например, [10, 13]). Уместно подчеркнуть, что положительная постоянная α_0 не зависит от ε.

В этом разделе работы проверена возможность реализации первой группы условий бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа (условий, обозначенных H_1, H_2 в [1]). В следующем разделе будет использован метод интегральных многообразий и нормальных форм для проверки второй группы условий теоремы Андронова—Хопфа (см. теорему 2.4 и условие H_3 из главы 3 монографии [1], в которой теорема Андронова—Хопфа сформулирована в связи с анализом обыкновенных дифференциальных уравнений).

3. Периодические решения нелинейного уравнения. Возвратимся к анализу нелинейного дифференциального уравнения (4) в случае, когда

$$h = H(1+\gamma\varepsilon).$$

Здесь ε — малый положительный параметр, $\gamma = \pm 1$. Выбор знака для γ будет осуществлен в конце данного раздела и зависит от параметров анализируемой задачи, коэффициентов нормальной формы. Величина H была определена в предыдущем разделе.

Для удобства дальнейшего анализа введем новое нормированное время, положив

$$t = \tau(1+\gamma\varepsilon).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (4) можно и удобно переписать в виде

$$u_\tau = \frac{du}{d\tau} = (1+\gamma\varepsilon)[-av + a_2v^2 + a_3v^3 + o(v^3)], \tag{8}$$

где $u = u(\tau) = x((1+\gamma\varepsilon)\tau)$, $v = v(\tau) = u(\tau - H)$. Добавим, что в данном случае линеаризованное дифференциальное уравнение (8), т. е. дифференциальное уравнение

$$u_\tau = -a(1+\gamma\varepsilon)v$$

имеет решения

$$u(\tau) = \exp(\lambda(\varepsilon)\tau), \quad \overline{u}(\tau) = \exp(\overline{\lambda}(\varepsilon)\tau),$$

где

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon) \pm i\lambda_2(\varepsilon), \quad \lambda_1(\varepsilon) = \varepsilon\gamma\sigma\frac{2\pi}{\pi^2+4} + o(\varepsilon), \quad \lambda_2(\varepsilon) = \sigma + \frac{4\gamma\sigma}{\pi^2+4}\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \sigma = a.$$

Из предыдущих утверждений вытекает, что в фазовом пространстве решений дифференциального уравнения (8) существует локально инвариантное двумерное притягивающее многообразие $M_2(\varepsilon)$ (см., например, [17]), а также работу [5], в которой приведена более подробная библиография). Решения на нем могут быть восстановлены после анализа обыкновенного дифференциального уравнения — нормальной формы Пуанкаре (см., например, гл. 1 и гл. 3 из монографии [1]).

$$z_s' = (\alpha + i\beta)z + (d + ic)z|z|^2, \tag{9}$$

если, конечно, первая ляпуновская величина $d \neq 0$. Здесь $z = z(s) = z_1(s) + iz_2(s)$, $s = \varepsilon\tau$.

Замечание 2. Нормальная форма (9) — это «укороченный» вариант нормальной формы Пуанкаре, в котором отброшены члены, имеющие порядок малости $O(\varepsilon)$. Такой вариант нормальной формы приемлем, если $d \neq 0$ (первая ляпуновская величина отлична от нуля). При $d = 0$ требуется дополнительное уточнение правой части дифференциального уравнения (8). Следует учесть члены, имеющие более высокий порядок малости.

Решения дифференциального уравнения (8), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, можно и удобно искать (см., например, [8, 14, 16]) в форме

$$u(\tau, z, \overline{z}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon u_2(\tau, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, z, \overline{z}) + O(\varepsilon^2), \tag{10}$$

где

$$u_1(\tau, z, \overline{z}) = zq + \overline{zq}, \quad z = z(s), \quad q = q(\tau) = \exp(i\sigma\tau),$$

а функции $u_2(\tau, z, \overline{z})$, $u_3(\tau, z, \overline{z})$ будут найдены ниже в процессе реализации модифицированной версии алгоритма Крылова—Боголюбова, адаптированного к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Функции u_2, u_3 зависят гладко от своих аргументов и имеют по переменой τ период $2\pi/\sigma (\sigma = a)$, а также для них справедливы равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} u_j(\tau, z, \overline{z}) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0, \quad j = 2, 3, \dots,$$

если считать временно s независимой от τ переменной (параметром).

Замечание 3. Напомним известный факт [13]. Неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} + av = f(\tau),$$

где $v = u(t - H)$, а $f(\tau)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\sigma$ имеет периодическое решение с тем же периодом, если выполнены условия разрешимости

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} f(\tau) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0.$$

При этом равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} u(\tau) \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0$$

выделяют одно такое решение $u(\tau)$ неоднородного дифференциального уравнения.

Приступим к изложению алгоритма нахождения нормальной формы. Сумму (10) подставим в дифференциальное уравнение (8) и выделим слагаемые при ε и $\varepsilon^{3/2}$. В результате получим два неоднородных дифференциальных уравнения

$$\dot{u}_2 + av_2 = a_2 v_1^2, \tag{11}$$

$$\dot{u}_3 + av_3 = -(z'q + \overline{z}'\overline{q}) - \gamma a(zq \exp(-i\sigma H) + \overline{zq} \exp(i\sigma H)) + \\ + aH(z'q \exp(-i\sigma H) + \overline{z}'\overline{q} \exp(i\sigma H)) + 2a_2 v_1 v_2 + a_3 v_1^3, \tag{12}$$

где $v_j = u_j(\tau - H)$. Добавим также, что $\sigma H = \omega = \pi/2$ и поэтому $\exp(i\sigma H) = i$, $\exp(-i\sigma H) = -i$. Уравнение (11) разрешимо в классе $2\pi/\sigma$ периодических функций, так как справедливы равенства

$$\int\limits_0^{2\pi/\sigma} v_1^2 \exp(\pm i\sigma\tau) d\tau = 0 \quad (\sigma = a).$$

Напомним, что $u_1 = u_1(\tau, z, \overline{z}) = zq + \overline{zq}$, $q = \exp(i\sigma\tau)$, а $v_1 = u_1(\tau - H)$.

Из дифференциального уравнения (11) находим, что подходящим периодическим его решением будет следующая функция

$$u_2 = u_2(\tau, z, \overline{z}) = \eta_2 q^2 z^2 + \eta_0 |z|^2 + \overline{\eta}_2 \overline{q}^2 \overline{z}^2,$$

где

$$\eta_2 = \frac{a_2(1+2i)}{5a}, \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}.$$

Из условий разрешимости линейных неоднородных уравнений вытекает, что дифференциальное уравнение (12) имеет $2\pi/a$ периодическое решение, если справедливо равенство

$$-(1 + i\frac{\pi}{2})z' + i\gamma a z + (d_1 + ic_1)z|z|^2 = 0,$$

где

$$d_1 + ic_1 = -i\left[3a_3 + \frac{2}{5a}a_2^2(11+2i)\right].$$

Из него и получаем дифференциальное уравнение (9) — нормальную форму. Ее коэффициенты определены равенствами

$$\alpha = \frac{2a\pi\gamma}{4+\pi^2}, \quad \beta = \frac{4a\gamma}{4+\pi^2},$$

$$d = \frac{2}{5a(4+\pi^2)}[2a_2^2(4-11\pi) - 15\pi a a_3], \quad c = -\frac{4}{5a(4+\pi^2)}[15aa_3 + 2a_2^2(11+\pi)].$$

Справедливо утверждение

Лемма 1. *Дифференциальное уравнение* (9) *имеет периодическое решение*

$$C_0 : z(s) = \rho_0 \exp(i\delta s), \quad \rho_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{d}}, \quad \delta = \beta + c\rho^2,$$

если $\alpha d < 0$. *При* $d < 0$ $(\alpha > 0)$ *оно устойчиво и неустойчиво, если* $d > 0$ $(\alpha < 0)$.

Замечание 4. Выбор знака коэффициента α нормальной формы (9) зависит в нашем случае только от выбора знака γ. Действительно, $\alpha > 0$, если $\gamma = 1$ и нулевое решение нормальной формы неустойчиво. Напротив, при $\gamma = -1$ получаем, что $\alpha < 0$, т. е. нулевое решение (9) асимптотически устойчиво.

Доказательство леммы 1. Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)), \quad \rho(s) \geqslant 0.$$

Для ненулевых решений $\rho(s) > 0$ в новых переменных уравнение (9) перепишется в виде двух действительных уравнений

$$\begin{aligned} \rho' &= \alpha\rho + d\rho^3, \\ \varphi' &= \beta + c\rho^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Первое уравнение системы (13) имеет нулевое состояние равновесия, а также положительное состояние равновесия $\rho_0 = \sqrt{-\alpha/d}$, которое существует, если $\alpha d < 0$. Такое решение устойчиво, если $\alpha > 0$ $(d < 0)$ и неустойчиво, если $\alpha < 0$ $(d > 0)$.

Пусть теперь $\rho = \rho_0$. Тогда $\varphi' = \beta + c\rho_0^2$ и, следовательно, $\varphi(s) = \delta s + \varphi_0$, $\delta = \beta + c\rho_0^2$, а $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Построенное периодическое решение $z(s)$ устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если $d < 0$ $(\alpha > 0)$ и неустойчиво при $d > 0$ $(\alpha < 0)$.

Тогда из результатов работ [3,4] вытекает справедливость утверждения (см. теорему 5 на с. 750 из работы [4], в которой речь идет о сохранении инвариантных торов при возмущении у широкого класса автономных дифференциальных уравнений и в том числе с бесконечномерным фазовым пространством). $\square$

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ циклу C_0 соответствует цикл дифференциального уравнения* (8) *с наследованием свойств устойчивости. Для решений формирующих данный цикл дифференциального уравнения* (8) *справедливо асимптотическое представление*

$$u(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{-\frac{\alpha}{d}}\Big[\exp(i(a+\varepsilon\delta)\tau + i\varphi_0) + \exp(-i(a+\varepsilon\delta)\tau - i\varphi_0)\Big] - \\ - \varepsilon\frac{\alpha}{d}\Big[\eta_2\exp(2i(a+\varepsilon\delta)\tau + 2i\varphi_0) + \eta_0 + \overline{\eta}_2\exp(-2i(a+\varepsilon\delta)\tau - 2i\varphi_0)\Big] + o(\varepsilon).$$

Следовательно, периодические решения дифференциального уравнения (4) *приобретают следующий вид*

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\sqrt{-\frac{\alpha}{d}}\left[\exp\left(i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} + i\varphi_0\right) + \exp\left(-i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} - i\varphi_0\right)\right] - \\ - \varepsilon\frac{\alpha}{d}\left[\eta_2\exp\left(2i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} + 2i\varphi_0\right) + \eta_0 + \overline{\eta}_2\exp\left(-2i(a+\varepsilon\delta)\frac{t}{1+\gamma\varepsilon} - 2i\varphi_0\right)\right] + o(\varepsilon), \quad (14)$$

где φ_0 — произвольная действительная постоянная, $\eta_0 = 2a_2/a$, $\eta_2 = a_2(1+2i)/5a$.

Наконец, если возвратиться к первоначальной неизвестной функции p, то в результате получаем, что при $h = H(1+\gamma\varepsilon)$ уравнение (2) имеет периодическое решение

$$p(t,\varepsilon) = p_0 + x(t,\varepsilon),$$

где второе слагаемое определено асимптотической формулой (14).

4. Некоторые комментарии к основной теореме. В предыдущем разделе была сформулирована теорема, которая в достаточно общей форме дает ответ на вопрос об условиях существования предельных циклов. Ответ фактически зависит от знака величины d, т. е. реальной части коэффициента при нелинейном слагаемом нормальной формы (9). Его принято называть первой ляпуновской величиной, а коэффициент $d + ic$, в свою очередь, называют комплексной ляпуновской величиной.

В общем случае для дифференциального уравнения (4) анализ знака первой ляпуновской величины d затруднителен. Фиксирован только знак a ($a > 0$). Свойства функций $D(p)$, $S(p)$ (см. свойства (i), (iv)) не дают возможности для однозначного выбора величин a_2, a_3. Можно привести лишь примеры возможного выбора таких функций с сохранением основных свойств, характерных для данной математической модели макроэкономики.

Вместе с тем, как правило, при математическом анализе модели «спрос-предложение» принято и с прикладной точки зрения вполне допустимо выбирать функции $D(p)$, $S(p)$ в более конкретном виде с сохранением, разумеется, необходимых для них свойств. Наиболее типичным вариантом их выбора будут следующие функции:

$$D(p) = \alpha p^{-k}, \quad S(p) = \beta p^m,$$

где α, β, k, m — положительные постоянные. При таком их выборе можно нормировать эволюционную переменную t и неизвестную функцию $p(t)$. Это позволит упростить уравнение (2) при предложенном выборе функций $D(p)$ и $S(p)$.

Положим $t = \Theta t_1$, $p = \xi p_1$, где $\Theta = \alpha^{1-m/(k+m)}$, $\xi = \alpha^{1/(k+m)}\beta^{-1/(k+m)}$. В результате получим уравнение

$$p_1' = p^{-k}(t-h_1) - p^m(t-h_1),$$

где штрихом обозначена производная по t_1, а $h_1 = h/\Theta$. Для упрощения записи далее индекс 1 будем опускать. В результате получим дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = p_h^{-k} - p_h^m, \quad (15)$$

где, как и ранее, $p_h = p_h(t) = p(t-h)$, $h > 0$. При таком варианте модели «спрос-предложение» полученные ранее результаты приобретают более конкретную форму.

Уравнение (15) имеет положительное состояние равновесия $p_0 = 1$. Замены

$$p(t) = 1 + x(t), \quad p_h(t) = 1 + y(t) \quad (y(t) = x(t-h))$$

позволяют получить дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -ay + a_2y^2 + a_3y^3 + o(y^3), \tag{16}$$

где

$$a = k + m, \quad a_2 = \frac{k(k+1) - m(m-1)}{2}, \quad a_3 = -\frac{k(k+1)(k+2) + m(m-1)(m-2)}{6}.$$

Естественно, уравнение (16) — частный случай уравнения (4). В последнем случае, т. е. в случае выбора уравнения (16), оказалось, что

$$\begin{aligned} &H = \frac{\pi}{2(k+m)}, \quad \sigma = k+m,\\ &d = \pi\frac{k+m}{4+\pi^2}\left(\frac{4-11\pi}{5\pi}(k-m+1)^2 + k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2\right),\\ &c = 2\frac{k+m}{4+\pi^2}\left(k^2 - km + m^2 + 3(k-m) + 2 - (k-m+1)^2\left(\frac{11+\pi}{5}\right)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Одним из самых естественных вариантов можно считать выбор, когда $k = b$, $m = 1$, где, естественно, $b > 0$. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} &H = \frac{\pi}{2(1+b)}, && \sigma = 1+b,\\ &d = \frac{2b(1+b)}{5(4+\pi^2)}[5\pi + (2-3\pi)b], && c = \frac{2b(1+b)}{5(4+\pi^2)}[10 - (6+\pi)b]. \end{aligned} \tag{18}$$

Если даже ограничиться частным случаем выбора $D(p)$ и $S(p)$, который предложен в данном разделе работы, то при этом могут реализоваться оба типа бифуркаций: послекритические бифуркации и докритические бифуркации. Первый из них реализуется, если $d < 0$, $\gamma > 0$. В таком случае при потере устойчивости состоянием равновесия $p = p_0$ в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл («мягкое» возбуждение колебаний). При $d > 0$, $\gamma < 0$ реализуются докритические бифуркации, когда в достаточно малой окрестности состояния равновесия $p = p_0$ возникает неустойчивый предельный цикл («жесткое» возбуждение колебаний). Подчеркнем, что в рассматриваемых вариантах выбора функций $D(p)$ и $S(p)$ возможны оба варианта бифуркаций.

Так, например, анализ знака d в случае формулы (18) показал, что $d > 0$, если $b \in (0, b_*)$, где $b_* \approx 2{,}1156$. При $b \in (b_*, \infty)$ справедливо неравенство $d < 0$.

Если рассматривать более общий вариант для определения d (см. формулу (17)), то в плоскости параметров k и m можно выделить области, где ляпуновская величина d имеет определенный знак. На рис. 1 приведено разбиение области параметров k и m $(k, m > 0)$ на подобласти сохранения знаков. Так, через D_1, D_3 обозначены множества значений k, m, где $d < 0$, а через D_2 обозначено множество тех k, m, для которых $d > 0$.

В нашем случае, если $(k, m) \in D_1$ или D_3 для экономической динамики характерна цикличность. Например, такой вариант реализуется, если m велико, а k относительно мало. В этом случае предложение интенсивно, а спрос достаточно вялый. Такая ситуация была характерна для ведущих стран с рыночной экономикой в период между первой и второй мировыми войнами. Это, как известно, привело к сильному кризису, известному в мировой экономической литературе как «великая депрессия». Пусть, наоборот, k велико, а m относительно мало. Последняя часть этого замечания допускает простую интерпретацию. Если k — велико, а m сравнительно мало, то это означает, что спрос более интенсивный, чем предложение. Такой вариант более предпочтителен для рыночной экономики. Отметим также, что если $k + m$ — достаточно малая постоянная, то период колебаний $2\pi/(k+m)$ велик и это означает, что реализуются варианты возможных «длинных экономических волн» Кондратьева [9] — циклов с достаточно большим периодом.

Если $(k, m) \in D_2$, то состояние равновесия дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (4) еще асимптотически устойчиво, но бассейн притяжения для состояния равновесия

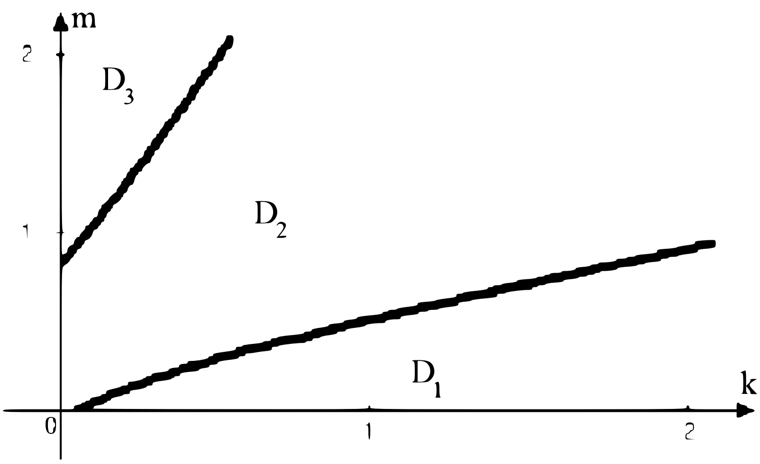

Рис. 1

мал и «ограничен» неустойчивым периодическим решением, которое не реализуется при экономической практике. При относительно больших отклонениях начальных условий от этого состояния равновесия возможно возбуждение колебаний экономических показателей, которые сильно отличаются от гармонических. Такое поведение решений динамической системы принято называть жестким возбуждением колебаний. Добавим, что если пара (k, m) принадлежит границе раздела между областями, то первая ляпуновская величина $d = 0$ и вариант нормальной формы (9) требует уточнения, учета остальных слагаемых в формуле Тейлора для функции $D(p) - S(p)$.

5. Заключение. В работе показано, что учет эффекта запаздывания проводит к возможному появлению предельных циклов в базисной модели «спрос-предложение» если, конечно, дифференциальное уравнение (1) заменить на дифференциальное уравнение (2). При этом возможны варианты как мягкого, так и жесткого возбуждения колебаний. Это можно отметить, если даже ограничиться частным вариантом модели «спрос-предложение» (см. уравнение (15), формулы (17) и (18)).

Подчеркнем, что анализ данной модели показал, что цикличность возникает при относительно большом запаздывании. В тоже время относительно большое запаздывание достаточно характерно для современной экономики. Действительно, цикличность стала проявлять себя с середины XIX века, когда появились достаточно сложные макроэкономические системы с относительно высоким развитием технологий и разделением труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. — М.: МЦНМО, 2005.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
3. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 5. — С. 584–601.
4. *Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях// Диффер. уравн. — 2003. — *39*, № 6. — С. 738–753.
5. *Куликов А. Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *186*. — С. 122–131.
6. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — *2*. — С. 87–100.
7. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Математические модели рынка и эффект запаздывания// в кн.: Математика в Ярославском университете. — Ярославль, 2016. — С. 132–151.

8. *Куликов Д. А.* Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием// Ж. Средневолж. мат. о-ва. — 2018. — *20*, № 2. — С. 225–234.
9. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое моделирование нестационарных процессов. — М.: еТест, 2011.
10. *Bellman R., Cooke L.* Differential-Difference Equations. — London: Academic Press, 1963.
11. *Bianca C., Guerrini L.* Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic populaion growth// Scientific World J. — 2014. — *2014*. — 207806.
12. *Ferrara M., Guerrini L., Sodini M.* Nonlinear dynamics in a Solow model with delay and non-convex technology// Appl. Math. Comput. — 2014. — *228*. — P. 1–12.
13. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
14. *Kulikov A., Kulikov D., Radin M.* Periodic cycles in the Solow model with a delay effect// Math. Model. Anal. — 2019. — *24*, № 2. — P. 297–310.
15. *Kulikov D. A.* About a mathematical model of market// J. Phys. Conf. Ser. — 2017. — *788*. — 012024.
16. *Kulikov D. A.* The generalized Solow model// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1205*. — 012033.
17. *Marsden J. E., McCraken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer-Verlag, 1976.
18. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
19. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Куликов Дмитрий Анатольевич
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru