ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 217 (2022). С. 11–19
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-217-11-19

УДК 517.9

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА—СИДОРОВА—ДИРИХЛЕ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

© 2022 г. **Е. В. БЫЧКОВ**

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи Шоуолтера—Сидорова—Дирихле для одного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка. Для рассматриваемой начально-краевой задачи построено приближенное решение по методу Галеркина в виде разложения по системе собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа. Доказательство $*$-слабой сходимости галеркинских приближений к точному решению основано на априорных оценках, теоремах вложения и лемме Гронуолла.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, задача Шоуолтера—Сидорова, метод Галеркина, $*$-слабая сходимость.

CONVERGENCE OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF THE SHOWALTER–SIDOROV–DIRICHLET PROBLEM FOR THE MODIFIED BOUSSINESQ EQUATION

© 2022 **E. V. BYCHKOV**

Abstract. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a unique solution of the Showalter–Sidorov–Dirichlet problem for a second-order, semilinear Sobolev-type equation. For the initial-boundary-value problem considered, using the Galerkin method, we construct an approximate solution as an expansion in the system of eigenfunctions of the homogeneous Dirichlet problem for the Laplace operator. The proof of the $*$-weak convergence of the Galerkin approximations to the exact solution is based on a priori estimates, embedding theorems, and the Gronwall lemma.

Keywords and phrases: Sobolev-type equation, Showalter–Sidorov problem, Galerkin method, $*$-weak convergence.

AMS Subject Classification: 35S16, 35L76, 35R25, 65M60

1. Введение.

1. Введение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ $T \in \mathbb{R}_+$. В цилиндре $C = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим модифицированное уравнение Буссинеска
$$(\lambda - \Delta)u_{tt} - \alpha^2\Delta u + u^3 = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$
где $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, с однородными краевыми условиями Дирихле
$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{2}$$
и условиями Шоуолтера—Сидорова
$$P(u(x,0) - u_0(x)) = 0, \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где P некоторый спектральный проектор, который будет определен в дальнейшем. Условие (3) являются естественным обобщением условий Коши для уравнений соболевского типа (см. [8]). Уравнение имеет множество приложений в различных областях естествознания. Например, моделирует распространение волн на мелкой воде с учетом капиллярных эффектов. В этом случае функция $u = u(x,t)$ определяет высоту волны. В монографии [13] построена линейная математическая модель распространения волн на мелкой воде. В [15] исследована (модифицированная) математическая модель распространения волн на мелкой воде в одномерной области и получено солитонное решение уравнения (1). В [21] доказано существование единственного глобального решения задачи Коши для уравнения (1), при $\lambda = 1$, $\alpha = 1$. В [1] получено аналогичное для описания взаимодействия ударных волн.

В [15] получено решение в виде уединенных продольных волн деформации для уравнения Похгаммера—Кри

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} - \frac{1}{p}((u^p))_{xx} = 0,$$

с $p = 2, 3, 5$ и численно исследовано взаимодействие двух уединенных волновых решений. Для

$$f(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad f(u) = a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5$$

в [25] получены явные уединенные волновые решения последнего уравнения, используя метод приведения к алгебраическому уравнения. Также было исследовано бифуркационное поведение фазовых портретов для соответствующего уравнения бегущей волны.

Во всех перечисленных выше работах существенным условием является непрерывная обратимость оператора при старшей производной по переменной t. Однако оператор $\lambda - \Delta$ может быть вырожденным. Уравнения, не разрешимые относительно старшей производной по времени, согласно [19, 20] такие уравнения называют уравнениями соболевского типа.

В [14] была исследована задача Шоуолтера—Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \quad P(\dot{u}(0) - u_1) = 0, \tag{4}$$

для абстрактного полулинейного уравнения соболевского типа второго порядка

$$L\ddot{u} - Mu + N(u) = 0, \tag{5}$$

где $\dot{u}$, $\ddot{u}$ — первая и вторая производные по t. Используя теорию относительно p-ограниченных операторов и метод фазового пространства, разработанные Г. А. Свиридюком и его учениками (см. [9, 10]), доказана теорема о существовании единственного локального решения, а также отмечается, что в случае монотонности оператора N фазовое пространство будет простым многообразием.

Уравнение (1) относится к уравнениям соболевского типа высокого порядка, изучаемому, например, в [3, 24]. Уравнения соболевского типа тесно связаны с алгебро-дифференциальными уравнениями (см. [7,12]). В настоящее время все чаще теория уравнений соболевского типа с ограниченных областей пространства $\mathbb{R}^n$ переносится на геометрические графы (см. [23]), пространство дифференцируемых k-форм на римановых многообразиях (см. [18]). С помощью уравнений соболевского типа моделируются многие физические явления (см. [2, 5, 6]), а также технические и экономические процессы (см. [17]). Этим объясняется неугасающий к ним интерес.

Статья устроена следующим образом. В первом параграфе мы введем некоторые предварительные сведения. Во втором параграфе докажем вспомогательную теорему, обобщающую теорему Пикара на алгебро-дифференциальные системы. В третьем параграфе докажем сходимость приближенного решения, полученного методом Галеркина, к точному в смысле $*$-слабой сходимости. В следующем параграфе докажем единственность решения на основе теоремы вложения и неравенства Гронуолла.

2. Предварительные сведения.

Определение 1. Пусть X некоторое банахово пространство, X^* — сопряженное для X пространство относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Говорят, что последовательность $f_n \in X^*$ сходится $*$-слабо к $f \in X$, если для любого $g \in B$ выполняется $\langle f_n, g \rangle \to \langle f, g \rangle$ при $n \to \infty$.

Вообще говоря, $*$-слабая сходимость слабее обычной слабой сходимости, однако, если X — рефлексивное банахово пространство, то $*$-слабая и слабая сходимость эквиваленты.

Лемма 1 (см. [4]). *Пусть O — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_l и g — такие функции из $L^q(O)$, $1 < q < \infty$, что $\|g_l\|_{L^q(O)} \leqslant C$, $g_l \to g$ п. в. в $L^q(O)$. Тогда $g_l \to g$ слабо в $L^q(O)$.*

Лемма 2 (свойство максмин). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство ненулевой размерности и оператор $A\colon H \to H$ — линейный компактный самосопряженный и неотрицательно определенный. Спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества собственных значений λ_n, имеющих единственную предельную точку, равную нулю. Поскольку все собственные значения A вещественны и конечнократны, то их можно занумеровать по невозрастанию*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \ldots$$

Тогда для любого $n \geqslant 1$ имеют место соотношения

$$\lambda_n = \min_{H_{n-1}} \max_{\substack{x \perp H_{n-1} \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2},$$

где H_{n-1} — произвольное $(n-1)$-мерное подпространство в H.

Лемма 3 (см. [4]). *Если $f \in L^p(0,T;X)$ и $\dot f \in L^p(0,T;X)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty$, X — банахово пространство$)$, то f будет непрерывным отображением $[0,T] \to X$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль из интервала $(0,T)$).*

Лемма 4 (лемма Гронуолла; см. [16]). *Пусть $g(t) \geqslant 0$ и $f(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$, а также $g, f \in C[t_0, +\infty]$, причем при $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство*

$$g(t) \leqslant c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) g(s) ds,$$

где c — неотрицательная константа. Тогда при $t \geqslant t_0$ имеет место неравенство

$$g(t) \leqslant c \exp \left\{ \int\limits_{t_0}^{t} f(s) ds \right\}.$$

Кроме того, если $c = 0$, то $g(t) = 0$.

Лемма 5 (теорема вложения Реллиха—Кондрашова; см. [11]). *Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область с границей класса C^s, $s \geqslant 1$, $s > l$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $s - n/p \geqslant l - n/q$. Тогда вложение*

$$W^s_p(\Omega) \subset W^l_q(\Omega)$$

вполне непрерывно (компактно).

Ранее задача (4), (5) исследовалась методами теории относительно p-ограниченных операторов, далее приводится некоторые ее положения. Пусть X, Y — банаховы пространства, L — линейный непрерывный оператор ($L \in \mathcal{L}(X;Y)$), а M — линейный и плотно определенный оператор ($M \in \mathcal{C}l(X;Y)$). Множество

$$\rho^L(M) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X) \right\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M относительно оператора L (или *L-резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C} \setminus \rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M относительно оператора L (или *L-спектром* оператора M).

Оператор-функции

$$(\mu L - M)^{-1}, \quad R^L_\mu = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu = L(\mu L - M)^{-1}$$

с областью определения $\rho^L(M)$ называются, соответственно, *резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой* оператора M относительно оператора L (короче, *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора M*).

Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0 \ \forall \mu \in \mathbb{C} : (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Пусть оператор $M(L,\sigma)$ ограничен. Тогда операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_\lambda^L(M)d\lambda, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L_\lambda^L(M)d\lambda$$

являются проекторами в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, соответственно. Здесь $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$ (см. [20, с. 89]).

Обозначим через $T\mathfrak{P}$ касательное расслоение простого многообразия без края $\mathfrak{P}$, моделируемое банаховым пространством X, а через $T_{u_0}\mathfrak{P}$ касательное пространство в точке u_0. Тогда запись $(u_0,u_1) \in T\mathfrak{P}$ будем понимать в следующем смысле: $u_0 \in \mathfrak{P}$ и $(u_0,u_1) \in T_{u_0}\mathfrak{P}$.

Определение 2. Множество $\mathfrak{P}$ называется фазовым пространством уравнения (5), если

(i) для любых $(u_0,u_1) \in T\mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (4), (5);
(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (5) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и оператор $M(L,0)$-ограничен; тогда в силу теоремы о расщеплении (см. [9]) уравнение (7) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{cases} 0 = (\mathbb{I}-Q)(M+N)(u), \\ \ddot{u}^1 = L_1^{-1}Q(M+N)(u), \end{cases}$$

где $u^1 = Pu$. Тогда фазовым пространством $\mathfrak{P}$ уравнения (5) является множество

$$\mathfrak{P} = \big\{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I}-Q)(M+N)(u) = 0\big\}.$$

Таким образом, в [14] было доказано существование единственного локального решения.

3. Алгебро-дифференциальная система. Приведем обобщение классической теоремы Пикара на случай алгебро-дифференциальных уравнений. При решении начально-краевых задач для вырожденных уравнений в частных производных (уравнений соболевского типа) методом Галеркина возникают алгебро-дифференциальная система вида

$$A\ddot{x} = F(x), \tag{6}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0,T]$, $\operatorname{rank} A = k$, $k < m$. Преобразуем систему (6) к системе первого порядка, введем новую переменную $y(t) \in \mathbb{R}^{2m}$ и новые матричные операторы

$$y(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & F(\cdot) \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

получим

$$\bar{A}\dot{y} = \bar{F}(y), \tag{7}$$

$$\operatorname{rank} \bar{A} = k + m. \tag{8}$$

Систему (7) разобьем на две подсистемы

$$0 = \bar{F}^0(y), \tag{9}$$

$$Q\bar{A}\dot{y} = \bar{F}^1(y), \tag{10}$$

где $\bar{F}^0 = \bar{P}\bar{Q}\bar{F}(y)$, $\bar{F}^1(y) = (\mathbb{I}-\bar{P})\bar{Q}\bar{F}(y)$, матрица $\bar{Q}$ получена из единичной путем замены верхних строк базисными векторами левого ядра матрицы (коядра) $\bar{A}$, $\bar{P}$ — проектор на левое ядро матрицы $\bar{Q}\bar{A}$. Система (9), (10) и система (7) эквивалентны в том смысле, что их решения совпадают, если они они существуют хотя бы у одной из них. Поэтому решение системы (7) лежат во множестве $\mathfrak{M} = \{y \in \mathbb{R}^{2m} : \bar{F}(y) = 0\}$.

Пусть функция $\bar{F} \in C^s$, $s \geqslant 1$; тогда имеет смысл условие

$$\operatorname{rank}(\bar{F}^0)'_{y_0} = l, \tag{11}$$

где $(\bar{F}^0)'_{y_0}$ — матрица Якоби функции $\bar{F}^0$ в точке y_0. Пусть существует такой $y_0 \in \mathfrak{M}$, что в некоторой окрестности $O(y_0) \cap \mathfrak{M}$ выполнено условие (11). Тогда $O(y_0) \cap \mathfrak{M}$ есть C^s-многообразие размерности $2m - l \geqslant k$, и уравнение (9) можно привести к виду

$$(\bar{F}^0)'_y \dot{y} = 0, \quad y(0) = y_0. \tag{12}$$

Предположим, что в окрестности $O(y_0)$ выполнено условие

$$\ker \bar{Q}\bar{A} \cap \ker(\bar{F}^0)'_{y_0} = \{0\} \tag{13}$$

(символом $\ker T$ обозначено правое ядро матрицы T). Тогда матрица $\bar{Q}A + (\bar{F}^0)'_{y_0}$ обратима в этой окрестности, и система (10), (12) приводится к виду

$$\dot{y} = (\bar{Q}\bar{A} - (\bar{F}^0)'_{y_0})^{-1}\bar{F}^1, \quad y(0) = y_0, \tag{14}$$

с гладкой правой частью.

Возвращаясь к исходным переменным, в силу [7, теорема 1] получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (6) *выполнены условия* (8), $F \in C^s$, $s \geqslant 1$, *и пусть найдется такой элемент* $(x_0, x_1) \in T\mathfrak{M}$, *что в некоторой окрестности* $O(x_0, x_1) \cap T\mathfrak{M}$ *выполнены условия* (11) *и* (13). *Тогда для некоторого* $t_0 > 0$ *существует по крайней мере одно решение* $x \in C^s(0, t_0; \mathfrak{M})$ *уравнения* (6), *удовлетворяющее условиям* $x(0) = x_0$ *и* $\dot{x}(0) = x_1$. *Если к тому же* $s \geqslant 2$, *то решение будет единственным.*

4. Теорема существования. В некоторых частных случаях нелинейного оператора можно ответить не только на вопрос о существовании и единственности решения, но и на вопрос как найти данное решение. Сформулируем и докажем теорему, отвечающую на вопрос, как найти решение задачи (1)–(3)

Для решения нам понадобятся несколько функциональных пространств. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Положим $Q = \Omega \times (0, T)$. Зададим пространства $L^4(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ и введем обозначение $B = L^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Кроме того, зададим пространства распределений (функций со значениями в банаховом пространстве) $L^\infty(0, T; B)$ и $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Сопряженные им пространства строятся по теореме Данфорда—Петтиса:

$$(L^\infty(0, T; B))^* \simeq L^1(0, T; L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \cup H^{-1}(\Omega)), \quad (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^* \simeq L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Пусть λ_k — собственные значения однородной задачи Дирихле (2) для оператора Δ, пронумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а φ_k — соответствующие им собственные функции. Кроме того, линейная оболочка $\operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ при $m \to \infty$ плотна в B и ортонормирована (в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$). Определим оператор

$$L = \lambda - \Delta \colon H^1 \to H^{-1*}, \quad \langle Lu, v \rangle = \int_\Omega (\lambda uv + \nabla u \nabla v) dx.$$

Поскольку оператор L не имеет M-присоединенных векторов, то проектор P можно заменить оператором L.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, $u_0 \in B = H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $u = u(x,t)$ *задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее условиям*

$$Lu \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)), \quad L\dot{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде галеркинского приближения

$$u^m(t) = \sum_{k=1}^m a_k^m(t)\varphi_k. \tag{15}$$

Коэффициенты $a_k^m(t)$ находятся из следующей задачи:

$$\langle L\ddot{u}^m, \varphi_k\rangle - \alpha^2\langle \Delta u^m, \varphi_k\rangle + \langle (u^m)^3, \varphi_k\rangle = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{16}$$

$$\begin{cases} \langle Lu(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu^m(0), \varphi_k\rangle = \langle L{u_0}^m, \varphi_k\rangle = \beta_k^m, \\ \langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle = \langle L\dot{u}^m(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu_1^m, \varphi_k\rangle = \gamma_k^m, \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{17}$$

где

$$Lu_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m \varphi_k \to u_0 \quad \text{в } B \text{ при } m \to \infty,$$

$$Lu_1^m = \sum_{k=1}^m \gamma_k^m \varphi_k \to u_1 \quad \text{в } L^2(\Omega) \text{ при } m \to \infty.$$

Применим к задаче (16), (17) теорему 1. Предположим, что λ совпало с первым собственным значением λ_1; поскольку оно первое, его кратность равна 1. Выпишем требуемые матрицы, обозначая символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ единичную и нулевую матрицы необходимой размерности:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{2m-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}_{2m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I} - \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I}_{2m-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &\bar{Q} = \mathbb{I}_{2m}, \\ &\bar{F}^0 = \left(-\alpha^2 a_1^m(t) - \langle (u^m)^3,\ \varphi_1\rangle\right), \end{aligned} \quad \bar{F}^1 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 a_2^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_2\rangle \\ -\alpha^2 a_3^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_3\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\alpha^2 a_m^m(t) - \langle (u^m)^3, \varphi_m\rangle \\ -\alpha^2 \dot{a}_1^m(t) - \langle (\dot{u}^m)^3, \varphi_1\rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\alpha^2 \dot{a}_m^m(t) - \langle (\dot{u}^m)^3, \varphi_m\rangle \end{pmatrix},$$

причем $T\mathfrak{M} = \{y \in R^{2m} : \bar{F}(y) = 0\}$. Каждый элемент матриц $\bar{F}^0$, $\bar{F}^0$ является многочленом третьей степени от переменных a_k^m, поэтому $\bar{F}^0 \in C^\infty$ и $\bar{F}^1 \in C^\infty$. Таким образом, нетрудно проверить условия (11) и (13) в окрестности, содержащейся в касательном пространстве. Таким образом, выполнены условия Теоремы 1, а значит, существует единственное локальное решение $u^m = u^m(t, x)$, $t \in [0, t^m]$.

Получим априорные оценки. Умножая уравнение (16) на $\dot{a}_k^m(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ и суммируя по k от 1 до m, получим

$$\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle - \alpha^2\langle \Delta u^m, \dot{u}^m\rangle + \langle (u^m)^3, \dot{u}^m\rangle = 0. \tag{18}$$

Введем в пространстве $\operatorname{coim} L \cap L^2(\Omega)$ $(L^2(\Omega) = \operatorname{coim} L \oplus \ker L)$ норму $|\dot{u}|^2 = \langle L\dot{u}, \dot{u}\rangle$; в силу леммы 2 эта норма эквивалента норме, индуцированной из надпространства $L^2(\Omega)$.

Используя самосопряженность L и Δ, получим

$$2\langle L\ddot{u}^m, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle L\dot{u}^m, \dot{u}^m\rangle, \quad 2\langle \Delta u^m, \dot{u}^m\rangle = -\frac{d}{dt}\langle \nabla u^m, \nabla u^m\rangle, \quad 4\langle (u^m)^3, \dot{u}^m\rangle = \frac{d}{dt}\|u^m\|^4_{L^4(\Omega)},$$

и уравнение (18) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left[|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\langle \nabla u^m, \nabla u^m\rangle + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4}\right] = 0. \tag{19}$$

Проинтегрируем на отрезке $[0, t]$, $t \leqslant t_m$

$$|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\|u^m\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4} \leqslant |u_1^m|^2 + \alpha^2|u_0^m|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u_0^m\|^4_{L^4}.$$

Так как правая часть равенства ограничена (по условию), то имеет место неравенство

$$|\dot{u}^m|^2 + \alpha^2\|u^m\|^2_{H_0^1} + \frac{1}{2}\|u^m\|^4_{L^4} \leqslant C. \tag{20}$$

Константа C не зависит от t_m и, следовательно, $t_m = T$.

Замечание 1. В силу неравенства (20) при $m \to \infty$, последовательность функций $\dot{u}_m$ — ограничена в пространстве $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, u — ограничена в $L^\infty(0,T;B)$.

В силу того, что u^m и $\dot{u}^m$ ограниченны в пространствах $L^\infty(0,T;B)$ и $L^\infty(0,T;L^2\Omega)$, соответственно, являющиеся сопряженными пространствами для сепарабельных банаховых пространств $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) \cup L^{4/3}(\Omega))$ и $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Из них можно выбрать такие $*$-слабо сходящиеся подпоследовательности u^{m_l} и $\dot{u}^{m_l}$, что $u^{m_l} \to u$ $*$-слабо в $L^\infty(0,T;B)$, $L\dot{u}^{m_l} \to L\dot{u}$ $*$-слабо в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. При этом $\dot{u}^{m_l}$ понимается как обобщенная производная в пространстве распределений. Также из ограниченности $\dot{u}^m$ в пространстве $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, u^m в $L^2(0,T;B)$ (в силу замечания 1 и свойств пространств Лебега) следует, что u^m ограничена в $H^1(Q)$. В силу леммы 5 имеет место вполне непрерывное вложение $H^1(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$. Поэтому можно считать, что

$$u^{m_l} \to u \quad \text{сильно в } L^2(Q) \text{ и почти всюду.} \tag{21}$$

В силу ограниченности последовательности $\{(u^{m_l})^3\}$ в пространстве $L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega))$, она сходится к некоторому элементу z этого пространства:

$$(u^{m_l})^3 \to z \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;L^{4/3}(\Omega)). \tag{22}$$

Следствие 1. *Положим $O = Q$, $g_l = (u^{m_l})^3$, $g = u^3$. Тогда $z = u^3$ в силу леммы* 1, (21) *и* (22).

Теперь можно перейти почленно к пределу в равенстве (16), полагая $m_l = l$. Пусть k фиксировано и $l > k$; тогда получим

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle + \alpha^2\langle \nabla u^l, \nabla\varphi_k\rangle + \langle (u^l)^3, \varphi_k\rangle = 0. \tag{23}$$

В силу замечания 1 справедливы предельные переходы

$$\begin{aligned}\langle L\dot{u}^l, \varphi_k\rangle &\to \langle Lu, \varphi_k\rangle \qquad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T);\\ \langle \nabla u^l, \nabla\varphi_k\rangle &\to \langle \nabla u, \nabla\varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T)\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle = \frac{d}{dt}\langle L\dot{u}^l, \varphi_k\rangle \to \langle L\ddot{u}, \varphi_k\rangle \quad \text{слабо в } L^\infty(0,T),$$

а в силу следствия 1

$$\langle (u^l)^3, \varphi_k\rangle \to \langle u^3, \varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T).$$

Таким образом, из (23) выводим

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu, \varphi_k\rangle + \alpha^2\langle \nabla u, \nabla\varphi_k\rangle + \langle u^3, \varphi_k\rangle = 0. \tag{24}$$

Ввиду плотности системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ в пространстве B при $m \to \infty$ и произвольности выбора φ_k следующее равенство имеет место для произвольного $v \in B$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle Lu, v\rangle + \alpha^2\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \langle u^3, v\rangle = 0. \tag{25}$$

Проверим выполнение начальных условий. С одной стороны, $Lu_l(0) = Lu_l^0 \to Lu_0$ слабо в $H^1(\Omega)$ в силу (17), с другой стороны, $u^l(0) \to u(0)$ в B в силу замечания 1; следовательно, $u(0) = u_0$.

В силу замечания 1

$$\langle L\ddot{u}^l, \varphi_k\rangle \to \langle L\ddot{u}, \varphi_k\rangle \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,T);$$

следовательно, учитывая лемму 3, получим

$$\langle L\dot{u}^l(0), \varphi_k\rangle \to \langle L\dot{u}(t), \varphi_k\rangle|_{t=0} = \langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle.$$

С другой стороны, в силу разложения начальных функций в ряд

$$\langle L\dot{u}^l(0), \varphi_k\rangle \to \langle Lu_1, \varphi_k\rangle.$$

Таким образом, для всех k имеем

$$\langle L\dot{u}(0), \varphi_k\rangle = \langle Lu_1, \varphi_k\rangle.$$

Таким образом, функция $u = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям, т.е. является решением. □

5. Теорема единственности.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *и леммы* 5 *решение задачи* (1)–(3) *единственно.*

Доказательство. Пусть u и v — два различных решения задачи (1)–(3); введем обозначение $w = u - v$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Lw_{tt} - \alpha^2 \Delta w = v^3 - u^3, \tag{26}$$

а условия Шоуолтера—Сидорова преобразуются к виду

$$Lw(x,0) = 0, \quad Lw_t(x,0) = 0, \quad w \in \Omega. \tag{27}$$

Аналогично предыдущему разделу преобразуем уравнение (26), однако вместо стандартных норм пространств L_2 и H_0^1 будем использовать им эквивалентные, определенные формулами

$$|\dot{w}|^2_{L^2(\Omega)} = \langle L\dot{w}, \dot{w}\rangle, \quad |w|^2_{H_0^1} = \langle \alpha^{-2}\nabla w, \nabla w\rangle.$$

Получим

$$\frac{d}{dt}\left[|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1}\right] = 2\langle (v)^3 - (u)^3, \dot{w}^m\rangle. \tag{28}$$

Очевидно,

$$2\langle v^3 - u^3, \dot{w}^m\rangle \leqslant 6\int\limits_\Omega \sup(|u|^2, |v|^2)|w||\dot{w}|dx.$$

Используя неравенство Гёльдера, оценим правую часть предыдущего неравенства:

$$\int\limits_\Omega \sup(|u|^2, |v|^2)|w||\dot{w}|dx \leqslant C(\||u|^2\|_{L^4} + \||v|^2\|_{L^4})\|w\|_{L^4}\|\dot{w}\|_{L^2}.$$

Далее используя теоремы вложения и свойства нормы, получим оценку

$$C\Big(\||u|^2\|_{L^4} + \||v|^2\|_{L^4}\Big)\|w\|_{L^4}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant C\Big(|u|^2_{L^4} + |v|^2_{L^4}\Big)|w|_{H_0^1}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant$$
$$\leqslant C|w|_{H^1}|\dot{w}|_{L^2} \leqslant 2C(|w|^2_{H_0^1} + |\dot{w}|^2_{L^2}).$$

Тогда (28) приводит к неравенству

$$\left[|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1}\right] \leqslant 2C\int\limits_0^t (|w|^2_{H_0^1} + |\dot{w}|^2_{L^2})ds,$$

откуда в силу леммы 4 имеет место равенство $|\dot{w}|^2_{L^2} + |w|^2_{H_0^1} = 0$. Следовательно, $w \equiv 0$. Таким образом, $u \equiv v$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Д. Г., Хабахпашев Г. А.* Новое уравнение для описания неупругого взаимодействия нелинейных локализованных волн в диспергирующих средах// Письма в ЖЭТФ. — 2011. — *39*, № 8. — С. 469–472.
2. *Богатырева Е. А., Манакова Н. А.* Численное моделирование процесса неравновесной противоточной капиллярной пропитки// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — *56*, № 1. — С. 125–132.
3. *Замышляева А. А.* Математические модели соболевского типа высокого порядка// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2014. — *7*, № 2. — С. 5–28.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. *Манакова Н. А., Богатырева Е. А.* О решении задачи Дирихле—Коши для уравнения Баренблатта—Гильмана// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2014. — *7*. — С. 52–60.
6. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007.

7. *Свиридюк Г. А.* О разрешимости сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1637–1639.
8. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Шоуолтера—Сидорова как феномен уравнений соболевского типа// Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2010. — *3*, № 1. — С. 104–125.
9. *Свиридюк Г. А., Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 2. — С. 252–260.
10. *Свиридюк Г. А., Сукаева Т. Г.* Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 2. — С. 250–258.
11. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
12. *Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В.* Применение метода наименьших квадратов для решения линейных дифференциально-алгебраических уравнений// Сиб. ж. вычисл. мат. — 2013. — *16*, № 1. — С. 81–95.
13. *Bogolubsky I. L.* Some examples of inelastic soliton interaction// Comput. Phys. Commun. — 1977. — *13*, № 2. — P. 49–55.
14. *Bychkov E. V., Zamyshlyaeva A. A.* Numerical solution of Showalter–Sidorov and Cauchy problems of ion-acoustic waves propagation mathematical model// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*, № 1. — 012001.
15. *Clarcson P. A., LeVeque R. J., Saxton R.* Solitary wave interactions in elastic rods// Stud. Appl. Math. — 1986. — *75*, № 1. — P. 95–122.
16. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. — New York–London–Sydney: Wiley, 1964.
17. *Keller A. V.* On the computational efficiency of the algorithm of the numerical solution of optimal control problems for models of Leontieff type// J. Comput. Eng. Math. — 2015. — *2*, № 2. — P. 39–59.
18. *Shafranov D. E., Kitaeva O. G.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model with the Showalter–Sidorov condition and additive white noise in spaces of differential forms on Riemannian manifolds without boundary// Global Stochast. Anal. — 2018. — *5*, № 2. — P. 145–159.
19. *Showalter R. E.* The Sobolev equation, I// Appl. Anal. — 1975. — *5*, № 1. — P. 15–22.
20. *Showalter R. E.* The Sobolev equation, II// Appl. Anal. — 1975. — *5*, № 2. — P. 81–89.
21. *Wang S., Chen G.* Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *274*. — P. 846–866.
22. *Xu Runzhang, Liu Yacheng* Global existence and blow-up of solutions for generalized Pochhammer–Chree equations// Acta Math. Sci. — 2010. — *30*, № 5. — P. 1793–1807.
23. *Zamyshlyaeva A. A., Lut A. V.* Numerical investigation of the Boussinesq–Love mathematical models on geometrical graphs// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2017. — *10*, № 2. — С. 137–143.
24. *Zamyshlyaeva A. A., Manakova N. A., Tsyplenkova O. N.* Optimal control in linear Sobolev type mathematical models// Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. модел. прогр. — 2020. — *13*, № 1. — С. 5–27.
25. *Zhang W, Ma W.* Explicit solitary wave solutions to generalized Pochhammer–Chree equations// Appl. Math Mech. — 1999. — *20*, № 6. — P. 625–632.

Бычков Евгений Викторович
Южно-Уральский государственный университет
E-mail: `bychkovev@susu.ru`