ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 170–184
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-170-184

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2022 г. **О. Б. ЦЕХАН, Ч. А. НАЛИГАМА**

Аннотация. Расщепляющее преобразование, обобщающее известное преобразование типа Chang для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы со многими запаздываниями в медленных переменных состояния и приводящее исходную двухтемповую систему к двум независимым подсистемам меньшей размерности с различным темпом изменения переменных, приводит к решению уравнений Риккати и Сильвестра относительно функциональных матриц, которые могут быть найдены в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра. В этой работе доказано, что асимптотические приближения любого порядка точности на основе этих рядов могут быть представлены в виде конечных сумм по степени λ. Приведены примеры, демонстрирующие сравнение решений систем, полученных на основе построенных аппроксимаций, с точными решениями.

***Ключевые слова*:** сингулярно возмущенная система, запаздывание, расщепляющее преобразование, асимптотическое приближение, декомпозиция.

ASYMPTOTICS OF THE SPLITTING TRANSFORMATION FOR A LINEAR STATIONARY SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

© 2022 **O. B. TSEKHAN, C. A. NALIGAMA**

Abstract. The splitting transformation is a generalization of the well-known Chang transformation for linear, stationary, singularly perturbed system with many delays in slow-state variables; it reduces the original two-speed system to two independent subsystems of smaller dimensions with different rates of change of variables. The splitting transformation leads us to Riccati and Sylvester equations for functional matrices, which can be found in the form of asymptotic series in powers of the small parameter. In this work, we prove that asymptotic approximations of any order of accuracy based on these series can be represented as finite sums in powers of λ. We compare exact solutions with approximations obtained by the method proposed.

***Keywords and phrases*:** singularly perturbed system, delay, splitting transformation, asymptotic approximation, decomposition.

***AMS Subject Classification*:** 34K06, 34K08

Работа О. Б. Цехан выполнена при частичной поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (шифр задания 1.3.02).

1. Введение. Сингулярно возмущенные системы (СВС), впервые подробно изученные А. Н. Тихоновым (1948, 1952), широко исследуются в современной математике. СВС, моделирующие процессы с многотемповой динамикой, актуальны также в приложениях, в моделях которых производные высшего порядка умножаются на малые физические величины. При этом, если положить малый параметр равным нулю, то порядок модели уменьшается и теряется непрерывность некоторых решений (см. [2, 9]). Динамические модели, относящиеся к сингулярно возмущенным управляемым системам, обычно встречаются в квантовой механике, физике, теории автоматического управления, теории нелинейных колебаний, гидродинамике, кинетике химии, биологии и т. д. (см., например, ссылки в [1, 2, 19, 27, 27]).

В технике, экономике, технологиях, биологии, экологии, социальной сфере и т. п. (см., например, ссылки в [21]) запаздывание сопровождает различные процессы, связанные с передачей массы, энергии, информации и т. п. Запаздывания могут быть вызваны внутренними задержками в компонентах систем или искусственным/преднамеренным введением запаздывания в системах для целей управления (см. [7]): задержка связи между датчиком и контроллером, задержка вычислений контроллера, задержка связи между контроллером и приводом (см. [20, 23]).

Область интересов данной статьи представляют линейные стационарные сингулярно возмущенные системы с немалыми соизмеримыми запаздываниями в медленных переменных состояния, которые являются моделями двухтемповых динамических систем управления. Для таких систем возможна асимптотическая декомпозиция СВС на подсистемы меньшей размерности с разделенными по темпам переменными, которую можно реализовать с помощью невырожденной замены переменных. Впервые невырожденное линейное преобразование для нестационарной линейной СВС без запаздывания с малым параметром при старших производных части переменных предложено в [8] и применено для полного расщепления исходной системы с быстрыми и медленными переменными на две независимые подсистемы в [15, 16]. Матрицы, участвующие в формировании преобразования Chang, являются решениями алгебраических уравнений Риккати и Сильвестра. Их нахождение является ключевым шагом в построении этого преобразования. В [16] построена аппроксимация первого порядка решения соответствующего уравнения Риккати с помощью ряда Маклорена. Там же отмечается, что получение аппроксимации более высокого порядка является механическим повторением случая аппроксимации первого порядка.

Обобщение преобразования Chang для декомпозиции линейных сингулярно возмущенных медленно изменяющихся во времени систем предложено в [25, 26]. В [26] доказана теорема о разложении в ряды Маклорена матричных компонент линейного преобразования и об итерационном нахождении элементов k-го порядка аппроксимации этих рядов. Основываясь на итерационном решении, предложено понятие аппроксимации k-го порядка преобразования Chang, а также расщепленной системы, быстрой и медленной подсистем. Расщепляющее преобразование Chang изложено в [11], там же имеются ссылки на некоторые обобщения этого преобразования, указывается важная роль расщепляющих преобразований в теории управления и предложены основанные на декомпозиции параллельные алгоритмы оптимального управления крупномасштабными процессами для линейных и билинейных систем. Обобщение преобразования Chang на системы со многими временными масштабами представлено в [4, 22].

Для СВС с запаздыванием расщепляющие преобразования типа Chang строились в [3, 6, 10, 17, 24]. В [17] доказывается существование непрерывного по малому параметру линейного преобразования координат для частичной декомпозиции СВС с распределенным и сосредоточенным запаздыванием, в результате которого в преобразованной системе связь между быстрыми и медленными переменными имеется только через переменные с запаздыванием. Замена переменных типа Chang для линейных стационарных СВС управления с постоянным (не малым) запаздыванием в состоянии, построенное в [3], осуществляется линейным оператором с конечным числом операторов запаздывания. В [10] построена замена переменных, обобщающая преобразование Chang на линейные стационарные СВС функционально-дифференциальные уравнения с малым сосредоточенным и распределенным запаздыванием в быстрых переменных. Замена расщепляет исходную систему на медленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и быстрые функциональные уравнения. Доказано, что преобразование можно найти в виде асимптотического разложения. В [6] построено невырожденное расщепляющее преобразование, которое обобщает преобразование Chang на линейные стационарные сингулярно возмущенные системы с одним конечным запаздыванием в медленной переменной и выполняет полное расщепление системы. Доказывается оценка для значений малого параметра, при которых справедлива аппроксимация расщепляющего преобразования.

В [24] построено невырожденное преобразование для полного расщепления линейной стационарной сингулярно возмущенной систем с множественными соразмерными немалыми запаздываниями. Доказано, что расщепляющее преобразование может быть построено в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, указана итерационная схема нахождения элементов расщепляющего преобразования.

Настоящая работа развивает [24]. Доказывается, что асимптотическое приближение любого порядка точности на основе этих рядов может быть представлено в виде конечных сумм по степени λ. Следствием этого является то, что, хотя получающиеся в результате расщепленные подсистемы являются системами с бесконечным запаздыванием, для любого фиксированного $k \geqslant 0$ они аппроксимируются с точностью $O(\mu^k)$ системами с конечными запаздываниями. Приведены примеры, демонстрирующие сравнение решений систем, полученных на основе построенных аппроксимаций, с точными решениями. Симуляция выполнена средствами Wolfram Mathematica.

В статье приняты следующие основные обозначения: $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел; $p \triangleq d/dt$ — оператор дифференцирования; e^{-ph} — оператор запаздывания: $e^{-ph}z(t) \triangleq z(t-h)$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи для рассматриваемой системы и определены цели исследования. В разделе 3 описаны декомпозиция рассматриваемой двухшкальной системы на медленную и быструю подсистемы и асимптотика расщепляющего преобразования. Далее для системы разработаны асимптотические приближения. В разделе 4 с помощью результатов, приведенных в разделах 3 и 4, построены аппроксимации для двух иллюстративных примеров; проведено сравнение результатов в программной среде Wolfram Mathematica. Раздел 5 содержит выводы проведенного исследования.

2. Постановка задачи. Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система управления со многими соизмеримыми запаздыванием в медленных переменных состояния:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{1j}x(t-jh) + A_2y(t) + B_1u(t), \qquad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{1}$$

$$\mu\dot{y}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{3j}x(t-jh) + A_4y(t) + B_2u(t), \quad u \in \mathbb{R}^{r}, \qquad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} x(0) = x_0, \quad y_0(0) = y_0, \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \\ \theta \in [-h, 0), \quad x(\theta) = 0, \quad \theta < -h, \quad y(\theta) = \psi(t) \equiv 0, \quad \theta < 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $0 < h$ — заданная константа, $l \in \mathbb{Z}_+$, u — функция управления, $u(t) \in U$, U — множество кусочно непрерывных при $t \geqslant 0$ вектор-функций, μ — малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, A_{ij}, $i = 1, 3$, $j = \overline{0, l}$, A_k, $k = 2, 4$, B_j, $j = 1, 2$, — постоянные матрицы подходящих размерностей, $\phi(\theta)$, $\theta \in [-lh, 0)$, — кусочно непрерывная n_1-вектор-функция, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$. Предположим, что $\det A_4 \neq 0$.

Наличие малого параметра μ как сомножителя при производных части переменных определяет разнотемповый характер изменения фазовых координат x и y в окрестности точки $\mu = 0$: x — медленная переменная, y — быстрая переменная.

Целью данной работы является обоснование для двухшкальной системы (1)—(2) асимптотических приближений расщепленных двухтемповых систем в форме систем с конечным запаздыванием на основе построения итерационных схем для вычисления асимптотических приближений любого порядка для невырожденного расщепляющего преобразования (см. [8]) с иллюстрацией полученных результатов в программном обеспечении Wolfram Mathematica.

3. Декомпозиция системы и ее асимптотика.

3.1. Вырожденная система и система погранслоя. С (n_1+n_2)-мерной системой (1)—(2) связаны вырожденная система (медленная подсистема) и система пограничного слоя (быстрая подсистема) меньшей размерности.

Вырожденная система (медленная подсистема) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_s(t) = \sum_{j=0}^{l} A_{sj} x_s(t-jh) + B_s u_s(t), \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \geqslant 0, \\ x_s(0) = x_0, \quad x_s(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-lh, 0),\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$A_{sj} \triangleq A_{1j} - A_2 A_4^{-1} A_{3j}, \quad j = \overline{0,l}, \quad B_s \triangleq B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \tag{5}$$

и $u_s(t) \in \mathbb{R}^r$ является функцией управления.

Вырожденная система (4) является n_1-мерной системой со множественными запаздываниями в состоянии и формально получается из системы (1)—(2), если в ней положить $\mu = 0$, из (2) при условии $\det A_4 \neq 0$ выразить

$$y_s(t) = -A_4^{-1} \left[\sum_{j=0}^{l} A_{1j} x_s(t-jh) + B_2 u_s(t) \right]$$

и подставить в (1).

Система пограничного слоя (быстрая подсистема, ПС), соответствующая (1)—(3), получается путем «растяжения» временной шкалы: $t = \mu\tau$, $y(\mu\tau) = y_f(\tau)$, $u(\mu\tau) = u_f(\tau)$ и «замораживания» в уравнении (2) для быстрых переменных y медленных переменных x:

$$\begin{gathered}\frac{dy_f(\tau)}{d\tau} = A_4 y_f(\tau) + B_2 u_f(\tau), \quad y_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tau = \frac{t}{\mu} \geqslant 0, \\ y_f(0) = y_0 + A_4^{-1}[A_{30}\phi(0) + A_{31}\phi(-h)]\end{gathered} \tag{6}$$

и является системой размерности n_2 без запаздываний.

3.2. Расщепляющее преобразование системы и ее асимптотическое представление. Чтобы ввести невырожденное преобразование (см. [24]) для системы (1)—(2), представим ее в операторной форме.

Пусть $(C[a,b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций, отображающих $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$ с топологией равномерной сходимости. Для $x \in T \to \mathbb{R}^n$ через $x_t \colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ обозначим определенную для $s \in [-h,0]$ функцию $x_t(s) = x(t+s)$. Обозначим через p оператор дифференцирования, а через e^{-ph} оператор сдвига (чистого запаздывания): $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $e^{-jph}x(t) = x(t-jh)$. Для фиксированного $h \in (0,+\infty)$ обозначим через $A_i(e^{-ph})$, $i = 1,3$, непрерывные слева в 0 ограниченные операторы $A_i(e^{-ph}) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$A_i(e^{-ph}) \triangleq j = 0 A_{ij} e^{-jph}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad i = 1,3. \tag{7}$$

Тогда можно систему (1)—(2) представить в операторной форме:

$$px(t) = A_1(e^{-ph})x(t) + A_2 y(t) + B_1 u(t), \tag{8}$$

$$\mu p y(t) = A_3(e^{-ph})x(t) + A_4 y(t) + B_2 u(t). \tag{9}$$

В [24] для расщепления системы (8)—(9) введено следующее невырожденное преобразование:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T(\mu, e^{-ph}) \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{C}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T, \tag{10}$$

где

$$T(\mu, e^{-ph}) = \begin{bmatrix} E_{n_1} & \mu H(\mu, e^{-ph}) \\ -L(\mu, e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu L(\mu, e^{-ph}) H(\mu, e^{-ph}) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$L(\mu, e^{-ph})$, $H(\mu, e^{-ph})$ — матричные операторы, зависящие от параметра μ. Они являются решениями следующих матричных функциональных уравнений: алгебраического уравнения Риккати и уравнения Сильвестра

$$A_3 - A_4 L + \mu L A_1 - \mu L A_2 L = 0, \tag{12}$$

$$(\mu A_1 - A_2 L) H - H(A_4 + \mu L A_2) + A_2 = 0. \tag{13}$$

С целью сокращения записей здесь и далее, где это не приводит к неоднозначному пониманию, аргументы у матричных операторов $\mathsf{A}_i(e^{-ph})$, $i = 1, 3$, $\mathsf{H}(\mu, e^{-ph})$, $\mathsf{L}(\mu, e^{-ph})$ будем опускать.

Отметим, что $\det T(\mu, e^{-ph}) \equiv 1$; следовательно, преобразование (11) обратимо, причем

$$T^{-1}(\mu, e^{-ph}) = \begin{bmatrix} E_{n_1} - \mu L(\mu, e^{-ph}) H(\mu, e^{-ph}) & -\mu H(\mu, e^{-ph}) \\ L(\mu, e^{-ph}) & E_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

и

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \mathsf{T}^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Лемма 1 (о решениях матричных уравнений). *Если* $\det A_4 \neq 0$, *то найдется такое* $\mu^* > 0$, *что для любого* $\mu \in [0, \mu^*]$ *существуют непрерывно зависящие от* μ *решения* $L(\mu, e^{-ph})$, $H(\mu, e^{-ph})$ *уравнений* (12), (13), *которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов*:

$$L(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m L^m(e^{-ph}), \tag{16}$$

$$H(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m H^m(e^{-ph}), \tag{17}$$

члены которых можно найти по итеративной схеме

$$L^{k+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \Big(L^k A_1(e^{-ph}) - \sum_{j=0}^{k} L^{k-j} A_2 L^j \Big), \tag{18}$$

$$H^{k+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \Big(A_1(e^{-ph}) H^k - \sum_{i=0}^{k} (A_2 L^i H^{k-i} + H^i L^{k-i} A_2) \Big), \tag{19}$$

с начальными условиями

$$L^0(e^{-ph}) = A_4^{-1} A_3(e^{-ph}), \tag{20}$$

$$H^0(e^{-ph}) = A_2 A_4^{-1}. \tag{21}$$

Асимптотические приближения

$$\mathsf{L}(\mu, e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \mathsf{L}^i(e^{-ph}) + O(\mu^{k+1}), \quad \mathsf{H}(\mu, e^{-ph}) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \mathsf{H}^i(e^{-ph}) + O(\mu^k) \tag{22}$$

имеет место для всех $\mu \in [0, \mu^*)$, *где*

$$\mu^* = \frac{1}{\|\mathsf{A}_4^{-1}\| \left(a + bd + 2b\sqrt{\frac{ad}{b}} \right)} \tag{23}$$

и

$$a \triangleq \|\mathsf{A}_1(e^{-ph})\| + \|\mathsf{A}_2\| \cdot \|\mathsf{A}_4^{-1}(e^{-ph})\| \cdot \|\mathsf{A}_3(e^{-ph})\|,$$
$$d \triangleq \|\mathsf{A}_4^{-1}(e^{-ph})\| \cdot \|\mathsf{A}_3(e^{-ph})\|, \quad b \triangleq \|\mathsf{A}_2\|.$$

Доказательство проводится по схеме из [16, с. 52]. По теореме о неявной функции решения уравнений (12)—(13) можно искать в виде разложений по целым неотрицательным степеням μ. Доказательство представлений (18)—(21) несложно провести, подставляя разложения (16)—(17) в (12), (13) и приравнивая в полученных уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях μ. Непрерывная зависимость от μ доказывается аналогично [17]. Доказательство оценки аналогично [16, с. 52], с учетом (7). □

Лемма 2. *Пусть* $\det A_4 \neq 0$. *Для любого целого* $k \geqslant 0$ *матричные функции* $L^k(e^{-ph})$, $H^k(e^{-ph})$, *удовлетворяющие* (18), (19), *могут быть представлены в виде конечных сумм*:

$$L^k(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{(k+1)l} L_j^k e^{-jph}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$H^k(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{kl} H_j^k e^{-jph}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Здесь матрицы L_j^k, H_j^k, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, *можно найти по следующим рекуррентным формулам*:

$$L_j^k = A_4^{-1} \sum_{s=j-kl}^{j} \left(L_s^{k-1} A_{1,j-s} - \sum_{i=0}^{k-1} L_s^{k-1-i} A_2 L_{j-s}^i \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = \overline{0, (k+1)l}, \tag{26}$$

$$H_j^{k+1} = A_4^{-1} \left[\sum_{s=j-l}^{j} A_{1,j-s} H_s^k - \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{s=j-(k+1)l}^{j} A_2 L_{j-s}^i H_s^{k-i} + \sum_{s=j-kl}^{j} H_{j-s}^i L_s^{k-i} A_2 \right) \right], \tag{27}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = \overline{0, kl}, \tag{28}$$

с начальными условиями

$$L_j^0 = A_4^{-1} A_{3j}, \quad j = \overline{0, l}, \quad L_j^k = 0 \quad \textit{если} \quad j < 0 \vee j > (k+1)l, \tag{29}$$

$$H_0^0 = A_2 A_4^{-1}, \quad H_j^k = 0 \quad \textit{если} \quad j < 0 \vee j > kl. \tag{30}$$

Доказательство. Докажем (24) и (26). Отметим прежде всего, что из (7), (18), (26) следует представление $L^0(e^{-ph})$ в форме (24) для $k = 0$.

Представление (24), (26) докажем методом математической индукции. Предположим, что (24), (26) верны для всех $k \leqslant R$. Тогда для $k = R + 1$ из (7), (18) и (24) следует

$$L^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1} \left(\sum_{j=0}^{(R+1)l} \sum_{s=0}^{l} L_j^R A_{1s} e^{-(j+s)ph} - \sum_{i=0}^{R} \sum_{j=0}^{(R-i+1)l} \sum_{r=0}^{(i+1)l} L_j^{R-i} A_2 L_r^i e^{-(r+j)ph} \right).$$

Изменяя порядок суммирования, производя сдвиг индексов суммирования и учитывая (29), а именно: $L_s^{k-j} = 0$ для $s < 0$, $L_{i-s}^j = 0$ для $i - s > (j+1)l$, имеем:

$$L^{R+1}(e^{-ph}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{((R+1)+1)l} A_4^{-1} \left[\sum_{s'=(R+1)l}^{j} \left[L_{s'}^{((R+1)-1)} A_{1,j-s'} - \sum_{i=0}^{(R+1)-1} L_{s'}^{((R+1)-(1+i))} A_2 L_{j-s'}^i \right] e^{-jph} \right]. \tag{31}$$

Тогда согласно (26) и (31) получаем

$$L^{R+1}(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{((R+1)+1)l} L_j^{R+1} e^{-jph}. \tag{32}$$

Из (32) можно заключить, что (24) верно для $k = R+1$, и по схеме метода математической индукции (24) справедливо для $\forall k \in \mathbb{Z}_+$.

Докажем (25) и (27). Прежде всего отметим, что из (7), (25) и (27) следует представление $H^0(e^{-ph})$ в виде (25) для $k = 0$. Представления (25) и (27) докажем методом математической индукции. Предположим, что (24) и (26) справедливы для всех $k \leqslant R$. Тогда при $k = R+1$ из (19) в соответствии с (7), (19) и (25) следует

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1}\left(\sum_{s=0}^{l} A_{1s}e^{-sph}\sum_{r=0}^{Rl} H_r^R\, e^{-rph} - \right.$$
$$\left. - A_2\sum_{i=0}^{R}\sum_{j'=0}^{(i+1)l} L_{j'}^i e^{-j'ph}\sum_{r'=0}^{(R-i)l} H_{r'}^{R-i}e^{-r'ph} - \sum_{i=0}^{R}\sum_{r'=0}^{il} H_{r'}^i e^{-r'ph}\sum_{j'=0}^{(R-i+1)l} L_{j'}^{R-i}A_2 e^{-j'ph}\right).$$

Изменяя порядок суммирования, производя сдвиг индексов суммирования и учитывая (30), имеем:

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = A_4^{-1}\left(\sum_{s'=0}^{(R+1)l}\sum_{r=s'-l}^{s'} A_{1,s'-r}H_r^R(e^{-s'ph}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{s''=0}^{(R+1)l}\sum_{r'=s''-(R+1)l}^{s''}\sum_{i=0}^{R} A_2 L_{s''-r'}^i H_{r'}^{R-i}(e^{-s''ph}) - \sum_{s'''=0}^{(R+1)l}\sum_{j'=s'''-Rl}^{s'''}\sum_{i=0}^{R} H_{s'''-j'}^i L_{j'}^{R-i}A_2(e^{-s'''ph})\right).$$

Отсюда и из (27) следует

$$H^{R+1}(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{(R+1)l} H_j^{R+1}e^{-jph}.$$

Таким образом, заключаем, что (25) верно для $k = R+1$, а значит, (25) и (27) верно $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, и $k \geqslant 0$. Лемма 4 доказана. $\square$

Зная асимптотику (16)—(17) и представление (18)—(19), можно записать асимптотику преобразования (10), (11).

Следствие 1. *Пусть* $\det A_4 \neq 0$. *Тогда существует такое* $\mu^* > 0$, *что для всех* $\mu \in (0, \mu^*]$ *расщепляющее преобразование* (10), (11) *можно представить в виде асимптотического ряда*

$$T(\mu, e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty}\mu^m T^m(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{l}\mu^m T_j^m e^{-jph}, \tag{33}$$

где $T_j^m \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $j \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ *— постоянные матрицы, которые легко выразить через* L_j^m, H_j^m.

Теорема 1 (о расщеплении системы)**.** *Если* $\det A_4 \neq 0$, *то найдется такое* $\mu^* > 0$, *что в результате замены переменных* (10), (11) *для всех* $\mu \in (0, \mu^*]$ *система* (1)*—*(2), (3) *преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями*

$$\dot\xi(t) = A_\xi(\mu, e^{-ph})\xi(t) + B_\xi(\mu, e^{-ph})u(t), \qquad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \tag{34}$$

$$\mu\dot\eta(t) = A_\eta(\mu, e^{-ph})\eta(t) + B_\eta(\mu, e^{-ph})u(t), \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > 0, \tag{35}$$

с начальными условиями

$$\xi(0) = x_0 - \mu L(e^{-ph})H(e^{-ph})x_0 - \mu H(e^{-ph})y_0, \quad \xi(\theta) = \varphi(\theta) - \mu L(e^{-ph})H(e^{-ph})\varphi(\theta), \quad \theta < 0, \tag{36}$$

$$\eta(0) = (e^{-ph})Lx_0 - y_0, \qquad y(\theta) = L(e^{-ph})\varphi(\theta), \qquad \theta < 0, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} &A_\xi(\mu, e^{-ph}) \triangleq A_1(e^{-ph}) - A_2 L(\mu, e^{-ph}),\\ &B_\xi(\mu, e^{-ph}) \triangleq B_1(e^{-ph}) - H(\mu, e^{-ph})B_2 - \mu H(\mu, e^{-ph})L(\mu, e^{-ph})B_1,\\ &A_\eta(\mu, e^{-ph}) \triangleq A_4 - \mu L(\mu, e^{-ph})A_2,\\ &B_\eta(\mu, e^{-ph}) \triangleq B_2 + \mu L(\mu, e^{-ph})B_1, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &e^{-ph}x_0 \triangleq \varphi(-h),\\ &e^{-jph}x_0 \triangleq 0, \quad j > 1,\\ &e^{-jph}y_0 \triangleq 0, \quad j > 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Доказательство. Для обоснования декомпозиции применим преобразование (10), (11), (14) к системе (8)—(9) и умножим преобразованное уравнение слева на $\mathrm{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}T^{-1}(\mu, e^{-ph})$:

$$p \cdot \mathrm{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}\zeta(t) = A_{\xi\eta}(\mu, p)\zeta(t) + B_{\xi\eta}(\mu, p)u(t),$$

где $\zeta(t) = \{\xi(t), \eta(t)\}'$,

$$A_{\xi\eta}(\mu, p) = T^{-1}(\mu, p)A(\mu, p)T(\mu, p) = \begin{pmatrix} A_\xi(\mu, p) & 0_{n_1\times n_2}\\ 0_{n_2\times n_1} & A_\eta(\mu, p)\end{pmatrix},$$

$$B_{\xi\eta}(\mu, p) = T^{-1}(\mu, p)B(\mu) = \begin{pmatrix} B_\xi(\mu, p)\\ B_\eta(\mu, p)\end{pmatrix}.$$

В результате получим эквивалентную (8)—(9) систему

$$\begin{aligned} \dot\xi(t) &= \big[A_1 - A_2L\big]\xi(t) + \big[B_1 - \mu HLB_1 - HB_2\big]u(t),\\ \mu\dot\eta(t) &= \big[A_4 + \mu LA_2\big]\eta(t) + \big[B_2 + \mu LB_1\big]u(t), \end{aligned}$$

что в силу (38) равносильно (34)—(35).

Применяя преобразование (10), (11), (14) к начальным условиям (3), получаем начальные условия для расщепленной системы:

$$\begin{aligned} \xi_\theta &= (E_{n_1} - \mu\mathsf{H}(e^{-ph})\mathsf{L}(e^{-ph}))x_\theta - \mu\mathsf{H}(e^{-ph})y_\theta,\\ \eta_\theta &= \mathsf{L}(e^{-ph})x_\theta + y_\theta, \quad \theta \leqslant 0, \end{aligned}$$

что с учетом (3) совпадает с (36). □

Лемма 3. *Расщепленная система* (34), (35) *имеет асимптотическое представление:*

$$\dot\xi(t) = (A^0_\xi + \mu A^1_\xi(e^{-ph}) + \mu^2 A^2_\xi(e^{-ph}) + \ldots)\xi(t) + (B^0_\xi + \mu B^1_\xi(e^{-ph}) + \ldots)u(t), \tag{40}$$

$$\mu\dot\eta(t) = (A^0_\eta + \mu A^1_\eta(e^{-ph}) + \mu^2 A^2_\eta(e^{-ph}) + \ldots)\eta(t) + (B^0_\eta + \mu B^1_\eta(e^{-ph}) + \ldots)u(t), \tag{41}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &\xi(0) = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots, \quad \xi(\theta) = \varphi_0(\theta) + \mu\varphi_1(\theta) + \ldots, \quad \theta < 0,\\ &\eta(0) = \eta_0 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \ldots, \quad \eta(\theta) = \eta_0(\theta) + \mu\eta_1(\theta) + \ldots, \quad \theta < 0, \end{aligned} \tag{42}$$

где для всех $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливы следующие соотношения:

$$A^m_\xi(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{(m+1)l} A^m_{\xi j}e^{-jph}, \qquad \begin{aligned} &A^0_{\xi j} = A_1 j - A_2 L^0_j, && m = 0, && j = \overline{0, l};\\ &A^m_{\xi j} = -A_2 L^m_j, && m \geqslant 1, && j = \overline{0, (m+1)l}, \end{aligned}$$

$$B^m_\xi(e^{-ph}) = \sum_{j=0}^{ml} B^m_{\xi j}e^{-jph}, \qquad B^0_{\xi j} = B_1 - H^0_j B_2, \qquad m = 0, \qquad j = \overline{0, l};$$

$$B^m_{\xi j} = -\left(H^m_j B_2 + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=j+(m-i)l}^{il} H^i_k L^{m-i-1}_{j-k} B_1\right), \qquad m \geqslant 1, \qquad j = \overline{0, ml},$$

$$A_\eta^m(e^{-ph})=\sum_{j=0}^{ml}A_{\eta j}^m e^{-jph},\qquad \begin{array}{lll} A_{\eta 0}^0=A_4 m=0; & A_{\eta j}^0=0, & j\neq 0,\\ A_{\eta j}^m=-L_j^{m-1}A_2, & m\geqslant 1, & j=\overline{0,ml},\end{array}$$

$$B_\eta^m(e^{-ph})=\sum_{j=0}^{ml}B_{\eta j}^m e^{-jph},\qquad \begin{array}{lll} B_{\eta 0}^0=B_2 m=0; & B_{\eta j}^0=0, & j\neq 0,\\ B_{\eta j}^m=L_j^{m-1}B_1, & m\geqslant 1, & j=\overline{0,ml},\end{array}$$

$$\xi_0=\varphi(0)-\sum_{m=1}^{\infty}\mu^m\varphi_m(0),\quad \varphi_m(0)=\sum_{n=0}^{m-1}H^nL^{m-n-1}\varphi(0)-H^{m-1}y_0,\quad m\geqslant 1,$$

$$\xi_m=\varphi(\theta)-\sum_{m=1}^{\infty}\mu^m\varphi_m(\theta),\qquad m\geqslant 1,\quad \varphi_0(\theta)=\varphi(\theta),$$

$$\varphi_m(\theta)=\sum_{n=0}^{m-1}H^nL^{m-n-1}\varphi(\theta),\qquad m\geqslant 1,$$

$$\eta_0=y_0+\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mL^m\varphi(0),\qquad m\geqslant 0,$$

$$\eta_m(\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mL^m\varphi(\theta),\qquad m\geqslant 0.$$

Доказательство. Из (34), (14), (24) и (25) получаем

$$A_\xi(e^{-ph})=A_1(e^{-ph})-A_2L(\mu,e^{-ph}),$$
$$A_\xi(e^{-ph})=\sum_{j=0}^{l}A_{1j}e^{-jph}-A_2\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\sum_{j=0}^{(m+1)l}L_j^me^{-jph}.$$

Из (34) и (14) имеем

$$A_\xi(e^{-ph})=\mu^0\sum_{j=0}^{l}(A_1j-A_2L_j^0)e^{-jph}-\sum_{m=1}^{\infty}\mu^mA_2\sum_{j=0}^{(m+1)l}L_j^me^{-jph},$$
$$A_\xi(e^{-ph})=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^mA_\xi^m(e^{-ph}).$$

Из (35) находим

$$B_\xi(e^{-ph})=B_1-H(\mu,e^{-ph})B_2-\mu H(\mu,e^{-ph})L(\mu,e^{-ph})B_1.$$

Из (14) и (40) следуют соотношения

$$B_\xi=B_1-\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mu^i\sum_{j=0}^{il}H_j^ie^{-jph}\right)B_2-\mu\sum_{i'=0}^{\infty}\mu^{i'}\sum_{j'=0}^{i'l}H_{j'}^ie^{-j'ph}\sum_{i''=0}^{\infty}\mu^{i''}\sum_{j''=0}^{(i''+1)l}L_{j''}^{i''}e^{-j''ph}B_1,$$

и

$$B_\xi(e^{-ph})=\mu^0(B_1-H_0^0B_2)-\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^i\sum_{j=0}^{il}H_j^ie^{-jph}\right)B_2-$$
$$-\sum_{i'=0}^{\infty}\sum_{i''=0}^{\infty}\mu^{(i'+i''+1)}\sum_{j'=0}^{i'l}\sum_{j''=0}^{(i''+1)l}H_{j'}^iL_{j''}^{i''}e^{-(j'+j'')ph})B_1.$$

Изменяя порядок суммирования и используя сдвиг индексов, получаем:

$$B_\xi(e^{-ph}) = \mu^0(B_1 - H_0^0 B_2) - \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m \sum_{j=0}^{ml} \left(H_j^m B_2 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=j+(m-i)l}^{il} H_k^i L_{j-k}^{m-i-1} B_1 \right) e^{-jph}.$$

Таким образом,

$$B_\xi(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_\xi^m(e^{-ph}).$$

Аналогично доказываются формулы (16), (17), (40) и (41); для $A_\eta(e^{-ph})$ имеем:

$$A_\eta(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_\eta^m(e^{-ph}),$$

Из (40) и (41), для $B_\eta(e^{-ph})$ получаем

$$B_\eta(e^{-ph}) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_\eta^m(e^{-ph}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_\xi^m(e^{-ph}) \right] \xi(t) + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_\xi^m(e^{-ph}) \right] u(t), \\
\mu\dot{\eta}(t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m A_\eta^m(e^{-ph}) \right] \eta(t) + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mu^m B_\eta^m(e^{-ph}) \right] u(t),
\end{aligned}$$

что является представлением (40), (35). Доказательство остальных формул выполняется аналогично с использованием (39) с (16), (17), (24), (25). Лемма 3 доказана. □

Обозначим через $O(\mu)$ («O большое от μ») вектор-функцию $f(t,\mu)$ на интервале $[t_1, t_2]$, компоненты $f_i(t,\mu)$ которой удовлетворяют следующему условию: существуют такие постоянные $\mu^* > 0$, $c > 0$, что евклидова норма $|f(t,\mu)|$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t,\mu)| \leqslant c\mu$$

для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ и всех $t \in [t_1, t_2]$. Размерность вектор-функции $f(t,\mu)$ следует из контекста.

Основываясь на аппроксимации k-го порядка ($k = 0, 1, \ldots$) из (22), несложно по (33) определить аппроксимацию преобразования $T(\mu, e^{-ph})$ k-го порядка, а также аппроксимацию k-го порядка быстрой и медленной подсистем расщепленной системы (40), (41).

Из лемм 4 и 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4 (об аппроксимации матриц преобразования)**.** *Пусть* $\det A_4 \neq 0$. *Для достаточно малых* $\mu > 0$ *зависящие от параметра функциональные матрицы* $\mathsf{L}(\mu, e^{-ph})$, $\mathsf{H}(\mu, e^{-ph})$, *являющиеся решением* (12), (13), *имеют асимптотическое приближение вида*

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}(\mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^{k} \mu^m \sum_{j=0}^{(m+1)l} L_j^m e^{-jph} + O(\mu^{k+1}), \\
\mathsf{H}(\mu, e^{-ph}) &= \sum_{m=0}^{k} \mu^m \sum_{j=0}^{ml} H_j^m e^{-jph} + O(\mu^{k}),
\end{aligned}$$

где L_j^m, H_j^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ *можно найти согласно итеративной схеме* (26), (27), (29), (30).

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5 (об аппроксимации системы). *Пусть* $\det A_4 \neq 0$. *Для достаточно малых* $\mu > 0$ *расщепленная система* (34), (35) *асимптотически аппроксимируется для любого* k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *системой*

$$\dot{\xi}(t) = \left[\sum_{m=0}^{k} \mu^m A_\xi^m(e^{-ph}) + O(\mu^k)\right] \xi(t) + \left[\sum_{m=0}^{k} \mu^m B_\xi^m(e^{-ph}) + O(\mu^k)\right] u(t), \tag{43}$$

$$\mu\dot{\eta}(t) = \left[\sum_{m=0}^{k} \mu^m A_\eta^m(e^{-ph}) + O(\mu^k)\right] \eta(t) + \left[\sum_{m=0}^{k} \mu^m B_\eta^m(e^{-ph}) + O(\mu^k)\right] u(t), \tag{44}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &\xi(0) = \xi_0 + \ldots + \mu^k \xi_k + O(\mu^k), \quad \xi(\theta) = \varphi_0(\theta) + \ldots + \mu^k \varphi_k(\theta) + O(\mu^k), \quad \theta < 0, \\ &\eta(0) = \eta_0 + \ldots + \mu^k \eta_k + O(\mu^k), \quad \eta(\theta) = \eta_0(\theta) + \ldots + \mu^k \eta_k(\theta) + O(\mu^k), \quad \theta < 0, \end{aligned} \tag{45}$$

где компоненты (43)—(42) *вычисляются по формулам леммы* 3.

Относительно вырожденной системы (4) и системы погранслоя (6) имеют место следующие аппроксимации.

Следствие 2. *Пусть* $\det A_4 \neq 0$. *Для достаточно малых* $\mu > 0$ *расщепленная система* (34), (35) *является* $O(\mu)$*-близкой к вырожденной системе* (4) *и системе погранслоя* (6).

Доказательство. Из (4), (5) и формул леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} A_\xi(\mu, e^{-ph}) &= A_s + O(\mu), \qquad B_\xi(\mu, e^{-ph}) = B_s + O(\mu), \\ A_\eta(\mu, e^{-ph}) &= A_4 + O(\mu), \qquad B_\eta(\mu, e^{-ph}) = B_2 + O(\mu). \end{aligned}$$

Далее доказательство следует из леммы 5. □

Таким образом, мы обосновали, что вырожденная система (4) и система погранслоя (6) представляют из себя асимптотическую декомпозицию исходной системы (1)—(2).

В качестве следствия из леммы 5 получаем, что хотя результирующая расщепленная система (34)—(35) является в общем случае системой с бесконечным запаздыванием, для любого фиксированного k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ она аппроксимируется с точностью $O(\mu^k)$ системой с конечным запаздыванием (43), (44).

4. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_2(t-1) - y(t), \\ \dot{x_2}(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t-1) - x_2(t-1), \\ \mu\dot{y}(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_2(t-1) - y(t) + u(t), \end{aligned} \tag{46}$$

$h = 1$, $l = 1$, с начальными условиями

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \theta \in [-1, 0], \quad y_0 = 0, \quad u(t) \equiv 1, \quad t \geqslant 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t < 0.$$

Система (46) является частным случаем системы (1)—(2) с параметрами

$$A_{10} = \big(-1,\ 21,\ 2\big), \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{30} = \big(-1,\ 2\big), \quad A_{31} = \big(0,\ -1\big), \quad A_4 = -1, \quad B_2 = 1.$$

Выпишем первые члены асимптотических разложений (16)—(17), рассчитанные по формулам (18)—(19).

При $\lambda = e^{-ph}$ из (18), (20) имеем:

$$\begin{aligned} L^0 &= \big[1,\ \lambda - 2\big], \quad L^1 = \big[-(\lambda-1)(\lambda-2),\ (\lambda-2)^2\big], \\ L^2 &= \big[(\lambda-1)(\lambda-2) - (\lambda-1)(\lambda-2)^2,\ (\lambda-2)^3 - (\lambda-2)^2\big]. \end{aligned}$$

Согласно (19), (21) получаем

$$H^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad H^2 = \begin{pmatrix} 2(\lambda-1)(\lambda-2)+1 \\ 2\lambda-(\lambda-1)(\lambda-2)-2 \end{pmatrix}.$$

Для аппроксимаций до 2-го порядка расщепленной системы по (59), (60) получаем:

$$A_\xi^0(\lambda) = A_1 - A_2 L^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda-1 & 2-\lambda \end{bmatrix}, \quad A_\xi^1(\lambda) = -A_2 L^1 = \begin{bmatrix} -(\lambda-1)(\lambda-2) & +(\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\xi^2(\lambda) = -A_2 L^2 = \begin{bmatrix} -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + (\lambda-1)(\lambda-2) & -(\lambda-2)^2 + (\lambda-2)^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_\xi^0(\lambda) = B_1 - H^0 B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi^1(\lambda) = -H^1 B_2 - H^0 L^0 B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\lambda \end{bmatrix},$$

$$B_\xi^2(\lambda) = H^2 B_2 + H^0 L^1 + H^1 L^0 = \begin{bmatrix} (\lambda-1)(\lambda-2) & 2(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda + (\lambda-2)^2 + 3 \\ \lambda - (\lambda-1)(\lambda-2) - 1 & 2\lambda - 2(\lambda-1)(\lambda-2) - 2 \end{bmatrix},$$

$$A_\eta^0(\lambda) = A_4 = [-1], \quad A_\eta^1(\lambda) = -L^0 A_2 = [1], \quad A_\eta^2(\lambda) = -L^1 A_2 = [-(\lambda-1)(\lambda-2)],$$

$$B_\eta^0(\lambda) = B_2 = [1], \quad B_\eta^1(\lambda) = L^0 B_1 = [0], \quad B_\eta^2(\lambda) = L^1 B_1 = [0].$$

Расщепленная систем нулевого порядка аппроксимации

$$\begin{aligned}
&\dot\xi_1^0(t) = -u(t), \\
&\dot\xi_2^0(t) = -\xi_1^0(t) + 2\xi_2^0(t) + \xi_1^0(t-1) - \xi_2^0(t-1), \\
&\xi_1^0(0) = 1, \quad \xi_2^0(0) = 0, \quad \xi_1^0(\theta) = 1, \quad \xi_2^0(\theta) = 0, \quad \theta \in [-1, 0), \\
&\frac{d}{d\tau}\eta^0(\tau) = -\eta^0(\tau) + u(\tau), \quad \eta^0(0) = 1.
\end{aligned}$$

для системы (46) совпадает с ее вырожденной системой (4)

$$\begin{aligned}
&\dot x_1(t) = -u(t), \\
&\dot x_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_1(t-1) - x_2(t-1)
\end{aligned}$$

и системой погранслоя (6):

$$\frac{d}{d\tau}y(\tau)) = -y(\tau) + u(\tau).$$

Система асимптотического приближения первого порядка расщепленной системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot\xi_1^1(t) = (\mu-1)\xi_1^1(t) + \xi_1^1(t-1) - \mu\xi_1^1(t-2) + 2(1-\mu)\xi_2^1(t) + (\mu-1)\xi_2^1(t-1)- \\
- (1+\mu)u(t) + 2\mu u(t-1), \\
\dot\xi_2^1(t) = -\xi_1^1(t) + 2\xi_2^1(t) + \xi_1^1(t-1) - \xi_2^1(t-1) - \mu(u(t) - u(t-1)), \\
\xi_1^1(0) = 1-\mu, \quad \xi_2^0(0) = 0, \quad \xi_1^1(\theta) = 1-\mu, \quad \xi_2^1(\theta) = 0, \quad \theta \in [-2, 0), \\
\frac{d}{d\tau}\eta^1(\tau) = -(1+\mu)\eta^1(\tau) + u(\tau), \quad \eta^1(0) = \mu,
\end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
\dot x(t) &= -x(t) - y(t), \\
\mu\dot y(t) &= -x(t-2) - y(t) + u(t),
\end{aligned} \tag{47}$$

$h = 2$, $l = 2$, с начальными условиями

$$x_0 = 1, \quad \varphi(\theta) = 1, \quad \theta \in [-2, 0], \quad y_0 = 2.$$

Параметры системы в виде (1)—(2):

$$\begin{aligned}
&A_{10} = (-1), \quad A_{11} = (0), \quad A_2 = (-1), \quad B_1 = (0), \\
&A_{30} = (0), \quad A_{31} = (-1), \quad A_4 = (-1), \quad B_2 = (1).
\end{aligned}$$

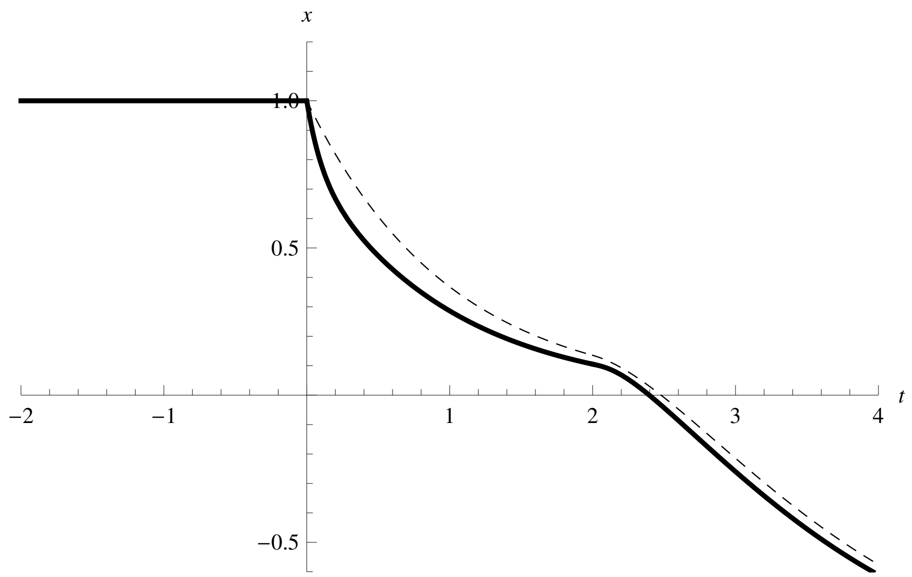

Рис. 1. x-Компонента точного решения (сплошная жирная линия) и ее асимптотические приближения нулевого (пунктирная линия) и 1-го порядка (сплошная тонкая линия) при $\mu = 0{,}1$

Аппроксимация нулевого порядка расщепленной системы (47) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}^0(t) = -\xi^0(t) + \xi^0(t-2) - u(t), \quad t \in [0,4],\\
&\frac{d}{d\tau}\eta^0(\tau) = -\eta^0(\tau) + u(\tau), \quad \tau \in [0, 4/\mu],\\
&\xi^0(\theta) = 1, \quad \theta \in [-2, 0], \quad \eta^0(0) = 3,
\end{aligned}$$

и совпадает с вырожденной системой и системой погранслоя для (47). Система асимптотического приближения первого порядка расщепленной системы (43), (44) для (47) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}^1(t) = -\xi^1(t) + (1+\mu)\xi^1(t-2) - \mu\xi^1(t-4) + (-1+\mu)u(t) + 2\mu u(t-2), \quad t \in [0,4],\\
&\frac{d}{d\tau}\eta^1(\tau) = -\eta^1(\tau) + \mu\eta^1\left(\tau - \frac{2}{\mu}\right) + u(\tau), \quad \tau \in [0, 4/\mu],\\
&\xi^1(0) = 1 - 3\mu, \quad \xi^1(\theta) = 1, \quad \theta \in [-2, 0],\\
&\xi^1(\theta) = 0, \quad \theta < -2,\\
&\eta^1(\theta) = 3 + \mu, \quad \theta \in [-2, 0].
\end{aligned}$$

Сравнение точного решения с решениями, полученными на основе аппроксимаций 0-го и 1-го порядков, при $u(t) \equiv 1$, $t \geqslant 0$, $\varphi(\theta) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $t < 0$, $\mu = 0{,}1$ представлено на рис. 1—2.

5. Заключение. В статье для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы управления с соизмеримыми запазываниями в медленных переменных состояния исследуется невырожденного преобразования типа Chang, которое разделяет исходную сингулярно возмущенную систему на две несвязанные регулярно зависящие от малого параметра подсистемы: медленную и быструю подсистемы меньших размеров, чем исходные, в общем случае с бесконечным запаздыванием с исчезающей памятью. Получены выражения для асимптотических приближений произвольного порядка как невырожденного расщепляющего преобразования, так и получающихся в результате преобразования исходной системы двух несвязанных подсистем. Установлено, что асимптотическое приближение любого порядка расщепленной системы представляет собой систему с конечным кратным запаздыванием в состоянии и управлении. В соответствии с формулами (18), (19) построение асимптотических аппроксимаций может быть реализовано в виде программ для систем компьютерной алгебры.

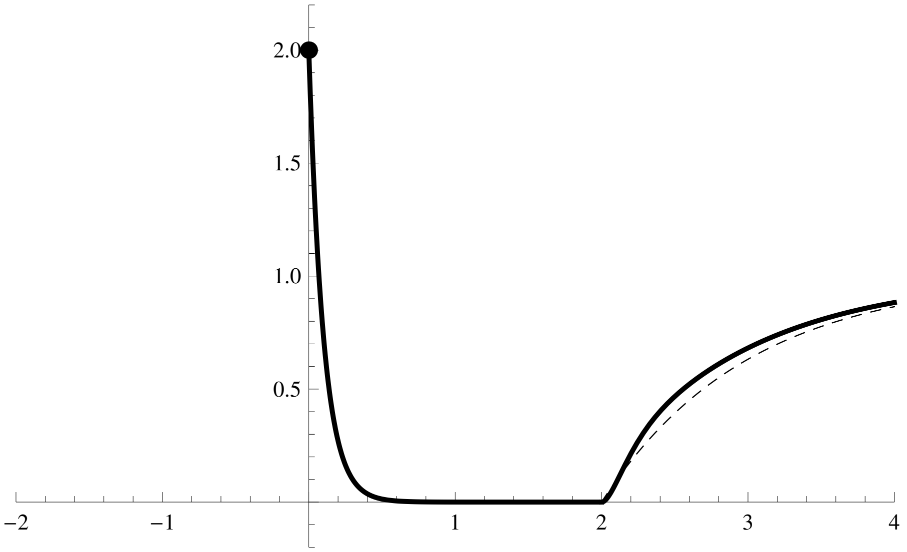

Рис. 2. y-Компонента точного решения (сплошная жирная линия) и ее асимптотические приближения нулевого (пунктирная линия) и первого порядка (сплошная тонкая линия) при $\mu = 0{,}1$

Использование в расщепленной системе (34), (35) аппроксимаций (22) позволяет получать последовательность асимптотических приближений системы уравнений с разделенными движениями, регулярно зависящих от малого параметра, обеспечить вычисление собственных значений системы, решений $x(t)$, $y(t)$ системы (1)—(2) с любой степенью точности (асимптотически). Применение построенных асимптотических аппроксимаций расщепляющего преобразования позволяет свести решение ряда задач устойчивости, управления и оценивания для больших систем с сингулярными возмущениями и запаздыванием к системам меньшей размерности, не зависящим или регулярно зависящими от малого параметра.

Для анализа точности асимптотического приближения решения выполнено моделирование средствами Wolfram Mathematica. Продемонстрировано, что построенные аппроксимации более высокого порядка позволяют получать асимптотически более высокую точность решения системы.

Полученные результаты можно использовать для решения задач анализа и синтеза линейных стационарных сингулярно возмущенных систем управления запаздывающего типа, построения асимптотических композитных наблюдателей и регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1982. — *20.* — С. 3–77.
2. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления// Автомат. телемех. — 2006. — № 1. — С. 3–51.
3. *Копейкина Т. Б.* Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием// Диффер. уравн. — 1989. — С. 1508–1518.
4. *Курина Г. А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 4. — С. 56–61.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
6. *Цехан О. Б.* Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром// Весн. Грозд. ун-та. Сер. 2. Мат. — 2017. — *7*, № 1. — С. 50–61.
7. *Bellman R., Cooke K.* Differential Difference Equations. — New York: Academic Press, 1963.
8. *Chang K.* Singular perturbations of a general boundary-value problem// SIAM J. Math. Anal. — 1972. — *3*, № 3. — P. 520–526.

9. *Chen X., Heidarinejad M., Liu J., Christofides P. D.* Composite fast-slow MPC design for nonlinear singularly perturbed systems// AIChE J. — 2012. — *58*, № 6. — P. 1802–1811.
10. *Fridman E.* Decoupling transformation of singularly perturbed systems with small delays and its applications// Z. Angew. Math. Mech. — 1996. — *76*, № 2. — P. 201–204.
11. *Gajic Z., Shen X.* Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems. — London: Springer Verlag, 1993.
12. *Glizer V. Ya.* L_2-Stabilizability conditions for a class of nonstandard singularly perturbed functional-differential systems// Dynam. Contin. Discr. Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. — 2009. — *16*. — P. 181–213.
13. *Glizer V. Ya.* Approximate state-space controllability of linear singularly perturbed systems with two scales of state delays// Asympt. Anal. — 2018.. — *107*, № 1-2. — P. 73–114.
14. *Johnson R.* Singular Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. — Springer-Verlag, 2005.
15. *Kokotovic P. V., Haddad A. H.* Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes// IEEE Trans. Automat. Control. — 1975. — *20*, № 1. — P. 111–113.
16. *Kokotovic P. V., Khalil H. K., O'Reilly J.* Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design. — New York: Academic Press, 1986.
17. *Magalhaes L. T.* Exponential estimates for singularly perturbed linear functional differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *103*. — P. 443–460.
18. *Manitius A. Z., Olbrot A. W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays// IEEE Trans. Automat. Control. — 1979. — *24*. — P. 541–553.
19. *Michiels W., Niculescu S. I.* Stability and Stabilization of Time Delay Systems: An Eigenvalue Based Approach. — Philadelphia: SIAM, 2007.
20. *Niculescu S. I.* Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. — New York: Springer, 2001.
21. *Pekař L., Gao Q.* Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results// IEEE Access. — 2018. — *6*. — P. 35457–35491.
22. *Prljaca N., Gajic Z.* General transformation for block diagonalization of multitime-scale singularly perturbed linear systems// IEEE Trans. Automat. Control. — 2008. — *53*, № 5. — P. 1303–1305.
23. *Seuret A., Özbay H., Bonnet C. Mounier H. (eds.).* Low-Complexity Controllers for Time-Delay Systems. — Cham: Springer, 2014.
24. *Tsekhan O.* Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation// Axioms. — 2019. — *8*, № 2. — 71.
25. *Yang X., Zhu J. J.* A generalization of Chang transformation for linear time-varying systems// Proc. 49 IEEE Conf. on Decision and Control (Atlanta, GA), 2010. — P. 6863–6869.
26. *Yang X., Zhu J. J.* Chang transformation for decoupling of singularly perturbed linear slowly time-varying systems// Proc. 51 IEEE Conf. on Decision and Control (Maui, Hawaii, USA), 2012. — P. 5755–5760.
27. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., et al.* Singular perturbations and time scales in control theories and applications: An overview 2002–2012// Int. J. Inf. Syst. Sci. — 2014. — *9*, № 1. — P. 1–36.

Цехан Ольга Борисовна
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь
E-mail: `tsekhan@grsu.by`

Налигама Чамила Анурадха
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь
E-mail: `chammme@gmail.com`