ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 204 (2022). С. 135–145
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-135-145

УДК 517.956.4

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. **С. И. САХАРОВ**

Аннотация. Рассмотрена контактная задача для параболических уравнений второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в полосе, разделенной негладкой кривой на две области. Доказано существование и единственность регулярного решения этой задачи.

Ключевые слова: параболическая контактная задача, параболическое уравнение с разрывными коэффициентами, метод граничных интегральных уравнений, потенциал простого слоя.

CONTACT PROBLEM FOR A SECOND-ORDER PARABOLIC EQUATION WITH DINI-CONTINUOUS COEFFICIENTS

© 2022 **S. I. SAKHAROV**

Abstract. We consider a contact problem for second-order parabolic equations with Dini-continuous coefficients in a strip divided by a nonsmooth curve into two domains. The existence and uniqueness of a regular solution to this problem is proved.

Keywords and phrases: parabolic contact problem, parabolic equation with discontinuous coefficients, method of boundary integral equations, simple layer potential.

AMS Subject Classification: 35A01

Теория решения краевых задач в областях с негладкими боковыми границами для параболических уравнений в пространствах Гельдера построена в работах [1–7, 13, 16, 20]. В [14] исследована однозначная разрешимость в классе Дини контактной задачи в плоской полосе для параболического уравнения с коэффициентами, разрывными на границе раздела сред из класса Дини—Гельдера. В [21, 22] аналогичный результат получен в классах Гельдера в случае многомерного по пространственной x параболического уравнения.

В настоящей работе получена однозначная разрешимость в классе $C^{1,0}$ контактной задачи для двух одномерных (по x) параболических уравнений второго порядка при ослабленных (по сравнению с [14]) условиях на гладкость коэффициентов и правых частей в условиях сопряжения. В частности, от правой части в условии сопряжения первого рода требуется лишь существование непрерывной дробной производной порядка $1/2$, а от правой части в условии сопряжения второго рода— лишь непрерывность. Применяется метод интегральных уравнений, разработанный в [8, 9].

Статья состоит из четырех разделов. В разделе 1 вводятся используемые в работе обозначения и функциональные пространства, ставится контактная задача и приводятся необходимые сведения о фундаментальном решении параболического уравнения. В разделе 2 формулируется основная теорема существования и единственности регулярного решения поставленной задачи.

В разделе 3 устанавливается однозначная разрешимость системы интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода, к которой редуцируется исходная задача. В разделе 4 доказывается основная теорема.

1. Постановка задачи. Пусть $0 < T < +\infty$ фиксировано. Обозначим через $C[0,T]$ пространство непрерывных (вектор-) функций $\psi\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2$, с нормой

$$\|\psi; [0,T]\|^0 = \max_{[0,T]} |\psi|$$

и рассмотрим подпространство $C_0[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$. Здесь и далее для любого вектора b под $|b|$ понимаем максимум из модулей компонент b. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

— оператор дробного дифференцирования порядка $1/2$. Следуя [8, 9], рассмотрим пространства

$$C^{1/2}[0,T] = \bigl\{\psi \in C[0,T] : \partial^{1/2}\psi \in C[0,T]\bigr\}$$

с нормой

$$\|\psi; [0,T]\|^{1/2} = \max_{[0,T]} |\psi| + \max_{[0,T]} |\partial^{1/2}\psi|;$$

и

$$C_0^{1/2}[0,T] = \bigl\{\psi \in C^{1/2}[0,T] : \psi(0) = 0,\ \partial^{1/2}\psi(0) = 0\bigr\}.$$

Пусть $D = \mathbb{R} \times (0,T)$, Ω — некоторая область в D. Обозначим через $C^0(\overline{\Omega})$ пространство непрерывных и ограниченных функций $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u; \overline{\Omega}\|^0 = \sup_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|;$$

введем также пространства

$$C_0(\overline{\Omega}) = \bigl\{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u(x,0) = 0\bigr\}; \quad C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) = \bigl\{u \in C_0(\overline{\Omega}) : \partial_x u \in C_0(\overline{\Omega})\bigr\}$$

с нормой

$$\|u; \overline{\Omega}\|^{1,0} = \sum_{l=0}^{1} \|\partial_x^l u; \overline{\Omega}\|^0.$$

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения изнутри Ω.

Функция $\nu(z)$, $z \geqslant 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$ при $z_1 \geqslant z_2 \geqslant 0$. Следуя [10, с. 147], модулем непрерывности называем такую непрерывную, неубывающую, полуаддитивную на $[0, +\infty)$ функцию ω, что $\omega(0) = 0$. Из известных свойств модуля непрерывности отметим неравенство

$$\omega(\lambda z) \leqslant (\lambda + 1)\omega(z), \quad \lambda \geqslant 0, \quad z \geqslant 0,$$

и тот факт, что функция $\omega(z)/z$, $z > 0$, почти убывает. Кроме того (см. [12]), справедлива оценка

$$\omega(|x|) \exp\left\{-\frac{|x|^2}{t}\right\} \leqslant C\omega(t^{1/2}) \exp\left\{-\frac{c|x|^2}{t}\right\}$$

для некоторых $C, c > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию (1), то $\widetilde{\omega}$— также модуль непрерывности, причем $\omega(z) \leqslant 2\widetilde{\omega}(z)$, $z \geqslant 0$. Кроме того, функция $\omega^*(z) = \omega(z^{1/2})$ также является модулем непрерывности, при этом, если ω удовлетворяет условию (1), то ω^* также удовлетворяет условию (1) и при $z \geqslant 0$ имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z) = 2\widetilde{\omega}(z^{1/2})$.

Пусть ω — модуль непрерывности. Пространство функций $\psi \in C_0[0,T]$, для которых

$$\|\psi;[0,T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{(0,T)} \left\{ \frac{|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty,$$

обозначим через $H_0^{1/2+\omega}[0,T]$. Введем также пространство $H_0^{\omega}[0,T]$ функций $\psi \in C_0[0,T]$, для которых

$$\|\psi;[0,T]\|^{\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup_{(0,T)} \left\{ \frac{|\psi(t+\Delta t)-\psi(t)|}{\omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty.$$

Замечание 1. Если $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0,T]$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), то $\psi \in C_0^{1/2}[0,T]$ (см. [12]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [9]).

В полосе D рассмотрим равномерно параболические операторы

$$L^{(s)}u = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} a_k^{(s)}(x,t)\partial_x^k u, \quad s=1,2,$$

где $a_k^{(s)}$ — вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $a_2^{(s)}(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta>0$ и всех $(x,t)\in\overline{D}$, $s=1,2$;

(ii) $a_k^{(s)} \in C^0(\overline{D})$, $|\Delta_{x,t}a_k^{(s)}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})$, $k=0,1,2$, $s=1,2$;

здесь ω_0 — такой модуль непрерывности, что

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}dy \int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z>0,$$

и для некоторого $\varepsilon_0\in(0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z>0$, почти убывает.

Полоса D разделяется на области

$$\Omega^{(1)} = \{(x,t)\in D : x<g(t)\}, \quad \Omega^{(2)} = \{(x,t)\in D : x>g(t)\}$$

кривой $\Sigma = \{(x,t)\in\overline{D} : x=g(t)\}$ (вообще говоря, негладкой), где g удовлетворяет условию

$$|\Delta_t g(t)| \leqslant |\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t\in[0,T], \tag{2}$$

ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию (1), и для некоторого $\varepsilon_1\in(0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z>0$, почти убывает.

Ставится задача отыскания функций $u^{(s)}$, $s=1,2$, являющихся регулярными решениями уравнений

$$L^{(s)}u^{(s)}(x,t)=0, \quad (x,t)\in\Omega^{(s)}, \quad s=1,2, \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u^{(1)}(x,0)=0, \quad x\leqslant g(0); \quad u^{(2)}(x,0)=0, \quad x\geqslant g(0), \tag{4}$$

и условиями сопряжения на границе Σ

$$\partial_x^k(u^{(1)}-u^{(2)})(g(t),t) = \psi_{k+1}(t), \quad k=0,1, \quad t\in[0,T], \tag{5}$$

где $\psi_1\in C_0^{1/2}[0,T]$, $\psi_2\in C_0[0,T]$.

Известно (см. [11]), что при условиях (i), (ii) существуют фундаментальные решения уравнений $L^{(s)}u^{(s)}=0$, $s=1,2$, причем они имеют вид

$$\Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau) = Z\big(x-\xi,t-\tau;a_2^{(s)}(\xi,\tau)\big) + W^{(s)}(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau)\in\overline{D}\times\overline{D}, \quad t>\tau, \tag{6}$$

где $Z\big(x-\xi,t-\tau;a_2^{(s)}(\xi,\tau)\big)$ — фундаментальные решения уравнений

$$\partial_t u^{(s)} - a_2^{(s)}(\xi,\tau)\partial_x^2 u^{(s)} = 0$$

с коэффициентами, «замороженными» в точке (ξ,τ), $\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<T$,

$$W^{(s)}(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}d\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Z\big(x-y,t-\eta;a_2^{(s)}(y,\eta)\big)\mu^{(s)}(y,\eta;\xi,\tau)dy, \tag{7}$$

плотности $\mu^{(s)}$ в (7) находятся из условия, что $\Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau)$ при любых фиксированных (ξ,τ), $\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<T$, удовлетворяют по переменным (x,t) уравнениям $L^{(s)}u=0$ в слое $\mathbb{R}\times(\tau,T)$. Функции Z из (6) имеют вид [19, с. 297]

$$Z(x,t;a_2^{(s)}(\xi,\tau))=\frac{1}{2\sqrt{\pi a_2^{(s)}(\xi,\tau)t}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2^{(s)}(\xi,\tau)t}\right\},\quad t>0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,\quad x,\xi\in\mathbb{R}.$$

Имеют место следующие оценки (см. [11]):

$$\begin{gathered}\left|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma^{(s)}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\},\\ \left|\partial_t^k\partial_x^lW^{(s)}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\},\end{gathered}\tag{8}$$

где $2k+l\leqslant2$, $x,\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$;

$$\begin{gathered}\left|\partial_t^k\partial_x^lZ\big(x,t;a_2^{(s)}(\xi,\tau)\big)\right|\leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}\left|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^lZ\big(x,t;a_2^{(s)}(\xi,\tau)\big)\right|\leqslant\\ \leqslant C(k,l)\omega_0\Big(|\Delta\xi|+|\Delta\tau|^{1/2}\Big)t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\},\end{gathered}\tag{9}$$

где $k,l\geqslant0$, $x,\xi,\xi+\Delta\xi\in\mathbb{R}$, $\tau,\tau+\Delta\tau\in[0,T]$, $t>0$;

$$\left|\Delta_t\partial_x^lW^{(s)}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\},\tag{10}$$

где $l=0,1$, $x,\xi\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\tau<t<t+\Delta t\leqslant T$, $\Delta t\leqslant t-\tau$. Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от δ, T, коэффициентов операторов $L^{(s)}$ и кривой Σ.

2. Формулировка основого результата. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты операторов $L^{(s)}$ удовлетворяют условиям* (i), (ii), *а функция g, задающая кривую Σ, удовлетворяет условию* (2). *Тогда для любых $\psi_1\in C_0^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2\in C_0[0,T]$ единственным решением $u^{(s)}\in C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s=1,2$, задачи* (3)–(5) *являются потенциалы простого слоя*

$$u^{(s)}(x,t)=\int\limits_0^t\Gamma^{(s)}(x,t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau,\quad(x,t)\in\overline{\Omega}^{(s)},\tag{11}$$

где $\{\varphi^{(s)}\in C_0[0,T],\ s=1,2\}$ — единственное в $C[0,T]$ решение системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{(s+1)}\int\limits_0^t\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau=\psi_1(t);\tag{12}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\left[\frac{\varphi^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t),t)}+(-1)^{s+1}\int\limits_0^t\partial_x\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau\right]=\psi_2(t),\quad t\in[0,T],\tag{13}$$

и выполнена оценка

$$\big\|u^{(s)};\Omega^{(s)}\big\|^{1,0}\leqslant C\Big[\big\|\psi_1;[0,T]\big\|^{1/2}+\big\|\psi_2;[0,T]\big\|^0\Big].\tag{14}$$

Замечание 2. Если модуль непрерывности ω_0 коэффициентов уравнений дополнительно удовлетворяет условию

$$\widetilde{\widetilde{\widetilde{\omega}}}_0(z) = \int_0^z x^{-1}dx \int_0^x y^{-1}dy \int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

и для правых частей в условиях сопряжения выполнено

$$\psi_1 \in C_0^{1/2,\omega_2}[0,T], \quad \psi_2 \in C_0^{\omega_2}[0,T], \quad \widetilde{\omega}_2(z) = \int_0^z \omega_2(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty, \quad z > 0,$$

то утверждение теоремы следует из [14] с соответствующей оценкой корректности.

3. Система интегральных уравнений. Следуя методу, изложенному в [8, 9], докажем, что для любых $\psi_1 \in C_0^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2 \in C_0[0,T]$ существует единственное решение $\varphi^{(s)} \in C_0[0,T]$, $s = 1, 2$, системы (12), (13). Пусть $\overline{a}^{(s)}(\tau) = a_2^{(s)}(g(\tau), \tau)$, $s = 1, 2$. Используя представление (6), положим

$$\Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau) = Z\big(0, t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) + N_1^{(s)}(t,\tau),$$

где

$$N_1^{(s)}(t,\tau) = \Big[Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) - Z\big(0, t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big)\Big] + W^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau).$$

Введем обозначение $N_2^{(s)}(t,\tau) = \partial_x \Gamma^{(s)}(g(t), t; g(\tau), \tau)$. Тогда систему (12), (13), учитывая формулу «скачка» для пространственной производной потенциала простого слоя [12], можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{s+1}\left\{\int_0^t Z(0, t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau))\varphi^{(s)}(\tau)d\tau + \int_0^t N_1^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau\right\} = \psi_1(t); \tag{15}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}(\overline{a}^{(s)})^{-1}(t)\varphi^{(s)}(t) + (-1)^{s+1}\int_0^t N_2^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau\right\} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{16}$$

Пусть

$$I^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

— оператор дробного интегрирования порядка 1/2. Тогда уравнение (15) может быть переписано в виде

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{s+1}\left\{\frac{1}{2}I^{1/2}((\overline{a}^{(s)})^{-1/2}\varphi^{(s)})(t) + \int_0^t N_1^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau\right\} = \psi_1(t), \quad t \in [0,T].$$

Положим

$$H_k^{(s)}\varphi^{(s)}(t) = \int_0^t N_k^{(s)}(t,\tau)\varphi^{(s)}(\tau)d\tau, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad t \in [0,T],$$

и перепишем систему (15), (16) в операторном виде

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{s+1}\left\{\frac{1}{2}I^{1/2}((\overline{a}^{(s)})^{-1/2}\varphi^{(s)}) + H_1^{(s)}\varphi^{(s)}\right\} = \psi_1; \tag{17}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\left\{\frac{1}{2}(\overline{a}^{(s)})^{-1}\varphi^{(s)} + (-1)^{s+1}H_2^{(s)}\varphi^{(s)}\right\} = \psi_2. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы* $H_1^{(s)}$, $s = 1,2$, *являются ограниченными операторами из* $C[0,T]$ *в* $H_0^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega = \widetilde{\omega}_0 + \omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$\big|H_1^{(s)}\varphi(t)\big| \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}), \tag{19}$$

$$\big|\Delta_t H_1^{(s)}\varphi(t)\big| \leqslant C\|\varphi\|^0 (\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \tag{20}$$

где $t, t+\Delta t \in [0,T]$, $\Delta t > 0$, $s = 1,2$, $\|\varphi\|^0 = \|\varphi; [0,T]\|^0$.

Докажем (19). В силу (2), (9)

$$\Big|Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) - Z\big(0, t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big)\Big| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\omega_1((t-\tau)^{1/2}),$$

откуда с учетом (8)

$$\big|N_1^{(s)}(t,\tau)\big| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\omega((t-\tau)^{1/2}), \tag{21}$$

и, следовательно,

$$\big|H_1^{(s)}\varphi(t)\big| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\omega((t-\tau)^{1/2})d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0 t^{1/2}\omega(t^{1/2}), \quad s = 1,2.$$

Неравенство (20) в силу (19) достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t$. Положим

$$\Delta_t H_k^{(s)}\varphi(t) = \sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} N_k^{(s)}(t+j\Delta t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^{t-\Delta t}[\Delta_t N_k^{(s)}(t,\tau)]\varphi(\tau)d\tau =$$
$$= R_{k,1}^{(s)}(t) - R_{k,0}^{(s)}(t) + R_{k,2}^{(s)}(t), \quad k = 1,2, \quad s = 1,2. \tag{22}$$

Из (21) получаем оценку $R_{1,j}^{(s)}(t)$ при $j = 0,1$:

$$\big|R_{1,j}^{(s)}(t)\big| \leqslant C\|\varphi\|^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t}(t+j\Delta t-\tau)^{-1/2}\omega((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0(\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s = 1,2.$$

Рассмотрим $R_{1,2}^{(s)}(t)$. Из представления

$$\partial_x Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) = -\frac{g(t)-g(\tau)}{2(t-\tau)}(\overline{a}^{(s)})^{-1}(\tau)Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) \tag{23}$$

(см. [17]), теоремы о среднем и (2), (9) имеем:

$$\Big|\Delta_t\Big[Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) - Z\big(0, t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big)\Big]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})\Big[(\Delta t)^{1/2}(t-\tau)^{-1}\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \Delta t(t-\tau)^{-3/2}\Big], \quad \Delta t \leqslant t-\tau.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$\big|\Delta_t N_1^{(s)}(t,\tau)\big| \leqslant C\Big\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1}\omega_1((t-\tau)^{1/2}) + \Delta t(t-\tau)^{-3/2}\omega((t-\tau)^{1/2})\Big\},$$
$$\Delta t \leqslant t-\tau, \tag{24}$$

откуда получаем

$$\left|R_{1,2}^{(s)}(t)\right| \leqslant C\Bigg\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\widetilde{\omega}_1(T^{1/2}) + (\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2}\widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau +$$
$$+ (\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2}d\tau\Bigg\}\|\varphi\|^0 \leqslant C\|\varphi\|^0(\Delta t)^{1/2}\omega((\Delta t)^{1/2}), \quad s=1,2. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда операторы* $H_2^{(s)}$, $s=1,2$, *— ограниченные операторы из* $C[0,T]$ *в* $H_0^{\widetilde{\omega}}[0,T]$, $\widetilde{\omega} = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из оценок

$$\left|H_2^{(s)}\varphi(t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}(t^{1/2}); \tag{25}$$
$$\left|\Delta_t H_2^{(s)}\varphi(t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}), \tag{26}$$

где $t, t+\Delta t \in [0,T]$, $s=1,2$, $\Delta t > 0$.

Докажем оценку (25). В силу представления (6), имеем

$$N_2^{(s)}(t,\tau) = \partial_x Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big) + \partial_x W^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau), \quad s=1,2.$$

Из (2), (9), (23) следует, что

$$\left|\partial_x Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big)\right| \leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}.$$

Вместе с неравенством (8) это дает оценку

$$\left|N_2^{(s)}(t,\tau)\right| \leqslant C\omega((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}, \quad s=1,2, \tag{27}$$

и, следовательно,

$$\left|H_2^{(s)}\varphi(t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_0^t \omega((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}(t^{1/2}), \quad s=1,2.$$

Оценку (26) для $s=1,2$ доказываем с помощью представления (22). При этом в силу (25) можно считать, что $0<\Delta t<t$. Из (27) получаем оценку для $R_{2,j}^{(s)}(t)$, $s=1,2$, $j=0,1$,

$$\left|R_{2,j}^{(s)}(t)\right| \leqslant C\|\varphi\|^0\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t}\omega((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})(t+j\Delta t-\tau)^{-1}d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\widetilde{\omega}((\Delta t)^{1/2}).$$

Рассмотрим $R_{2,2}^{(s)}(t)$. Используя соотношения (2), (9) и (23), имеем

$$\left|\Delta_t\partial_x Z\big(g(t)-g(\tau), t-\tau; \overline{a}^{(s)}(\tau)\big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\Big[(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2} + (\Delta t)\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-2}\Big] \leqslant$$
$$\leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}, \quad 0<\Delta t<t-\tau, \quad s=1,2.$$

Вместе с неравенством (10) это дает оценку

$$\big|R^{(s)}_{2,2}(t)\big| \leqslant C\|\varphi\|^0\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau+$$

$$+(\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2}\widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau \leqslant C\|\varphi\|^0\omega((\Delta t)^{1/2}),\quad s=1,2. \quad \square$$

Приведем известные результаты для дальнейшего исследования полученной системы интегральных уравнений.

Лемма 3 (см. [12]). *Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию* (1)*. Тогда оператор $\partial^{1/2}$ является ограниченным оператором из $H_0^{1/2+\omega}[0,T]$ в $H_0^{\widetilde{\omega}}[0,T]$.*

Следуя А. Н. Тихонову (см. [18]), назовем оператор $K\colon C[0,T]\to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t\in[0,T]$ из равенства $\varphi_1=\varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1=K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 4 (см. [9]). *Пусть ω — модуль непрерывности, $K\colon C[0,T]\to {H_0}^{\omega}[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда уравнение $\varphi+K\varphi=0$ имеет в $C[0,T]$ только решение $\varphi\equiv 0$.*

Заметим, что если $K\colon C[0,T]\to H_0^{\omega}[0,T]$ — линейный ограниченный оператор, $J\colon H_0^{\omega}[0,T]\to C[0,T]$ — оператор вложения, то оператор $K_1=J\cdot K\colon C[0,T]\to C[0,T]$ является компактным в силу теоремы Арцела—Асколи. Поэтому из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть ω — модуль непрерывности, $K\colon C[0,T]\to H_0^{\omega}[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой функции $\psi\in C[0,T]$ уравнение $\varphi+K\varphi=\psi$ имеет единственное решение $\varphi\in C[0,T]$ и справедлива оценка*

$$\|\varphi;[0,T]\|^0\leqslant C\|\psi;[0,T]\|^0$$

где $C>0$ — некоторая постоянная.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для любых $\psi_1\in C_0^{1/2}[0,T]$, $\psi_2\in C_0[0,T]$ система* (12), (13) *имеет единственное решение $\{\varphi^{(s)}\in C_0[0,T],\ s=1,2\}$ и справедливы оценки*

$$\big\|\varphi^{(s)};[0,T]\big\|^0\leqslant C\Big(\|\psi_1;[0,T]\|^{1/2}+\|\psi_2;[0,T]\|^0\Big),\quad s=1,2. \tag{28}$$

Доказательство. Как показано выше, система (12), (13) может быть записана в виде (17), (18). Применяя к обеим частям уравнения (17) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получим в силу лемм 1—3 и равенств

$$\partial^{1/2}I^{1/2}\varphi=\varphi,\quad I^{1/2}\partial^{1/2}\psi=\psi,$$

справедливых для любых $\varphi\in C[0,T]$, $\psi\in C^{1/2}[0,T]$, соответственно, следующую систему интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентную (17), (18) для $\varphi^{(s)}\in C[0,T]$:

$$\sum_{s=1}^{2}\Big[(-1)^{s+1}(\overline{a}^{(s)})^{-1/2}\varphi^{(s)}+K_1^{(s)}\varphi^{(s)}\Big]=2\partial^{1/2}\psi_1; \tag{29}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\Big\{(\overline{a}^{(s)})^{-1}\varphi^{(s)}+K_2^{(s)}\varphi^{(s)}\Big\}=2\psi_2, \tag{30}$$

где $K_1^{(s)}=2\partial^{1/2}H_1^{(s)}$, $K_2^{(s)}=(-1)^{s+1}2H_2^{(s)}$, $s=1,2$. Введем обозначения

$$A(t)=\begin{pmatrix}(\overline{a}^{(1)})^{-1/2} & -(\overline{a}^{(2)})^{-1/2}\\ (\overline{a}^{(1)})^{-1} & (\overline{a}^{(2)})^{-1}\end{pmatrix}(t),\quad K=\begin{pmatrix}K_1^{(1)} & K_1^{(2)}\\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)}\end{pmatrix},\quad \varphi=\begin{pmatrix}\varphi^{(1)}\\ \varphi^{(2)}\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}.$$

В силу условий (i)—(ii) имеем $\delta_1 \leqslant \det A(t) \leqslant \delta_1'$ для некоторых $\delta_1, \delta_1' > 0$. Перепишем систему (29), (30) в виде векторного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \tag{31}$$

где оператор $\hat{K}$ задается формулой

$$(\hat{K}\varphi)(t) = A^{-1}(t)(K\varphi)(t), \quad \varphi \in C[0,T], \quad \hat{\psi}(t) = A^{-1}(t)\psi(t), \quad t \in [0,T].$$

В силу лемм 1—3 $\hat{K}\colon C[0,T] \to H_0^{\widetilde{\omega}}[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор, и по лемме 5 уравнение (31) имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$, причем выполнена оценка

$$\big\|\varphi; [0,T]\big\|^0 \leqslant C\big\|\psi; [0,T]\big\|^0.$$

Следовательно, справедлива оценка (28). Кроме того, из вида уравнений (29), (30), условий на ψ_1, ψ_2 и лемм 1—3 следует, что $\varphi^{(s)}(0) = 0$. □

4. Доказательство теоремы 1. Решение задачи (3)—(5) ищем в виде потенциалов простого слоя (11), где плотности $\varphi^{(s)} \in C_0[0,T]$, $s = 1,2$, подлежат определению. Для любых $\varphi^{(s)} \in C[0,T]$, $s = 1,2$, функции $u^{(s)}$, $s = 1,2$, являются регулярными решениями уравнений (3) и удовлетворяют начальным условиям (4). Подставляя (11) в условия сопряжения (5), получаем систему интегральных уравнений Вольтерры (12), (13) для отыскания неизвестных плотностей $\varphi^{(s)}$, $s = 1,2$. Из леммы 6 следует, что система (12), (13) имеет единственное решение $\varphi^{(s)} \in C_0[0,T]$, $s = 1,2$. Поэтому существует решение задачи (3)—(5), которое имеет вид (11), где $\varphi^{(s)}$, $s = 1,2$,— решение системы (12), (13).

Докажем единственность регулярного решения задачи (3)—(5). Пусть $v^{(s)} \in C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^{(s)})$, $s = 1,2$,— решение контактной задачи с однородными условиями сопряжения

$$\begin{gathered} L^{(s)}v^{(s)}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1,2; \\ v^{(1)}(x,0) = 0, \quad x \leqslant g(0); \qquad v^{(2)}(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0); \\ \partial_x^k(u^{(1)} - u^{(2)})(g(t),t) = 0, \quad k = 0,1, \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{32}$$

Одновременно каждая из функций $v^{(s)}$, $s = 1,2$, является регулярным решением соответствующей второй начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} L^{(s)}v^{(s)} = 0, \quad (x,t) \in \Omega^{(s)}, \quad s = 1,2; \\ v^{(s)}(x,0) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}^{(s)} \cap \{t = 0\}; \\ \partial_x v^{(s)}(g(t),t) = \overline{\psi}(t), \quad t \in [0,T], \end{gathered}$$

где $\overline{\psi} \in C_0[0,T]$. Эти решения однозначно определяются в виде потенциалов простого слоя

$$v^{(s)}(x,t) = \int_0^t \Gamma^{(s)}(x,t;g(\tau),\tau)\overline{\varphi}^{(s)}(\tau)d\tau, \quad s = 1,2 \tag{33}$$

(см. [14, 15]), где $\overline{\varphi}^{(s)} \in C_0[0,T]$, $s = 1,2$, являются единственными решениями интегральных уравнений Вольтерры второго рода

$$(-1)^{s+1}\frac{\overline{\varphi}^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t),t)} + \int_0^t \partial_x\Gamma^{(s)}(g(t),t;g(\tau),\tau)\overline{\varphi}^{(s)}(\tau)d\tau = \overline{\psi}(t), \quad s = 1,2.$$

Подставляя потенциалы (33) в условия сопряжения (32), получим, что одновременно в силу леммы 6 пара функций $\overline{\varphi}^{(s)}$, $s = 1, 2$, является единственным решением системы интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^{(s+1)}\int_{0}^{t}\Gamma^{(s)}\big(g(t),t;g(\tau),\tau\big)\overline{\varphi}^{(s)}(\tau)d\tau = 0;$$

$$\sum_{s=1}^{2}\left[\frac{\overline{\varphi}^{(s)}(t)}{2a_2^{(s)}(g(t),t)} + (-1)^{(s+1)}\int_{0}^{t}\partial_x\Gamma^{(s)}\big(g(t),t;g(\tau),\tau\big)\overline{\varphi}^{(s)}(\tau)d\tau\right] = 0, \quad t\in[0,T].$$

Отсюда следует, что $\overline{\varphi}^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$. Следовательно, $v^{(s)} = 0$, $s = 1, 2$.

Из результатов работы [23] о свойствах потенциала простого слоя и оценок (28) следует, что найденное решение принадлежит классу $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}^s)$ и выполнены оценки (14). Теорема доказана.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору Е. А. Бадерко за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадерко Е. А.* Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения// Диффер. уравн. — 1992. — *28*, № 1. — С. 17–23.
2. *Бадерко Е. А.* Метод теории потенциала в краевых задачах для $2m$-параболических уравнений в полуограниченной области с негладкой боковой границей// Диффер. уравн. — 1988. — *24*, № 1. — С. 3–9.
3. *Бадерко Е. А.* О параболической краевой задаче в области простого вида// Диффер. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 17–29.
4. *Бадерко Е. А.* О «почти» модельной краевой задаче для параболического уравнения высокого порядка// Диффер. уравн. — 1987. — *23*, № 1. — С. 22–29.
5. *Бадерко Е. А.* О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами// Диффер. уравн. — 1976. — *12*, № 10. — С. 1781–1792.
6. *Бадерко Е. А.* О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя// Докл. АН СССР. — 1985. — *283*, № 1. — С. 11–13.
7. *Бадерко Е. А.* Решение задачи с косой производной для параболического уравнения методом граничных интегральных уравнений// Диффер. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 14–20.
8. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 4. — С. 379–381.
9. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости// Диффен. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 198–208.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.. — Наука, 1977.
11. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини// Деп. ВИНИТИ РАН. — 16.04.92. — № 1294-В92..
12. *Камынин Л. И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини—Гельдера// Сиб. мат. ж. — 1970. — *11*, № 5. — С. 1017–1045.
13. *Камынин Л. И.* К теории Жевре для параболических потенциалов, VI// Диффер. уравн. — 1972. — *8*, № 6. — С. 1015–1025.
14. *Камынин Л. И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка// Сиб. мат. ж.. — *15*, № 4. — С. 806–834.
15. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка// Сиб. мат. ж. — 1973. — *14*, № 1. — С. 86–110.
16. *Камынин Л. И.* Приложение параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики// Диффер. уравн. — 1990. — *26*, № 5. — С. 829–841.
17. *Тверитинов В. А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 02.09.88. — № 6850-В88..

18. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюлл. МГУ. Сек. А. — 1938. — *1*, № 8. — С. 1–25.
19. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
20. *Черепова М. Ф.* О задаче Бицадзе—Самарского для параболического уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1986. — № 4. — С. 74–76.
21. *Шевелева В. Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности// Диффер. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 172–174.
22. *Шевелева В. Н.* Об одной задаче контактной теплопроводности, II// Диффер. уравн. — 1992. — *28*, № 4. — С. 729–730.
23. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze–Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Compl. Var. Ellipt. Equ. — 2019. — *64*, № 5. — P. 753–765.

Сахаров Сергей Игоревич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
E-mail: `ser341516@yandex.ru`