ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 215 (2022). С. 32–39
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-215-32-39

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ КИЛЛИНГА

© 2022 г. **Ж. О. АСЛОНОВ**

Аннотация. Статья является кратким обзором работ по теории векторных полей Киллинга, заданных на римановых многообразиях постоянной и неотрицательной кривизны.

Ключевые слова: векторное поле, векторное поле Киллинга, орбиобразие, скобка Ли, слоение, риманово слоение.

ON THE GEOMETRY OF ORBITS OF KILLING VECTOR FIELDS

© 2022 **Zh. O. ASLONOV**

Abstract. This paper is a brief review of results in the theory of Killing vector fields defined on Riemannian manifolds of constant and nonnegative curvature.

Keywords and phrases: vector field, Killing vector field, orbifold, Lie bracket, foliation, Riemannian foliation.

AMS Subject Classification: 58K45, 17B66, 32S65

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени, играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. Эти преобразования порождают так называемое векторное поле Киллинга. Векторные поле Киллинга в физике указывают на симметрию физической модели и помогают найти сохраняющиеся величины, такие как энергия, импульс. В теории относительности, например, если метрический тензор не зависит от времени, то в пространстве-времени существует времениподобный вектор Киллинга, с которым связана сохраняющаяся величина — энергия гравитационного поля. Название дано в честь немецкого математика В. Киллинга (1847–1923), открывшего группы Ли и многие их свойства параллельно с Софусом Ли.

Геометрию векторных полей Киллинга изучали многие ученые: W. Killing, В. Н. Берестовский, T. Adachi, Ю. Г. Никоноров, М. О. Катанаев, C. Beetle, M. Gurses, S. Maeda, S. Z. Nemeth, K. Nomizu, T. Oprea, K. Yano, S. Kobayashi и др.

В целом ряде областей физики, например, в теории электромагнитного поля, в теории тепла, в статической физике и в теории оптимального управления, нужно рассматривать не векторные поля, а семейство векторных полей. В этом случае основным объектом исследования является орбита семейства векторных полей. В настоящее время изучение геометрических и топологических свойств орбит векторных полей является одной из актуальных задач современной геометрии. Изучению геометрии орбит семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с его важностью в различных разделах математики, такие как теория оптимального управления, дифференциальные игры и геометрия сингулярных слоений.

Работа выполнена при поддержке гранта фундаментальных исследований (проект Ф3-2020092531).

В этой работе приведен обзор работ по геометрии и топологии орбит векторных полей Киллинга. Всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞, если не указан конкретный класс.

Пусть D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Известно, что разбиение многообразия на орбиты является сингулярным слоением. Напомним определение сингулярного слоения (см. [19]).

Подмножество L многообразия M называется *слоем*, если

(i) существует такая дифференциальная структура σ на L, что гладкое многообразие (L,σ) является k-мерным погруженным подмногообразием многообразия M;

(ii) для локально связного топологического пространства N и для такого непрерывного отображения $f\colon N\to M$, что $f(N)\subset L$, отображение $f\colon N\to (L,\sigma)$ непрерывно.

Разбиение F многообразия M на слои называется гладким (класса C^r) сингулярным слоением (слоением с особенностями), если выполнены следующие условия:

(i) для каждой точки $x\in M$ существует такая C^r-карта (ψ,U), содержащая точку x, что $\psi(U)=V_1\times V_2$, где V_1 — окрестность начала в $\mathbb{R}^k$, V_2 — окрестность начала в $\mathbb{R}^{n-k}$, k — размерность слоя, проходящего через точку x;

(ii) $\psi(x)=(0,0)$;

(iii) для каждого слоя L, удовлетворяющего условию $L\cap U\neq\varnothing$, имеет место соотношение $L\cap U=\psi^{-1}(V_1\times l)$, где $l=\{v\in V_2:\psi^{-1}(0,v)\in L\}$.

Если размерности слоев слоения с особенностями одинаковы, то оно является регулярным слоением в смысле определения, данного в [20].

С геометрической точки зрения, важными классами слоений являются римановы слоения. Слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остаётся ортогональной во всех своих точках ко всем слоям F (см. [18]).

Римановы слоения без особенностей впервые были введены и изучены Рейнхартом в [18]. Римановы слоения изучены многими математиками (см. [12–14, 16, 21]).

Римановы слоения с особенностями были введены и изучены в работах P. Molino [15] и А. Нарманова [6, 8].

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n.

Определение 1. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $t\to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий.

Пример 1. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$ векторные поля

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для точки (x_0,y_0) преобразование $t\to X^t(x)$ для этих векторных полей имеют вид соответственно

$$\begin{cases}x(t)=x_0+t,\\ y(t)=y_0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x(t)=x_0,\\ y(t)=y_0+t;\end{cases}\qquad \begin{cases}x(t)=x_0\sin t+y_0\cos t,\\ y(t)=x_0\cos t-y_0\sin t.\end{cases}\quad . \tag{1}$$

Первые два отображение являются параллельными переносами по направлению осей Ox и Oy соответственно, а последнее — вращением вокруг начала координат. Указанные отображения являются изометриями евклидовой плоскости, поэтому соответствующие векторные поля являются векторными полями Киллинга.

Пример 2. В трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ существует шесть линейно независимых полей Киллинга над полем вещественных чисел:

$$\begin{aligned}&X_1=\frac{\partial}{\partial x}, && X_2=\frac{\partial}{\partial y}, && X_3=\frac{\partial}{\partial z},\\ &X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}, && X_5=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z}, && X_6=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Группы преобразований, порожденные векторными полями X_1, X_2, X_3, являются группами параллельных переносов по направлению осей Ox, Oy и Oz соответственно, а последние три являются группами вращений вокруг осей Ox, Oy и Oz соответственно. Последние три поля являются также полями Киллинга на сфере S^2.

Пример 3. Рассмотрим трехмерную сферу S^3 в $\mathbb{R}^4 \cong x\mathbb{C}^2$ с индуцированной метрикой. Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — точка на сфере S^3. С помощью комплексных чисел трехмерную сферу можно записать следующим образом:

$$S^3 = \{(z_1, z_2); |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

где $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ векторное поле Киллинга

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Легко проверить, что заданное векторное поле касается сферы. Для точки $(z_1, z_2) \in S^3$ интегральная кривая векторного поля X, выходящая из точки (z_1, z_2) при $t = 0$, имеет вид

$$\gamma(t) = \{(z_1e^{it}, z_2e^{it}),\ -\infty < t < \infty\}.$$

Очевидно, что интегральная кривая $\gamma(t)$ является окружностью. Семейство интегральных кривых векторного поля X порождает гладкое расслоение, которое называется расслоением Хопфа.

Векторное поле Киллинга обладают следующими свойствами (см. [4]):

(i) скобка Ли двух полей Киллинга является полем Киллинга;

(ii) линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел является полем Киллинга.

Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел.

Приведем некоторые известные свойства векторных полей Киллинга.

Теорема 1 (см. [5, с. 224]). *Алгебра Ли $K(M)$ киллинговых векторных полей связного риманова многообразия M имеет размерность не более $\frac{1}{2}n(n+1)$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, то M — многообразие постоянной кривизны.*

Теорема 2 (см. [4]). *Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль интегральной кривой векторного поля Киллинга.*

Теорема 3 (см. [4]). *Пусть X — векторное поле Киллинга на римановом многообразии (M, g). Интегральные кривые поля X являются геодезическими линиями тогда и только тогда, когда длина векторного поля $|X|$ постоянна на M.*

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, которая дает необходимое и достаточное условие того, чтобы данное векторное поле в евклидовом пространстве было киллинговым.

Теорема 4. *Векторное поле*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

в $\mathbb{R}^n$ является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняется условия

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Как показывает пример 1, интегральные кривые векторного поля Киллинга не всегда являются геодезическими линиями. Теорема 4 утверждает, что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями.

В. Н. Берестовский и Ю. Г. Никоноров доказали (см. [4]), что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями.

Следующее утверждение показывает, что на двумерном круговом цилиндре интегральные кривые векторного поля Киллинга всегда являются геодезическими линиями (см. [3]).

Теорема 5. *Интегральная кривая каждого гладкого векторного поля Киллинга на двумерном круговом цилиндре является геодезической линией.*

Замечание 1. Как показывает следующий пример, интегральные кривые векторного поля Киллинга на трехмерном круговом цилиндре не обязаны быть геодезическими линиями.

Пример 4. Пусть цилиндр $M = S^2 \times \mathbb{R}^1$ вложен в $\mathbb{R}^4$ с помощью следующих параметрических уравнений
$$x = \cos u \sin v, \quad y = \cos u \cos v, \quad z = \sin u, \quad w = t.$$
Рассмотрим векторное поле
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$
в $\mathbb{R}^4$. По теореме 5 можно проверить, что рассматриваемое поле является полем Киллинга в $\mathbb{R}^4$. Кроме того, это поле касается M. Поэтому поле X является векторным полем Киллинга на M. Интегральные кривые, проходящие через точки (x_0, y_0, z_0, w_0) поля X, имеют вид
$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \quad z(t) = z_0, \quad w(t) = w_0.$$
Если $z_0 \neq 0$, то эта кривая не является большой окружностью на S^2. Следовательно, она не является геодезической линией.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 6 (см. [11]). *Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей Киллинга. Предположим, что орбиты семейства D имеют размерности, меньшие n. Тогда разбиение многообразия на орбиты является сингулярным римановым слоением.*

Рассмотрим векторные поля X и Y в $\mathbb{R}^4$, которые в декартовых координатах имеют следующий вид:
$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}, \quad Y = z\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial w}.$$
Согласно приведенной выше теореме 6 легко проверить, что эти поля являются векторными полями Киллинга. Обозначим через S^3 единичную сферу с индуцированной метрикой из $\mathbb{R}^4$, которая задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Нетрудно проверить, что эти векторные поля касаются сферы S^3. Значит, эти поля являются векторными полями Киллинга на сфере S^3.

Теорема 7. *Семейство $D = \{X, Y\}$ вполне интегрируемо. Регулярные слои слоения F являются двумерными торами. Множество сингулярных слоев состоит из двух окружностей.*

Замечание 2. Векторные поля X и Y не имеют критических точек. Так как каждое векторное поле, касательное к двумерной сфере, обязательно имеет критическую точку на ней, орбита этого семейства не может быть двумерной сферой (см. [1]).

Замечание 3. Как следует из результатов работы [?], если семейство вполне интегрируемо, то орбита совпадает с интегральным подмногообразием.

Следующая теорема из [11] даёт полную классификацию геометрий орбит векторных полей Киллинга в трёхмерном евклидовом пространстве.

Теорема 8. *Пусть D — семейство векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^3$. Тогда орбиты этого семейства порождают слоение F, которое имеет один из следующих семи типов*:

1. *слоение F состоит из параллельных прямых*;
2. *слоение F состоит из концентрических окружностей, лежащих на параллельных плоскостях и прямой, которая является множеством центров*;

3. *слоение F состоит из винтовых линий, лежащих на концентрических круговых цилиндрах, одна из которых является осью цилиндров*;
4. *слоение F состоит из параллельных плоскостей*;
5. *слоение F состоит из концентрических сфер и точки* (*центр сфер*);
6. *слоение F состоит из концентрических круговых цилиндров и прямой* (*ось цилиндров*);
7. *слоение F имеет только один слой $\mathbb{R}^3$.*

В доказательстве теоремы будет использовано следующее предложение.

Теорема 9 (см. [7])**.** *Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии M, γ_0 — геодезическая, идущая из некоторой точки x_0 в некоторую точку y_0, ортогональная к F. Тогда для каждой точки $x \in L(x_0)$ существует геодезическая γ, идущая из x в некоторую точку слоя $L(y_0)$, причем ортогональная к F и имеющая длину, равную длине γ_0.*

Также в [7] приведены подробные примеры орбит векторных полей Киллинга для каждого пункта теоремы 8. Перечислим их.

1. Рассмотрим семейство векторных полей D, состоящее из одного векторного поля
$$X = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - 3\frac{\partial}{\partial z}.$$
Нетрудно проверить, что векторное поле X является векторным полем Киллинга. Интегральные кривые векторного поля X порождают слоение, состоящее из параллельных прямых.
2. Пусть семейство D состоит из векторного поля
$$X = (1 - z)\frac{\partial}{\partial y} + (y - 4)\frac{\partial}{\partial z}.$$
Для векторного поля X выполняется условие теоремы 5, поэтому оно является векторным полем Киллинга. Слоение, порожденное интегральными кривыми векторного поля X, состоит из концентрических окружностей, лежащих на параллельных плоскостях. Векторное поле X порождает группу изометрий, которые являются вращениями вокруг прямой, состоящей из центров концентрических окружностей. Неподвижные точки заполняют прямую $y = 4$, $z = 1$.
3. Рассмотрим векторное поле
$$X = \left\{(3 + z)\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y} - (x - 1)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$
Интегральные кривые векторного поля X порождают слоение, состоящее из винтовых линий, лежащих на круговых цилиндрах и прямой, которая является осью цилиндров.
4. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(3 - z)\frac{\partial}{\partial y} + (y - 1)\frac{\partial}{\partial z},\ (2 + z)\frac{\partial}{\partial y} + (y - 7)\frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$
Нетрудно проверить, что каждое векторное поле из семейства D является векторным полем Киллинга. В этом случае орбиты семейства векторных полей D порождают слоение, состоящее из параллельных плоскостей.
5. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(3 - z)\frac{\partial}{\partial x} + (x - 1)\frac{\partial}{\partial z},\ (1 - x)\frac{\partial}{\partial y} + (y - 1)\frac{\partial}{\partial x}\right\}.$$
Непосредственной проверкой можно показать, что для данных векторных полей выполняются условия теоремы 5, поэтому они являются векторными полями Киллинга. Орбиты семейства D порождает слоение, которое состоит из концентрических сфер и точки $(1, 1, 3)$, точка $(1, 1, 3)$ является центром всех сфер.
6. Рассмотрим семейство, состоящее из двух векторных полей
$$D = \left\{(5 - z)\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}, \quad 2\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Группа изометрий, порожденная векторными полями из семейства векторных полей D, состоит из композиции сдвигов и вращений вокруг оси $z = 5$, $y = 0$. Если рассмотреть орбиту, проходящую через точку, отличную от точки прямой, то она является цилиндром. Если точка лежит на прямой, тогда сама прямая является орбитой.

7. Теперь приведем пример семейства киллинговых векторных полей, каждая орбита которого совпадает с $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим семейство

$$D = \left\{ -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z},\ (2-z)\frac{\partial}{\partial y} + (y-1)\frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля являются векторными полями Киллинга. Однопараметрическая группа преобразований векторных полей из D состоит из вращений вокруг двух скрещивающихся прямых: ось Oy и прямая $z = 2$, $y = 1$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -z & 0 & x \\ 0 & 2-z & y-1 \\ y-1 & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Третья строка матрицы A состоит из компонент векторного поля $[X, Y]$ и $\det A = 2x(1-y)$. Поэтому ранг матрицы A максимален во всех точках $\mathbb{R}^3$, кроме точек, лежащих на плоскостях $x = 0$ и $y = 1$. Следовательно, если точка p не лежит на этих плоскостях, то $\dim A_p(D) = 3$. Так как $\dim A_p(D) \leqslant \dim L(p)$, орбита $L(p)$ является трехмерным многообразием. Поэтому $L(p) = \mathbb{R}^3$.

В работе А. Нарманова и О. Касимова [17] исследованы структуры пространства слоев сингулярного слоения, которые порождаются орбитами векторных полей Киллинга.

Определение 2. Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии. Слоение F называется сингулярным римановым слоением с сечением,.если для каждой регулярной точки p множество $\sigma := \exp_p(H_pL)$ является полным погруженным подмногообразием, которое пересекает каждый слой ортогонально и в нем множество регулярных точек всюду плотно. Множество σ называется сечением.

Следующая теорема, доказанная в [17], является теоремой о достаточных условиях для того, чтобы слоение, порожденное орбитами векторных полей Киллинга, было слоением с сечением.

Теорема 10. *Пусть F — сингулярное слоение на $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что все сингулярные слои изолированы, а размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является римановым слоением с сечением.*

Теорема 11. *Пусть F — сингулярное риманово слоение $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга, где $n = 2, 3$. Предположим, что размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением.*

Во второй части статьи [17] доказано, что если орбиты векторных полей Киллинга порождают сингулярное риманово слоение с сечением, то множество орбит является гладким орбиобразием.

Обозначим через M связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Пусть U — открытое подмножество M, V — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и G — конечная группа C^r диффеоморфизмов V.

Карта орбиобразия в M — это набор из четырех элементов (U, V, G, φ), где $\varphi\colon V \to U$ — отображение, являющееся композицией двух отображений $\varphi := \tilde{\pi} \circ \pi$ где $\pi\colon V \to V/G$ — фактор-отображение на множество орбит, а $\tilde{\pi}\colon V/G \to V$ — произвольный гомеоморфизм.

Атласом класса C^r называется семейство карт $A = \{(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in J\}$ для которых выполнены условия:

(i) множество $\{(U_\alpha, \alpha \in J\}$ образует покрытие M;

(ii) для любых двух карт $(U_\alpha, V_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(U_\beta, V_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ из A, удовлетворяющих условию $U_\alpha \in U_\beta$, существует инъекция.

Максимальный атлас A класса C^r называется C^r-структурой дифференцируемого орбиобразия на M, и пара (M, A) называется дифференцируемым C^r-орбиобразием. Любой атлас класса C^r

однозначно определяет содержащий его максимальный атлас того же класса. Число n называется размерностью орбиобразия (M, A).

Иначе можно сказать, что орбиобразие — это топологическое пространство, локально гомеоморфное фактормножеству открытого подмножества евклидова пространства по действию конечной группы.

В работе А. Нарманова и О. Касимова [17] в случае сингулярного слоения, доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть F — сингулярное слоение в $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением. Тогда множество слоев F (множество орбит) является орбиобразием.*

А. Нармановым и С. Саитовой (см. [9]) введено понятие векторного поля Киллинга типа «перенос» или «вращение» и получены необходимые и достаточные условия коммутирования векторных полей Киллинга, приведена классификация орбит векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах, а также изучены различные свойства и необходимые и достаточные условия коммутирующих векторных полей Киллинга в евклидовых пространствах.

Доказаны следующие теоремы (см. [9]).

Теорема 13. *Два векторных поля Киллинга X, Y, одно из которых порождает «вращение», а второе — «перенос», коммутируют тогда и только тогда, когда направление «переноса» поля Y параллельно подпространству N неподвижных точек поля X.*

Теорема 14. *Пусть X, Y — векторные поля Киллинга в $\mathbb{R}^n$, порождающие «вращения», и N_1, N_2 — множества неподвижных (особых) точек X, Y соответственно. Векторные поля X, Y коммутируют тогда и только тогда, когда либо $\dim N_1 = \dim N_2 = 0$ и $N_1 = N_2$, либо $\mathbb{R}^n = N_1 \otimes N_2$.*

Далее в работе исследована задача о классификации орбит семейства неприводимых векторных полей Киллинга.

Определение 3. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве типа «вращение» называется неприводимым относительно данной системы координат, если множество неподвижных (особых) точек этого векторного поля является $(n-2)$-мерной координатной плоскостью. Векторное поле Киллинга в евклидовом пространстве типа «перенос» называется неприводимым, если направление переноса параллельно одной из координатных осей.

Приведем теорему о геометрии орбит векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве при предположении, что семейство $B(D)$ состоит из неприводимых вращений и переносов (см. [17]).

Теорема 15. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задано семейство D векторных полей Киллинга, а базисное семейство состоит из m неприводимых векторных полей. Тогда орбита L_p произвольной точки $p \in \mathbb{R}^n$ является одним из следующих подмногообразий евклидова пространства*:

(i) *k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$;*
(ii) *k-мерным тором $T^k = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$, где $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, [n/2]\}$;*
(iii) *k-мерной сферой S^k, где $0 \leqslant k \leqslant \min\{m, n-1\}$;*
(iv) *k-мерным торическим цилиндром $T^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min\{m, [n/2]\}$;*
(v) *k-мерным сферическим цилиндром $S^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leqslant k \leqslant \min\{m, n-1\}$.*

В [9] изучается геометрия некоторых субмерсий, которые возникают при изучении геометрии векторных полей Киллинга, а именно, рассматривается семейство D, состоящее из n векторных полей Киллинга в $\mathbb{R}^n$, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n = 2k + l$:

$$Y_i = \begin{cases} -x_i \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{если } i \text{ четно и } 1 < i \leqslant 2k, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Показано, что базис минимальной алгебры $A(D)$ состоит из $n+k$ векторных полей

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X_{n+s} = -x_{2s}\frac{\partial}{\partial x_{2s-1}} + x_{2s-1}\frac{\partial}{\partial x_{2s}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, \ldots, k.$$

Показано, что орбита семейства D для каждой точки совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ и определена следующая субмерсия $\pi\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$:

$$\pi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(\ldots(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)\ldots)),$$

где O — начало координат в $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975.
2. *Аслонов Ж. О.* Геометрия орбит векторных полей// Докл. АН РУз. — 2011. — № 5. — С. 5–7.
3. *Аслонов Ж. О. Нарманов А.* Геометрия орбит векторных полей Киллинга// Узбек. мат. ж. — 2012. — № 2. — С. 77–85.
4. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 3. — С. 497–514.
5. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
6. *Нарманов А. Я.* О дифференциальной геометрии слоений с особенностями// Докл. АН РУз. — 1996. — № 3. — С. 6–7.
7. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множеств управляемости симметричных систем управления// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
8. *Нарманов А. Я.* Структура орбит систем векторных полей и их предельные свойства/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук — Ташкент, 1998.
9. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии векторных полей Киллинга// Докл. АН РУз. — 2013. — № 5. — С. 3–5.
10. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
11. *Narmanov A. Ya., Aslonov J. O.* On the geometry of the orbits of Killing vector fields/ `arXiv: 1203.3690 [math.DG]`.
12. *Hermann R.* The differential geometry of foliations, I// Ann. Math. — 1960. — *72*. — P. 445–457.
13. *Hermann R.* The differential geometry of foliations, II// J. Math. Mech. — 1962. — *11*. — P. 305–315.
14. *Molino P.* Orbit-like foliations// in: Geometric Study of Foliations. — Tokyo: World Scientific, 1993. — P. 97–119.
15. *Molino P.* Riemannian Foliations. — Boston: Birkhäuser, 1988.
16. *Morgan A.* Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension// Proc. Am. Math. Soc. — 1976. — *58*. — P. 255–261.
17. *Narmanov A. Ya., Qosimov O. Y.* On the geometry of the set of orbits of Killing vector fields on Euclidean space// J. Geom. Symm. Phys. — 2020. — *55*. — P. 39–49.
18. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*. — P. 119–132.
19. *Stefan P.* Accessible sets, orbits and foliations with singularities// Proc. London Math. Soc. (3). — 1974. — *29*. — P. 699–713.
20. *Tamura I.* Topology of Foliations: An Introduction. — Am. Math. Soc., 2006.
21. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.
22. *Tursunov B. A.* On the geometry of Riemannian submersions over orbit of Killing vector fields// Bull. Math. Stat. Res. — 2016. — *4*, № 2. — P. 102–107.

Аслонов Жасурбек Орзиевич
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `jasurbek05@gmail.com`